无穷级数题型概览

xyfJASON

1 常数项级数审敛法

1.1 前置知识

1. 等比级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$，当 $|q|<1$ 时收敛于 $\frac{1}{1-q}$，当 $|q|\geq 1$ 时发散；
2. 调和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散；
3. p 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$，当 $p>1$ 时收敛，当 $p\leq 1$ 时发散；
4. **级数收敛的必要条件**：若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n=0$；
5. **正项级数**收敛的充要条件：部分和数列 $\{S_n\}$ 有界。

- 比较审敛法：

  设正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 满足 $u_n\leq v_n$，则若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛；若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散。

  极限形式：设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 均为正项级数，且 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n}=\mu$，则：

  - 当 $0<\mu<+\infty$ 时，两级数敛散性一致；
  - 当 $\mu=0$ 时，若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛；
  - 当 $\mu=+\infty$ 时，若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散。

- 比值审敛法（达朗贝尔判别法）：

  设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项级数，且 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}=\rho$，则：

  - 当$\rho<1$ 时，级数收敛；
  - 当 $\rho>1$（或 $\rho=+\infty$）时，级数发散；
  - 当 $\rho=1$ 时，级数可能收敛，可能发散。

  一般形式：$\exists N\in\mathbb{N}$，当 $n>N$ 时，若 $\frac{u_{n+1}}{u_n}\leq r<1$，则级数收敛；若 $\frac{u_{n+1}}{u_n}\geq 1$，则级数发散。

- 根值审敛法（柯西判别法）：

设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项级数，且 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \rho$，则：

- 当 $\rho < 1$ 时，级数收敛；
- 当 $\rho > 1$（或 $\rho = +\infty$）时，级数发散；
- 当 $\rho = 1$ 时，级数可能收敛，可能发散。

一般形式：$\exists N \in \mathbb{N}$，当 $n > N$ 时，若 $\sqrt[n]{u_n} \le r < 1$，则级数收敛；若 $\sqrt[n]{u_n} \ge 1$，则级数发散。

- 积分审敛法：

  设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项级数，函数 $f(x)$ 在区间 $[a, +\infty)$ $(a > 0)$ 上非负、连续、单调减少，且 $f(n) = u_n$ $(n > N)$，则无穷级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 与反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 的敛散性相同。

- 莱布尼茨判别法：

  如果交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$ 满足条件：

  - $u_n \ge u_{n+1}, \quad n = 1, 2, \cdots$
  - $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$

  则级数收敛，其和 $S \le u_1$，其余和的绝对值 $|r_n| \le u_{n+1}$.

1.2 一些经验

1. 含有加减常数/三角函数的，可以考虑**比较审敛法**进行放缩；
2. 形如 $\frac{1}{f(n)}$ 的，可以考虑放缩成 p 级数运用**比较审敛法的极限形式**；
3. 能向等价无穷小或泰勒展开联想的，可以尝试用**比较审敛法的极限形式**；
4. 含有 $n!$ 或以 n 为幂次的，可以考虑**比值审敛法**；
5. 含有以 n 为幂次的，可以考虑**根值审敛法**；
6. 把 n 换成 x，可以积分的，可以考虑**积分审敛法**；
7. 交错级数用**莱布尼茨判别法**；

   交错的却没有单调性的，变换后**展开为泰勒级数**。

1.3 例题

> 例一：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^2+1}}{2n^2+1}$.
>
> 分析：一看就让人有放缩的冲动，整体是 n 的 -1 次，所以尝试往小放去证明它发散。

> 例二：$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln^{10}n}$.
>
> 分析：形如 $\frac{1}{f(n)}$，尝试把 $\ln^{10}n$ 和 n^p 做比较。由于 $\ln^{10}n$ 终归会被 n^p 超过，所以我们把它放小，去证明发散，那么取 $p=1$ 即可。

> 例三：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\ln\ln n)^{\ln n}}$.
>
> 分析：形如 $\frac{1}{f(n)}$，尝试把 $(\ln\ln n)^{\ln n}=e^{\ln n\ln\ln\ln n}=n^{\ln\ln\ln n}$ 与 n^p 做比较。由于 $\ln\ln\ln n$ 终归会超过 p，所以我们把它放大，去证明收敛，那么取 $p=2$ 即可。

> 例四：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)$.
>
> 分析：$1-\cos\frac{1}{n}\sim 2\sin^2\frac{1}{2n}\sim\frac{1}{2n^2}$，这种让人联想到等价无穷小的就用比较审敛法的极限形式。

> 例五：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]$.
>
> 分析：$\frac{1}{n}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\sim\frac{1}{n}-\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}\right)=\frac{1}{2n^2}$，这种让人联想到泰勒公式（等价无穷小）的就用比较审敛法的极限形式。

> 例六：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a^n n!}{n^n}\quad(a>0)$.
>
> 分析：有 n 的阶乘、以 n 为幂次，显然比值审敛法。

例七：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}\cos^2\frac{n\pi}{3}$.

分析：三角函数先放掉，剩下的部分有以 n 为幂次的项，所以比值审敛法。

例八：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}$.

分析：虽然不是整体都是以 n 为幂次，但是比值审敛法显得很困难，所以根值审敛法。

例九：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^p}\quad(p>0)$.

分析：$\int\frac{1}{x(\ln x)^p}\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}\ln x}{(\ln x)^p}$ 容易积出，所以积分审敛法。

例十：$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$.

分析：交错级数，但是没有单调性，进行变换：$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}=\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\cdot\frac{1}{1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}$，利用 $\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-\cdots$ 将 $\frac{1}{1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}$ 展开得：$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\cdot\frac{1}{1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\left(1-\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n}-\cdots\right)=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}-\frac{1}{n}+\frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}}-\cdots$，其中，$\frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}}$ 及之后的项显然收敛，而 $\frac{1}{n}$ 求和后发散，故原级数发散。

例十一：$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}}$.

分析：交错级数，但是没有单调性，进行变换：$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}}=\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\frac{(-1)^n}{n}}}$，利用 $(1+x)^\mu$ 的展开式可得：$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\frac{(-1)^n}{n}}}=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\left(1-\frac{1}{2}\frac{(-1)^n}{n}+\frac{3}{8}\frac{1}{n^2}-\cdots\right)$，这些项分别都是收敛的，故原级数收敛。

2 幂级数的收敛域、和函数

2.1 前置知识

阿贝尔定理：如果幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在点 $x = x_0 (x_0 \neq 0)$ 处收敛，那么对开区间内 $(-|x_0|, |x_0|)$ 的一切点，幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 都绝对收敛；如果幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在点 $x = x_0$ 处发散，那么当 $x > |x_0|$ 或 $x < -|x_0|$ 时，幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 都发散。

定理：设有幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$，如果 $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho$，那么幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为：

$$R = \begin{cases} \frac{1}{\rho} & ,0 < \rho < +\infty \\ +\infty & ,\rho = 0 \\ 0 & ,\rho = +\infty \end{cases}.$$

常用展开：

$$\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots && = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \\
\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots && = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots && = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \\
\ln(x+1) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \cdots && = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} \\
(1+x)^\mu &= 1 + \mu x + \frac{\mu(\mu-1)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{\mu(\mu-1)\cdots(\mu-n+1)}{n!} x^n + \cdots && = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu(\mu-1)\cdots(\mu-n+1)}{n!} x^n
\end{aligned}$$

2.2 一些经验

1. 常规幂级数的收敛域：直接套公式

   缺项幂级数的收敛域：回归比值审敛法（也可以换元，推荐比值审敛法）

2. 幂级数的和函数：

   1. 采用求导/积分的方式将其运算为可求和的**等比级数**形式，可能需要乘除 x 调整 x 的幂次
   2. 将其转化为 **5 个常用函数**的展开式形式（常常是带有阶乘时）
   3. 有时需要求导，形成**微分方程**

3. 常数项级数的和函数：取含 n 次方的项为 x，写出幂级数，求幂级数的和函数后代值

2.3 例题

> 例一：求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n2^n}$ 的收敛半径和收敛域。
>
> 分析：常规的幂级数，直接套公式即可。

> 例二：求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n}}{3^n-1}$ 的收敛半径与收敛域。
>
> 分析：缺项的幂级数，比值审敛法。

> 例三：求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}$ 的和函数。
>
> 分析：调整 x 的幂次后求导。

> 例四：求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}n^2x^n$ 的和函数。
>
> 分析：多次调整 x 的幂次后积分（凑回导数）。

> 例五：求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{n!}x^{2n+1}$ 的和函数。
>
> 分析：凑回导数后，转化为 e^x 的展开式形式（有阶乘、不跳项，适合 e^x）。

> 例六：求幂级数 $\frac{x^4}{2\cdot4}+\frac{x^6}{2\cdot4\cdot6}+\frac{x^8}{2\cdot4\cdot6\cdot8}+\cdots$ 的和函数。
>
> 分析：求导后和原式比较，可得微分方程：$S'(x)-xS(x)=\frac{x^3}{2}$，解之即可。

> 例七：求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)!}$ 的和函数。

> **分析**：求两次导后全加起来，就是 e^x 的展开式，即 $S''(x)+S'(x)+S(x)=e^x$，解之即可。

> **例八**：求常数项级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(n^2-n+1)}{2^n}$ 的和。
>
> **分析**：设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n^2-n+1)x^n$，求得和函数后代入 $x=-\frac{1}{2}$ 即可。

> **例九**：求常数项级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n^2-1)2^n}$ 的和。
>
> **分析**：设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^2-1}x^n$，求得和函数后代入 $x=\frac{1}{2}$ 即可。

3 函数展开

3.1 函数展开为幂级数

利用 5 个常用的幂级数展开，**结合求导等分析手段**，将函数展开为幂级数。

> 例一：将函数 $\int_0^x e^{x^2}\mathrm{d}x$ 展开成 x 的幂级数。
>
> 分析：在 e^x 的展开中取 x 为 x^2 得到 e^{x^2} 的展开，逐项积分得到 $\int_0^x e^{x^2}\mathrm{d}x$ 的展开。

> 例二：设函数 $f(x)=\begin{cases}\frac{1+x^2}{x}\arctan x, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$，试将 $f(x)$ 展开成 x 的幂级数，并求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1-4n^2}$ 的和。
>
> 分析：$\arctan x$ 求导得 $\frac{1}{1+x^2}$，在 $\frac{1}{1+x}$ 的展开中取 x 为 x^2 得到 $\frac{1}{1+x^2}$ 的展开，再积分得到 $\arctan x$ 的展开。

3.2 函数展开为傅立叶级数

设 $f(x)$ 为周期为 $2l$ 的周期函数，则：

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right)$$

其中，

$$\begin{aligned}
a_0&=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\mathrm{d}x\\
a_n&=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x\qquad n=1,2,\cdots\\
b_n&=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x\qquad n=1,2,\cdots
\end{aligned}$$

收敛定理（狄利克雷充分条件）：如果周期为 2π 的函数 $f(x)$ 在区间 $[-\pi,\pi]$ 上满足条件：

（1）除有限个第一类间断点外，处处连续；

（2）分段单调，单调区间个数有限。

那么 $f(x)$ 的傅立叶级数在区间 $[-\pi,\pi]$ 上处处收敛，且

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)=S(x)=\begin{cases} f(x) & ,x\text{是连续点} \\ \frac{f(x^-)+f(x^+)}{2} & ,x\text{是}f(x)\text{的第一类间断点} \\ \frac{f(-\pi^+)+f(\pi^-)}{2} & ,x=\pm\pi \end{cases}$$