微分方程总结

xyfJASON

0 概述

拿到一个一阶微分方程，先判断类型：

1. 把 y' 写成 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，然后往乘除化，看能不能分离变量
2. 看 x, y 能否齐次
3. 把分开的 $\mathrm{d}x, \mathrm{d}y$ 放在一起，写成 $y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，看是否一阶线性或者伯努利
4. 能否凑成全微分，能否找到合适的积分因子（有 $u\mathrm{d}v - v\mathrm{d}u$ 的特别注意）
5. 灵活处理

一些技巧：

- 视 x 为 y 的函数
- 一阶线性微分方程通解中的不定积分可以换成积分上限函数（如从 0 积到 x），在初值问题下有时有好处（想一想推导过程，这么干是对的）

1 可分离变量的微分方程

若微分方程 $y' = f(x,y)$ 可写作

$$g(y)\mathrm{d}y = h(x)\mathrm{d}x$$

称该方程为可分离变量的微分方程，其通解为：

$$\int g(y)\mathrm{d}y = \int h(x)\mathrm{d}x + C$$

其中，C 为任意常数.

> 例一：$e^{x^2+y^2}y' = \frac{x}{y}$.

> 例二：$y(1+x^2)\mathrm{d}x - x(1+y^2)\mathrm{d}y = 0$.

2 齐次微分方程

若微分方程 $y' = f(x, y)$ 可写作

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \varphi(\frac{y}{x})$$

则称该方程为齐次微分方程. 解法为:

令 $u = \frac{y}{x}$，则 $y = xu$，$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = u + x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$. 代入上述方程得:

$$\frac{\mathrm{d}u}{\varphi(u) - u} = \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

为可分离变量的微分方程.

> 例一: $x(\ln x - \ln y)\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x = 0$.

> 例二: $xy' + y = 2\sqrt{xy}$.

> 例三: $\begin{cases} 2x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x = 2y^2\mathrm{d}y \\ y(0) = 1 \end{cases}$.

3 一阶线性微分方程

形如

$$y' + P(x)y = Q(x)$$

的微分方程称为一阶线性微分方程. 其通解公式为:

$$y = e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + C\right)$$

推导:

- 一阶线性齐次微分方程分离变量即解
- 一阶线性非齐次微分方程的推导:
  - 常数变易法
  - 两边同时乘函数 $u(x)$ 去凑微分（重点记住这个方法的思想！）:

    $$u(x)\mathrm{d}y + P(x)u(x)y\mathrm{d}x = u(x)Q(x)\mathrm{d}x$$

    想让等号左侧部分能写为全微分，于是要求 $\mathrm{d}u(x) = P(x)u(x)\mathrm{d}x$，解得 $u(x,y)$ 的一个解为:

    $$u(x) = e^{\int P(x)\mathrm{d}x}$$

    于是有:

    $$\begin{aligned}&\mathrm{d}\left(ye^{\int P(x)\mathrm{d}x}\right) = Q(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\\&ye^{\int P(x)\mathrm{d}x} = \int Q(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + C\\&y = e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + C\right)\end{aligned}$$

> 例一: $y'\tan x - y = 5$.

> 例二: $y' = \frac{y}{x+\sin y}$.

4 伯努利方程

形如

$$y' + P(x)y = Q(x)y^{\alpha}$$

的微分方程称为伯努利方程. 解法为：将方程化为

$$\begin{aligned} y^{-\alpha}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + P(x)y^{1-\alpha} &= Q(x) \\ \frac{1}{1-\alpha}\cdot\frac{\mathrm{d}y^{1-\alpha}}{\mathrm{d}x} + P(x)y^{1-\alpha} &= Q(x) \end{aligned}$$

令 $z = y^{1-\alpha}$，则

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} + (1-\alpha)P(x)z = (1-\alpha)Q(x)$$

为一阶线性微分方程.

> 例一：$xy' + y = 2\sqrt{xy}$.

> 例二：$\begin{cases} 2x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x = 2y^2\mathrm{d}y \\ y(0) = 1 \end{cases}$.

5 全微分方程与积分因子

把一阶显式方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x,y)$$

改写为:

$$M(x,y)\mathrm{d}x + N(x,y)\mathrm{d}y = 0$$

的形式，若存在一个函数 $u(x,y)$ 使得

$$M(x,y)\mathrm{d}x + N(x,y)\mathrm{d}y = \mathrm{d}u(x,y)$$

则称其为全微分方程. 其通解为

$$u(x,y) = C$$

当 $M(x,y)$ 和 $N(x,y)$ 在单连通区域 G 内有连续偏导数时，方程 $M(x,y)\mathrm{d}x + N(x,y)\mathrm{d}y = 0$ 能够成为全微分方程的充要条件是:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

在区域 G 内恒成立。此时，该全微分方程的通解为:

$$u(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} M(x,y)\mathrm{d}x + N(x,y)\mathrm{d}y = C$$

一些非全微分方程，可通过等式两侧同时乘以一个函数化为全微分方程，该函数称为积分因子。

常见的对于 $u\mathrm{d}v - v\mathrm{d}u$ 而言的 5 种积分因子:

- $\frac{1}{u^2}$: $\frac{u\mathrm{d}v - v\mathrm{d}u}{u^2} = \mathrm{d}\left(\frac{v}{u}\right)$.
- $\frac{1}{v^2}$: $\frac{u\mathrm{d}v - v\mathrm{d}u}{v^2} = \mathrm{d}\left(-\frac{u}{v}\right)$.
- $\frac{1}{uv}$: $\frac{u\mathrm{d}v - v\mathrm{d}u}{uv} = \frac{\mathrm{d}v}{v} - \frac{\mathrm{d}u}{u} = \mathrm{d}\left(\ln\left|\frac{v}{u}\right|\right)$.
- $\frac{1}{u^2+v^2}$: $\frac{u\mathrm{d}v - v\mathrm{d}u}{u^2+v^2} = \frac{\mathrm{d}\left(\frac{v}{u}\right)}{1+\left(\frac{v}{u}\right)^2} = \mathrm{d}\left(\arctan\frac{v}{u}\right)$.
- $\frac{1}{u^2-v^2}$: $\frac{u\mathrm{d}v - v\mathrm{d}u}{u^2-v^2} = \frac{\mathrm{d}\left(\frac{v}{u}\right)}{1-\left(\frac{v}{u}\right)^2} = \frac{1}{2}\mathrm{d}\left(\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right|\right)$.

> 例一: $y(1+x^2)\mathrm{d}x - x(1+y^2)\mathrm{d}y = 0.$

> 例二: $xy' + y = 2\sqrt{xy}.$

例三：$\begin{cases} 2x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x = 2y^2\mathrm{d}y \\ y(0) = 1 \end{cases}$.

6 可降阶高阶微分方程

6.1 $y^{(n)}(x) = f(x)$ 型

- 解法：连续积分即可求得通解.

6.2 $y'' = f(x, y')$ 型

- 特点：缺少 y.
- 解法：设 $p(x) = y'$，则 $y'' = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$，代入方程得：
$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = f(x, p)$$
若该方程通解为：$p = p(x, C_1)$，则 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p(x, C_1)$，积分得：
$$y = \int p(x, C_1)\mathrm{d}x + C_2$$

6.3 $y'' = f(y, y')$ 型

- 特点：缺少 x.
- 解法：设 $p(y) = y'$，则 $y'' = \frac{\mathrm{d}p(y)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$，代入方程得：
$$p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} = f(y, p)$$
若该方程通解为：$p = p(y, C_1)$，则 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p(y, C_1)$，分离变量：
$$\frac{\mathrm{d}y}{p(y, C_1)} = \mathrm{d}x$$
积分得：
$$\int \frac{\mathrm{d}y}{p(y, C_1)} = x + C_2$$

> 例一：$y'' = (1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}$.

> 例二：$\begin{cases} y\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} + p = 0 \\ p(1) = \frac{1}{2} \end{cases}$.

例三：$yy'' + 1 = y'^2$.

7 常系数齐次线性微分方程

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}y'+a_ny=0$$

特征方程为:

$$\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\lambda+a_n=0$$

讨论特征根:

- 单重实根: $\lambda=\alpha$，则 $y=e^{\alpha x}$;
- k 重实根: $\lambda=\alpha$，则 $y=e^{\alpha x},\quad xe^{\alpha x},\quad \cdots,\quad x^{k-1}e^{\alpha x}$;
- 单重共轭复根: $\lambda=\alpha\pm\beta i$，则 $y=e^{\alpha x}\cos\beta x,\quad e^{\alpha x}\sin\beta x$;
- k 重共轭复根: $\lambda=\alpha\pm\beta i$，则 $y=\begin{cases}e^{\alpha x}\cos\beta x, & xe^{\alpha x}\cos\beta x, & \cdots, & x^{k-1}e^{\alpha x}\cos\beta x\\ e^{\alpha x}\sin\beta x, & xe^{\alpha x}\sin\beta x, & \cdots, & x^{k-1}e^{\alpha x}\sin\beta x\end{cases}$.

> 例一: $y^{(5)}+y^{(4)}+2y'''+2y''+y'+y=0.$

8 常系数非齐次线性微分方程

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}y'+a_ny=f(x)$$

8.1 $f(x)=e^{\lambda x}P_m(x)$ 型

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}y'+a_ny=e^{\lambda x}P_m(x)$$

特征方程为：

$$r^n+a_1r^{n-1}+\cdots+a_{n-1}r+a_n=0$$

若 λ 是特征方程的 k 重根，则将特解设为：

$$y^*=x^ke^{\lambda x}R_m(x)$$

8.2 $f(x)=e^{\lambda x}\left(Q_h(x)\cos\omega x+H_s(x)\sin\omega x\right)$ 型

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}y'+a_ny=e^{\lambda x}\left(Q_h(x)\cos\omega x+H_s(x)\sin\omega x\right)$$

特征方程为：

$$r^n+a_1r^{n-1}+\cdots+a_{n-1}r+a_n=0$$

若 $\lambda+\omega i$ 是特征方程的 k 重根，则将特解设为：

$$y^*=x^ke^{\lambda x}\left(R_m^{(1)}(x)\cos\omega x+R_m^{(2)}(x)\sin\omega x\right)$$

其中，$R_m^{(1)}(x),R_m^{(2)}(x)$ 是 $m=\max\{h,s\}$ 次实多项式。

> 例一：$y''-5y'+6y=xe^{2x}$.

> 例二：$y'''-3y''+3y'-y=e^{x}$.

> 例三：$y''+2y'+5y=5e^{-x}\cos 2x$.

9 欧拉方程

形如

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} x y' + a_n y = f(x)$$

的方程称为欧拉方程，其中 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 为实常数。

解法：做变换 $\begin{cases} x = e^t & \text{或} \quad t = \ln x & , x > 0 \\ x = -e^t & \text{或} \quad t = \ln(-x) & , x < 0 \end{cases}$ （下面只讨论 $x > 0$ 的情形），则：

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \\
&\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right) = \frac{1}{x^2}\left(\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} - \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right) \\
&\frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{1}{x^2}\left(\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} - \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)\right] = \frac{1}{x^3}\left(\frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}t^3} - 3\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} + 2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right) \\
&\cdots
\end{aligned}$$

即：

$$\begin{aligned}
&x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = Dy \\
&x^2\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} - \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = D(D-1)y \\
&x^3\frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3} = \frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}t^3} - 3\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} + 2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = D(D-1)(D-2)y \\
&\cdots \\
&x^n\frac{\mathrm{d}^ny}{\mathrm{d}x^n} = D(D-1)(D-2)(D-n+1)y
\end{aligned}$$

代入欧拉方程得到常系数线性微分方程，解之即可。

> 例一：$x^3y''' + x^2y'' - 4xy' = \ln x.$