高等数学（下册）易遗忘知识点

xyfJASON

1. 解的结构理论中，

$$y_1,y_2\text{线性相关} \iff \frac{y_2}{y_1}\equiv\text{const} \iff \left(\frac{y_2}{y_1}\right)'\equiv 0 \iff y_1y_2'-y_2y_1'\equiv 0$$

2. 证明 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处可微的方法：证明

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\frac{f(x,y)-f(x_0,y_0)-f'_x(x_0,y_0)(x-x_0)-f'_y(x_0,y_0)(y-y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}=0$$

3. 可用极坐标法计算二重极限或证明二重极限不存在。

4. 设空间曲线 L 由参数方程：$\begin{cases}x=\varphi(t)\\y=\psi(t)\\z=\omega(t)\end{cases}$ 给出，L 上一点 $P(\varphi(t),\psi(t),\omega(t))$ 的切向量为：

$$\{\varphi'(t),\psi'(t),\omega'(t)\}$$

5. 设空间曲线 L 由方程组：$\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}$ 给出，L 上一点 $P(x,y,z)$ 的切向量为：

$$\left\{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)},\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)},\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right\}$$

（注：用两平面法向量叉积可以较为容易地推出来）

6. 设平面 Σ 由方程 $F(x,y,z)=0$ 给出，Σ 上一点 $P(x,y,z)$ 处的法向量为：

$$\left\{\frac{\partial F}{\partial x},\frac{\partial F}{\partial y},\frac{\partial F}{\partial z}\right\}$$

要求：$F(x,y,z,)$ 在 P 点可微！

7. 方向导数：

$$\frac{\partial f}{\partial\vec{l}}=f'_x\cos\alpha+f'_y\cos\beta$$

8. 函数 $z=f(x,y)$ 在 P 点的梯度 $\text{grad}\,z=\left\{\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}\right\}$ 恰好是等值线 $f(x,y)=C$ 在 P 点的法向量 $\vec{n}$；

函数 $u=f(x,y,z)$ 在 P 点的梯度 $\text{grad}\,u=\left\{\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right\}$ 恰好是等值面 $f(x,y,z)=C$ 在 P 点的法向量 $\vec{n}$。

9. **Hessian** 矩阵正定 $\iff$ 极小值；

Hessian 矩阵负定 $\iff$ 极大值；

Hessian 矩阵不定 $\iff$ 非极值；

Hessian 矩阵半正定、半负定 $\iff$ 不确定。

10. 任何两个定积分相乘都能写作一个二重积分。
11. 球坐标中典型小块体积 $\mathrm{d}V = \rho^2 \sin\varphi \,\mathrm{d}\rho \,\mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}\theta$。
12. 求质心坐标即以坐标为权重对质量求平均。例如：$\overline{x} = \frac{\iiint x\rho(x,y,z)\mathrm{d}V}{\iiint \rho(x,y,z)\mathrm{d}V}$.
13. 梯度：$\operatorname{grad} f(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}$;

    散度：$\operatorname{div} \vec{F}(x,y,z) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$;

    旋度：$\operatorname{rot} \vec{F}(x,y,z) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$.
14. 证明某极限趋近于零，可以通过证明以该式为通项的无穷级数收敛来证明。
15. 幂级数与求导、积分级数的收敛域不同，不能用后者的收敛域判断幂级数的收敛域，应该用公式或比值审敛法把幂级数的收敛域求出来。
16. 将函数展开为傅立叶级数后，记得写“由于 $f(x)$ 满足狄利克雷条件，故 $S(x) = \cdots$”。