微积分公式

1、双曲函数

双曲正弦 $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ 奇

双曲余弦 $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ 偶

双曲正切 $\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ 奇

反双曲正弦 $\operatorname{arcsinh} x = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$

反双曲余弦 $\operatorname{arccosh} x = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$

反双曲正切 $\operatorname{arctanh} x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$

$\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$

$\sinh(x-y) = \sinh x \cosh y - \cosh x \sinh y$

$\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$

$\cosh(x-y) = \cosh x \cosh y - \sinh x \sinh y$

反三角：$\sin(\arcsin x) = x \quad x \in [-1,1]$

$\cos(\arccos x) = x$

$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$

$\arctan x = \operatorname{arccot} \frac{1}{x}$

$\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & x>0 \\ -\frac{\pi}{2}, & x<0 \end{cases}$

2、两个重要极限

☆ $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \qquad \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$

☆ $\sin x < x < \tan x, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}$

☆3、常用等价无穷小（$x \to 0$）

$x \sim \sin x \sim \tan x \sim \arcsin x \sim \arctan x \sim \ln(1+x) \sim e^x - 1$

$\sqrt[\alpha]{1+x} - 1 \sim \frac{x}{\alpha} \qquad (1+x)^\beta - 1 \sim \beta x$

$1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2 \qquad x - \sin x \sim \frac{x^3}{6} \qquad \tan x - x \sim \frac{x^3}{3} \Rightarrow \tan x - \sin x \sim \frac{x^3}{2}$

$x \to 1,\ \ln x \sim x - 1 \qquad x \to 1,\ 1 - x^m \sim 1 - e^{m\ln x} \sim -m\ln x$

☆4、求导法则与求导公式

(1) $(C)' = 0$ (2) $(x^\mu)' = \mu x^{\mu-1}$ (3) $(e^x)' = e^x$ (4) $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

(5) $(\sin x)' = \cos x$ (6) $(\cos x)' = -\sin x$ (7) $(\tan x)' = \sec^2 x$ (8) $(\cot x)' = -\csc^2 x$

(9) $(\sec x)' = \sec x \tan x$ (10) $(\csc x)' = -\csc x \cot x$ (11) $(a^x)' = a^x \ln a$ (12) $(\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a}$

(13) $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (14) $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (15) $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$ (16) $(\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

*另：$(\sinh x)' = \cosh x \qquad (\cosh x)' = \sinh x \qquad (\tanh x)' = \frac{1}{\cosh^2 x}$

$(\operatorname{arcsinh} x)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \qquad (\operatorname{arccosh} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \qquad (\operatorname{arctanh} x)' = \frac{1}{1-x^2}$

No.

Date

和差积商求导法则　设 $u=u(x)$，$v=v(x)$ 都可导，则：　　推广：

$(u\pm v)'=u'\pm v'$　　$(Cu)'=Cu'$（C为常数）　　$\left(\sum_{i=1}^{n}f_i(x)\right)'=\sum_{i=1}^{n}f_i'(x)$

$(uv)'=u'v+uv'$　　$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$ $(v\neq 0)$　　$\left(\prod_{i=1}^{n}f_i(x)\right)'=\sum_{k=1}^{n}\prod_{i=1, i\neq k}^{n}f_i(x)f_k'(x)$

反函数求导法则　设 $x=f(y)$ 在 I_y 内单调可导，且 $f'(y)\neq 0$，则：

$y=f^{-1}(x)$ 在 $I_x=f(I_y)$ 内也可导且：$(f^{-1}(x))'=\frac{1}{f'(y)}$ 或 $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}$　反函数的导数等于直接函数导数的倒数

复合函数求导法则　设 $y=f(u)$，$u=g(x)$ 且 $f(u)$、$g(x)$ 都可导，则：

$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$ 或 $y'(x)=y'(u)\cdot g'(x)$　链式法则

高阶导数

$(e^x)^{(n)}=e^x$　　$(\sin x)^{(n)}=\sin(x+n\cdot\frac{\pi}{2})$　　$(\cos x)^{(n)}=\cos(x+n\cdot\frac{\pi}{2})$

$[\ln(1+x)]^{(n)}=(-1)^{n-1}\cdot\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$　求出前n项，写出来，数归证明

推论：$y=\ln(a+bx)$，$y^{(n)}=(-1)^{n-1}\cdot\frac{(n-1)!\,b^n}{(a+bx)^n}$；$y=\frac{1}{a+bx}$，$y^{(n)}=(-1)^n\cdot\frac{n!\,b^n}{(a+bx)^{n+1}}$

$y=\frac{1}{a-x}$，$y^{(n)}=\frac{n!}{(a-x)^{n+1}}$

$(x^n)^{(n)}=n!$　　$(x^n)^{(n+k)}=0$，$(k=1,2\cdots)$

函数和、差、积的高阶导数：

$(u\pm v)^{(n)}=u^{(n)}\pm v^{(n)}$

莱布尼茨(Leibniz)公式：$(uv)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k u^{(n-k)}v^{(k)}$

eg. $(uv)'=u'v+uv'$；$(uv)''=u''v+2u'v'+uv''$；$(uv)'''=u'''v+3u''v'+3u'v''+uv'''$

参数方程求导

对参数方程 $\begin{cases}x=\varphi(t)\\ y=\psi(t)\end{cases}$ 则：$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$

且 $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{\psi''(t)\varphi'(t)-\psi'(t)\varphi''(t)}{[\varphi'(t)]^2}\cdot\frac{1}{\varphi'(t)}$

$=\frac{\psi''(t)\varphi'(t)-\psi'(t)\varphi''(t)}{[\varphi'(t)]^3}$

函数的微分

$\Delta y=f'(x_0)\Delta x+o(\Delta x)$，$dy=f'(x_0)dx$

Campus

No.

Date

三角函数不定积分

$\int \sin x dx = -\cos x + C$

$\int \cos x dx = \sin x + C$

$\int \tan x dx = \ln|\sec x| + C$

$\int \cot x dx = -\ln|\csc x| + C$

$\int \sec x dx = \ln|\sec x + \tan x| + C$

$\int \csc x dx = \ln|\csc x - \cot x| + C$

常用麦克劳林展开式

1、$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots \quad x \in (-\infty, +\infty)$

2、$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots \quad x \in (-\infty, +\infty)$

3、$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots \quad x \in (-\infty, +\infty)$

4、$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \cdots \quad x \in (-1, 1] \Rightarrow -\ln(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$

5、$(1+x)^m = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!} x^n = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!} x^n + \cdots \quad x \in (-1, 1)$

推 $\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^n x^n + \cdots \quad x \in (-1, 1)$

$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots \quad x \in (-1, 1)$

6、$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots \quad x \in [-1, 1]$

7. $\tan x = x + \frac{1}{3} x^3 + \frac{2}{15} x^5 + \cdots$

$\arcsin x = x + \frac{1}{6} x^3 + \cdots$

$\ln(x + \sqrt{1+x^2}) = x - \frac{1}{6} x^3 + \cdots$

8、$\begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \\ \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^n = \frac{1}{(1-x)^2} \\ \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) x^n = \frac{2}{(1-x)^3} \end{cases}$

微积分定理与命题

§1.1 映射与函数

1. 单调函数一定有反函数，反函数的单调性与直接函数相同 P9

有反函数的函数不一定单调 $\begin{cases} y=f(x) \Rightarrow x=g(y)=f^{-1}(y) & \text{二者图象相同} \\ y=f(x) 与 y=f^{-1}(x) & \text{图象关于} y=x \text{对称} \end{cases}$ 是同一函数

$x=f(y)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 都是 $y=f(x)$ 的反函数

2、定义域关于原点对称的函数必能分解为奇、偶两个函数之和

设 $f(x), x\in(-l,l)$ 则 $f(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}+\frac{f(x)-f(-x)}{2}$

3. 两个定义区间为 $(-l,l)$ 的函数，有：(1) 偶+偶=偶　奇+奇=奇

(2) 偶×偶=偶　偶×奇=奇　奇×奇=偶　(3) 若 $g(x)$ 为偶，则 $f(g(x))$ 为偶

§1.2 数列的极限

1. 定义. $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists N\in N_+$, 当 $n>N$ 时, 恒有 $|x_n-a|<\varepsilon$

$\lim\limits_{n\to\infty}x_n\neq a \Leftrightarrow \exists\varepsilon_0>0, \forall N>0, \exists n>N$ 使 $|x_n-a|\geq\varepsilon_0$

$\Leftrightarrow \exists\varepsilon_0>0$, $\exists$ 子列 $\{x_{n_k}\}$ 使 $|x_{n_k}-a|\geq\varepsilon_0$

2、$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$ P23 用适当放大法证明

3. 收敛数列的性质

(1) 极限的唯一性

(2) 收敛数列必有界；无界数列必发散

(3) 保号性　极限保项：若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 且 $a>0$ (或 $a<0$)，则 $\exists N\in N_+$，当 $n>N$ 时，$x_n>0$ (或 $x_n<0$)

项保极限：若数列 $\{x_n\}$ 从某项起有 $x_n\geq0$ (或 $x_n\leq n$) 且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，则 $a\geq0$ (或 $a\leq0$)

(4) 如果数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a，则其任一子列都收敛于 a

推：若 $\{x_n\}$ 有两个子列收敛于不同的极限，则 $\{x_n\}$ 发散

推：发散的数列也有可能有收敛的子列　eg. $a_n=(-1)^n$

定理：$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a \Leftrightarrow \underbrace{\lim\limits_{k\to\infty}x_{2k-1}}_{\text{奇数项列}}=\underbrace{\lim\limits_{k\to\infty}x_{2k}}_{\text{偶数项列}}=a$　P27

4. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=a$ 则 $\lim\limits_{n\to\infty}|u_n|=|a|$　但 $\{|u_n|\}$ 收敛，$\{u_n\}$ 不一定收敛

No.

Date

§1.3 函数的极限

1.定义: (1) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists\delta>0$, 当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时, 有 $|f(x)-A|<\varepsilon$

$x\to x_0$ 时 $f(x)$ 有没有极限, 极限是多少, 与 $f(x)$ 在 x_0 有没有定义、若有 $f(x_0)$ 是多少无关

单侧极限 $\delta>0$ 左极限: $x_0-\delta<x<x_0$, 记作 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=A$ 或 $f(x_0^-)=A$

右极限: $x_0<x<x_0+\delta$, 记作 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=A$ 或 $f(x_0^+)=A$

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=A$

(2) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists X>0$, 当 $|x|>X$ 时, 有 $|f(x)-A|<\varepsilon$

正无穷: $x>X$, 记作 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$

负无穷: $x<-X$, 记作 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A$

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A$

2.函数极限的性质

(1)极限的唯一性

(2)局部有界性 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, 则 $\exists M>0, \delta>0$, 使 $0<|x-x_0|<\delta$ 时, 有 $|f(x)|\leq M$

(3)局部保号性

极限值保函数值: 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 且 $A>0$(或 $A<0$), 则 $\exists\delta>0$, 使当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时有 $f(x)>0$ (或 $f(x)<0$)

推: 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A\neq0$, 则当 $x\in\mathring{U}(x_0)$ 时, 有 $|f(x)|>\frac{|A|}{2}$

函数值保极限值: 若 $x\in\mathring{U}(x_0)$, $f(x)\geq0$(或 $f(x)\leq0$), 且 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, 则 $A\geq0$(或 $A\leq0$)

(4)海涅定理(归结原则): $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow$ 对 $\forall x_n\in D_f$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x_0$, $x_n\neq x_0$ 有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=A$

沟通函数极限与数列极限

§1.4 无穷小与无穷大

1.极限与无穷小的关系: $\lim f(x)=A \Leftrightarrow f(x)=A+\alpha(x)$, 其中 $\lim \alpha(x)=0$ 即 $\alpha(x)$ 是 $x\to\square$ 的无穷小

2.无穷大一定无界, 无界不一定是无穷大 P35注意无穷大的定义

3.x 同一变化过程中, $f(x)$ 无穷大 $\Rightarrow \frac{1}{f(x)}$ 无穷小; $f(x)$ 无穷小且 $f(x)\neq0 \Rightarrow \frac{1}{f(x)}$ 无穷大

§1.5 极限运算法则

1.有限个无穷小的和、差、积都是无穷小

Campus

2、有界函数与无穷小的乘积是无穷小

3、极限的四则运算：若 $\lim f(x)=A$，$\lim g(x)=B$，则 前提

(1) $\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)=A\pm B$

(2) $\lim[f(x)g(x)]=\lim f(x)\cdot\lim g(x)=AB$

(3) 若 $B\neq 0$，则 $\lim\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}=\frac{A}{B}$

推：若 $\lim f(x)$ 存在，$c\in R$，则 $\lim[cf(x)]=c\lim f(x)$

若 $\lim f(x)$ 存在，$n\in N_+$，则 $\lim[f(x)]^n=[\lim f(x)]^n$

推：$f(x)$、$g(x)$ 的极限是/否存在，则

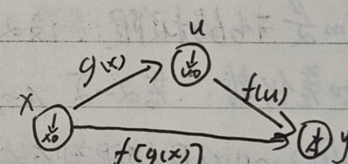
存在 ± 不存在 = 不存在　　反证法

$\left.\begin{array}{l}\text{不存在 ± 不存在 = 不一定存在}\\ \text{存在(或不存在)×÷不存在 = 不一定存在}\end{array}\right\}$ 举例子

4. 保序性：若 $\varphi(x)\geq\psi(x)$ 且 $\lim\varphi(x)=A$，$\lim\psi(x)=B$ 则 $A\geq B$

5. 当 a_0、$b_0\neq 0$，m、n 为非负整数，则：　　证法：分子、分母同时除以 x 最高次幂

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n}=\begin{cases}0 & \text{当 } n>m\\ \frac{a_0}{b_0} & \text{当 } n=m\\ \infty & \text{当 } n<m\end{cases}$$



6、复合函数的极限运算法则

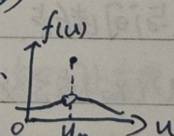
设 $y=f[g(x)]$ 由内：$u=g(x)$ 外：$y=f(u)$ 复合而成，$f[g(x)]$ 在 $\mathring{U}(x_0)$ 有定义

若 $\lim_{x\to x_0}g(x)=u_0$，$\lim_{u\to u_0}f(u)=A$，且 $\exists\,\delta_0>0$，当 $x\in\mathring{U}(x_0,\delta_0)$ 时，有 $g(x)\neq u_0$

不能保证 $f(u_0)$ 是多少　　或 $f(u)$ 在 u_0 处连续

则 $\lim_{x\to x_0}f[g(x)]=\lim_{u\to u_0}f(u)=A$

eg.



§1.6 极限存在准则 两个重要极限

1. 数列极限的夹逼准则

如果数列 $\{x_n\}$、$\{y_n\}$、$\{z_n\}$ 满足下列条件：

(1) $\exists\, n_0\in N_+$，当 $n>n_0$ 时，有 $y_n\leq x_n\leq z_n$　(2) $\lim_{n\to\infty}y_n=a$，$\lim_{n\to\infty}z_n=a$

那么 $\{x_n\}$ 收敛，且 $\lim_{n\to\infty}x_n=a$

No.

Date

2、函数极限的夹逼准则

如果(1)当 $x\in \mathring{U}(x_0,r)$(或 $|x|>M$)时，$g(x)\le f(x)\le h(x)$ (2) $\lim g(x)=A$，$\lim h(x)=A$

那么 $\lim f(x)$ 存在，且 $\lim f(x)=A$

3.单调有界数列必有极限　单增有上界、单减有下界 必有极限

· 设 $f(x)$ 在 x_0 的某个左邻域内单调、有界，则 $f(x_0^-)$ 存在 （$x\to x_0^+$、$x\to-\infty$、$x\to+\infty$ 同理）

*4.柯西极限存在准则（柯西审敛原理）

数列 $\{x_n\}$ 收敛 $\Longleftrightarrow \forall \varepsilon>0,\ \exists N\in N_+$，当 $m>N,\ n>N$ 时，有 $|x_n-x_m|<\varepsilon$

几何意义：$\forall\varepsilon>0$，在数轴上具有足够多大号码的一切点中，任意两点的距离小于 ε

§1.7 无穷小的比较

1.定义 P53　高阶、低阶、同阶、k阶、等价无穷小

2、定理：β 与 α 是等价无穷小 $\Longleftrightarrow \beta=\alpha+o(\alpha)$ 称 α 为 β 的主部

3.无穷小等价替换　↪ 和差取大：$\alpha\pm o(\alpha)\sim\alpha$

(1) 无穷小之比的极限：设 $\alpha\sim\tilde{\alpha}$、$\beta\sim\tilde{\beta}$，$\lim\frac{\tilde{\alpha}}{\tilde{\beta}}$ 存在，则：$\lim\frac{\alpha}{\beta}=\lim\frac{\tilde{\alpha}}{\beta}=\lim\frac{\alpha}{\tilde{\beta}}=\lim\frac{\tilde{\alpha}}{\tilde{\beta}}$

(2) 和差代替：若 $\alpha\sim\tilde{\alpha}$，$\beta\sim\tilde{\beta}$ 且 α 与 β 不等价，则 $\alpha-\beta\sim\tilde{\alpha}-\tilde{\beta}$，且 $\lim\frac{\alpha-\beta}{\gamma}=\lim\frac{\tilde{\alpha}-\tilde{\beta}}{\gamma}$

(3) 若 $f(x)\sim g(x)$ 且极限都存在，则 $\lim f(x)h(x)=\lim g(x)h(x)$

(4) 若 $\lim f(x)=A$，$\lim g(x)=B>0$ 则 $\lim g(x)^{f(x)}=B^A$

§1.8 函数的连续性与间断点

1.定义：设 $y=f(x)$ 在 $U(x_0)$ 有定义，若

$\lim\limits_{\Delta x\to0}\Delta y=\lim\limits_{\Delta x\to0}(f(x_0+\Delta x)-f(x_0))=0$（或 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$）

则称 $f(x)$ 在点 x_0 连续

"$\varepsilon-\delta$"语言：$f(x)$ 在 x_0 处连续 $\Longleftrightarrow\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0$，当 $|\underbrace{x-x_0}_{\Delta x}|<\delta$ 时，有 $|\underbrace{f(x)-f(x_0)}_{\Delta y}|<\varepsilon$

2.左连续：$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0^-)=f(x)$

右连续：$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0^+)=f(x)$

3.$f(x)\in C(a,b)$ 且 $f(a^+)=f(a)$，$f(b^-)=f(b)\Rightarrow f(x)\in C[a,b]$

Campus

No.

Date

4、函数间断点的定义：

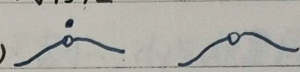
前提：$f(x)$ 在 $\mathring{U}(x_0)$ 有定义

满足以下之一：(1) $f(x)$ 在 x_0 处无定义　(2) $f(x)$ 在 x_0 处有定义，但 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 不存在

(3) $f(x)$ 在 x_0 处有定义，$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，但 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0)$

5、函数间断点的类型

(1) 第一类间断点：$f(x_0^-)$、$f(x_0^+)$ 均存在

① 可去间断点 $f(x_0^-)=f(x_0^+)$ 

② 跳跃间断点 $f(x_0^-)\neq f(x_0^+)$ 

(2) 第二类间断点

① 无穷间断点

② 振荡间断点　常见 $x\to 0$ 时 $\sin\frac{1}{x}$、$\cos\frac{1}{x}$

§1.9 连续函数的运算与初等函数的连续性

1、连续函数的和差积商、反函数、复合函数都是连续的 P62

2、基本初等函数在其定义域内都是连续的

3、初等函数在其定义区间内都是连续的　初等函数的定义 P12

求初等函数的连续区间 → 求其定义区间

§1.10 闭区间上连续函数的性质

1、有界性、最大最小值定理　在闭区间上连续的函数在该区间上有界且能取到最大、小值

2、零点定理　若 $f(x)\in C[a,b]$ 且 $f(a)f(b)<0$ 则 $\exists\,\xi\in(a,b)$ 使 $f(\xi)=0$

3、介值定理　① 介于区间端点函数值之间的所有值　② 介于两最值之间的所有值

*4、一致连续性　定义：设 $f(x)$ 在区间 I 上有定义，若对 $\forall\varepsilon>0$，总存在 $\delta>0$，使得对于 I 上任意两点 x_1、x_2 当 $|x_1-x_2|<\delta$ 时，有 $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$ 称 $f(x)$ 在 I 上一致连续

理解：无论在 I 的任何部分，只要自变量的两个值接近到一定程度，就能使对应的函数值达到所指定的接近程度

性质：$f(x)$ 在 I 上一致连续 ⇒ $f(x)$ 在 I 上连续

一致连续性定理：若 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则它在该区间上一致连续

KOKUYO

No.

Date

渐近线

1. 水平渐近线：若 $\lim_{x\to\infty} f(x)=A$ 则 $y=A$ 为 $f(x)$ 图形的水平渐近线

2. 铅直渐近线：若 $\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty$ （或 $x\to x_0^-$ 或 $x\to x_0^+$）则 $x=x_0$ 为 $f(x)$ 图形的铅直渐近线

3. 斜渐近线：若 $k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}\neq 0$，$b=\lim_{x\to\infty}[f(x)-kx]$（或 $x\to+\infty$, $x\to-\infty$），

则 $y=kx+b$ 为 $f(x)$ 图形的斜渐近线

§2.1 导数概念

1. 导数的定义

设 $y=f(x)$ 在 $U(x_0)$ 有定义，当自变量在 x_0 处取增量 Δx，因变量取增量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$

若 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 在 $\Delta x\to 0$ 时极限存在，则称 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导，并称该极限为 $y=f(x)$ 在 x_0 处的导数

即 $f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

2. 导函数

定义式：$f'(x)=y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

注：x 可取区间 I 上任意值，但在极限过程中，x 是常量，Δx 是变量

$f'(x_0)=f'(x)|_{x=x_0}$ 即 $f'(x_0)$ 是 $f(x)$ 在 x_0 处导数，也是 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)$ 在 x_0 处函数值

3. 单侧导数

左导数：$f'_-(x_0)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ ← 分段函数分界点处

右导数：$f'_+(x_0)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

$f'(x_0)=A \Leftrightarrow f'_-(x_0)=f'_+(x_0)=A$

若 $f(x)\in D(a,b)$ 且 $f'_+(a)$、$f'_-(b)$ 都存在，则 $f(x)\in D[a,b]$

4. 导数的几何意义

$y=f(x)$ 在点 $M(x_0,y_0)$ 处的切线斜率 $f'(x_0)=\tan\alpha$ 切线方程 $y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$

若 $f'(x_0)\neq 0$，法线斜率 $-\frac{1}{f'(x_0)}$ 法线方程 $y-y_0=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)$

5. 函数的连续性与可导性

函数在某一点可导必连续，连续不一定可导

eg. $y=f(x)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$ $\lim_{x\to 0}f(x)=0=f(0)$ 连续 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ 不存在，不可导

Campus

No. psp_dada

Date

§2.5 函数的微分

1.定义 设$f(x)$在区间I有定义，x_0、$x_0+\Delta x\in I$，若函数增量$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$

可表示为$\Delta y=A\Delta x+o(\Delta x)$，其中A为不依赖于$\Delta x$的常数，则：

称$f(x)$在点x_0可微，$f(x)$在x_0相应于Δx的微分$dy=A\Delta x$

2.条件 $f(x)$在点x_0：可微$\Leftrightarrow$可导

且$dy=f'(x_0)\Delta x$，即$A=f'(x_0)$

3.当$f'(x_0)\neq 0$，$\Delta x\to 0$时，Δy与dy是等价无穷小，dy与dx是同阶无穷小（$f'(x_0)=1$时等价）

证：$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{dy}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{f'(x_0)\Delta x}=\frac{1}{f'(x_0)}\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=1$

$\Rightarrow$ dy是Δy的近似值，是Δy的线性主部

4.复合函数的微分法则

微分形式不变性：对谁求导就乘以谁的微分

设$y=f(u)$、$u=g(x)$都可导，则$y=f[g(x)]$的微分为：

$dy=y'_u du=f'(u)du \quad =y'_x dx=f'(u)g'(x)dx$

eg. 设$y=\sin^2 2x$ 则 $dy=y'_{\sin 2x}d\sin 2x=2\sin 2x\, d\sin 2x$ $\quad(d\sin 2x=\cos 2x\, d2x)$

$=y'_{2x}d2x=2\sin 2x\cos 2x\, d2x$ $\quad(d2x=2dx)$

$=y'_x dx=2\cdot 2\sin 2x\cos 2x\, dx=2\sin 4x\, dx$

eg. $d(\sin\sqrt{\cos x})=(\quad)d(\cos x)$ 左：$=\frac{-\cos\sqrt{\cos x}\sin x}{2\sqrt{\cos x}}dx$ 右：$=(\quad)(-\sin x)dx$

全化为$(\quad)dx$ $\therefore(\quad)=\frac{\cos\sqrt{\cos x}}{2\sqrt{\cos x}}$

§3.1 微分中值定理

1.费马引理 设$f(x)$在$U(x_0)$有定义，并且①在x_0处可导 ②对$\forall x\in U(x_0)$，有$f(x)\le f(x_0)$（或$\ge$）

则：$f'(x_0)=0$ 即可导的极值点导数为0

2.罗尔定理 若$f(x)$满足 (1) $f(x)\in C[a,b]$ (2) $f(x)\in D(a,b)$ (3) $f(a)=f(b)$

那么在(a,b)内至少存在一点ξ，使得$f'(\xi)=0$

3.拉格朗日中值定理 若$f(x)$满足 (1) $f(x)\in C[a,b]$ (2) $f(x)\in D(a,b)$

那么在(a,b)内至少存在一点ξ，使得：$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$

即$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

用于证明不等式：出现同一函数在两点的函数值之差$\Rightarrow$用拉中

No.
Date

4. 推论：设$f(x)$在区间I上连续，在I内可导，
则在I上：$f(x)\equiv C \Leftrightarrow f'(x)\equiv 0$

5. 柯西中值定理　若$F(x)$、$f(x)$满足　(1) 在$[a,b]$上连续　(2) 在(a,b)内可导　(3) $F'(x)\neq 0$
那么在(a,b)内至少有一点ξ，使$\frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}=\frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}$

6. 达布定理（导数的介值定理）$\Rightarrow$说明导函数有介值性
设函数$f(x)\in D[a,b]$且$f'_+(a)\neq f'_-(b)$，k为介于$f'_+(a)$、$f'_-(b)$间的任一实数，
则至少存在一个$\xi\in(a,b)$，使$f'(\xi)=k$

7. 导数零点定理
函数$f(x)\in D[a,b]$，且$f'_+(a)\cdot f'_-(b)<0$
则至少存在一个$\xi\in(a,b)$，使$f'(\xi)=0$

$\Rightarrow$推论：设$f(x)$在I上满足$f'(x)\neq 0$，则$f(x)$在I上严格单调，$f(x)$在I上必有反函数

§3.2 洛必达法则　函数比的极限＝导数比的极限

定理　设(1) 当$x\to a$时，函数$f(x)$、$F(x)$都$\to 0$（或$\to\infty$）
(2) 在点a的去心邻域内，$f'(x)$、$F'(x)$都存在且$F'(x)\neq 0$
(3) $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{F'(x)}$存在或为无穷大
则：$\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{F(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{F'(x)}$

定理　设(1) 当$x\to\infty$时，函数$f(x)$、$F(x)$都$\to 0$（或$\to\infty$）
(2) 当$|x|>N$时，$f'(x)$、$F'(x)$都存在且$F'(x)\neq 0$
(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{F'(x)}$存在或为无穷大
则：$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{F(x)}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{F'(x)}$

§3.3 泰勒公式

1. $f(x)$在x_0处的n次泰勒多项式
$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

2. 佩亚诺余项　$R_n(x)=o((x-x_0)^n)$　拉格朗日余项　$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$，$\xi$介于$x_0$、$x$之间

Campus

No.

Date

3、泰勒中值定理1 条件: 若$f(x)$在x_0处有n阶导数，则存在x_0的一个邻域$U(x_0)$，对$\forall x\in U(x_0)$，有

$$f(x)=P_n(x)+R_n(x),\quad R_n(x)=o((x-x_0)^n)$$

泰勒中值定理2 条件: 若$f(x)$在x_0的某个邻域$U(x_0)$内有$n+1$阶导数，则对$\forall x\in U(x_0)$，有

$$f(x)=P_n(x)+R_n(x),\quad R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$，ξ介于x_0、x之间

3、泰勒中值定理2的误差$|R_n(x)|$的定理分析 设$x\in U(x_0)$时对某个固定的n，有$|f^{(n+1)}(x)|\le M$

有$|R_n(x)|=\left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\right|\le\frac{M}{(n+1)!}|x-x_0|^{n+1}$ 由$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0$知$n\to\infty$时$M\frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}\to 0$

$\therefore n\to\infty$时，$|R_n(x)|\to 0$在$f^{(n+1)}(x)$有界的区间内都成立

4、n阶麦克劳林多项式 取$x_0=0$

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

对应的佩亚诺余项$R_n(x)=o(x^n)$，拉格朗日余项$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}$ $\theta\in(0,1)$

5、如何选用泰勒中值定理?

看题目是用高阶导数研究函数的局部性态还是整体性态

Peano: 定性的、局部的 → 求极限、求极值

Lagrange: 定量的、整体的 → 求最值、求不等式

§3.4 函数的单调性与曲线的凹凸性　　§3.5 函数的极值与最值

1、函数单调性的判定法

定理: 设$f(x)\in C[a,b]\cap D(a,b)$

若$f'(x)\ge 0$，$x\in(a,b)$且等号仅在有限多个点处成立(即在(a,b)的任一子区间内，$f'(x)$不恒为0)，

则$y=f(x)$在$[a,b]$上单调增加　　($f'(x)\le 0\to$单减)

应用: 利用函数单调性可证明不等式

2、函数的极值

定义: 设$f(x)$在点x_0的某邻域$U(x_0)$有定义，若对$\forall x\in\mathring{U}(x_0)$，恒有$f(x)<f(x_0)$　(或$f(x)>f(x_0)$)

则称$f(x_0)$是$f(x)$的一个极大(小)值，x_0是$f(x)$的一个极大(小)值点

定义: 称导数为零的点为函数的驻点　　可能的极值点: 驻点、不可导点

也是一个横坐标

驻点 $\nLeftrightarrow$ 极值点

即可导的极值点导数为0

定理(极值必要条件) 若$f(x)$在x_0处可导且$f(x)$在x_0处取得极值，则$f'(x_0)=0$

定理(极值第一充分条件) 导数的异号零点→极值点

设$f(x)$在x_0处连续，在x_0某去心邻域$\mathring{U}(x_0,\delta)$可导，则

导数左正右负 若$x\in(x_0-\delta,x_0)$ $f'(x)>0$，而$x\in(x_0,x_0+\delta)$，$f'(x)<0$ 则$f(x)$在x_0处取得极大值

导数左负右正 $f'(x)<0$ $f'(x)>0$ 极小值

若$x\in\mathring{U}(x_0)$时$f'(x)$符号保持不变，则x_0不是$f(x)$极值点

定理(极值第二充分条件)

设$f(x)$在x_0处二阶可导且$f'(x_0)=0$，$f''(x_0)\neq0$，则

$f''(x_0)<0$ (>0)时，$f(x)$在x_0处取得极大值(极小值)

相比第二充分条件，第一充分条件的优点：既能判定驻点是否是极值点，也能判定不可导点是不是极值点

定理(判别法的推广) 第一充分条件不是必要的，即：函数在极值点附近不一定有单调性

设$f(x)$在x_0处n阶可导且$f'(x_0)=f''(x_0)=\cdots=f^{(n-1)}(x_0)=0$，$f^{(n)}(x_0)\neq0$，则

(1) 当n为奇数时，$f(x)$在x_0处不取得极值

(2) 当n为偶数时，$f(x)$在x_0处取得极值，

且当$f^{(n)}(x_0)<0$时，$f(x_0)$为极大值；当$f^{(n)}(x_0)>0$时，$f(x_0)$为极小值

证：展，$f(x)=f(x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-x_0)^n \Rightarrow f(x)-f(x_0)=\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-x_0)^n$

3.函数的最值

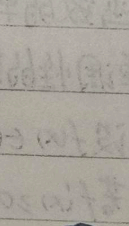
可能取最值的点：①驻点 ②不可导点 ③区间端点

求"目标函数"时应注意目标函数不只一个，应找方便计算的

eg. 在半径为R的球中内接一个圆锥，求圆锥的最大体积

若设底圆半径x，$V=\frac{1}{3}\pi x^2\cdot(R+\sqrt{R^2-x^2})$

若设圆锥高h，$V=\frac{1}{3}\pi h[R^2-(h-R)^2]=\frac{\pi}{3}(2Rh^2-h^3)$ ✓



4.曲线的凹凸性

定义 设$f(x)\in C\,I$，若对$\forall x_1,x_2\in I$，恒有$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)<\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$

则称$f(x)$在I上的图形是凹的 ∪

$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)>\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$，则是凸的 ∩

No.

Date

定理：设$f(x)\in C[a,b]\cap D^2(a,b)$，则

若$f''(x)>0$，$x\in(a,b)$，则$f(x)$在$[a,b]$上的图形是凹的 ∪

$f''(x)<0$ 凸的 ∩

定义：设$f(x)\in C\ I$，$x_0\in I$，若$f(x)$在经过点$(x_0,f(x_0))$时，曲线的凹凸性改变了，

则称点$(x_0,f(x_0))$为曲线的拐点． 拐点是一个点．

定理（拐点必要条件） 设$f(x)$在(a,b)二阶可导且$x_0\in(a,b)$，$(x_0,f(x_0))$为$f(x)$拐点

且$f''(x)$在x_0处连续，则$f''(x_0)=0$ 即二阶可导的拐点处二阶导为0

定理（拐点第一充分条件） 拐点不要求一阶导的值

设$f(x)$在x_0处连续，在x_0某去心邻域$\mathring{U}(x_0)$二阶可导，

若$f''(x)$在x_0左、右两侧符号相反，则$(x_0,f(x_0))$是拐点；符号相同则不是拐点

定理（拐点第二充分条件）

设$f(x)$在x_0某邻域$U(x_0)$内具有三阶连续导数，且$f''(x_0)=0$，$f'''(x_0)\neq0$

则$(x_0,f(x_0))$为$f(x)$拐点．

相比第二充分条件第一充分条件的优点：既能判定二阶导数为零的点是否是拐点，也能判定二阶导数不存在的点

§3.6 函数图形的描绘

步骤：1. 确定$f(x)$定义域及某些特性（如奇偶性、周期性），求出$f'(x)$，$f''(x)$

2. 用以下点把函数定义域分为几个部分区间，并求出这些点的函数值

① $f'(x)$、$f''(x)$的全部零点 ② $f'(x)$、$f''(x)$不存在的点 ③ $f(x)$的间断点

3. 确定部分区间内$f'(x)$、$f''(x)$的符号，确定$f(x)$的升降凹凸（见下）

4. 确定函数图形的渐近线

$f(x)$
- $f'(x)$
  - 符号：曲线的升降
  - 大小：曲线的陡峭程度
- $f''(x)$
  - 符号：曲线的弯曲方向
  - 大小：曲线的弯曲程度

No.

Date

§3.7 曲率

1. 弧微分

设 $f(x)$ 在 (a,b) 内具有连续导数，其弧长导数 $s=s(x)$ 是单增函数

弧微分公式：$ds=\sqrt{1+y'^2}\,dx=\sqrt{1+x'^2}\,dy=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}$

参数方程形式：对 $\begin{cases} y=y(t) \\ x=x(t) \end{cases}$，$t\in[t_0,t_1]$，$ds=\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt$ $(dt>0)$

极坐标形式：对 $\rho=\rho(\theta)$，$\theta\in[\alpha,\beta]$，有 $\begin{cases} x=\rho(\theta)\cos\theta \\ y=\rho(\theta)\sin\theta \end{cases}$，$ds=\sqrt{\rho^2(\theta)+\rho'^2(\theta)}\,d\theta$ $(d\theta>0)$

定义：若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上具有连续导数，则称曲线 $\Gamma: y=f(x)$，$x\in[a,b]$ 为光滑曲线

定义：平均曲率 $\bar{K}=\left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right|$，曲率 $K=\lim\limits_{\Delta s\to0}\left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right|=\left|\frac{d\alpha}{ds}\right|$

直线：$\Delta\alpha=0$ $\therefore K=\left|\frac{d\alpha}{ds}\right|=0$ "直线不弯曲"

圆：设半径 R，$K=\frac{1}{R}$，半径越小的圆曲率越大，一个圆的弯曲程度处处相同

曲率的计算公式：$K=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}=\frac{|x''|}{(1+x'^2)^{3/2}}$

参数方程形式：对 $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$，$K=\frac{|\dot{x}\ddot{y}-\ddot{x}\dot{y}|}{(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{3/2}}$

极坐标形式：$K=\left|\frac{d\alpha}{ds}\right|=\frac{1}{\sqrt{\rho^2(\theta)+\rho'^2(\theta)}}$

曲率的近似计算，当 $|y'|\ll1$ 时，$K=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}\approx|y''|$

2. 曲率圆

曲线上一点处的曲率半径与曲线在该点处的曲率互为倒数 $\rho=\frac{1}{K}$

曲率圆圆心（即曲率中心）$D(\alpha,\beta)$ 的坐标为 $\begin{cases} \alpha=x-\frac{y'(1+y'^2)}{y''} \\ \beta=y+\frac{1+y'^2}{y''} \end{cases}$

曲线 $f(x)$ 在点 $M(x,y)$ 的曲率圆方程为

$(\xi-\alpha)^2+(\eta-\beta)^2=\rho^2$，$(\xi,\eta)$ 为曲率圆上动点的坐标

定义：当点 $(x,f(x))$ 沿曲线 C 移动时，相应的曲率中心 D 的轨迹曲线为 G

则称 G 为 C 的渐屈线，C 为 G 的渐屈线

摆线的渐屈线仍为一摆线

§3.8 方程近似解

No.

Date

§4 不定积分

定义 若对 $\forall x\in I$，有 $F'(x)=f(x)$ （或 $dF(x)=f(x)dx$）

则称 $F(x)$ 为 $f(x)$ （或 $f(x)dx$）在区间 I 上的一个原函数

定理 连续函数一定有原函数 有原函数即不定积分存在

若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 有定义，且 $x=x_0\in(a,b)$ 是 $f(x)$ 的第一类或无穷间断点，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 没有原函数

说明 若 $f(x)$ 有一个原函数 $F(x)$，则 $f(x)$ 有无穷多个原函数，可记为 $F(x)+C$

定义 在区间 I 上，$f(x)$ 带有任意常数项的原函数称为 $f(x)$ 在 I 上的不定积分，记为 $\int f(x)dx$

$$\int f(x)dx=F(x)+C$$

不定积分 $\int f(x)dx$ 可表示 $f(x)$ 的任意一个原函数

§5 定积分

§5.1 定积分的概念与性质

定义 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界，在 $[a,b]$ 中任意插入 $n-1$ 个分点 $x_1,x_2,\cdots,x_{n-1}$

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$$

分割 把区间 $[a,b]$ 分成 n 个小区间 $[x_0,x_1],[x_1,x_2],\cdots,[x_{n-1},x_n]$

各个小区间长度依次为 $\Delta x_1=x_1-x_0$，$\Delta x_2=x_2-x_1$，$\cdots$，$\Delta x_n=x_n-x_{n-1}$

取近似 在每个小区间 $[x_{i-1},x_i]$ 上任取一点 ξ_i $(x_{i-1}<\xi_i<x_i)$，作积 $f(\xi_i)\Delta x_i$ $(i=1,2,\cdots,n)$

作和 并作和 $S=\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$

求极限 记 $\lambda=\max\{\Delta x_1,\Delta x_2,\cdots,\Delta x_n\}$，若当 $\lambda\to0$ 时，$\lim_{\lambda\to0}S$ 存在且与区间 $[a,b]$ 的分法及 ξ_i 取法无关

则称 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，称极限 $I=\lim_{\lambda\to0}S$ 为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的定积分记作 $\int_a^b f(x)dx$，

即 $\int_a^b f(x)dx=I=\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$ 可积即定积分存在

"$\varepsilon-\delta$"语言：设有常数 I，若对 $\forall\varepsilon>0$，总 $\exists\delta>0$，使得对 $[a,b]$ 的任何分法，ξ_i 在 $[x_{i-1},x_i]$ 中的任何取法，只要 $\lambda=\max\{\Delta x_1,\cdots,\Delta x_n\}<\delta$，恒有 $\left|\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i-I\right|<\varepsilon$ 成立，

则称 I 为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的定积分，记作 $I=\int_a^b f(x)dx$

注：定积分的值只与被积函数及积分区间有关，与积分变量的记法无关

即 $\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(t)dt=\int_a^b f(u)du$

No.

Date

无界函数一定不可积

定理(可积的充分条件) 若$f(x)$在$[a,b]$上单调,则$f(x)$在$[a,b]$上可积

若$f(x)$在$[a,b]$上连续,则$f(x)$在$[a,b]$上可积

若$f(x)$在$[a,b]$上有界且只有有限个间断点,则$f(x)$在$[a,b]$上可积

定积分的几何意义 $\int_a^b f(x)dx$表示x轴由上方图形面积减去x轴下方图形面积所得的差

定积分的性质

补充规定 $\int_a^a f(x)dx=0$ $\int_b^a f(x)dx=-\int_a^b f(x)dx$

性质1.(线性性) 设α、β为常数,则

$$\int_a^b[\alpha f(x)+\beta g(x)]dx=\alpha\int_a^b f(x)dx+\beta\int_a^b g(x)dx$$

性质2(对积分区间的可加性)

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$$

性质3(保号性) 若$f(x)$在$[a,b]$上恒有$f(x)\geq 0$,则

$$\int_a^b f(x)dx\geq 0$$

性质3' 若$f(x)\in C[a,b]$,在$[a,b]$上$f(x)\geq 0$且$f(x)$不恒为0,则

$$\int_a^b f(x)dx>0$$

性质4(保序性) 若在$[a,b]$上恒有$f(x)\geq g(x)$,则

$$\int_a^b f(x)dx\geq\int_a^b g(x)dx$$

推论(绝对值不等式) $b>a$,有

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right|\leq\int_a^b|f(x)|dx$$

$f(x)$非负或非正时取等

$f(x)$有正也有负时取不等

性质5(积分估值定理) 设$f(x)$在$[a,b]$上最大值M,最小值m,则

$$m(b-a)\leq\int_a^b f(x)dx\leq M(b-a)$$

☆性质6(定积分中值定理) 若$f(x)\in C[a,b]$,则至少存在一点$\xi\in(a,b)$,使

$$\int_a^b f(x)dx=f(\xi)(b-a)$$

$\Rightarrow f(\xi)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ 称$f(\xi)$为$f(x)$在$[a,b]$上的平均值

§5.2 微积分基本公式

注:变限积分一定连续

定理 若$f(x)\in C[a,b]$,则其变上限积分函数(积分上限的函数) $\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt$ 可导,且

$$\Phi'(x)=\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=f(x)\quad x\in[a,b]$$

即 若$f(x)\in C[a,b]$,则$\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt$是$f(x)$在$[a,b]$上的一个原函数

Campus

No. psp_dada
Date

变下限积分函数 $\varphi(x)=\int_x^b f(t)dt$ $\quad \varphi'(x)=\left(-\int_b^x f(t)dt\right)'=-f(x)$

一般地，设 $f(x)$ 连续，$\varphi(x)$、$\psi(x)$ 可导，则

$$\frac{d}{dx}\int_a^{\varphi(x)} f(t)dt=\frac{d}{d\varphi(x)}\int_a^{\varphi(x)} f(t)dt\cdot\frac{d\varphi(x)}{dx}=f[\varphi(x)]\varphi'(x)$$

$$\frac{d}{dx}\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(t)dt=\frac{d}{dx}\left[\int_{\psi(x)}^{a} f(t)dt+\int_a^{\varphi(x)} f(t)dt\right]=f(\varphi(x))\varphi'(x)-f(\psi(x))\psi'(x)$$

$\int_a^x x^2 f(t)dt=x^2\int_a^x f(t)dt$ 积分变量是t不是x，x可以提出积分符号

定理(微积分基本定理) 若 $f(x)\in C[a,b]$，$F(x)$ 是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的一个原函数，则

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a) \qquad (*)$$

意义相同的记法 $F(b)-F(a)=F(x)\big|_a^b=[F(x)]_a^b$

称(*)式为微积分基本公式，也称为牛顿-莱布尼茨公式

一个连续函数在[a,b]的定积分等于它的任一个原函数在[a,b]上的增量

§5.3 定积分的换元法和分部积分法

一、定积分的换元法

定理 设函数 $f(x)\in C[a,b]$，函数 $x=\varphi(t)$ 满足：

(1) $a=\varphi(\alpha)$，$b=\varphi(\beta)$ 换元必换限，上限换上限、下限换下限

(2) $\varphi(t)$ 在 α、β 所构成的区间上具有连续导数，且 $\varphi(t)$ 值域 $R_\varphi=[a,b]$

则有 $\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$ 三换：1.上下限 2.被积函数 3.微分

注：1. 不定积分换元后需回代，定积分换元后不回代

2. 换元公式也可以反用，即令 $t=\varphi(x)$，$\alpha=\varphi(a)$，$\beta=\varphi(b)$，则

$$\int_a^b f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx=\int_\alpha^\beta f(t)dt$$

或配元(凑微分)而不换元 配元不换限

$$\int_a^b f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx=\int_a^b f[\varphi(x)]d\varphi(x)$$

二、定积分的分部积分法

定理 设 $u(x)$、$v(x)$ 在 $[a,b]$ 上有连续导数，则

$$\int_a^b u\,dv=[uv]_a^b-\int_a^b v\,du$$

边积边代限

用于处理两类问题

1. 反对幂指三

2. 含 $f'(x)$、$f''(x)$ 等的式子，导数作v

eg. $f''(x)\in C[0,1]$，$f(0)=1$，$f(2)=3$，$f'(2)=5$，则 $\int_0^1 xf''(2x)dx=2$

eg. $f(x)\in D^2[a,b]$，$f(a)=f(b)=0$，则 $\int_a^b f(x)dx=\frac{1}{2}\int_a^b(x-a)(x-b)f''(x)dx$

KOKUYO

No.

Date

三、性质

1、$f(x)\in C[-a,a]$，则 $\int_{-a}^{a}f(x)dx=\int_0^a[f(-x)+f(x)]dx$ △

若$f(x)$又为偶函数则 $\int_{-a}^{a}f(x)dx=2\int_0^a f(x)dx$

若$f(x)$又为奇函数则 $\int_{-a}^{a}f(x)dx=0$

对称区间 ⇒ 偶倍奇零

2、若$f(x)\in C[0,1]$，则

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\sin x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\cos x)dx$ (2) $\int_0^{\pi}xf(\sin x)dx=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\sin x)dx$

3. 设$f(x)$是连续的、周期为T的周期函数，则

(1) $\forall a\in R$，$\int_a^{a+T}f(x)dx=\int_0^T f(x)dx=\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(x)dx$

即积分区间长度为T的积分都相等

(2) $\forall a\in R$，$\int_a^{a+nT}f(x)dx=n\int_0^T f(x)dx$，$(n\in N)$

4. 华莱士公式

设 $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\,dx$，则

递推公式：$I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}$，且 $I_0=\frac{\pi}{2}$，$I_1=1$

华莱士公式：$I_n=\begin{cases}\frac{(n-1)!!}{n!!}\cdot 1=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}\cdot 1, & n\text{为奇}\\ \frac{(n-1)!!}{n!!}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}, & n\text{为偶}\end{cases}$

5. $f(x)\in C[a,b]$，则 $\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(a+b-x)dx=\frac{1}{2}\int_a^b[f(x)+f(a+b-x)]dx$ 区间再现公式

- $x>0$，则 $\int_x^1\frac{dt}{1+t^2}=\int_1^{\frac{1}{x}}\frac{dt}{1+t^2}$ 令 $u=\frac{1}{t}$
- $m,n\in N$，则 $\int_0^1 x^m(1-x)^n dx=\int_0^1 x^n(1-x)^m dx$ 令 $t=1-x$
- $f(x)\in C[0,1]$，$n\in Z$，则 $\int_{\frac{n}{2}\pi}^{\frac{n+1}{2}\pi}f(|\sin x|)dx=\int_{\frac{n}{2}\pi}^{\frac{n+1}{2}\pi}f(|\cos x|)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\sin x)dx$ 令 $x=u+\frac{n}{2}\pi$

6、$f(x)$为连续奇函数 ⇒ $\int_a^x f(t)dt$为偶函数 令 $F(x)=\int_a^x f(t)dt$，$F(-x)=\int_a^{-x}f(t)dt=-\int_{-a}^{x}f(-t)dt$

$f(x)$为连续偶函数 ⇒ $\int_0^x f(t)dt$为奇函数

7. 对变上限积分函数求导 能提则提，不能则换元，对□求导时被积函数中不能有□

1) $\frac{d}{dx}\int_0^x f(t)dt=f(x)$ 公式

2) $\frac{d}{dx}\int_0^x\frac{f(g(t))}{t^4}dt=\frac{f(g(x))}{x^4}$

3) $\frac{d}{dx}\int_0^x f(x-t)dt\ \xlongequal[dt=-du]{令u=x-t}\ -\frac{d}{dx}\int_x^0 f(u)du=f(x)$

4) $\frac{d}{dx}\int_0^x f(xt)dt\ \xlongequal{令u=xt}\ \frac{d}{dx}\int_0^{x^2}f(u)\frac{1}{x}du=\frac{d}{dx}\frac{\int_0^{x^2}f(u)du}{x}$

5) $\frac{d}{dx}\int_0^x f(x)g(t)dt=\frac{d}{dx}[f(x)\cdot\int_0^x g(t)dt]$

6) $\frac{d}{dx}\int_0^x f(x)g(t)dx=g(t)\frac{d}{dx}\int_0^x f(u)du=g(t)f(x)$

Campus

psp_dada

No.

Date

8、积分第一中值定理

设$f(x)\in C[a,b]$，$g(x)\in C[a,b]$且$g(x)$不变号，则至少∃一点$\xi\in[a,b]$，使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=f(\xi)\int_a^b g(x)dx$$ 成立　　注：积分中值定理是其弱化版，令$g(x)=1$

9、$f(x)$、$g(x)\in C[a,b]$且$g(x)\neq 0$，则至少∃一点$\xi\in(a,b)$，使得

$$\frac{\int_a^b f(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}=\frac{f(\xi)}{g(\xi)}$$ 成立

证法：设辅助函数$F(x)=\int_a^x f(t)dt$　$G(x)=\int_a^x g(t)dt$

利用柯西中值定理

10.柯西不等式

(1) $\left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right)\geq\left[\sum_{i=1}^n a_ib_i\right]^2$　平方的和的积大于等于积的和的平方　例$(a^2+b^2)(c^2+d^2)\geq(ac+bd)^2$

(2) 设$f(x)$、$g(x)\in C[a,b]$，则

$$\int_a^b f^2(x)dx\cdot\int_a^b g^2(x)dx\geq\left[\int_a^b f(x)g(x)dx\right]^2$$ 平方的积分的积大于等于积的积分的平方

证法：令$F(x)=\int_a^x f^2(t)dt\cdot\int_a^x g^2(t)dt-\left[\int_a^x f(t)g(t)dt\right]^2$　易有$F'(x)=\int_a^x(f(x)g(t)-f(t)g(x))^2dt\geq 0\Rightarrow F(x)\uparrow$

§7 微分方程

一、概念

1、微分方程：表示未知函数及其导数与自变量之间的关系的方程

2、微分方程的阶：微分方程中所出现的未知函数的最高阶导数的阶数

n阶隐式微分方程　$F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})=0$ (*)　←其中只有$y^{(n)}$项必须出现

n阶显式微分方程　$y^{(n)}=F(x,y,y',\cdots,y^{(n-1)})$

3、微分方程的解：代入微分方程能使之成为恒等式的函数

设$y=\varphi(x)$在区间I上有n阶连续导数，若在I上满足$F(x,\varphi(x),\varphi'(x),\cdots,\varphi^{(n)}(x))\equiv 0$

则称$\varphi(x)$为微分方程(*)在I上的解

4、微分方程的通解：含有任意常数且相互独立的任意常数的个数与微分方程的阶数相同的解

5、微分方程的特解：确定了通解中任意常数的解

微分方程的通解不一定是所有解也不一定包含特解

KOKUYO

No.

Date

二、解法

1、可分离变量的微分方程

微分方程 $\xrightarrow{分离x,y}$ $f(x)dx=g(y)dy \longrightarrow \int f(x)dx=\int g(y)dy$

2、齐次方程 可通过换元法化成可分离变量的微分方程

微分方程 $\longrightarrow \frac{dy}{dx}=\varphi(\frac{y}{x})$ 令 $u=\frac{y}{x}$，有 $y=ux$，$\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}$

$\longrightarrow u+x\frac{du}{dx}=\varphi(u) \longrightarrow x\frac{du}{dx}=\varphi(u)-u \longrightarrow \frac{du}{\varphi(u)-u}=\frac{dx}{x} \longrightarrow \int\frac{du}{\varphi(u)-u}=\int\frac{dx}{x}$

最后用 $u=\frac{y}{x}$ 回代

eg. $(xy-y^2)dx-(x^2-2xy)dy=0$ 每项的次数都为2 ⇒ 齐次 同除 x^2

$(y^3+2x^2y)dx+(xy^2+x^3)dy=0$ 每项的次数都为3 ⇒ 齐次 同除 x^3

3、可化为齐次的方程 通过坐标轴的平移

方程 $\frac{dy}{dx}=\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}$

当 $c_1=c=0$ 时齐次，否则可平移坐标轴将其化为齐次 目的：消去常数项

平移公式：$x=X+h$，$y=Y+k$

方程变为 $\frac{dY}{dX}=\frac{aX+bY+(ah+bk+c)}{a_1X+b_1Y+(a_1h+b_1k+c_1)}$

通过方程组 $\begin{cases}ah+bk+c=0\\ a_1h+b_1k+c_1=0\end{cases}$ 确定 h、k，则方程变为 $\frac{dY}{dX}=\frac{aX+bY}{a_1X+b_1Y}$

若方程组无解，说明 $\frac{a_1}{a}=\frac{b_1}{b}$，此时令 $\frac{a_1}{a}=\frac{b_1}{b}=\lambda$，再令 $u=ax+by$，则

$\frac{dy}{dx}=\frac{ax+by+c}{\lambda(ax+by)+c_1}=\frac{u+c}{\lambda u+c_1}$，且 $\frac{du}{dx}=a+b\frac{dy}{dx}$ 即 $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{b}(\frac{du}{dx}-a)$

从而 $\frac{1}{b}(\frac{du}{dx}-a)=\frac{u+c}{\lambda u+c_1}$ 是可分离变量的

最后回代

4、一阶线性微分方程

方程 $\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$ 通解：$y=e^{-\int P(x)dx}[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C]$

$\frac{dy}{dx}+P(x)y=0$ 通解：$y=Ce^{-\int P(x)dx}$

5、伯努利方程

方程 $\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)y^n\ (n\neq0,1)$ 通解：$y^{1-n}=e^{-\int(1-n)P(x)dx}(\int(1-n)Q(x)e^{\int(1-n)P(x)dx}dx+C)$

n 可以是大于1的正数，也可以是负数

eg. 方程 $\frac{dy}{dx}+\frac{-1}{2x}y=\frac{x^2}{2}y^{-1}$ 通解：$y^{1-(-1)}=e^{-\int 2\cdot\frac{-1}{2x}dx}(\int 2\cdot\frac{x^2}{2}e^{\int 2\cdot\frac{-1}{2x}dx}dx+C)$ ∴ $y^2=\frac{1}{2}x^3+Cx$

Campus

No.

Date

6、可降阶的高阶微分方程

① $y^{(n)}=f(x)$ 型

连续积分n次,得到含n个任意常数的通解

对高阶微分方程求特解时可边降阶边代入初值条件定出常数

② $y''=f(x,y')$ 型 缺y

设 $y'=p(x)$,则 $y''=\frac{dp}{dx}=p'$ $y''=f(x,y')\longrightarrow p'=f(x,p)$ 设其通解为 $p=\varphi(x,C_1)$

即 $\frac{dy}{dx}=\varphi(x,C_1)$ ∴通解为 $y=\int\varphi(x,C_1)dx+C_2$

③ $y''=f(y,y')$ 型 缺x

设 $y'=P(y)$ 则 $y''=\frac{dp}{dx}=\frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx}=p\frac{dp}{dy}$ $y''=f(y,y')\to p\frac{dp}{dy}=f(y,p)$ 设其通解为 $p=\varphi(y,C_1)$

即 $\frac{dy}{\varphi(y,C_1)}=dx$ ∴通解为 $\int\frac{dy}{\varphi(y,C_1)}=x+C_2$

注:1. ②、③均为设 $y'=p$,然后用合适的方法表示 y''

2、若同时缺x.y,则两种方法都可行,一般②更简便

3. $y^{(n)}=f(x,y^{(n-1)})$ 型 缺y $\xrightarrow{令u(x)=y^{(n-2)}}u''=f(x,u')$ 解出u(x),反解y

$y^{(n)}=f(y^{(n-1)},y^{(n-2)})$ 型 缺x $\xrightarrow{令u(x)=y^{(n-2)}}u''=f(u,u')$ 解出u(x),反解y

7.高阶线性微分方程

未知函数及未知函数的各阶导数均为一次

函数组的线性相关与线性无关

定义:设定义在区间I上的n个函数 $y_1(x)$、$y_2(x)\cdots y_n(x)$,若存在n个不全为0的常数 $k_1,k_2\cdots k_n$,使当 $x\in I$ 时有恒等式 $k_1y_1(x)+k_2y_2(x)+\cdots+k_ny_n(x)\equiv0$ 成立,

则称 y_1、$y_2\cdots y_n$ 在I上线性相关,否则称线性无关

特别地,对于两个函数 y_1、y_2,则 y_1、y_2 线性相关 $\Leftrightarrow\frac{y_1}{y_2}=C$,C为常数

$\Leftrightarrow(\frac{y_1}{y_2})'=0\Leftrightarrow y_1'y_2-y_2'y_1=0$

定理:若 y_1 与 y_2 均为方程 $y''+P(x)y'+Q(x)y=f(x)$ 的解,则

y_1-y_2 是 $y''+P(x)y'+Q(x)y=0$ 的解

KOKUYO

线性微分方程解的结构

定理：对二阶齐次线性方程 $y''+P(x)y'+Q(x)y=0$ (1)

若函数 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 是 (1) 的两个解，则

解的线性组合 $y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$，C_1、C_2 为任意常数

也是 (1) 的解

特别地，若 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 线性无关，则 y 为 (1) 的通解

推论：对n阶齐次线性方程 $y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=0$ (2)

若函数 $y_1(x)$、$y_2(x)\cdots y_n(x)$ 是 (2) 的n个解，则

解的线性组合 $y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)+\cdots+C_ny_n(x)$　C_1、C_2、$\cdots C_n$ 为任意常数

也是 (2) 的解

特别地，若 $y_1(x)$、$y_2(x)\cdots y_n(x)$ 线性无关，则 y 为 (2) 的通解

定理：对二阶非齐次线性方程 $y''+P(x)y'+Q(x)y=f(x)$ (3)

称 (1) 为 (3) 对应的齐次方程

若 $y^*(x)$ 是 (3) 的一个特解，$Y(x)$ 为 (1) 的通解

则 $y=Y(x)+y^*(x)$ 是 (3) 的通解

非齐通 = 齐通 + 非齐特

可推广至n阶

定理：设 (3) 的右端 $f(x)$ 是两个函数的和，即 $y''+P(x)y'+Q(x)y=f_1(x)+f_2(x)$ (4)

而 $y_1^*(x)$ 是 $y''+P(x)y'+Q(x)y=f_1(x)$ 的特解

$y_2^*(x)$ 是 $y''+P(x)y'+Q(x)y=f_2(x)$ 的特解

则 $y=y_1^*(x)+y_2^*(x)$ 是原方程的特解

可推广至n阶

No.

Date

大 二阶线性方程的常数变易法

① 已知 (1) 的通解为 $Y(x)=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$，则令 $y=y_1(x)v_1(x)+y_2(x)v_2(x)$，可得

(3) 的通解为 $y=C_1y_1+C_2y_2-y_1\int\frac{y_2f}{W}dx+y_2\int\frac{y_1f}{W}dx$

② 已知 (1) 的一个不恒为0的解 $y_1(x)$，则令 $y=u(x)y_1(x)$，可得一阶线性微分方程

$y_1z'+(2y_1'+py_1)z=f$，其中 $z=u'$ (5)

解(5)，得通解 $z=C_2Z(x)+z^*(x)$，则 $u=\int[C_2Z(x)+z^*(x)]dx$

故(3)的通解为 $y=y_1(x)\int[C_2Z(x)+z^*(x)]dx$

求解常系数齐次线性微分方程

二阶常系数齐次线性微分方程 $y''+py'+qy=0$ (6)

求通解的步骤如下：1. 写出(6)的特征方程 $r^2+pr+q=0 \Rightarrow (r-r_1)(r-r_2)=0$

2. 求出特征方程的根 r_1 r_2

3. 对 r_1、r_2 不同情形分类讨论：

特征方程	两个根 r_1, r_2	微分方程 $y''+py'+qy=0$ 的通解
$\Delta=p^2-4q>0$	$r_1\neq r_2$，都为单根	$y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}$
$\Delta=p^2-4q=0$	$r_1=r_2$，为二重根	$y=(C_1+C_2x)e^{r_1x}$
$\Delta=p^2-4q<0$	$r_{1,2}=\alpha\pm\beta i$，为一对共轭复根	$y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$

推广：n阶常系数齐次线性微分方程 $y^{(n)}+p_1y^{(n-1)}+p_2y^{(n-2)}+\cdots+p_{n-1}y'+p_ny=0$

特征方程 $r^n+p_1r^{n-1}+p_2r^{n-2}+\cdots+p_{n-1}r+p_n=0$

求出特征方程的根 $r_1\cdots r_n$ 复数域上有n个根(重根按重数计算)且复根一定共轭成对出现

特征方程的根	给出微分方程通解中对应的项
单实根 r	给出一项 Ce^{rx}
k重实根 r	给出k项 $e^{rx}(C_1+C_2x+\cdots+C_kx^{k-1})$
一对单复根 $r_{1,2}=\alpha\pm\beta i$	给出两项 $e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$
一对k重复根 $r_{1,2}=\alpha\pm\beta i$	给出2k项 $e^{\alpha x}[(C_1+C_2x+\cdots+C_kx^{k-1})\cos\beta x+(D_1+D_2x+\cdots+D_kx^{k-1})\sin\beta x]$ 也是任意常数

将给出的所有项求和便得到通解

No.

Date

常系数非齐次线性微分方程

二阶常系数非齐次线性微分方程 $y''+py'+qy=f(x)$ (7)

对应的齐次线性方程的通解已经给出，下求其特解

1. $f(x)=e^{\lambda x}P_m(x)$ 其中 $P_m(x)$ 为 x 的 m 次多项式

特解形式为 $y^*=x^kR_m(x)e^{\lambda x}$

其中 $R_m(x)$ 是与 $P_m(x)$ 同为 m 次的多项式，k 按 λ 不是特征方程的根、是单根、二重根依次取 0、1、2

推广至 n 阶：k 按 λ 不是特征方程的根、是 s 重根分别取 0、s

2. $f(x)=e^{\lambda x}[P_l(x)\cos\omega x+Q_n(x)\sin\omega x]$ 其中 $P_l(x)$、$Q_n(x)$ 分别是 x 的 l 次、n 次多项式

特解形式为 $y^*=x^ke^{\lambda x}[R_m^{(1)}(x)\cos\omega x+R_m^{(2)}(x)\sin\omega x]$

其中 $m=\max\{l,n\}$，$R_m^{(1)}(x)$、$R_m^{(2)}(x)$ 是两个 x 的 m 次多项式

k 按 $\lambda+\omega i$（或 $\lambda-\omega i$）不是特征方程的根、是单根依次取 0、1

推广至 n 阶：k 是特征方程中含根 $\lambda+\omega i$（或 $\lambda-\omega i$）的重复次数

按形式设出特解 y^* 后，求出 $(y^*)'$、$(y^*)''$… 后代入 (7)，从而确定 $R_m(x)$ 中各项的系数，得到特解

注：形式一的简便方法：

设出特解 $y^*=x^kR_m(x)e^{\lambda x}$，记为 $y^*=R(x)e^{\lambda x}$，若求导后代入 $y''+py'+qy=e^{\lambda x}P_m(x)$，则有

$$R''(x)+(2\lambda+p)R'(x)+(\lambda^2+p\lambda+q)R(x)=P_m(x) \quad (8)$$

其中：若 λ 为一重根，则 $\lambda^2+p\lambda+q=0$，若为二重根，则 $2\lambda+p=\lambda^2+p\lambda+q=0$

若 $R(x)$ 为一次多项式，则 $R''(x)=0$，若为常数，则 $R'(x)=R''(x)=0$

将 $R(x)=x^kR_m(x)$ 代入 (8) 式，定出系数

欧拉方程

形如 $x^ny^{(n)}+p_1x^{n-1}y^{(n-1)}+p_2x^{n-2}y^{(n-2)}+\cdots+p_{n-1}xy'+p_ny=f(x)$

作变换 $x=e^t$，$t=\ln x$，有 $x^ky^{(k)}=D(D-1)\cdots(D-k+1)y$ 其中 D 为 $\frac{d}{dt}$

代入欧拉方程，得到以 t 为自变量的常系数线性微分方程

eg. 求 $x^3y'''+x^2y''-4xy'=3x^2$ 通解，作变换 $x=e^t$，$t=\ln x$，原方程 $\Rightarrow D(D-1)(D-2)y+D(D-1)y-4Dy=3e^{2t}$

即 $D^3y-2D^2y-3Dy=3e^{2t}$，或 $\frac{d^3y}{dt^3}-2\frac{d^2y}{dt^2}-3\frac{dy}{dt}=3e^{2t}$

No.

Date

第九章 多元函数微分法

§9.1 多元函数基本概念

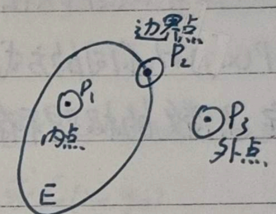
1. 平面点集：坐标平面上具有某种性质P的点的集合. $E=\{(x,y)\mid(x,y)\text{具有性质}P\}$

2. 点P_0的δ邻域 $U(P_0,\delta)=\{P\mid |PP_0|<\delta\}$ 或记为$U_\delta(P_0)$

   点P_0的去心δ邻域 $\mathring{U}(P_0,\delta)=\{P\mid 0<|PP_0|<\delta\}$ 或记为$\mathring{U}_\delta(P_0)$

3. 点和点集间的关系

   任意一点$P\in R^2$与任意一个点集$E\subset R^2$间必有以下三种关系之一



(1) 内点：$\exists U_\delta(P)$, s.t. $U_\delta(P)\subset E$

(2) 外点：$\exists U_\delta(P)$ s.t. $U_\delta(P)\cap E=\phi$

(3) 边界点：$\forall\delta>0$, s.t. $U_\delta(P)\cap E\neq\phi$ 且 $U_\delta(P)\cap E^c\neq\phi$

E的边界点的全体,称为E的边界∂E

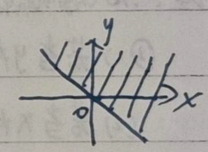
E的边界点分为孤立点和非孤立点. 非孤立的边界点属于聚点.

聚点(极限点)：$\forall\delta>0$, $\mathring{U}(P,\delta)\cap E\neq\phi \xleftrightarrow{\text{等价定义}} \forall\delta>0, U(P,\delta)\cap E$为无限点集

孤立点:点P满足$P\in E$,且$\exists\delta>0$ s.t. $\mathring{U}_\delta(P)\cap E=\phi$

E的内点必属于E、外点必不属于E、边界点可能属于E,也可能不属于E

E的聚点可能属于E,也可能不属于E



4. 有界闭区域$\{(x,y)\mid 1\le x^2+y^2\le 2\}$ 无界开区域$\{(x,y)\mid x+y>0\}$ 无界闭区域$\{(x,y)\mid x+y\ge 0\}$

   $\exists r>0$ s.t. $E\subset U(O,r)$ $\partial E\subset E$

5. 多元函数

定义 设D是R^2的非空子集,称映射$f:D\to R$为定义在D上的二元函数,记为

$$z=f(x,y)\quad (x,y)\in D \quad 或\ z=f(P),\ P\in D$$

其中点集D称为该函数的定义域, x.y为自变量, z为因变量

函数f的值域$f(D)=\{z\mid z=f(x,y),(x,y)\in D\}$

6. 多元函数 $u=f(P)$的自然定义域

   指使这个算式有意义的变元P的值所组成的点集

7. 二元函数$z=f(x,y)$的图形$\{(x,y,z)\mid z=f(x,y),(x,y)\in D\}$是一张曲面

8. 多元函数的极限

定义　设二元函数 $f(P)=f(x,y)$ 的定义域为D，$P_0(x_0,y_0)$ 是D的聚点，若存在常数A，对于任意给定的正数 ε，总存在正数 δ，使当点 $P(x,y)\in D\cap \mathring{U}(P_0,\delta)$ 时，都有

$$|f(x,y)-A|<\varepsilon$$

成立，则称常数A为 $f(x,y)$ 当 $(x,y)\to(x_0,y_0)$ 时的极限

记作 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A$　或 $\lim\limits_{P\to P_0} f(P)=A$

注：$P\to P_0$ 表示点P以任何方式趋于点 P_0，可以沿直线趋近，也可以沿曲线趋近

如果 $P(x,y)$ 以不同的方式（沿不同的路径）趋于 $P_0(x_0,y_0)$ 时，$f(x,y)$ 趋于不同的值，则可断定函数的极限不存在

9. 二重极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ 与二次极限 $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$; $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$

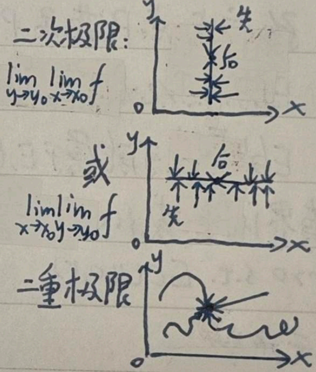
二重极限与二次极限的存在性无关

eg. $\frac{xy}{x^2+y^2}$ 的二重极限不存在，二次极限存在；$x\sin\frac{1}{y}$ 二重极限存在，二次极限可以不存在

定理：设 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A$

(1) 若当 $y\neq y_0$ 时 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$ 存在，则 $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)=A$

(2) 若当 $x\neq x_0$ 时 $\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$ 存在，则 $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)=A$



推论：(1) 若二重极限、两个二次极限均存在，则三者相等

(2) 若两个二次极限存在但不相等，则二重极限不存在

10. 多元函数的连续性

定义：设二元函数 $f(P)=f(x,y)$ 的定义域为D，$P_0(x_0,y_0)$ 为D的聚点，且 $P_0\in D$，若

$$\lim_{(x_0,y_0)\to(x,y)} f(x,y)=f(x_0,y_0)$$

则称函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处连续

若 $f(x,y)$ 在D上每一点都连续，则称 $f(x,y)$ 在D上连续

性质：一切多元初等函数在其定义区域内是连续的　（定义区域：包含在定义域内的区域或闭区域）

求多元初等函数连续性 ⇒ 只需求函数分界点处的连续性

推论：求多元初等函数f在定义区域内一点 P_0 处的极限：直接代入

$$\lim_{P\to P_0} f(P)=f(P_0)$$

11、在有界闭区域D上的多元连续函数的性质

(1) 必定在D上有界，且有最大值和最小值

(2) 必能取得介于最大值和最小值之间的任何值

(3) 必在D上一致连续

§9.2 偏导数

1、定义　设函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某一邻域内有定义，当 y 固定在 y_0 而 x 在 x_0 处有增量 Δx 时，相应的函数 z 有对 x 的偏增量 $f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)$

如果极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$ 存在，则称为函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处对 x 的偏导数，记作 $\dfrac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(x_0,y_0)}$、$\dfrac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(x_0,y_0)}$、$z_x(x_0,y_0)$ 或 $f_x(x_0,y_0)$

即 $f_x(x_0,y_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$

同理，$f_y(x_0,y_0)=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}$

2、若函数 $z=f(x,y)$ 在区域D内每一点处对 x 的偏导数都存在，则这个偏导数就是 x、y 的函数，称为函数 $z=f(x,y)$ 对自变量 x 的偏导函数，记作 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$、$\dfrac{\partial f}{\partial x}$、$z_x$ 或 $f_x(x,y)$

即 $f_x(x,y)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}$，$\forall(x,y)\in D$

同理 $f_y(x,y)=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}$，$\forall(x,y)\in D$

注：1、$f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处对 x 的偏导数 $f_x(x_0,y_0)$ 就是偏导函数 $f_x(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的函数值

2、求函数在某一点的偏导数时，可先将其他变量的值代入，变为一元函数后再求导、代入求值

也可求出函数的偏导数后，代入得函数值

即 $\dfrac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(x_0,y_0)}=\dfrac{d}{dx}f(x,y_0)\Big|_{x=x_0}=f_x(x,y)\Big|_{(x_0,y_0)}$

3、$\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 这一记号是一个整体，不能拆开看作单独的分子与分母

4、偏导数的几何意义：

函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的偏导数 $f_x(x_0,y_0)$，就是过点 $M_0(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ 作平面 $y=y_0$，截曲面 $z=f(x,y)$ 得一曲线，曲线在点 M_0 处的切线对 x 轴的斜率

5、求分段函数在分界点处的偏导数：用定义求

3.高阶偏导数　函数的偏导数的偏导数　$z=f(x,y) \Rightarrow f_x, f_y \Rightarrow f_{xx}, f_{xy}, f_{yx}, f_{yy}$

定理　若函数$z=f(x,y)$的两个二阶混合偏导数f_{xy}、f_{yx}在区域D内都连续，则在D内$f_{xy}=f_{yx}$

即：高阶（≥2阶）混合偏导数在偏导数连续的条件下与求导次序无关

§9.3 全微分

定义　设函数$z=f(x,y)$在点(x,y)的某邻域内有定义，若函数在点(x,y)的全增量

$$\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)$$

可表示为$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho)$

其中A、B是x、y的函数，与Δx、Δy无关，$\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$

则称函数z在点(x,y)可微分，$A\Delta x+B\Delta y$称为函数$z=f(x,y)$在点(x,y)处的全微分，记作dz

即$dz = A\Delta x + B\Delta y$

定理（可微的必要条件）　若函数$z=f(x,y)$在点(x,y)可微分，则该函数在(x,y)的偏导数$\frac{\partial z}{\partial x}$、$\frac{\partial z}{\partial y}$必定存在，且$A=\frac{\partial z}{\partial x}$、$B=\frac{\partial z}{\partial y}$，即函数在$(x,y)$的全微分为$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$（微分的叠加原理）

定理（可微的充分条件）若函数$z=f(x,y)$的偏导数$\frac{\partial z}{\partial x}$、$\frac{\partial z}{\partial y}$在点$(x,y)$处连续，则z在该点可微分

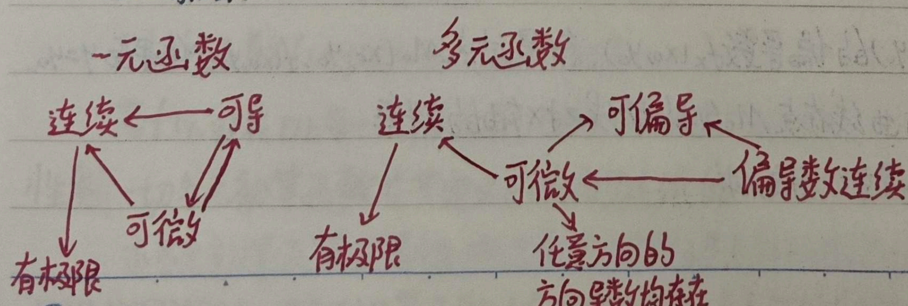
注：1、全微分运算法则：　$d(u\pm v)=du\pm dv$　　$d(uv)=vdu+udv$　　$d(\frac{u}{v})=\frac{vdu-udv}{v^2}$

2、判定$z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)处的可微性

①定义法：　a）判断$f_x(x_0,y_0)$与$f_y(x_0,y_0)$是否都存在

b）$\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \frac{\Delta z-[f_x(x_0,y_0)\Delta x+f_y(x_0,y_0)\Delta y]}{\rho}$是否为0

②关系法：



No.

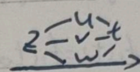
Date

§9.4 多元复合函数的求导法则

条件：外层可微，内层可导

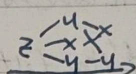
求法：链式法则

eg. 1. $z=f(u,v,w)$，$u=\varphi(t)$、$v=\psi(t)$、$w=\omega(t)$



则 $\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dt}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{dt}+\frac{\partial z}{\partial w}\frac{dw}{dt}$

2. $z=f(u,x,y)$，$u=\varphi(x,y)$

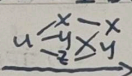


则 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial y}$

注：$\frac{\partial z}{\partial x}$ 是把 z 看作 x、y 的函数，z 对 x 求偏导

$\frac{\partial f}{\partial x}$ 是把 f 看作 u、x、y 三个独立变量的函数，f 对 x 求偏导！

3. $u=f(x,y,z)$，$z=x^2\sin y$



$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}$　$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}$

注：求多元复合函数的高阶偏导数时，一定注意 f_x、f_y 也是 x、y 的函数

全微分形式不变性　对谁求导就乘以谁的微分

设函数 $z=f(u,v)$ 有连续偏导数，则 $dz=\frac{\partial z}{\partial u}du+\frac{\partial z}{\partial v}dv=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$

§9.5 隐函数的求导　隐函数是一个方程 $F(x,\cdots,y)=0$

指隐函数确定的函数关系

① 直接法：对方程两边同时求自变量的偏导数，并注意到 $y=y(x)$ ← 给出方程组时常用直接法

② 公式法：方程 $F(x_1,x_2,\cdots,x_n,y)=0$ 确定一个函数 $y=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，则 $\frac{\partial y}{\partial x_i}=-\frac{F_{x_i}}{F_y}$，$i=1,2,\cdots,n$

③ 全微分法：对方程两边同时求全微分，再移项化为 $dz=\square dx+\square dy$ 的形式

§9.6 多元函数微分学的几何应用

1、一元向量值函数

定义：设数集 $D\subset R$，称映射 $f: D\to R^n$ 为一元向量值函数，记为 $\vec{r}=\vec{f}(t)$，$t\in D$

在 R^3 中，若 $\vec{f}(t)$，$t\in D$ 的三个分量函数依次为 $f_1(t)$、$f_2(t)$、$f_3(t)$，$t\in D$，

则 $\vec{f}(t)=(f_1(t),f_2(t),f_3(t))$，$t\in D$

No.
Date

psp_dada

2. $\lim\limits_{t\to t_0}\vec{f}(t)$ 存在 $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{t\to t_0}f_1(t)$、$\lim\limits_{t\to t_0}f_2(t)$、$\lim\limits_{t\to t_0}f_3(t)$ 均存在

且若 $\lim\limits_{t\to t_0}\vec{f}(t)$ 存在，则 $\lim\limits_{t\to t_0}\vec{f}(t)=\left(\lim\limits_{t\to t_0}f_1(t),\lim\limits_{t\to t_0}f_2(t),\lim\limits_{t\to t_0}f_3(t)\right)$

3. $\vec{f}(t)$ 在 t_0 处连续 $\Leftrightarrow$ $f_1(t)$、$f_2(t)$、$f_3(t)$ 在 t_0 处均连续

即 $\lim\limits_{t\to t_0}\vec{f}(t)=\vec{f}(t_0)$ $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{t\to t_0}f_1(t)=f_1(t_0)$ $\lim\limits_{t\to t_0}f_2(t)=f_2(t_0)$ $\lim\limits_{t\to t_0}f_3(t)=f_3(t_0)$

4. $\vec{f}(t)$ 在 t_0 处可导 $\Leftrightarrow$ $f_1(t)$、$f_2(t)$、$f_3(t)$ 在 t_0 处均可导

且 $\vec{f}(t)$ 在 t_0 处可导时，其导数 $\vec{f}'(t_0)=(f_1'(t_0),f_2'(t_0),f_3'(t_0))$

5. 向量值函数的导数运算法则

设 $\vec{u}(t)$、$\vec{v}(t)$ 是可导的向量值函数，$\vec{C}$ 是常向量，c 为任一常数，$\varphi(t)$ 为可导的数量函数

(1) $\frac{d}{dt}\vec{C}=\vec{0}$　(2) $\frac{d}{dt}[c\vec{u}(t)]=c\vec{u}'(t)$　(3) $\frac{d}{dt}[\vec{u}(t)\pm\vec{v}(t)]=\vec{u}'(t)\pm\vec{v}'(t)$

(4) $\frac{d}{dt}[\varphi(t)\vec{u}(t)]=\varphi'(t)\vec{u}(t)+\varphi(t)\vec{u}'(t)$　(5) $\frac{d}{dt}[\vec{u}(t)\cdot\vec{v}(t)]=\vec{u}'(t)\cdot\vec{v}(t)+\vec{u}(t)\cdot\vec{v}'(t)$

(6) $\frac{d}{dt}[\vec{u}(t)\times\vec{v}(t)]=\vec{u}'(t)\times\vec{v}(t)+\vec{u}(t)\times\vec{v}'(t)$　(7) $\frac{d}{dt}\vec{u}[\varphi(t)]=\varphi'(t)\vec{u}'[\varphi(t)]$

6. 向量值函数 $\vec{r}=\vec{f}(t)$ 的导向量的几何意义

导向量 $\vec{f}'(t_0)=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$ 是向量值函数 $\vec{r}=\vec{f}(t)$ 的终端曲线 Γ 在点 M 处的一个切向量 ($\vec{OM}=\vec{f}(t_0)$)

其指向与 t 增长方向一致

二、空间曲线的切线与法平面

1. 空间曲线 Γ 以参数方程形式给出

$$\begin{cases}x=\varphi(t)\\ y=\psi(t)\\ z=\omega(t)\end{cases}\quad t\in[\alpha,\beta]$$

$t=t_0$ 时对应点 $M(x_0,y_0,z_0)$，则

曲线 Γ 在 M 处的一个切向量 $\vec{T}=(\varphi'(t_0),\psi'(t_0),\omega'(t_0))$

曲线 Γ 在 M 处的切线方程 $\frac{x-x_0}{\varphi'(t_0)}=\frac{y-y_0}{\psi'(t_0)}=\frac{z-z_0}{\omega'(t_0)}$

法平面方程 $\varphi'(t_0)(x-x_0)+\psi'(t_0)(y-y_0)+\omega'(t_0)(z-z_0)=0$

2. 空间曲线 Γ 以如下形式给出，则取 x 为参数，同情况1

$$\begin{cases}y=\varphi(x)\\ z=\psi(x)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=x\\ y=\varphi(x)\\ z=\psi(x)\end{cases}$$

切向量 $\vec{T}=(1,\varphi'(x_0),\psi'(x_0))$

切线方程 $\frac{x-x_0}{1}=\frac{y-y_0}{\varphi'(x_0)}=\frac{z-z_0}{\psi'(x_0)}$

法平面方程 $(x-x_0)+\varphi'(x_0)(y-y_0)+\psi'(x_0)(z-z_0)=0$

Campus

No.

Date

3.空间曲线Γ以两个曲面交成曲线的方式给出

$\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$ 方程两边对x求导，用直接法求出$\frac{dy}{dx}$、$\frac{dz}{dx}$，后同情况二

切向量 $\vec{T}=\left(1, \frac{dy}{dx}\Big|_M, \frac{dz}{dx}\Big|_M\right)$

也可求出两个曲面的法向量$\vec{n_1}$和$\vec{n_2}$，则$\vec{T}=k\vec{n_1}\times\vec{n_2}$

三、曲面的切平面与法线

1.隐式给出曲面方程 $F(x,y,z)=0$

曲面在点M处的法向量 $\vec{n}=(F_x(x_0,y_0,z_0), F_y(x_0,y_0,z_0), F_z(x_0,y_0,z_0))$

法线方程 $\frac{x-x_0}{F_x(x_0,y_0,z_0)}=\frac{y-y_0}{F_y(x_0,y_0,z_0)}=\frac{z-z_0}{F_z(x_0,y_0,z_0)}$

切平面方程 $F_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+F_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0$

2、显函数型式给出曲面方程 $z=f(x,y)$

令$F(x,y,z)=f(x,y)-z$ 　可见$F_x=f_x$，$F_y=f_y$，$F_z=-1$

曲线在点$M(x_0,y_0,z_0)$处的法向量 $\vec{n}=(f_x(x_0,y_0), f_y(x_0,y_0), -1)$

…

§9.7 方向导数与梯度

一、方向导数 是一个数

$\cos^2\alpha+\cos^2\beta=1$

1. 设l是xOy平面上以点$P_0(x_0,y_0)$为始点的一条射线，$\vec{e_l}=(\cos\alpha, \cos\beta)$是与$l$同向的单位向量，

射线l的参数方程为 $\begin{cases} x=x_0+t\cos\alpha \\ y=y_0+t\cos\beta \end{cases}$ $(t\geq 0)$

函数$f(x,y)$在点P_0沿方向l的方向导数为 $\frac{\partial f}{\partial l}\Big|_{(x_0,y_0)}=\lim\limits_{t\to 0^+}\frac{f(x_0+t\cos\alpha, y_0+t\cos\beta)-f(x_0,y_0)}{t}$

几何意义：$\frac{\partial f}{\partial l}\Big|_{(x_0,y_0)}$是函数$f(x,y)$在点$P_0(x_0,y_0)$处沿方向$l$的变化率

2.定理 若函数$f(x,y)$在点$P_0(x_0,y_0)$处可微分，则该函数在该点沿任一方向l的方向导数

①存在，且$\frac{\partial f}{\partial l}\Big|_{(x_0,y_0)}=f_x(x_0,y_0)\cos\alpha+f_y(x_0,y_0)\cos\beta=(f_x(x_0,y_0), f_y(x_0,y_0))\cdot(\cos\alpha,\cos\beta)$

$=\nabla f(x_0,y_0)\cdot\vec{e_l}=|\nabla f(x_0,y_0)|\cos\theta$.

其中$\theta=\langle\nabla f(x_0,y_0), \vec{e_l}\rangle$，$-1\leq\cos\theta\leq 1$

②有界，且$-|\nabla f|\leq\frac{\partial f}{\partial l}\leq|\nabla f|$

注1.若$f(x,y)$在(x_0,y_0)处沿任意方向的方向导数均存在：不能推出$f_x(x_0,y_0)$、$f_y(x_0,y_0)$存在，不能推出可微

2.若$f(x,y)$在(x_0,y_0)处沿x轴正方向和负方向的方向导数均存在且互为相反数，则$f_x(x_0,y_0)$存在

No.

Date

3、函数$f(x,y)$在一点处的梯度∇f 的方向：在该点的方向导数取得最大值的方向

模：方向导数的最大值

① $\theta=0$时，函数值在这个方向上增大最快

② $\theta=\pi$时，函数值在这个方向减小最快

③ $\theta=\frac{\pi}{2}$时，函数值在这个方向不变

4、函数$z=f(x,y)$表示一个曲面，平面曲线L^*：$f(x,y)=c$为函数$z=f(x,y)$的等值线，则等值线$f(x,y)=c$上任一点$P_0(x_0,y_0)$处的一个法向量就是梯度$\nabla f(x_0,y_0)$，且$\nabla f(x_0,y_0)$指向数值更大的等值线，$|\nabla f(x_0,y_0)|$就是沿这个法向量方向的方向导数$\frac{\partial f}{\partial n}$

5、梯度有关性质　设$z=f(x,y)$在D上有一阶连续偏导数，则　$\mathrm{grad} f(x,y)=\nabla f(x,y)=(f_x,f_y)$

i $f\equiv c \Rightarrow \nabla f=0$

ii 线性性．$\forall \alpha,\beta\in R$，有$\nabla(\alpha f+\beta g)=\alpha\nabla f+\beta\nabla g$

iii $\nabla(fg)=g\nabla f+f\nabla g$．　$\nabla\left(\frac{f}{g}\right)=\frac{g\nabla f-f\nabla g}{g^2}$

§9.8 多元函数的极值

一、无条件极值

1.定义．称使$f_x(x_0,y_0)=0$，$f_y(x_0,y_0)=0$同时成立的点(x_0,y_0)为函数$z=f(x,y)$的驻点．驻点是可能极值点

2.定理（极值必要条件）若函数$z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)处可偏导，且在(x_0,y_0)处有极值，则

$$f_x(x_0,y_0)=0,\ f_y(x_0,y_0)=0$$

3.定理（极值充分条件）设函数$z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)某邻域内连续且有二阶连续偏导数，且满足$f_x(x_0,y_0)=0$，$f_y=(x_0,y_0)=0$　令$A=f_{xx}(x_0,y_0)$，$B=f_{xy}(x_0,y_0)$，$C=f_{yy}(x_0,y_0)$，则

(1) $AC-B^2>0$时，(x_0,y_0)处具有极值，且当$A<0$时为极大值，$A>0$时为极小值

(2) $AC-B^2<0$时，(x_0,y_0)处没有极值

(3) $AC-B^2=0$时，不一定，需另作讨论

4.最值可能点：$\underbrace{\text{驻点、偏导数不存在点}}_{\text{极值可能点}}$、边界点．

Campus

No. psp_dada

Date

二、条件极值

(必要条件) 拉格朗日乘数法

要找函数在附加条件下的可能极值点，先作拉格朗日函数，令其对各个自变量的偏导数均为0，解该方程组，得到可能极值点

拉格朗日函数的列写与目标函数自变量个数、附加条件的个数有关

eg. 函数 $u=f(x,y,z)$，附加条件 $\varphi(x,y,z)=0$，$\psi(x,y,z)=0$

拉格朗日函数 $L(x,y,z,\lambda,\mu)=f(x,y,z)+\lambda\varphi(x,y,z)+\mu\psi(x,y,z)$

方程组 $\begin{cases} L_x=f_x(x,y,z)+\lambda\varphi_x(x,y,z)+\mu\psi_x(x,y,z)=0 \\ L_y=0,\ L_z=0,\ L_\lambda=0,\ L_\mu=0 \end{cases}$

第十章 重积分

§10.1 二重积分

1.定义 函数 $f(x,y)$ 在闭区域 D 上的二重积分为积分和的极限

$$\iint_D f(x,y)\,d\sigma=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$$

其中 $f(x,y)$ 为被积函数，$f(x,y)d\sigma$ 为被积表达式，$d\sigma$ 为面积元素，x与y为积分变量，D为积分区域

2.意义

①曲顶柱体的体积是函数 $f(x,y)$ (作为高度) 在底 D 上的二重积分 $V=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i=\iint_D f(x,y)d\sigma$

②平面薄片的质量是其面密度 $\mu(x,y)$ 在所占区域 D 上的二重积分 $m=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\mu(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i=\iint_D \mu(x,y)d\sigma$

3.性质

①线性性 ②对积分区域的可加性 ③ D 的面积 $\sigma=\iint_D 1d\sigma=\iint_D d\sigma$

④保序性 在 D 上 $f(x,y)\le g(x,y)$ 则 $\iint_D f(x,y)d\sigma\le\iint_D g(x,y)d\sigma$

⑤绝对值不等式 $\left|\iint_D f(x,y)d\sigma\right|\le\iint_D|f(x,y)|d\sigma$ $f(x,y)$ 非负或非正时取=，有正有负时取<

⑥二重积分估值定理 设 M、m 是 $f(x,y)$ 在闭区域 D 上的最大值和最小值，σ 是 D 的面积，则

$$m\sigma\le\iint_D f(x,y)d\sigma\le M\sigma$$

⑦二重积分中值定理 设 $f(x,y)$ 在闭区域 D 上连续，σ 是 D 的面积，则在 D 上至少存在一点 (ξ,η)，使得

$$\iint_D f(x,y)d\sigma=f(\xi,\eta)\sigma$$

⑧充分条件 连续必可积

☆ 适用于所有积分

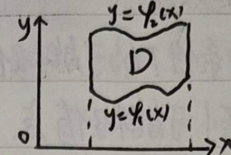
No.

Date

§10.2 二重积分计算法

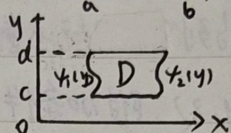
一、直角坐标 $d\sigma = dxdy$

1. X型区域 $D=\{(x,y)\mid \varphi_1(x)\le y\le \varphi_2(x),\ a\le x\le b\}$



先y后x $\iint f(x,y)\,d\sigma = \int_a^b dx\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy$

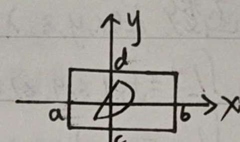
2. Y型区域 $D=\{(x,y)\mid \psi_1(y)\le x\le \psi_2(y),\ c\le y\le d\}$



先x后y $\iint f(x,y)\,d\sigma = \int_c^d dy\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx$

特别地 ① 若积分区域D为长方形，则

$I=\int_a^b dx\int_c^d f(x,y)\,dy = \int_c^d dy\int_a^b f(x,y)\,dx$

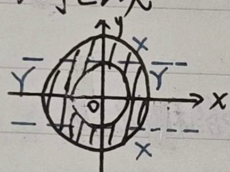


② 且$f(x,y)$满足$f(x,y)=f_1(x)\cdot f_2(y)$，则

$I=\int_a^b dx\int_c^d f_1(x)\cdot f_2(y)\,dy = \int_a^b f_1(x)\,dx\int_c^d f_2(y)\,dy = \left[\int_a^b f_1(x)dx\right]\left[\int_c^d f_2(y)dy\right]$

3. 若不是X、Y型区域：分割区域

eg. 圆环域的分割



二、利用积分区域的对称性化简积分计算 偶倍奇零

① 积分区域D关于X轴对称 X对称看y奇偶

则 $\iint_D f(x,y)dxdy = \begin{cases} 2\iint_{D_1} f(x,y)dxdy, & f(x,-y)=f(x,y) \\ 0, & f(x,-y)=-f(x,y) \end{cases}$

② 积分区域D关于Y轴对称 Y对称看x奇偶

则 $\iint_D f(x,y)dxdy = \begin{cases} 2\iint_{D_1} f(x,y)dxdy, & f(-x,y)=f(x,y) \\ 0, & f(-x,y)=-f(x,y) \end{cases}$

③ 积分区域关于原点中心对称 原点对称看(x,y)奇偶

则 $\iint_D f(x,y)dxdy = \begin{cases} 2\iint_{D_1} f(x,y)dxdy, & f(-x,-y)=f(x,y) \\ 0, & f(-x,-y)=-f(x,y) \end{cases}$

D_1为D的上半部分

5. 利用自变量的轮换对称性

若积分区域D关于直线 $y=x$ 对称

则 $\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_D f(y,x)dxdy$

$=\frac{1}{2}\iint_D [f(x,y)+f(y,x)]dxdy$

进一步地，若$f(x,y)=f(y,x)$，则

$\iint_D f(x,y)dxdy = 2\iint_{D_1} f(x,y)dxdy$

D_1为D关于$y=x$的一半

注：先用对称性、轮换对称性化简，再选用合适坐标系计算

Campus

No.

Date

三、二重积分的换元法

1、二重积分的换元公式

变换 T: $x=x(u,v)$, $y=y(u,v)$ 将 uOv 平面上闭区域 D' 变为 xOy 面上闭区域 D,则

$$d\sigma = dxdy = |J(u,v)|dudv$$

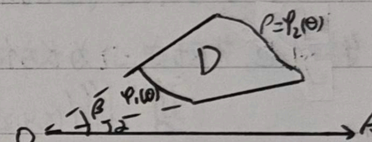
$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D'} f[x(u,v),y(u,v)]\,|J(u,v)|\,dudv$$

其中 $J(u,v)=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}\neq 0$

2、极坐标

① 直角坐标 $(x,y) \Longleftrightarrow$ 极坐标 (ρ,θ)　$\begin{cases}x=\rho\cos\theta\\ y=\rho\sin\theta\end{cases}$

有 $J=\rho$, $d\sigma=\rho d\rho d\theta$



则 $\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_D f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho d\theta = \int_\alpha^\beta d\theta\int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho$

② 何时用极坐标:积分区域:圆、$\overset{\to 长方形}{圆环}$、扇形

被积函数: $f(x^2+y^2) \to \rho^2$、$f(\frac{x}{y})$、$f(\frac{y}{x}) \to \tan\theta$

3、广义极坐标

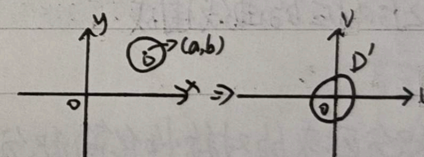
当积分区域为椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 所围成的闭区域

椭圆⇒长方形 $\begin{cases}x=a\rho\cos\theta\\ y=b\rho\sin\theta\end{cases}$, $J=ab\rho$

或用伸缩变换 椭圆⇒圆 $\begin{cases}x=ua\\ y=vb\end{cases}$　$J=ab$

4、坐标系的平移

令 $\begin{cases}u=x-a\\ v=y-b\end{cases}$ 则 $J=1$, $I=\iint_D f(x,y)dxdy=\iint_{D'} f(u+a,v+b)dudv$



特别地,若有需要,可同时用平移+极坐标

$\begin{cases}x-a=\rho\cos\theta\\ y-b=\rho\sin\theta\end{cases}$, $J=\rho$

§10.3 三重积分

1.定义 函数 $f(x,y,z)$ 在闭区域 Ω 上的三重积分为一个积分和的极限

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)dv = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^n f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta v_i$$

其中 $f(x,y,z)$ 为被积函数, dv 为体积元素, Ω 为积分区域　因为 Ω 是三维几何对象,所以用 $\iiint$

2.意义

一物体占有空间闭区域 Ω, $\rho(x,y,z)$ 为其在点 (x,y,z) 处的密度,则其质量为 $M=\iiint_\Omega \rho(x,y,z)dV$

体密度

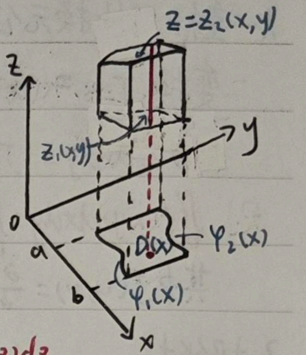
No.

Date

二、三重积分的计算

1.直角坐标系 $dv=dxdydz$

① 先一后二法(投影法) Ω是"曲顶曲底柱体"



特点 1:平行于z轴的直线与Ω的上下底面至多有两个交点。

2:Ω在xoy面上的投影区域适合用直角坐标描述(X型、Y型)

$\Omega:\{(x,y,z)\mid a\le x\le b,\ \varphi_1(x)\le y\le \varphi_2(x),\ z_1(x,y)\le z\le z_2(x,y)\}$,则

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)dv=\iint_D\left[\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)}f(x,y,z)dz\right]dxdy=\int_a^b dx\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}dy\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)}f(x,y,z)dz$$

做法: ①写出Ω对应的不等式 ②写三次积分

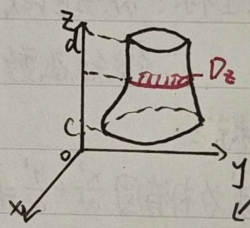
特别地,若区域Ω为长方体且被积函数 $f(x,y,z)=\varphi(x)\psi(y)\omega(z)$,则

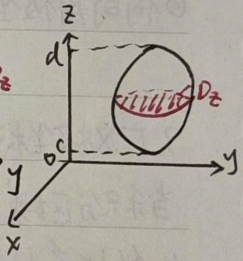
$$\iiint_\Omega f(x,y,z)dv=\left[\int_a^b\varphi(x)dx\right]\left[\int_c^d\psi(y)dy\right]\left[\int_e^f\omega(z)dz\right]$$

② 先二后一法(截面法) Ω是平行截面已知的立体

$\Omega:\{(x,y,z)\mid c\le z\le d,\ (x,y)\in D_z\}$,则

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)dv=\int_c^d dz\iint_{D_z}f(x,y,z)dxdy$$





注: D_z是由Ω的侧面方程 $F(x,y,z)=0$ 中将z看成常数之后对应的曲线围成

2.利用积分区域的对称性化简积分计算 偶倍奇零

①积分区域Ω关于xOy面对称, 面对称看轴奇偶

则 $\iiint_\Omega f(x,y,z)dv=\begin{cases}2\iiint_{\Omega_1}f(x,y,z)dv, & f(x,y,-z)=f(x,y,z)\\ 0, & f(x,y,-z)=-f(x,y,z)\end{cases}$

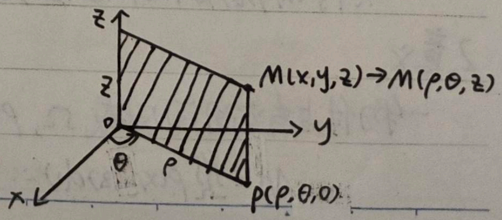
3.利用轮换对称性 本质:积分与积分变量无关

若x、y、z互换时积分区域Ω不变,则 $\iiint_\Omega f(x,y,z)dv=\iiint_\Omega f(y,z,x)dv=\cdots$ eg. $x^2+y^2+z^2\le R^2$

如 $\iiint_\Omega f(x)dv=\iiint_\Omega f(y)dv=\iiint_\Omega f(z)dv$

4.柱面坐标系 柱面坐标 (ρ,θ,z) = 平面上的极坐标+z轴

$\begin{cases}x=\rho\cos\theta\\ y=\rho\sin\theta\\ z=z\end{cases}$ 其中 $0\le\rho<+\infty$, $0\le\theta\le 2\pi$, $-\infty<z<+\infty$



坐标面: ρ=常数 以z轴为轴的圆柱面

θ=常数 过z轴的半平面

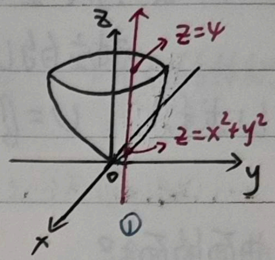
z=常数 与xOy面平行的平面

小恒等式 $x^2+y^2=\rho^2$

计算方法　先一后二法(投影穿线法)　$dV=\rho d\rho d\theta dz$

特点：Ω是"曲顶曲底柱体"，投影区域适合用极坐标系描述

$\Omega:\{(\rho,\theta,z)\mid \underbrace{\alpha\le\theta\le\beta,\ \varphi_1(\theta)\le\rho\le\varphi_2(\theta)}_{\text{投影}D},\ z_1(\rho,\theta)\le z\le z_2(\rho,\theta)\}$



则 $\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dV=\iiint\limits_{\Omega} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta,z)\rho d\rho d\theta dz$

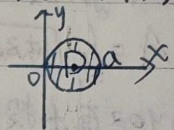
$=\int_\alpha^\beta d\theta\int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)}d\rho\int_{z_1(\rho,\theta)}^{z_2(\rho,\theta)}f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta,z)\rho dz$

eg①Ω是由$z=x^2+y^2$与$z=4$围成的闭区域，则

Ω在xoy面上投影域$D:x^2+y^2\le4$　则$\Omega:\{(\rho,\theta,z)\mid 0\le\theta\le2\pi,\ 0\le\rho\le2,\ \rho^2\le z\le4\}$

②设Ω是$0\le z\le\sqrt{a^2-x^2-y^2}$(半球)与$x^2+y^2\le ax$(圆柱面)的公共部分，求$\Omega$

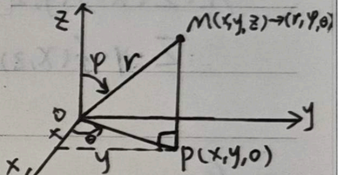
Ω在xoy面上投影域$D:x^2+y^2\le ax$



$\Omega:\{(\rho,\theta,z)\mid -\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2},\ 0\le\rho\le a\cos\theta,\ 0\le z\le\sqrt{a^2-\rho^2}\}$

5. 球面坐标系

球面坐标(r,φ,θ)



$\begin{cases}x=r\sin\varphi\cos\theta\\ y=r\sin\varphi\sin\theta\\ z=r\cos\varphi\end{cases}$　其中 $0\le r<+\infty$，$0\le\varphi\le\pi$，$0\le\theta\le2\pi$

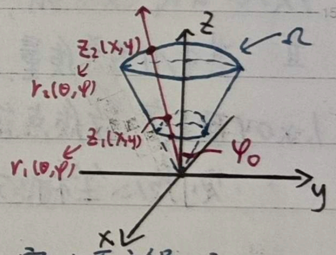
坐标面：r=常数　以原点为心的球面

φ=常数　以原点为顶点、z轴为轴的圆锥面

θ=常数　过z轴的半平面

恒等式：$x^2+y^2+z^2=r^2$

计算方法　定角穿线法　$dV=r^2\sin\varphi dr d\varphi d\theta$



特点：要求Ω为球体或锥体与曲面围成的立体(曲顶曲底锥体)

$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dV=\iiint\limits_{\Omega} f(r\sin\varphi\cos\theta,r\sin\varphi\sin\theta,r\cos\varphi)r^2\sin\varphi dr d\varphi d\theta$

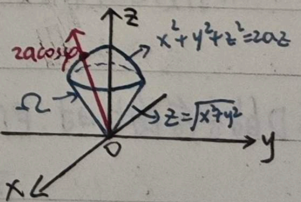
Ω：③$\alpha\le\theta\le\beta$(投影域的极角)　②$0\le\varphi\le\varphi_0$(φ_0为锥面半顶角)　①$r_1(\theta,\varphi)\le r\le r_2(\theta,\varphi)$

穿入曲面方程　穿出曲面方程

$=\int_\alpha^\beta d\theta\int_0^{\varphi_0}\sin\varphi d\varphi\int_{r_1(\theta,\varphi)}^{r_2(\theta,\varphi)}f\cdot r^2dr$

注意把方程改写为球面坐标下的方程

eg. Ω为$x^2+y^2+z^2\le2az$，$(a>0)$与$z\ge\sqrt{x^2+y^2}$的公共部分，求Ω



则$\Omega:\{(r,\varphi,\theta)\mid 0\le\theta\le2\pi,\ 0\le\varphi\le\frac{\pi}{4},\ 0\le r\le2a\cos\varphi\}$

6. 三重积分换元法

设$f(x,y,z)$在Ω上连续，作变换$\begin{cases}x=x(u,v,w)\\ y=y(u,v,w)\\ z=z(u,v,w)\end{cases}$

有$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dV=\iiint\limits_{\Omega'} f[x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w)]\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right|dudvdw$

No.

Date

§10.4 重积分的应用

方法：元素法

a) 求元素：所求量 U 与某个闭区域 D（或 Ω）有关，将 D 或 Ω 任意分割，任取其中的一小块，其上对应的 U 的部分量为 ΔU，设 U 的元素为 dU，有 $\Delta U \approx dU$

b) 求积分：$U=\iint_D dU$ 或 $U=\iiint_\Omega dU$

一、曲面的面积

设曲面方程 $\Sigma: z=f(x,y)$，其在 xOy 面上的投影域为 D_{xy}，则

曲面 Σ 的面积元素 $dA=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy$

曲面 Σ 的面积 $A=\iint_{D_{xy}}\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy$

注：$\Sigma: x=f(y,z)$ 则向 yOz 面上投影 $A=\iint_{D_{yz}}\sqrt{1+x_y^2+x_z^2}\,dydz$

$\Sigma: y=f(x,z)$ 则向 xOz 面上投影 $A=\iint_{D_{xz}}\sqrt{1+y_x^2+y_z^2}\,dxdz$

二、质心

质心公式 $\bar{x}=\dfrac{M_y}{M}$，$\bar{y}=\dfrac{M_x}{M}$

其中 M 为总质量，M_y 为物体对 y 轴的静矩，M_x 为物体对 x 轴的静矩

1. xOy 面上离散质点系，n 个质点位于 $(x_1,y_1)\cdots(x_n,y_n)$，质量分别为 $m_1,m_2,\cdots,m_n$

则质心坐标 $\bar{x}=\dfrac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$，$\bar{y}=\dfrac{\sum_{i=1}^n m_i y_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$

2. xOy 面上的薄片，占有闭区域 D，在 (x,y) 处面密度 $\mu(x,y)$

则质心坐标 $\bar{x}=\dfrac{\iint_D x\rho(x,y)\,d\sigma}{\iint_D \rho(x,y)\,d\sigma}$，$\bar{y}=\dfrac{\iint_D y\rho(x,y)\,d\sigma}{\iint_D \rho(x,y)\,d\sigma}$

若 D 的密度均匀时，即 ρ 为常数，质心（称为形心）公式为

$\bar{x}=\frac{1}{A}\iint_D x\,d\sigma$，$\bar{y}=\frac{1}{A}\iint_D y\,d\sigma$ $A=\iint_D d\sigma$ 为闭区域 D 的面积

注：求质心/形心时，先观察所给区域的对称性，得出某坐标分量为0

3. 推广：空间物体占有空间区域 Ω，密度 $\rho(x,y,z)$，

质心公式：$\bar{x}=\dfrac{\iiint_\Omega x\rho(x,y,z)dv}{\iiint_\Omega \rho(x,y,z)dv}$，$\bar{y}=\dfrac{\iiint_\Omega y\rho(x,y,z)dv}{\iiint_\Omega \rho(x,y,z)dv}$，$\bar{z}=\dfrac{\iiint_\Omega z\rho(x,y,z)dv}{\iiint_\Omega \rho(x,y,z)dv}$

当 ρ 为常数，形心公式：$\bar{x}=\frac{1}{V}\iiint_\Omega x\,dv$，$\bar{y}=\frac{1}{V}\iiint_\Omega y\,dv$，$\bar{z}=\frac{1}{V}\iiint_\Omega z\,dv$，$V$ 为 Ω 的体积

三、转动惯量

1. xOy 面上离散质点系，n 个质点位于 $(x_1,y_1),\cdots,(x_n,y_n)$，质量分别为 $m_1,m_2,\cdots,m_n$

质点系对 x 轴、y 轴的转动惯量 $I_x=\sum_{i=1}^{n} y_i^2 m_i$，$I_y=\sum_{i=1}^{n} x_i^2 m_i$

2. xOy 面上的薄片，占有区域 D 面密度 $\mu(x,y)$

薄片对 x 轴、y 轴的转动惯量 $I_x=\iint_D y^2\mu(x,y)d\sigma$，$I_y=\iint_D x^2\mu(x,y)d\sigma$

注：若要求区域对任一直线 l 的转动惯量，

则求出点 (x,y) 到 l 的距离 $d(x,y)$，有 $I_l=\iint_D d^2(x,y)\rho(x,y)d\sigma$

3. 推广：空间物体 Ω，密度 $\rho(x,y,z)$ 到 x 轴、y 轴、z 轴的转动惯量

$I_x=\iiint_\Omega (y^2+z^2)\rho(x,y,z)dv$，$I_y=\iiint_\Omega (x^2+z^2)\rho(x,y,z)dv$，$I_z=\iiint_\Omega (x^2+y^2)\rho(x,y,z)dv$

四、引力

求立体 Ω（体密度为 $\rho(x,y,z)$）对立体外一质点 $P(x_0,y_0,z_0)$（质量为 m）的引力

引力元素 $dF=G\dfrac{m\rho(x,y,z)dv}{|\vec{r}|^2}$，$\vec{r}=(x-x_0,y-y_0,z-z_0)$

引力的分力元素 $dF_x=dF\cos\alpha=dF\dfrac{x-x_0}{|\vec{r}|}=G\dfrac{m\rho(x-x_0)}{|\vec{r}|^3}dv$，$dF_y=G\dfrac{m\rho(y-y_0)}{|\vec{r}|^3}dv$，$dF_z=G\dfrac{m\rho(z-z_0)}{|\vec{r}|^3}dv$

积分，得引力 $\vec{F}=(F_x,F_y,F_z)=\left(\iiint_\Omega \dfrac{Gm\rho(x,y,z)(x-x_0)}{r^3}dv,\iiint_\Omega \dfrac{Gm\rho(x,y,z)(y-y_0)}{r^3}dv,\iiint_\Omega \dfrac{Gm\rho(x,y,z)(z-z_0)}{r^3}dv\right)$

若质点为单位质量，则 $m=1$

注：求引力时，先观察所给区域的对称性，得出某分力为0。

第十一章 曲线积分与曲面积分 均有代入性质

§11.1 对弧长的曲线积分（第一类曲线积分）

一、1.定义 设L为xOy面内一条光滑曲线弧，函数$f(x,y)$在L上有界，则第一类曲线积分

$$\int_L f(x,y)ds=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i$$

其中$f(x,y)$称为被积函数，L称为积分弧段，ds称为弧微分

注：1.当$f(x,y)$在L上连续时，$\int_L f(x,y)ds$存在；$\int_L f(x,y)ds$存在时，$f(x,y)$在L上有界

2.意义

①曲线形构件占有曲线弧L，线密度$\mu(x,y)$在L上连续，则质量 $m=\int_L \mu(x,y)ds$

②曲顶平底柱面Ω，顶为$z=f(x,y)$，底为xOy面上的L，则面积 $A=\int_L f(x,y)ds$

3.推广：

函数$f(x,y,z)$在空间曲线弧Γ上对弧长的曲线积分 $\int_\Gamma f(x,y,z)ds=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta s_i$

4.性质：

①线性性 ②对积分曲线的可加性 ③保序性 ④绝对值不等式 ⑤$\int_L ds$即L的弧长

⑥积分估值定理、积分中值定理 ⑦对弧长的曲线积分与积分弧段方向无关

二、对弧长的曲线积分的计算法 参数化

1.定理 设$f(x,y)$在曲线弧L上连续，L的参数方程为$\begin{cases}x=\varphi(t)\\y=\psi(t)\end{cases}$ $(\alpha\le t\le\beta)$

若$\varphi(t)$、$\psi(t)$在$[\alpha,\beta]$上一阶连续可导且$\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)\neq 0$，则曲线积分$\int_L f(x,y)ds$存在，且

$$\int_L f(x,y)ds=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t),\psi(t)]\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt\quad(\alpha<\beta)$$

其中弧长的微分 $ds=\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt$

注：1.定积分的下限α一定小于上限β

2.若曲线弧L由 $y=\psi(x)$ $(x_0\le x\le X)$ 给出，可看做$\begin{cases}x=x\\y=\psi(x)\end{cases}$，$x_0\le x\le X$

从而$\int_L f(x,y)ds=\int_{x_0}^{X}f[x,\psi(x)]\sqrt{1+\psi'^2(x)}\,dx\quad(x_0<X)$

若曲线弧L由 $x=\varphi(y)$ $(y_0\le y\le Y)$ 给出，可看做$\begin{cases}x=\varphi(y)\\y=y\end{cases}$ $y_0\le y\le Y$

从而$\int_L f(x,y)ds=\int_{y_0}^{Y}f[\varphi(y),y]\sqrt{\varphi'^2(y)+1}\,dy\quad(y_0<Y)$

3.推广：对空间曲线弧Γ由参数方程给出

$\Gamma:\begin{cases}x=\varphi(t)\\y=\psi(t)\\z=\omega(t)\end{cases}$ $(\alpha\le t\le\beta)$ $\int_\Gamma f(x,y,z)ds=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t),\psi(t),\omega(t)]\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)+\omega'^2(t)}\,dt$

3.利用轮换对称性：若平面曲线L关于y=x对称，则：$\int_L f(x,y)ds=\int_L f(y,x)ds=\frac{1}{2}\int_L[f(x,y)+f(y,x)]ds$

2.利用积分曲线的对称性化简积分计算 偶倍奇零

① 平面曲线L关于x轴对称，设L_1为L的$y\geq 0$部分 x对称看y奇偶；y对称看x奇偶

则 $\int_L f(x,y)ds=\begin{cases}2\int_{L_1}f(x,y)ds, & f(x,-y)=f(x,y) \text{ 即}f(x,y)\text{是关于}y\text{的偶函数} \\ 0 & f(x,-y)=-f(x,y) \text{ 即}f(x,y)\text{是关于}y\text{的奇函数}\end{cases}$

§11.2 对坐标的曲线积分（第二类曲线积分）

一、1.定义 设L为xOy面内从点A到点B的一条有向光滑曲线弧，$P(x,y)$与$Q(x,y)$在L上有界

则对坐标x的曲线积分 $\int_L P(x,y)dx=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}P(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i$

对坐标y的曲线积分 $\int_L Q(x,y)dy=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}Q(\xi_i,\eta_i)\Delta y_i$

其中$P(x,y)$、$Q(x,y)$为被积函数，L为积分弧段

注：$\int_L P(x,y)dx+\int_L Q(x,y)dy\triangleq\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy\triangleq\int_L \vec{F}(x,y)\cdot d\vec{r}$

其中$\vec{F}(x,y)=P(x,y)\vec{i}+Q(x,y)\vec{j}$ 为向量值函数，$d\vec{r}=dx\vec{i}+dy\vec{j}$

2.意义

质点在xOy面内受到力$\vec{F}(x,y)=P(x,y)\vec{i}+Q(x,y)\vec{j}$的作用，从点A沿光滑曲线弧运动到B，则

变力$\vec{F}$做功 $W=\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int_L\vec{F}(x,y)\cdot d\vec{r}$

3.推广

定义 $\int_\Gamma P(x,y,z)dx=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta x_i$，$\int_\Gamma Q(x,y,z)dy$，$\int_\Gamma R(x,y,z)dz$

注：$\int_\Gamma P(x,y,z)dx+\int_\Gamma Q(x,y,z)dy+\int_\Gamma R(x,y,z)dz\triangleq\int_\Gamma P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz$

$\triangleq\int_\Gamma\vec{A}(x,y,z)d\vec{r}$ 其中$\vec{A}(x,y,z)=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}$，$d\vec{r}=dx\vec{i}+dy\vec{j}+dz\vec{k}$

4.性质

① 线性性 ② 可加性

③ 方向性 设L是有向光滑曲线弧，L^-是L的反向曲线弧，则$\int_{L^-}\vec{F}(x,y)d\vec{r}=-\int_L\vec{F}(x,y)\cdot d\vec{r}$

No.

Date

二、对坐标的曲线积分的计算法 参数化

1.定理 设 $P(x,y)$、$Q(x,y)$ 在有向曲线弧 L 上连续. L 的参数方程为 $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$

当参数 t 单调地从 α 变到 β 时，点 $M(x,y)$ 从 L 的起点 A 沿 L 运动到终点 B. 若 $\varphi(t)$、$\psi(t)$ 在 $t\in[\alpha,\beta]$ 上一阶连续可导且 $\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)\neq 0$，则 $\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ 存在，且

$$\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int_\alpha^\beta\{P[\varphi(t),\psi(t)]\varphi'(t)+Q[\varphi(t),\psi(t)]\psi'(t)\}dt$$

注：下限 α 对应 L 的起点，上限 β 对应 L 的终点，α 不一定小于 β

2. 若曲线弧 L $\begin{cases} x=x \\ y=\psi(x) \end{cases}$ $x: \underset{起点}{a} \longrightarrow \underset{终点}{b}$，则

$$\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int_a^b\{P[x,\psi(x)]+Q[x,\psi(x)]\psi'(x)\}dx$$

若曲线弧 L $\begin{cases} x=\varphi(y) \\ y=y \end{cases}$ $y: \underset{起点}{c} \longrightarrow \underset{终点}{d}$ 则

$$\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int_c^d\{P[\varphi(y),y]\varphi'(y)+Q[\varphi(y),y]\}dy$$

3. 推广：空间曲线 Γ: $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $z=\omega(t)$ $t: \underset{起点}{\alpha} \longrightarrow \underset{终点}{\beta}$，则

$$\int_\Gamma P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz$$
$$=\int_\alpha^\beta\{P[\varphi(t),\psi(t),\omega(t)]\varphi'(t)+Q[\varphi(t),\psi(t),\omega(t)]\psi'(t)+R[\varphi(t),\psi(t),\omega(t)]\omega'(t)\}dt$$

三、两类曲线积分之间的关系

1. 设有向曲线弧 L: $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$，$L$ 的起点对应参数 α，终点对应参数 β，不妨设 $\alpha<\beta$

有向曲线弧 L 的切向量 $\vec{\tau}=\varphi'(t)\vec{i}+\psi'(t)\vec{j}$ 为 L 在点 $M(\varphi(t),\psi(t))$ 处指向与有向曲线弧方向一致的切向量，其方向余弦为 $\cos\alpha=\dfrac{\varphi'(t)}{\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}}$，$\cos\beta=\dfrac{\psi'(t)}{\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}}$

则平面曲线弧 L 上两类曲线积分之间有如下联系

有向 $\int_L Pdx+Qdy=\int_L(\underset{无向}{P}\cos\alpha+Q\cos\beta)ds$ 形式上，有 $ds\cos\alpha=dx$，$ds\cos\beta=dy$

其中 $\alpha(x,y)$ 与 $\beta(x,y)$ 为有向曲线弧 L 在点 (x,y) 处的切向量的方向角

推广：$\int_\Gamma Pdx+Qdy+Rdz=\int_\Gamma(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)ds$

即：$\int_\Gamma \vec{A}\,d\vec{r}=\int_\Gamma \vec{A}\cdot\vec{\tau}\cdot ds=\int_\Gamma A_\tau ds$

其中 $\vec{A}=(P,Q,R)$；$\vec{\tau}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ 为有向曲线弧 Γ 在点 (x,y,z) 处的单位切向量

$d\vec{r}=\vec{\tau}ds=(dx,dy,dz)$ 为有向曲线元；A_τ 为 $\vec{A}$ 在 $\vec{\tau}$ 上的投影

Campus

§11.3 格林公式

一、格林公式 平面闭区域上二重积分 $\longleftrightarrow$ 边界曲线上曲线积分

1.定理 条件:① 设闭区域D由分段光滑的曲线L围成,若② 函数 $P(x,y)$、$Q(x,y)$ 在D上具有一阶连续偏导数,则

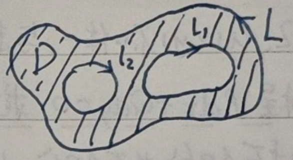
$$\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\oint_L Pdx+Qdy$$

其中③ L是D的取正向的边界曲线　　正向:  外逆内顺

注:1. 若D为复连通区域,则格林公式右端应包括沿区域D的全部边界的曲线积分

"挖洞问题" eg. D由一条外边界和n条内边界围成,且内边界不相交、不包含,n+1条边界均取正向,则

$$\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\left(\oint_L+\sum_{i=1}^{n}\oint_{l_i}\right)Pdx+Qdy$$



2. 若取 $P=-y$, $Q=x$,则有 $2\iint_D dxdy=\oint_L xdy-ydx$

即闭区域D的面积A为 $A=\frac{1}{2}\oint_L xdy-ydx$

二、平面上第二型曲线积分与路径无关的条件

1.定义: 设G为一个区域,$P(x,y)$、$Q(x,y)$ 在G内有一阶连续偏导数,

若对G内任意两点A、B及G内从A到B的任意两条曲线 L_1、L_2,都有

$$\int_{L_1}Pdx+Qdy=\int_{L_2}Pdx+Qdy \quad 恒成立$$

则称曲线积分 $\int_L Pdx+Qdy$ 在G内与路径无关

2.性质: 曲线积分 $\int_L Pdx+Qdy$ 在G内与路径无关 $\Leftrightarrow$ 对G内任意闭合曲线C,都有 $\oint_C Pdx+Qdy=0$

3.定理: 设区域G是一个单连通域,若 $P(x,y)$、$Q(x,y)$ 在G内具有一阶连续偏导数,则有以下等价条件

$\int_L Pdx+Qdy$ 在G内与路径无关 $\Longleftrightarrow$ $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$ 在G内恒成立 $\Longleftrightarrow$ $\forall$闭曲线 $L\subset G$,恒有 $\oint_L Pdx+Qdy=0$

注:1. 定理条件为"G是单连通域""$P(x,y)$、$Q(x,y)$在G内有一阶连续偏导",缺一不可

称在区域内破坏P、Q、$\frac{\partial Q}{\partial x}$、$\frac{\partial P}{\partial y}$连续性条件的点为奇点

2. 若第二类曲线积分与路径无关,只与起点 $A(x_0,y_0)$、终点 $B(x_1,y_1)$ 有关,则可记为

$$\int_{(x_0,y_0)}^{(x_1,y_1)}P(x,y)dx+Q(x,y)dy$$

3. 在实际计算第二类曲线积分时,若判别出在G内曲线积分与路径无关,则

可改变积分曲线,寻找更易计算的积分弧段(一般采用折线法)

路径选平行于x、y轴的

4.意义:

势场、保守力 $\Rightarrow$ 场力做功与路径无关 $\Rightarrow$ 曲线积分与路径无关

No.

Date

三、二元函数的全微分求积

定理 设区域G是一个单连通域，若$P(x,y)$、$Q(x,y)$在G内具有一阶连续偏导数，则

$\int_L Pdx+Qdy$ 在G内与路径无关 $\Longleftrightarrow$ 在G内存在$u(x,y)$，使 $du=P(x,y)dx+Q(x,y)dy$

求$u(x,y)$ 法一：$u(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ (1)

(1)化简得① $u(x,y)=\int_{x_0}^{x}P(x,y_0)dx+\int_{y_0}^{y}Q(x,y)dy$ 或② $u(x,y)=\int_{y_0}^{y}Q(x_0,y)dy+\int_{x_0}^{x}P(x,y)dx$

求法：根据区域G找一个简单起点(如(0,0)、(1,0))，终点(x,y) 沿折线分段积分，用(1)式求出$u(x,y)$

法二：不定积分法：由于$u_x=P$，$u_y=Q$，则$u(x,y)=\int Pdx=\int Qdy$

法三：凑微分法：已验证$Pdx+Qdy$是某个函数u的全微分，则可凑微分 $Pdx+Qdy=du$

全微分方程 $Pdx+Qdy=0$ 求法：按上述定理，有 $du(x,y)=Pdx+Qdy$ 则方程的解为 $u(x,y)=C$

§11.4 对面积的曲面积分（第一类曲面积分）

一、概念与性质

1.定义 设有光滑曲面Σ，函数$f(x,y,z)$在Σ上有界，则第一类曲面积分

$$\iint_{\Sigma}f(x,y,z)dS=\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i$$

其中$f(x,y,z)$称为被积函数；Σ称为积分曲面，是一个二维几何对象；dS为曲面的面积元素

注：1.连续 ⇒ 可积。 2. 若Σ为闭曲面，则在Σ上积分记为 $\oint\!\!\oint_{\Sigma}f(x,y,z)dS$

2.意义：

若光滑曲面Σ的面密度$\mu(x,y,z)$为一连续函数，则Σ的质量为 $m=\iint_{\Sigma}\mu(x,y,z)dS$

3.性质：（类似第一类曲线积分）

二、计算方法 口诀："一投、二代、三微变" 对称性：面对称看轴奇偶，偶倍奇零

定理：设积分曲面Σ：$z=z(x,y)$，Σ在xOy面上的投影域为D_{xy}；（不能向投影为零的坐标面投影）

且$z=z(x,y)$在D_{xy}上具有连续偏导数，被积函数$f(x,y,z)$在Σ上连续，则

$$\iint_{\Sigma}f(x,y,z)dS=\iint_{D_{xy}}f[x,y,z(x,y)]\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\cdot dxdy$$

说明：①将Σ改为D_{xy} ②将变量z换为$z(x,y)$ ③将dS换为$\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy$

注：1.若Σ：$x=x(y,z)$，投影域为D_{yz}，则 $\iint_{\Sigma}f(x,y,z)dS=\iint_{D_{yz}}f(x(y,z),y,z)\sqrt{1+x_y^2+x_z^2}\,dydz$

若Σ：$y=y(z,x)$，投影域为D_{zx}，则 $\iint_{\Sigma}f(x,y,z)dS=\iint_{D_{zx}}f(x,y(z,x),z)\sqrt{1+y_z^2+y_x^2}\,dzdx$

2.曲面面积公式 $A=\iint_{\Sigma}dS=\iint_{D_{xy}}\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy$

3.若Σ向某坐标面的投影有重点则应将Σ分成投影无重点的若干部分，分别积分再相加。

No.

Date

§11.5 对坐标的曲面积分（第二类曲面积分）

一、概念与性质

1.定义 设Σ为光滑的有向曲面，函数$R(x,y,z)$在Σ上有界，则

函数$R(x,y,z)$在有向曲面Σ上对坐标x、y的曲面积分为

$$\iint_\Sigma R(x,y,z)dxdy=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{xy}$$

其中$R(x,y,z)$称为被积函数；Σ称为积分曲面，为二维的几何对象

类似地，$P(x,y,z)$在有向曲面Σ上对坐标y、z的曲面积分为

$$\iint_\Sigma P(x,y,z)dydz=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{yz}$$

$Q(x,y,z)$在有向曲面Σ上对坐标z、x的曲面积分为

$$\iint_\Sigma Q(x,y,z)dzdx=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{zx}$$

注：1.简写 $\iint_\Sigma Pdydz+\iint_\Sigma Qdzdx+\iint_\Sigma Rdxdy=\iint_\Sigma Pdydz+Qdzdx+Rdxdy$

2.Σ封闭时，记 $\oiint_\Sigma$

P.Q.R是速度沿三个坐标轴的分量

2.意义 设稳定流动的不可压缩的流体密度为1，其速度场为$\vec{v}(x,y,z)=(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z))$

则流向一有向曲面Σ指定侧的流量Φ（单位时间内流向Σ指定侧的流体的质量）为

$$\Phi=\iint_\Sigma P(x,y,z)dydz+Q(x,y,z)dzdx+R(x,y,z)dxdy$$

3.性质（类似第二类曲线积分）

· 设Σ为有向曲面，Σ^-表示与Σ取相反侧的有向曲面，则 $\iint_{\Sigma^-}=-\iint_\Sigma$

· 代入性质 若$\Sigma: z=z(x,y)$，则 $\iint_\Sigma R(x,y,z)dxdy=\iint_\Sigma R(x,y,z(x,y))dxdy$

二、计算方法：口诀“一投、二代、三定号”

设Σ上任一点处正向法向量$\vec{n}$指向一致，则

1. $\Sigma: z=z(x,y)$时 $\iint_\Sigma R(x,y,z)dxdy=\pm\iint_{D_{xy}}R(x,y,z(x,y))dxdy$

$\vec{n}$与z轴夹锐角（即取上侧为正侧时）取“+”；$\vec{n}$与z轴夹钝角（即取下侧为正侧时）取“−”

2. $\Sigma: x=x(y,z)$时 $\iint_\Sigma P(x,y,z)dydz=\pm\iint_{D_{yz}}P(x(y,z),y,z)dydz$

与x轴夹锐角 前侧 “+”；与x轴夹钝角 后侧 “−”

3. $\Sigma: y=y(z,x)$时 $\iint_\Sigma Q(x,y,z)dzdx=\pm\iint_{D_{zx}}Q(x,y(z,x),z)dzdx$

与y轴夹锐角 右侧 “+”；与y轴夹钝角 左侧

KOKUYO

2、曲面积分坐标类型 ⟶ 投影坐标面

dydz　　yOz

dzdx　　zOx

dxdy　　xOy

注：1.投影不能有重点，否则应将有向曲面分割成投影无重点的若干部分

4、第二类曲面积分的对称性简化计算　面对称看轴奇偶，奇倍偶零（取决于曲面正向的取法）

① 设曲面Σ关于xOy面对称，xOy面的上半部分为Σ_1，取上侧，xOy面的下半部分为Σ_2，取下侧

则 $\iint\limits_{\Sigma} R(x,y,z)dxdy = \begin{cases} 2\iint\limits_{\Sigma_1} R(x,y,z)dxdy & R(x,y,z)\text{关于}z\text{是奇函数} \\ 0 & R(x,y,z)\text{关于}z\text{是偶函数} \end{cases}$

三、两类曲面积分之间的关系

1. 设一有向曲面Σ，函数$P(x,y,z)$、$Q(x,y,z)$、$R(x,y,z)$在Σ上连续，则

$$\underbrace{\iint\limits_{\Sigma} Pdydz+Qdzdx+Rdxdy}_{\text{有向曲面　第二类}} = \underbrace{\iint\limits_{\Sigma}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)dS}_{\text{无向曲面　第一类}}$$

其中$\cos\alpha$、$\cos\beta$、$\cos\gamma$为有向曲面Σ在点(x,y,z)处的正向法向量的方向余弦

注：形式上，有　$dS\cos\alpha=dydz$，　$dS\cos\beta=dzdx$，　$dS\cos\gamma=dxdy$　"投影"

$\Rightarrow dydz=\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}dxdy$，$dzdx=\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}dxdy$，"合一投影法"　$I=\iint\limits_{\Sigma}\left(P\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}+Q\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}+R\right)dxdy$

§11.6 高斯公式　空间闭区域上三重积分 ⟷ 边界曲面上曲面积分

1. 定理　设空间区域Ω由分片光滑的闭曲面Σ围成，$P(x,y,z)$、$Q(x,y,z)$、$R(x,y,z)$在Ω上有定义，且满足

① 有向曲面Σ为Ω的整个边界，且取外侧

② P、Q、R在Ω上具有一阶连续偏导数，（包括Ω的内部和边界）

（①② 高斯公式成立的充分条件）

则有公式　$\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dv = \oint\!\!\!\oint\limits_{\Sigma} Pdydz+Qdzdx+Rdxdy$

或　$\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dv = \oint\!\!\!\oint\limits_{\Sigma}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)dS$

其中$\cos\alpha$、$\cos\beta$、$\cos\gamma$是Σ上任一点(x,y,z)处的正向法向量的方向余弦

注：1. 若Σ是Ω的边界的内侧，则在公式等式一边添一负号

2. 当P、Q、R在Ω上有奇点（偏导数不连续的点）时，高斯公式不一定成立

3. 高斯公式是"曲面积分"与"三重积分"联系的纽带　常用：曲面积分 ⟶ 三重积分

4. 当Ω为复连通区域时，高斯公式仍成立，此时Ω的边界Σ包括所有内外边界，且：外边界向外为正向，内边界向内为正向

5. 若曲面Σ不封闭，则补面后用高斯公式，且补面后围成的立体Ω上不能有奇点

2. 定理　设G是空间二维单连通区域，若P、Q、R在G内均有一阶连续偏导数，则有以下等价命题

$\iint\limits_{\Sigma} Pdydz+Qdzdx+Rdxdy$ 在G内与所取曲面Σ无关而只取决于Σ的边界曲线

$\Longleftrightarrow$ $\forall$闭曲面Σ，$\oint\!\!\!\oint\limits_{\Sigma} Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=0$ $\Longleftrightarrow$ $\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=0$ 在G内恒成立

No.

Date

复习：函数 $f(x,y,z)$ 的梯度 $\mathrm{grad} f=\nabla f=(f_x,f_y,f_z)$

二、通量

1、定义 设向量场 $\vec{A}(x,y,z)=(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z))$ 其中 P、Q、R 均有一阶连续偏导数

Σ 是场内一片有向曲面，Σ 在点 (x,y,z) 处单位法向量 $\vec{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$

则向量场 $\vec{A}$ 通过曲面 Σ 向着指定侧的通量（流量）为

$$\Phi=\iint_\Sigma \vec{A}\cdot\vec{n}\,dS=\iint_\Sigma \vec{A}\cdot d\vec{S}=\iint_\Sigma A_n dS=\iint_\Sigma P\,dydz+Q\,dzdx+R\,dxdy$$

2、高斯公式的物理意义：

右端：场 $\vec{A}$ 通过闭曲面 Σ 流向外侧的通量（流体在单位时间内离开闭区域 Ω 的总质量）

= 左端：分布在 Ω 内的源头在单位时间内产生的流体的总质量

三、散度 $\nabla=(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z})$

1、定义：向量场 $\vec{A}=(P,Q,R)$ 的散度 $\mathrm{div}\vec{A}=\nabla\cdot\vec{A}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$ 是一个数量函数

2、性质：$\mathrm{div}\vec{A}=\lim\limits_{\Omega\to M}\frac{\Phi}{V}$ 散度是通量对体积的变化率，散度的绝对值反映源的强度

在一点处，若 $\mathrm{div}\vec{A}>0$，则有流体从该点向外流出，称该点处有源，

$\mathrm{div}\vec{A}<0$，则有流体在该点处被吸收，称该点处有汇（或洞）

$\mathrm{div}\vec{A}=0$，表明该点处无源

若向量场 $\vec{A}$ 的散度 $\mathrm{div}\vec{A}$ 处处为0，则称 $\vec{A}$ 为无源场 eg. 匀速场 $\vec{v}=(v_x,v_y,v_z)$，其中 v_x、v_y、v_z 为常数

§11.7 斯托克斯公式 曲面上的曲面积分 ⟷ 曲面边界曲线上的曲线积分

定理 设 Γ 为分段光滑空间有向闭曲线，Σ 是以 Γ 为边界的分片光滑有向曲面，

Γ 的正向与 Σ 的侧符合右手规则（称 Γ 是有向曲面 Σ 的正向边界曲线）

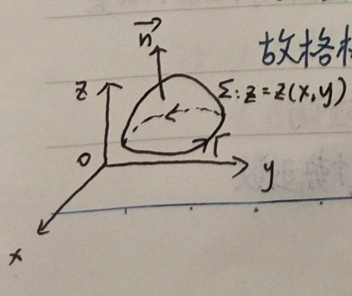
若函数 $P(x,y,z)$、$Q(x,y,z)$、$R(x,y,z)$ 在曲面 Σ（边同边界 Γ）上具有一阶连续偏导数，则

$$\oint_\Gamma P\,dx+Q\,dy+R\,dz=\iint_\Sigma (R_y-Q_z)dydz+(P_z-R_x)dzdx+(Q_x-P_y)dxdy$$

注：1. 定理中的 Σ 不是唯一的，只要是满足定理条件的就行，往往将 Σ 取成一平面

2、若 Σ 是 xOy 面上的平面闭区域，$\Gamma=L:\begin{cases}z=0\\(x,y)\in L\end{cases}$，则斯托克斯公式变为格林公式

故格林公式是斯托克斯公式的一种特殊情况



KOKUYO

公式的记忆

$$\oint_\Gamma Pdx+Qdy+Rdz=\iint_\Sigma\begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R\end{vmatrix}$$

PS.

← 按第一行展开

↓ 两类曲面积分的关系

$$=\iint_\Sigma\begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R\end{vmatrix}dS$$

← 其中 $\cos\alpha$、$\cos\beta$、$\cos\gamma$ 是 Σ 上任一点 (x,y,z) 处正向法向量的方向余弦

二、空间曲线积分与路径无关的条件

定理 设空间区域 G 是一维单连通域，若函数 $P(x,y,z)$ $Q(x,y,z)$ $R(x,y,z)$ 在 G 内均有一阶连续偏导数，则以下四个命题等价

$\int_\Gamma Pdx+Qdy+Rdz$ 在 G 内与路径无关 $\Longleftrightarrow$ $\forall$ 闭曲线 $\Gamma\subset G$，$\oint_\Gamma Pdx+Qdy+Rdz=0$

$\Longleftrightarrow$ $R_y=Q_z$、$P_z=R_x$、$Q_x=P_y$ 在 G 上恒成立 $\Longleftrightarrow$ $Pdx+Qdy+Rdz$ 在 G 内成为某函数 $u(x,y,z)$ 的全微分

此时 $u(x,y,z)$ 可用下式求出：$u(x,y,z)=\int_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x,y,z)}Pdx+Qdy+Rdz$

其中积分曲线应选为折线

三、环流量与旋度

1.定义 设有向量场 $\vec{A}(x,y,z)=(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z))$ 简记为 $\vec{A}=(P,Q,R)$

P、Q、R 均有一阶连续偏导数，Γ 是 $\vec{A}$ 内一条分段光滑有向闭曲线，$\vec{\tau}$ 是 Γ 在 (x,y,z) 处单位切向量

则场 $\vec{A}$ 沿有向闭曲线 Γ 的环流量为 $\oint_\Gamma \vec{A}\cdot\vec{\tau}ds=\oint_\Gamma\vec{A}\cdot d\vec{r}=\oint_\Gamma Pdx+Qdy+Rdz$

场 $\vec{A}$ 的旋度为

$$\mathrm{rot}\vec{A}=\nabla\times\vec{A}=(R_y-Q_z,\ P_z-R_x,\ Q_x-P_y)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R\end{vmatrix}$$

2、斯托克斯公式的物理意义

$$\iint_\Sigma(\mathrm{rot}\vec{A})_{\vec{n}}dS=\oint_\Gamma\vec{A}_{\vec{\tau}}ds$$

左：向量场 $\vec{A}$ 的旋度通过曲面 Σ 的通量 ＝ 右：向量场 $\vec{A}$ 沿有向闭曲线 Γ 的环流量

定义 (1) 若 $\int_\Gamma\vec{F}\cdot d\vec{r}$ 与路径无关，称 $\vec{F}$ 是保守场　(2) 若 $\mathrm{rot}\vec{F}=0$，称 $\vec{F}$ 为无旋场

(3) 若 $\exists u=u(x,y,z)$ 可微，且 $\vec{F}=u_x\vec{i}+u_y\vec{j}+u_z\vec{k}$，称 $\vec{F}$ 是有势场，u 是 $\vec{F}$ 的一个势函数

$\vec{F}$：保守场、无旋场、有势场是等价的

第十二章 无穷级数

§12.1 常数项级数的概念与性质

一、常数项级数的概念

1. 给定一个数列 $\{u_n\}=\{u_1, u_2, \cdots, u_n, \cdots\}$

则表达式 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n=u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$ 称为常数项级数，其中 u_n 称为级数的通项或一般项

2、级数的部分和：$S_n=u_1+u_2+\cdots+u_n=\sum_{i=1}^{n}u_i$

由 $S_1=u_1$，$S_2=u_1+u_2$，$\cdots$，$S_n=u_1+u_2+\cdots+u_n$ 构成的数列 $\{S_n\}$ 称为级数的部分和数列

3.定义：若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 的部分和数列 $\{S_n\}$ 有极限 S，即 $\lim_{n\to\infty}S_n=S$，则称 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，极限 S 叫做该级数的和，并写成 $S=u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$

若 $\{S_n\}$ 没有极限，则称 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散

注：1. 级数收敛时，其部分和 S_n 是级数的和的近似值

余项 $r_n=S-S_n=\sum_{n=1}^{\infty}u_n-S_n=u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots$ 误差 $|r_n|$

2. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 和部分和数列 $\{S_n=\sum_{i=1}^{n}u_i\}$ 一一对应

$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 和 $\{S_n\}$ 同时收敛、同时发散，且有收敛时有 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}u_i$

二、收敛级数基本性质

1. 线性性：若 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$、$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛，和分别为 S 与 σ，则 $\forall k_1, k_2\in R$，$\sum_{n=1}^{\infty}(k_1u_n+k_2v_n)$ 也收敛且

$$\sum_{n=1}^{\infty}(k_1u_n+k_2v_n)=k_1\sum_{n=1}^{\infty}u_n+k_2\sum_{n=1}^{\infty}v_n=k_1S+k_2\sigma$$

⇒ 结论：1. 级数的每一项同乘一个不为零的常数不改变其收敛性

2. 两个收敛级数可以逐项相加或逐项相减

☆ 2、在级数中去掉、加上或改变有限项，不会改变级数的收敛性 但其和一般会变

3、若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则对该级数的项任意加括号后所成的级数

$(u_1+u_2+\cdots+u_{n_1})+(u_{n_1+1}+\cdots+u_{n_2})+\cdots+(u_{n_{k-1}+1}+\cdots+u_{n_k})+\cdots$ 仍收敛，且其和不变

注：1. 加括号后级数收敛 不能得出 去括号后级数收敛

2. 逆否：若加括号后级数发散，则原级数必然发散 ✓

3. 对正项级数加括号或取绝对值，对其敛散性没有影响

No.

Date

4.（级数收敛的必要条件） 若级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，则其一般项u_n必趋于零，即$\lim_{n\to\infty}u_n=0$

注：1. 上述条件是非充分的　　例$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$是发散的

2. 逆否：若级数的一般项不趋于零，则该级数必定发散 ✓

三、柯西审敛原理

定理：　级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛 $\Longleftrightarrow$ 对于$\forall\varepsilon>0$，总存在正整数N，使得当$n>N$时，对于$\forall p\in N_+$，恒有

$$|S_{n+p}-S_n|=|u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+p}|<\varepsilon \text{ 成立}$$

级数收敛 $\Longleftrightarrow$ 充分大项数以后的任意长的片段和可以任意小

四、两个重要级数

1. 等比级数 $\sum_{n=1}^{\infty}aq^{n-1}=a+aq+aq^2+\cdots+aq^n+\cdots$　公比为q

$$\sum_{n=1}^{\infty}aq^{n-1}=\begin{cases}\frac{a}{1-q} & |q|<1\\ \text{发散} & |q|\geq 1\end{cases}$$　收敛时，等比级数$=\frac{\text{首项}}{1-\text{公比}}$

2. P级数　$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}=1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}+\cdots$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}=\begin{cases}\text{收敛} & p>1\\ \text{发散} & p\leq 1\ (\text{包括}p<0)\end{cases}$$

特别地，调和级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散

3. 交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^p}\begin{cases}\text{收敛} & p>0\\ \text{发散} & p\leq 0\end{cases}$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\ln n)^k}{n^a}$ $(a>1)$必收敛

$$\Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^a(\ln n)^b}=\begin{cases}a>1\text{ 时 收敛}\\ 0<a<1\text{时 发散}\\ a=1\text{时}\quad b\leq 1\text{ 发散},\ b>1\text{ 收敛}\end{cases}$$

§12.2 常数项级数的审敛法

一、正项级数及其审敛法

1. 定义：若级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$各项$u_n\geq 0$，则称为正项级数，显然其部分和数列$\{S_n\}$单调增加

即　$S_1\leq S_2\leq\cdots\leq S_n\leq\cdots$

2. 定理：　正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛 $\Longleftrightarrow$ 部分和数列$\{S_n\}$有界

3. 定理(比较审敛法)　设正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$、$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$满足$u_n\leq v_n$ $(n=1,2,\cdots)$

若$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛　（大的收敛 $\Rightarrow$ 小的收敛）

若$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$发散，则$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$发散　（小的发散 $\Rightarrow$ 大的发散）

No.

Date

推论：设 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$、$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 都是正项级数，

若 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛，且存在 $N\in N_+$，使当 $n\ge N$ 时恒有 $u_n\le kv_n$ $(k>0)$ 成立，则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛

若 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 发散，且存在 $N\in N_+$，使当 $n\ge N$ 时恒有 $u_n\ge kv_n$ $(k>0)$ 成立，则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散

4.定理（比较审敛法的极限形式）

设 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$、$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 都是正项级数

(1) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=l$ $(0\le l<+\infty)$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛 则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛

(2) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=l>0$（或为 $+\infty$）且 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 发散 则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散

即在两个正项级数的一般项均趋于零时，比较它们的一般项作为无穷小量的阶：高阶、同阶、低阶

$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 作为比较的标准，称为基准级数，一般为等比级数、p级数

注：若 $a_n\sim b_n\to0$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 不一定收敛；若 $a_n\sim b_n\to0$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 绝对收敛

5.定理（比值审敛法、达朗贝尔判别法）

设 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 为正项级数，若 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\rho$，则

① $0\le\rho<1$ 时，级数收敛

② $\rho>1$（或为 $+\infty$）时，级数发散

③ $\rho=1$ 时不一定，该方法失效

注：1.当一般项 u_n 中出现 $n!$ 或以 n 为指数幂时（如 a^n 等），可考虑此法

2.当 $\rho=1$ 时，应使用其它方法

3. $\rho=1$ 时，一般情况下都有 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n\ne0$，$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散

6.定理（根值审敛法、柯西判别法）

设 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 为正项级数，若 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\rho$，则

① $\rho<1$ 时，级数收敛

② $\rho>1$（或为 $+\infty$）时，级数发散

③ $\rho=1$ 时，不一定，该方法失效

注：当一般项 u_n 中出现以 n 为指数幂（如 a^n、n^n 等）的形式时，可考虑此法

注意 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$　$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^2}=1$　···　$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\frac{1}{e}$

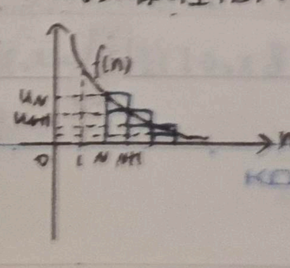
7.定理（积分审敛法）

不一定要从1开始

设 $f(x)$ 是 $[1,+\infty)$ 上非负递减的连续函数，则 $\sum_{n=1}^{\infty}f(n)$ 和 $\int_1^{+\infty}f(x)dx$ 的敛散性相同

广义P级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^p}$、$\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n\ln n(\ln\ln n)^p}$、$\sum_{n=4}^{\infty}\frac{1}{n\ln n\ln\ln n(\ln\ln\ln n)^p}$

都是 $\begin{cases}\text{收敛} & p>1\\ \text{发散} & p\le1\ (\text{包括}p<0)\end{cases}$



No.

Date

二、交错级数及其审敛法

1.概念：交错级数的各项是正负交错的，形如　　注：形如$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$不一定是交错级数，要看$u_n$是什么

$u_1-u_2+u_3-u_4+\cdots+(-1)^{n-1}u_n+\cdots$ 或 $-u_1+u_2-u_3+u_4+\cdots+(-1)^n u_n+\cdots$

其中$u_i\ (i=1,2,\cdots,n,\cdots)$都是正数

2.定理（莱布尼茨定理）交错级数的审敛法　　注：交错级数若不满足莱布尼茨判别法条件，则直接展开

若交错级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$满足　u_n单调递减趋于零　　注：不需要从第一项开始就递减

(1) $u_n \geq u_{n+1}\quad (n=1,2,3,\cdots)$ 即u_n是单调减小的　　注：若u_n单调性不容易判断，可将n换为x，$f(x)=u_x$，求$f'(x)$

(2) $\lim_{n\to\infty} u_n=0$

则级数收敛，且其和$S_n\leq u_1$，其余项r_n满足$|r_n|\leq u_{n+1}$　　eg. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$收敛

注：上述条件是充分而非必要的　eg. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2^{n+(-1)^n}}$绝对收敛，但$a_n=\frac{1}{2^{n+(-1)^n}}$并不是递减的

三、绝对收敛与条件收敛

1.定义　对一般的级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$，由其构成的正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|=|u_1|+|u_2|+\cdots+|u_n|+\cdots$

①若$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$收敛，则称$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 绝对收敛

②若$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛而$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$发散，则称$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 条件收敛

2.定理：若级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$绝对收敛，则该级数必定收敛 ☆

注：1. 讨论一般级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$的收敛性，可先从$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$开始

2. 一般来说，$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$发散 $\not\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$发散

△但若通过比值审敛法或根值审敛法，依据$\rho>1$判定$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$发散，则可断定$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$必发散

§12.3 幂级数

一、函数项级数

1.定义　设有区间I及I上有定义的函数列　$u_1(x),u_2(x),u_3(x),\cdots,u_n(x),\cdots$

称表达式$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x)+\cdots$ 为定义在区间I上的函数项无穷级数

对于每一个确定的$x_0\in I$，函数项级数成为常数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x_0)$

2.定义　若$x_0\in I$使$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x_0)$收敛，则称$x_0$为$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$的收敛点，称$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$的收敛点的全体为其收敛域

发散　　发散点，　　发散域

Campus

No.

Date

3、和函数：设 C 为级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的收敛域，则存在 C 上有定义的函数 $S(x)$，使

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=u_1(x)+u_2(x)+u_3(x)+\cdots+u_n(x)+\cdots$$

称 $S(x)$ 为该级数的和函数

记 $S_n(x)=\sum_{i=1}^{n}u_i(x)=u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x)$ 为级数的部分和，则

在收敛域上，有 $\lim_{n\to\infty}S_n(x)=S(x)$

且称 $r_n(x)=S(x)-S_n(x)$ 为级数的余项，并有 $\lim_{n\to\infty}r_n(x)=0$

二、幂级数及其收敛性

1、幂级数的定义：各项均为常数乘以幂函数的函数项级数

① $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\cdots+a_n(x-x_0)^n+\cdots$ 称为 $(x-x_0)$ 的幂级数

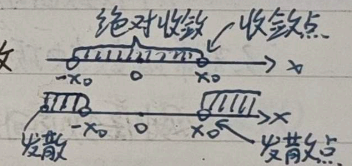
② $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots$ 称为 x 的幂级数

2、阿贝尔定理

设有幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$，则以下结论成立

① 若在 $x_0\neq 0$ 处级数收敛，则 $\forall x$ 适合 $|x|<|x_0|$，级数绝对收敛

② 若在 x_0 处级数发散，则 $\forall x$ 适合 $|x|>|x_0|$，级数也发散



注：1、$-x_0$ 处收敛性待定

2、一个点不是收敛点就是发散点；收敛点之内无发散点；发散点之外无收敛点

推论：幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛性有三种情况

① $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 只在 $x=0$ 处收敛，规定此时收敛半径 $R=0$，收敛域为 $\{0\}$

② $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 对一切 $x\in\mathbb{R}$ 都收敛，规定 $R=+\infty$，收敛域为 $(-\infty,+\infty)$

③ 其他情况下，必有一个确定的正数 R 存在，使得

i 当 $|x|<R$ 时，幂级数绝对收敛 ii $|x|>R$ 时幂级数发散 iii $x=\pm R$ 时收敛性待定

称 R 为幂级数的收敛半径，$(-R,R)$ 为收敛区间，收敛域可能为以下四者之一、需进一步判定 $x=R$，$x=-R$ 处的收敛性 $(-R,R)$、$[-R,R)$、$(-R,R]$、$[-R,R]$

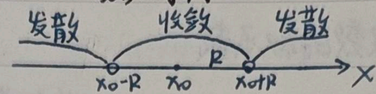
注意 收敛区间（开区间 $(-R,R)$）与收敛域（收敛点的全体）的区别

注：收敛半径 $R=0$ 不代表幂级数没有收敛点，而是仅有收敛点 $x=0$

推广：对 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$

i) 若 $|x-x_0|<R$ 时级数收敛，$|x-x_0|>R$ 时发散，则称 R 为级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ 的收敛半径

ii) 收敛区间 (x_0-R, x_0+R)



收敛域为四者之一

3. 定理（收敛半径的计算公式）

设有幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$，若　　a_n 为系数

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\rho \quad 或 \quad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\rho$$

则幂级数的收敛半径为

$$R=\begin{cases}\frac{1}{\rho} & 0<\rho<+\infty \\ +\infty & \rho=0 \\ 0 & \rho=+\infty\end{cases}$$

注：1. 上述公式只适用于不缺项的幂级数

2. 若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$，则换元 $y=x-x_0$，求 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n$ 的收敛半径 R

则收敛区间为 $|y|<R$，即 $x\in(x_0-R, x_0+R)$　　再考察 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ 当 $x=x_0-R$ 和 x_0+R 处

3. 若幂级数缺项　① 若为 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{2n}$，则换元 $y=x^2$，求 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n$ 的收敛半径 R

则收敛区间为 $|y|<R$，即 $x\in(-\sqrt{R}, \sqrt{R})$

② 一般地，无规律地缺项时需用比值或根值审敛法

对 $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ 直接计算 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|$ 或 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n(x)|}$，结果 <1 时收敛，>1 时发散

从而定出 x 收敛与发散的范围

三、幂级数的运算

1. 幂级数的四则运算　结果仍为幂级数

已知幂级数　$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots$　收敛半径 R_1

$\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots+b_nx^n+\cdots$　收敛半径 R_2

加、减法：$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \pm \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n\pm b_n)x^n$　收敛半径 $R=\min\{R_1, R_2\}$

乘法：$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = a_0b_0+(a_0b_1+a_1b_0)x+(a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0)x^2+\cdots+(a_0b_n+a_1b_{n-1}+\cdots+a_nb_0)x^n+\cdots$

$= a_0b_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_0b_n+a_1b_{n-1}+\cdots+a_{n-1}b_1+a_nb_0)x^n$　收敛半径 $R=\min\{R_1, R_2\}$

只需掌握：形如 $x^k\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+k}$　收敛半径不变

除法：当 $b_0 \neq 0$ 时，若有 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 成立，则称 $\sum c_n x^n$ 是 $\sum a_n x^n$ 除以 $\sum b_n x^n$ 的商，记作

$\sum c_n x^n = \dfrac{\sum a_n x^n}{\sum b_n x^n}$，　　收敛半径 $R \le \min\{R_1, R_2\}$

其中 c_n 的求法：比较 $\sum b_n x^n \sum c_n x^n$ 与 $\sum a_n x^n$ 各项的系数 $\begin{cases} a_0 = b_0 c_0 \\ a_1 = b_1 c_0 + b_0 c_1 \\ a_2 = b_2 c_0 + b_1 c_1 + b_0 c_2 \end{cases} \Rightarrow c_1, c_2, \cdots$

只需掌握：$\dfrac{1}{x^k} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^m = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{m-k}$ $(m>k)$ 收敛半径不变

2. 幂级数的分析运算 ——和函数的性质

性质1 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数 $s(x)$ 在其收敛域 I 上连续

性质2 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数 $s(x)$ 在其收敛域 I 上可积，且有逐项积分公式：

$$\int_0^x s(t)\,dt = \int_0^x \Big[\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\Big] dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n t^n\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} \quad (x \in I)$$

从收敛中心积分到 x

性质3 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数 $s(x)$ 在其收敛区间 $(-R, R)$ 上可导，且有逐项求导公式：

$$s'(x) = \Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\Big)' = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \quad (x \in (-R, R))$$

反复运用性质3可知：幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数 $s(x)$ 在其收敛区间内有无穷阶导数

且逐项求导/逐项积分后所得的幂级数与原幂级数的收敛半径相同（收敛域可能改变）

3. 应用：求和函数　需先求收敛域

求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数 $s(x)$，观察、转化（求导或积分）为熟知的级数（如等比级数）

$\xrightarrow{\text{求导}} \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = s'(x) \xrightarrow{\text{对右端的幂级数求和}} S_1(x) = S'(x) \xrightarrow[\text{则和函数}]{\text{积分}} s(x) = \int_0^x s_1(t)\,dt + s(0)$

$\xrightarrow{\text{积分}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} = \int_0^x s(t)\,dt \longrightarrow S_1(x) = \int_0^x s(t)\,dt \xrightarrow{\text{求导}} s(x) = S_1'(x)$

等比级数等

注：等比级数：$\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots \quad x \in (-1, 1)$　可用 $-x, x^2, -x^2$ 等代换 x

4. 应用：求数项级数的和

可构造一幂级数，求其和函数 $s(x)$，再代入特定点 $x = x_0$，得到数项级数的和 $s(x_0)$

No.

Date

§12.4 函数展开成幂级数

上节（§12.3）考虑：求和函数问题

已知幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$，求和函数 $s(x)$ 使 $\forall x \in I$，有 $s(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

本节（§12.4）考虑：函数展开成幂级数问题

已知 $f(x)$，求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$，使 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$

一、泰勒（Taylor）级数及其收敛性

定义1. 设 $f(x)$ 在 x_0 处无穷阶可导，则幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n = f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\cdots$$

称为 $f(x)$ 在 x_0 处的泰勒级数（实质：$x-x_0$ 的幂级数）

定义2 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的泰勒级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = f(0)+f'(0)x+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$$

称为 $f(x)$ 的麦克劳林级数　（实质：x 的幂级数）

定理（泰勒级数的收敛定理）

设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域 $U(x_0)$ 内无穷阶可导，则 $f(x)$ 在该邻域内能展开成泰勒级数，即

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\cdots \quad (*)$$

$\Longleftrightarrow$ 在该邻域内 $f(x)$ 的泰勒公式中余项 $R_n(x)$ 满足 $\lim_{n\to\infty} R_n(x)=0$

注：1.（*）式称为函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的泰勒展开式

写出（*）式的过程，称为将 $f(x)$ 在 x_0 处展成幂级数，或称为将 $f(x)$ 展成 $x-x_0$ 的幂级数

2. 同理，等式 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$　$(|x|<r)$ 称为 $f(x)$ 的麦克劳林展开式

二、将函数展成幂级数

1. 直接法（公式法）

将 $f(x)$ 展成麦克劳林级数的步骤：

① 求 $f(x)$ 各阶导函数 $f^{(n)}(x)$　$(n=1,2,3,\cdots)$

② 求各阶导函数在 $x=0$ 处的函数值 $f^{(n)}(0)$　$(n=1,2,3,\cdots)$

若从某一阶导开始 $f^{(n)}(0)$ 不存在，则麦克劳林展开式一定不成立，$f(x)$ 不能展成 x 的幂级数

psp_dada

No.

Date

③ 形式上写出麦克劳林级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$，并求其收敛半径R和收敛区间 $(-R,R)$

④ 验证 $x\in(-R,R)$ 时余项 R_n 是否有 $\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0$。其中 $R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}$ $(0<\theta<1)$

若成立，则有 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ $x\in(-R,R)$

2、间接法

利用已知的函数展开式，通过幂级数的计算(四则运算、逐项求导、逐项积分)和变量代换，将所给函数 $f(x)$ 展成幂级数

① 求导法 已知展开式 $\overset{易}{s(x)}=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ $x\in(-R,R)$ 若 $\overset{难}{f(x)}=s'(x)$

则有 $f(x)=s'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}$ $x\in(-R,R)$

② 积分法 已知展开式 $\overset{易}{s(x)}=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ $x\in(-R,R)$ 若 $\overset{难}{f(x)}=\int_0^x s(t)dt$

则有 $f(x)=\int_0^x s(t)dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$ $x\in(-R,R)$

注：求导或积分后收敛半径R不变，但端点 $x=\pm R$ 处的敛散性可能改变

③ 变量替换法 已知展开式 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ $x\in(-R,R)$

当 $\varphi(x)\in(-R,R)$

则必有 $f[\varphi(x)]=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\varphi^n(x)$

④ 利用等比级数求和公式与四则运算

$a+aq+aq^2+\cdots+aq^n+\cdots=\frac{a}{1-q}$ $|q|<1$

$\Rightarrow \frac{1}{1-x}$、$\frac{1}{1+x}$、$\frac{1}{1-x^2}$、$\frac{1}{1+x^2}$、$\frac{x}{1-2x}$ 等 例：$\frac{x}{1-2x}$ $\frac{首项\ x}{公比\ 2x}$ $x+2x^2+4x^3+\cdots+2^nx^{n+1}+\cdots$ $|2x|<1$

定理(间接法成立的原理)

若函数 $f(x)$ 有展开式 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ $|x-x_0|<R$

则展开式必是 $f(x)$ 在 x_0 处的Taylor展开式，即 $a_n=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$ 必是Taylor系数 $n=0,1,2,\cdots$

注：分母为 n 次的有理分式，若无法直接用等比级数公式则先分解再展开

KOKUYO

No.

Date

§12.7 傅里叶级数

一、三角级数系及其正交性

1.三角级数

定义 称级数 $\frac{a_0}{2}+(a_1\cos x+b_1\sin x)+(a_2\cos 2x+b_2\sin 2x)+\cdots$ 为周期为 2π 的三角级数,记为

$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ 其中 a_0, a_n, b_n $(n=1,2,3,\cdots)$ 都是常数

若 $b_n=0$,则称为余弦级数 $\frac{a_0}{2}+a_1\cos x+a_2\cos 2x+\cdots=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$

若 $a_n=0$,则称为正弦级数 $b_1\sin x+b_2\sin 2x+\cdots+b_n\sin nx+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx$

2、三角函数系

由定义在 $[-\pi,\pi]$ 上的无穷个函数 $1,\cos x,\sin x,\cos 2x,\sin 2x,\cdots,\cos nx,\sin nx,\cdots$ 构成

性质:三角函数系在 $[-\pi,\pi]$ 上正交,即

① 任何两个不同函数之积在 $[-\pi,\pi]$ 上积分为零

② 任何两个相同函数之积在 $[-\pi,\pi]$ 上积分不为零

注:设 $f(x)$、$g(x)$ 取自三角函数系,内积定义为 $\langle f(x),g(x)\rangle=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)g(x)dx$

则 $\langle f(x),g(x)\rangle=\begin{cases}0 & f(x)\neq g(x)\\ 1 & f(x)=g(x)\end{cases}$ (把1改为 $\frac{1}{2}$)

二、函数展开成傅立叶级数

若 $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$

则 $\begin{cases}a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx & n=0,1,2,\cdots\\ b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx & n=1,2,3,\cdots\end{cases}$ (*)

是谁的系数,就用 $f(x)$ 乘谁再积分

1. 定义:称(*)式确定的系数 $a_0,a_1,b_1,\cdots$ 为函数 $f(x)$ 的傅立叶系数

称具有傅立叶系数的三角级数为 $f(x)$ 的傅立叶级数

2、定理(傅立叶级数收敛定理,狄利克雷充分条件)

设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数,若它满足

(1) 在一个周期内连续或只有有限个第一类间断点

(2) 在一个周期内至多有有限个极值点.(即 $f(x)$ 在一个周期内不是无限振荡的)

Campus

则$f(x)$的傅立叶级数收敛,且

当x是$f(x)$的连续点时,级数收敛于$f(x)$

当x是$f(x)$的间断点时,级数收敛于$\frac{1}{2}[f(x^-)+f(x^+)]$ 间断点处左右极限的平均值

注:记C为函数$f(x)$(周期为2π)的连续点的全体,则

1. $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$, $x\in C$ 称为将$f(x)$展成傅立叶级数

2. $f(x)$的傅立叶级数的和函数为:

$$S(x)=\begin{cases} f(x) & x\in C \\ \frac{f(x^-)+f(x^+)}{2} & x\notin C \end{cases}$$

3. $S(x)$也是以2π为周期的函数

3. 将以2π为周期的函数展成傅立叶级数的步骤

①验证$f(x)$是否满足收敛定理的条件,并找出间断点 ②求傅立叶系数a_n, b_n

③将$f(x)$展成傅立叶级数 $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ $x\in C$ C去掉了$f(x)$的所有间断点

注:1.常用 $\sin n\pi=0$ $\cos n\pi=(-1)^n$

2. 将非周期函数$f(x)$ $x\in[-\pi,\pi)$展开成傅里叶级数:周期延拓 ⟶ 展开 ⟶ 限制$x\in[-\pi,\pi)$

三、正弦级数与余弦级数 正奇余偶,偶信奇零

1. 当$f(x)$为奇函数时,$a_n=0$, $b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nx\,dx$, $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx$, $x\in C$ —— 正弦级数

当$f(x)$为偶函数时,$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nx\,dx$, $b_n=0$, $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$, $x\in C$ —— 余弦级数

2. 将仅在$[0,\pi]$上有定义的函数$f(x)$展成正弦级数或余弦级数

(1)正弦级数:①奇延拓,在$(-\pi,0)$上补充定义,使$f(x)$成为一奇函数,再周期延拓,使$f(x)$成为一以2π为周期的函数 ②求系数 $a_n=0$ $b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nx\,dx$

③展开,并限制x的范围$[0,\pi]$,并去掉间断点

(2)余弦级数:①偶延拓…

§12.8 一般周期函数的傅立叶级数

定理　设以 $2l$ 为周期的函数 $f(x)$ 满足收敛定理条件,则其傅立叶级数展开式为

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right)\quad x\in C$$

其中 $\begin{cases} a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx & n=0,1,2,\cdots \\ b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx & n=1,2,\cdots \end{cases}$　是谁的系数,就用 $f(x)$ 乘谁再积分

注: ① ② ③ 三处与 $T=2\pi$ 时的公式不同

当 $f(x)$ 为奇函数时, $a_n=0$, $b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx$, $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi x}{l}$, $x\in C$ 　一正弦级数

当 $f(x)$ 为偶函数时, $a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx$, $b_n=0$, $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{l}$, $x\in C$ 一余弦级数

级数收敛性的补充

(1) 若 $a_n\sim b_n\to 0$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛,则 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 不一定收敛

eg. $a_n=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, $b_n=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n}$, $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 发散 $\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=1$

(1') 若 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛,则 $\sum_{n=1}^{\infty}[a_n+o(a_n)]$ 不一定收敛

(2) 若 $a_n\sim b_n\to 0$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛,则 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 一定绝对收敛

证: $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|b_n|}=1$ 而 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 收敛 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}|b_n|$ 收敛 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 绝对收敛

(2') 若 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛,则 $\sum_{n=1}^{\infty}[a_n+o(a_n)]$ 一定绝对收敛

(3) 收敛+收敛=收敛　　发散+收敛=发散　　发散+发散=?*

绝对+绝对=绝对　　条件+绝对=条件　　条件+条件=条件/绝对

*注:若给出了级数具体的表达式,则需要具体分析

以下操作对敛散性的影响

① 对一般项加绝对值后,提高级数发散的可能性

② 将正项级数乘 $(-1)^n$ 变为交错级数后,提高级数收敛的可能性

③ 提高一般项的阶数,可以提高级数收敛的可能性

☆④ 加括号后会提高级数收敛的可能性 $(a_1+a_2)+(a_3+a_4)+\cdots+(a_{2n-1}+a_n)+\cdots$

因为加括号相当于对 $\{S_n\}$ 取了子列

① 若$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛，证明加括号后的级数$(a_1+a_2)+(a_3+a_4)+\cdots+(a_{2n-1}+a_{2n})+\cdots$收敛

证：记$\{S_n\}$为$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$的部分和数列，即$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$

新级数的一般项$a_{2n-1}+a_{2n}$记为b_n，记$\{T_n\}$为$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$的部分和数列，即$T_n=b_1+b_2+\cdots+b_n$

有$T_n=S_{2n}$ 由于$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛，故$\lim\limits_{n\to\infty}S_n$存在，故子列$\lim\limits_{n\to\infty}S_{2n}$也存在，即$\lim\limits_{n\to\infty}T_n$存在$\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}b_n$收敛

② 举例：即使$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$发散，加括号后的$\sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1}+a_{2n})$也可能收敛

eg、$a_n=(-1)^n$ $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=-1+1-1+1\cdots$ 发散 但$\sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1}+a_{2n})=0$收敛

③ 证明：若$\sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1}+a_{2n})$收敛且$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，则$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛

记$\{S_n\}$为$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$的部分和，则$\sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1}+a_{2n})$收敛$\Longleftrightarrow\lim\limits_{n\to\infty}S_{2n}=A$

又$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，$\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}a_{2n+1}=0$ 且$S_{2n+1}=S_{2n}+a_{2n+1}$ 故$\lim\limits_{n\to\infty}S_{2n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}S_{2n}+\lim\limits_{n\to\infty}a_{2n+1}=A$

故$\lim\limits_{n\to\infty}S_{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}S_{2n+1}=A\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}S_n=A\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛 与证明莱布尼茨的方法一样

级数收敛与发散无明确分界线，不存在收敛最快/慢的级数，也不存在发散最快/慢的级数

一般地，若无其它条件，已知阶数可以推收敛，已知收敛无法推出阶数

① 若$a_n=\frac{1}{n^p}$ 且$a_n=o(\frac{1}{n})$，则$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛 ✓

② 若$a_n>0$ 且$a_n=o(\frac{1}{n})$，也推不出$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛 例：$a_n=\frac{1}{n\ln n}$ $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$发散

$\lim\limits_{n\to\infty}S_{2n}$与$\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n}$的区别

记S_n为$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$的部分和数列，则$S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$

$S_{2n}=a_1+a_2+a_3+a_4+\cdots+a_{2n-1}+a_{2n}$

$\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n}=a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{2n}$ 相当于偶数项单独求和

$\lim\limits_{n\to\infty}S_{2n}=(a_1+a_2)+(a_3+a_4)+\cdots+(a_{2n-1}+a_{2n})+\cdots$ 相当于原级数加括号

故：① 当$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛时，$\{S_n\}$收敛，故$\{S_{2n-1}\}$和$\{S_{2n}\}$均收敛

且若$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=A$，则$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}S_{2n-1}=\lim\limits_{n\to\infty}S_{2n}=A$

② 当$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛时，$\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}$和$\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n}$不一定收敛 例：$a_n=\frac{(-1)^n}{n}$

③ 当$\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}$和$\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n}$都收敛时，$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$一定收敛 收敛+收敛=收敛

④ 当$\{S_{2n}\}$和$\{S_{2n+1}\}$都收敛时，$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$不一定收敛 例$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=1-1+1-1+1\cdots$

$\{S_{2n}\}$和$\{S_{2n+1}\}$不一定收敛于同一个值，S_n不一定收敛

No.

Date

常见题型解法

泰勒公式求法问题

eg. 用间接法求 $f(x)=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$ 的 n 阶带皮亚诺余项的麦克劳林公式

解：$f(x)=\frac{1}{2}[\ln(1+x)-\ln(1-x)]$

由模型 $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+o(x^n)$

得 $\ln(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\cdots-\frac{x^n}{n}+o(x^n)$

$\therefore f(x)=\frac{1}{2}(2x+\frac{2}{3}x^3+\cdots+2\frac{x^{2m-1}}{2m-1})+o(x^{2m})=x+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5+\cdots+\frac{x^{2m-1}}{2m-1}+o(x^{2m})$

eg. 求 $f(x)=\ln x$ 在 $x=2$ 处的带皮亚诺余项的泰勒公式

法一：直接法 $f(x)=\ln x$ $f'(x)=x^{-1}$，$f''(x)=-x^{-2}$ $\cdots$ $f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$

$f(2)=\ln 2$ $f'(2)=\frac{1}{2}$ $f''(2)=-\frac{1}{4}$ $\cdots$ $f^{(n)}(2)=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{2^n}$

$\because f(x)=f(2)+\frac{f'(2)}{1!}(x-2)+\frac{f''(2)}{2!}(x-2)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(2)}{n!}(x-2)^n+o((x-2)^n)$

$\therefore f(x)=\ln 2+\frac{1}{2}(x-2)-\frac{1}{8}(x-2)^2+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{2^n\cdot n}(x-2)^n+o(x^n)$

法二：间接法 $f(x)=\ln x=\ln(2+x-2)=\ln 2(1+\frac{x-2}{2})=\ln 2+\ln(1+\frac{x-2}{2})$

将模型 $\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+o(x^n)$ 的 x 换为 $\frac{x-2}{2}$，得：

$f(x)=\ln 2+\frac{x-2}{2}-\frac{1}{2}(\frac{x-2}{2})^2+\frac{1}{3}(\frac{x-2}{2})^3-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{(\frac{x-2}{2})^n}{n}+o(x^n)$

$=\ln 2+\frac{1}{2}(x-2)-\frac{1}{8}(x-2)^2+\frac{1}{24}(x-2)^3-\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{2^n\cdot n}(x-2)^n+o(x^n)$

eg. 求 e^{2x} 带皮亚诺余项的麦克劳林公式

间接法 由模型 $e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n)$，得：

知 $e^{2x}=1+2x+\frac{(2x)^2}{2!}+\cdots+\frac{(2x)^n}{n!}+o(x^n)=1+2x+2x^2+\cdots+\frac{2^n\cdot x^n}{n!}+o(x^n)$

eg. 求 $f(x)=x^3\sin x$ 的七阶麦克劳林公式

间接法 由模型 $\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)$ 得：

知 $f(x)=x^4-\frac{x^6}{3!}+o(x^6)$

eg. 将 $\sin x$ 在 $x=2$ 处展开：$\sin x=\sin[2+(x-2)]=\sin 2\cos(x-2)+\cos 2\sin(x-2)$

eg. 将 $f(x)=\frac{1}{2+x}$ 在 $x=1$ 处展开：$f(x)=\frac{1}{3+(x-1)}=\frac{1}{3}\frac{1}{1+\frac{x-1}{3}}=\frac{1}{3}(1+\frac{x-1}{3})^{-1}=\frac{1}{3}[1-\frac{x-1}{3}+(\frac{x-1}{3})^2\cdots]$

eg. 将 $f(x)=xe^{1-x}$ 在 $x=1$ 处展开：$f(x)=[(x-1)+1]e^{-(x-1)}=(x-1)e^{-(x-1)}+e^{-(x-1)}$

KOKUYO

No.

Date

导数相关问题

1. 函数在某点的左导数$f'_-(x_0)$与函数的导函数在某点的左极限$\lim\limits_{x\to x_0^-}f'(x)$没有关系

例①：$f'_-(0)=0$存在，$\lim\limits_{x\to 0^-}f'(x)$不存在　$f(x)=\begin{cases}x^2\sin\frac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$　$f'(x)=\begin{cases}2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$

例②：$g'_-(0)$不存在，$\lim\limits_{x\to 0^-}g'(x)=1$存在　$g(x)=x\ (x\neq 0)$　$g'(x)=1\ (x\neq 0)$

2. 若$f(x)\in D(a,b)$，则$f'(x)$在区间(a,b)内不存在第一类、无穷间断点

$\Rightarrow$ $f(x)$在$[a,b]$有定义，若在(a,b)内$f(x)$存在第一类、无穷间断点，则$f(x)$没有原函数

3. ①若$f(x)\in D(I)$且在I上$f'(x)>0$ $\Rightarrow$ $f(x)$在区间I上递增

证：设x_1、$x_2\in I$且$x_1<x_2$，则$f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1)>0$

② 对$f(x)$有$f'(x_0)>0$，不能推出在$x_0=0$邻域内(无论多么小)$f(x)$递增(在邻域内任一点都左低右高)

只能推出在x_0两侧满足(和x_0这一点相比)"左低右高"

证：$f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}>0$，由极限保号性，$\exists\delta>0$，当$x\in U(x_0,\delta)$时，$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}>0$

故$x\in(x_0-\delta,x_0)$ $f(x)<f(x_0)$；$x\in(x_0,x_0+\delta)$，$f(x)>f(x_0)$

例　设$f(x)=\begin{cases}\frac{x}{2}+x^2\sin\frac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$　$f'(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}+2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x} & x\neq 0\\ \frac{1}{2} & x=0\end{cases}$

$f'(0)=\frac{1}{2}>0$ 但在$x\to 0$过程中，$f'(x)$在$[-\frac{1}{2},\frac{3}{2}]$间振荡，$f'(x)$正负性会变

故$f(x)$在$U_\delta(0)$不具有单调性

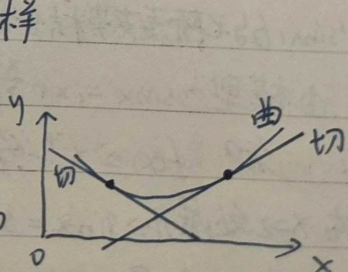
③ $f'(x_0)>0$ + $f'(x)$在$x=x_0$处连续 $\xrightarrow{保号性}$ $x\in U(x_0,\delta)$，$f'(x)>0$ $\to$ $x\in U(x_0,\delta)$，$f(x)\uparrow$

4. $\lim\limits_{a\to 0^+}\ln a$不一定等于$\lim\limits_{b\to 0^+}\ln b$　同理$\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x-\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x$发散；$\lim\limits_{x\to+\infty}x-\lim\limits_{x\to+\infty}x$发散

a由$a\to 0^+$控制，b由$b\to 0^+$控制，两者速度不一定一样

5. $f''(x)>0$ $\Rightarrow$ $f(x)\geq f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$

证明：展　几何意义：凹函数的曲线在切线上方



psp_dada

No.

Date

不定积分求法

1.基本积分表

① $\int k\,dx=kx+C$ （k是常数）

② $\int x^\mu dx=\frac{x^{\mu+1}}{\mu+1}+C$ $(\mu\neq-1)$

③ $\int \frac{1}{x}dx=\ln|x|+C$

④ $\int \frac{1}{1+x^2}dx=\arctan x+C$

⑤ $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\arcsin x+C$

⑥ $\int \cos x\,dx=\sin x+C$

⑦ $\int \sin x\,dx=-\cos x+C$

⑧ $\int \frac{1}{\cos^2 x}dx=\tan x+C$

⑨ $\int \frac{1}{\sin^2 x}dx=-\cot x+C$

⑩ $\int \sec x\tan x\,dx=\sec x+C$

⑪ $\int \csc x\cot x\,dx=-\csc x+C$

⑫ $\int e^x dx=e^x+C$

⑬ $\int a^x dx=\frac{a^x}{\ln a}+C$

⑭ $\int \sinh x\,dx=\cosh x+C$，$\int \cosh x\,dx=\sinh x+C$

2.性质

线性性 设函数$f(x)$、$g(x)$的原函数存在，k为非零常数，则

$\int[f(x)+g(x)]dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx$

$\int kf(x)dx=k\int f(x)dx$

② $\left(\int f(x)dx\right)'=f(x)$

③ $\int f'(x)dx=f(x)+C$

3.直接积分法

直接将积分求出来　常用恒等变形：$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{a+b}{ab}$、$\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{b-a}{ab}$、三角恒等式

Δ反用通分

eg. 求积分 $\int\left(\frac{3}{1+x^2}-\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx=3\int\frac{1}{1+x^2}dx-2\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=3\arctan x-2\arcsin x+C$

求积分 $\int\frac{1+x+x^2}{x(1+x^2)}dx=\int\frac{x+(1+x^2)}{x(1+x^2)}dx=\int\frac{1}{1+x^2}dx+\int\frac{1}{x}dx=\arctan x+\ln|x|+C$

求积分 $\int\frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)}dx=\int\frac{1}{x^2}dx+\int\frac{1}{1+x^2}dx=-\frac{1}{x}+\arctan x+C$

求积分 $\int\frac{1}{1+\cos 2x}dx=\int\frac{1}{2\cos^2 x}dx=\frac{1}{2}\int\sec^2 x\,dx=\frac{1}{2}\tan x+C$

4.第一类换元法　凑微分法

定理：设$f(u)$具有原函数，$u=\varphi(x)$可导，则有换元公式

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx=\left[\int f(u)du\right]_{u=\varphi(x)}$$

∫复合函数·复合函数中间变量的导数dx

使用公式的关键在于：$\int g(x)dx \xrightarrow{\text{化为}} \int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx$

eg、求积分 $\int\sin 2x\,dx$　法一：$=\frac{1}{2}\int\sin 2x\,d2x=-\frac{1}{2}\cos 2x+C$

法二：$=\int 2\sin x\cos x\,dx=\int 2\sin x\,d\sin x=\sin^2 x+C$

法三：$=\int 2\sin x\cos x\,dx=-\int 2\cos x\,d\cos x=-\cos^2 x+C$

eg. 求 $\int\frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}=-\int\frac{d(1-x)}{(1+1-x)\sqrt{1-x}}=-2\int\frac{1}{(1+1-x)}\frac{d(1-x)}{2\sqrt{1-x}}=-2\int\frac{1}{1+\sqrt{1-x}^2}d\sqrt{1-x}=-2\arctan\sqrt{1-x}+C$

KOKUYO

一般地，对积分 $\int f(ax+b)dx$ $(a\neq 0)$ 总可作变换 $u=ax+b$，将其化为

$$\int f(ax+b)dx=\frac{1}{a}\int f(ax+b)d(ax+b)=\frac{1}{a}\left[\int f(u)du\right]_{u=ax+b}$$

eg. $\int\frac{1}{3+2x}dx=\frac{1}{2}\int\frac{1}{3+2x}d(3+2x)=\frac{1}{2}\ln|3+2x|+C$

$\int\frac{1}{x(1+2\ln x)}dx=\frac{1}{2}\int\frac{1}{1+2\ln x}d(1+2\ln x)=\frac{1}{2}\ln|1+2\ln x|+C$

$\int\frac{x}{(1+x)^3}dx=\int\frac{1+x-1}{(1+x)^3}dx=\int\frac{1}{(1+x)^2}dx-\int\frac{1}{(1+x)^3}dx=-\frac{1}{1+x}+\frac{1}{2(1+x)^2}+C$

$\int\frac{1}{1+e^x}dx=\int\frac{1+e^x-e^x}{1+e^x}dx=\int 1dx-\int\frac{1}{1+e^x}d(1+e^x)=x-\ln(e^x+1)+C$

$\int(1-\frac{1}{x^2})e^{x+\frac{1}{x}}dx=\int e^{x+\frac{1}{x}}d(x+\frac{1}{x})=e^{x+\frac{1}{x}}+C$

一般地，当被积函数是三角函数相乘时，即 $\sin^{2k+1}x\cos^n x$ 或 $\sin^n x\cos^{2k+1}x$

⇒拆开奇次项去凑微分　　即作变换 $u=\cos x$ 或 $u=\sin x$

eg. $\int\sin^2x\cos^5x\,dx=\int\sin^2x\cos^4x\,d(\sin x)=\int\sin^2x(1-\sin^2x)^2d(\sin x)$

$=\int(\sin^6x-2\sin^4x+\sin^2x)d(\sin x)$

$=\frac{1}{7}\sin^7x-\frac{2}{5}\sin^5x+\frac{1}{3}\sin^3x+C$

若没有奇次项，则利用 $\sin^2x=\frac{1}{2}(1-\cos2x)$，$\cos^2x=\frac{1}{2}(1+\cos2x)$ 化成 $\cos2x$ 的多项式

eg. $\int\cos^2x\,dx=\int\frac{1+\cos2x}{2}dx=\frac{1}{2}\int 1dx+\frac{1}{4}\int\cos2x\,d2x=\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\sin2x+C$

$\int\sin^2x\cos^4x\,dx=\int\frac{1}{8}(1-\cos2x)(1+\cos2x)^2dx=\frac{1}{8}\int(1+\cos2x-\cos^22x-\cos^32x)dx$

$=\frac{1}{8}\int(\cos2x-\cos^32x)dx+\frac{1}{8}\int(1-\cos^22x)dx$

$=\frac{1}{8}\int\sin^22x\cdot\frac{1}{2}d(\sin2x)+\frac{1}{8}\int\frac{1}{2}(1-\cos4x)dx$

$=\frac{1}{48}\sin^32x+\frac{x}{16}-\frac{1}{64}\sin4x+C$

一般地，对 $\tan^n x\sec^{2k}x$ 或 $\tan^{2k-1}x\sec^n x$ 型函数的积分，作变换 $u=\tan x$ 或 $u=\sec x$

eg. $\int\tan^5x\sec^3x\,dx=\int\tan^4x\sec^2x\,d(\sec x)=\int(\sec^2x-1)^2\sec^2x\,d(\sec x)$

$=\int(\sec^6x-2\sec^4x+\sec^2x)d(\sec x)$

$=\frac{1}{7}\sec^7x-\frac{2}{5}\sec^5x+\frac{1}{3}\sec^3x+C$

常用凑微分方式：

(1) $\int f(ax+b)dx=\frac{1}{a}\int f(ax+b)d(ax+b)$　　(2) $\int f(e^x)e^xdx=\int f(e^x)de^x$

(3) $\int f(\ln x)\frac{1}{x}dx=\int f(\ln x)d\ln x$　　(4) $\int f(\sin x)\cos x\,dx=\int f(\sin x)d\sin x$

(5) $\int f(\cos x)\sin x\,dx=-\int f(\cos x)d\cos x$　　(6) $\int f(\tan x)\sec^2x\,dx=\int f(\tan x)d\tan x$

万能凑幂法：$\int f(x^n)x^{n-1}dx=\frac{1}{n}\int f(x^n)dx^n$　　$\int f(x^n)\frac{1}{x}dx=\frac{1}{n}\int f(x^n)\frac{1}{x^n}dx^n$

No.

Date

5、第二类换元法　（真换元）

定理　设 $x=\varphi(t)$ 单调、可导，且 $\varphi'(t)\neq 0$，又设 $f[\varphi(t)]\varphi'(t)$ 具有原函数，则有换元公式：

$$\int f(x)dx=\left[\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt\right]_{t=\varphi^{-1}(x)}$$

由以下公式：

$\sin^2x+\cos^2x=1$　　$\tan^2x+1=\sec^2x$　　$1+\cot^2x=\csc^2x$

$\cosh^2x-\sinh^2x=1$

得常用代换：三角代换　令 $x=a\tan t$、$x=a\sec t$、$x=a\cos t$

倒代换　用于分子、分母最高次数相差过大时，令 $x=\frac{1}{t}$

根式代换　令 $t=\sqrt{x^2-1}$

双曲代换　令 $x=a\cosh t$、$x=a\sinh t$

第二类换元常见类型　换元后反解 x，将 dx 化为 _ dt

$\int f(x,\sqrt[n]{ax+b})dx$，　令 $t=\sqrt[n]{ax+b}$

$\int f(x,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}})dx$　令 $t=\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$

$\int f(x,\sqrt{a^2-x^2})dx$　令 $x=a\sin t$　$t\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ 或 $x=a\cos t$　$t\in[0,\pi]$

$\int f(x,\sqrt{a^2+x^2})dx$　令 $x=a\tan t$　$t\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ 或 $x=a\cot t$　$t\in[0,\pi]$ 或 $x=a\operatorname{sh}t$

$\int f(x,\sqrt{x^2-a^2})dx$　令 $x=a\sec t$　$t\in[0,\frac{\pi}{2})$ ($x\geq a$) 或 $t\in[\pi,\frac{3\pi}{2})$ ($x\leq -a$)　或 $x=a\operatorname{ch}t$

$\int f(a^x)dx$　令 $t=a^x$

求以下积分

(1) $\int\frac{dx}{4+x}=\int\frac{1}{4+x}d(4+x)$　(2) $\int\frac{dx}{4+x^2}=\frac{1}{2}\int\frac{1}{1+(\frac{x}{2})^2}d(\frac{x}{2})$　(3) $\int\frac{x}{4+x^2}dx=\frac{1}{2}\int\frac{1}{4+x^2}d(4+x^2)$

(4) $\int\frac{x^2}{4+x^2}dx=\int(1-\frac{4}{4+x^2})dx$　(5) $\int\frac{dx}{4-x^2}=\frac{1}{4}\int(\frac{1}{2+x}+\frac{1}{2-x})dx$　(6) $\int\frac{dx}{\sqrt{4x-x^2}}=\int\frac{1}{\sqrt{4-(x-2)^2}}d(x-2)$

eg. 求 $\int\frac{dx}{x(x^7+2)}$　法一：令 $t=\frac{1}{x}$，有 $dx=-\frac{1}{t^2}dt$

原式 $=-\int\frac{t^6dt}{1+2t^7}=-\frac{1}{14}\int\frac{1}{1+2t^7}d(1+2t^7)=-\frac{1}{14}\ln|1+\frac{2}{x^7}|+C$

法二：原式 $=\int\frac{x^6}{x^7(x^7+2)}dx=\frac{1}{7}\int\frac{dx^7}{x^7(x^7+2)}=-\frac{1}{14}(\frac{1}{x^7+2}-\frac{1}{x^7})dx^7$

法三：原式 $=\frac{1}{2}\int\frac{2+x^7-x^7}{x(2+x^7)}dx=\frac{1}{2}\int\frac{1}{x}dx-\frac{1}{2}\int\frac{x^6}{2+x^7}dx$

eg. $\int\frac{x^5}{\sqrt{1+x^2}}dx=\frac{1}{2}\int\frac{x^4}{\sqrt{x^2+1}}dx^2=\frac{1}{2}\int\frac{(x^2+1-1)^2}{\sqrt{x^2+1}}d(x^2+1)$

凑微分 $=\frac{1}{2}\int\frac{(x^2+1)^2-2(x^2+1)+1}{\sqrt{x^2+1}}d(x^2+1)$

No.

Date

分母为二次三项式的函数的不定积分求法：

对 $\int \frac{1}{ax^2+bx+c}dx$，$a\neq 0$

1) $\Delta=0$ 时 $\int \frac{1}{ax^2+bx+c}dx = \int \frac{1}{(x-x_0)^2}d(x-x_0) = -\frac{1}{x-x_0}+C$

2) $\Delta>0$ 时，ax^2+bx+c 有两实根 x_1，x_2

$$\int \frac{1}{ax^2+bx+c}dx = \int \frac{1}{(x-x_1)(x-x_2)}dx = \frac{1}{x_1-x_2}\int\left(\frac{1}{x-x_1}-\frac{1}{x-x_2}\right)dx = \frac{1}{x_1-x_2}\left(\int\frac{1}{x-x_1}d(x-x_1)-\int\frac{1}{x-x_2}d(x-x_2)\right)$$

$$= \frac{1}{x_1-x_2}\ln\left|\frac{x-x_1}{x-x_2}\right|+C$$

3) $\Delta<0$ 时，配方（t 为常数）

$$\int \frac{1}{ax^2+bx+c}dx = \int \frac{1}{(x-x_1)^2+t^2}dx = \frac{1}{t^2}\int\frac{1}{1+\left(\frac{x-x_1}{t}\right)^2}dx = \frac{1}{t}\int\frac{1}{1+\left(\frac{x-x_1}{t}\right)^2}d\left(\frac{x-x_1}{t}\right)$$

$$= \frac{1}{t}\arctan\left(\frac{x-x_1}{t}\right)+C$$

另：分子为一次式时：凑微分法

eg. $\int \frac{2x+2}{x^2+2x+3}dx = \int\frac{1}{x^2+2x+3}d(x^2+2x+3) = \ln(x^2+2x+3)+C$

$\int \frac{3x-2}{x^2+2x+3}dx = \frac{3}{2}\int\frac{2x+2-\frac{10}{3}}{x^2+2x+3}dx = \frac{3}{2}\int\frac{2x+2}{x^2+2x+3}dx - 5\int\frac{1}{x^2+2x+3}dx$

另：分子为二次（或更高）时，大除法，假分式 $\Rightarrow$ 整式 + 真分式

6.分部积分法

分部积分公式 $\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx$

即 $\int u\,dv = uv - \int v\,du$

注：分部即将部分原函数 uv 先求出来，uv 的 C 寄存在 $\int v\,du$ 中

要求：1) $v(x)$ 容易求得 2) $\int v\,du$ 比 $\int u\,dv$ 更好求

分部积分法主要解决以下问题 "反对幂指三"

1) $\int$ 幂函数 × 三角函数/指数函数 dx

u dv

eg. $\int x^2\sin x\,dx = -\int x^2 d\cos x = -x^2\cos x + \int\cos x\,dx^2$

$\int\cos x\,dx^2 = 2\int x\cos x\,dx = 2\int x\,d\sin x$

$= 2x\sin x - 2\int\sin x\,dx = 2x\sin x + 2\cos x + C$

eg. $\int x^2e^x dx = \int x^2 de^x = x^2e^x - \int e^x dx^2$

$= x^2e^x - 2\int xe^x dx = x^2e^x - 2\int x\,de^x$

$= x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + C$

eg. $\int\frac{x\cos^4\frac{x}{2}}{\sin^3x}dx = \frac{1}{8}\int\frac{x\cos\frac{x}{2}}{\sin^3\frac{x}{2}}dx$

$= \frac{1}{4}\int\frac{x}{\sin^3\frac{x}{2}}d\sin\frac{x}{2} = -\frac{1}{8}\int x\,d\sin^{-2}\frac{x}{2}$

$= -\frac{1}{8}x\sin^{-2}\frac{x}{2} + \frac{1}{8}\int\sin^{-2}\frac{x}{2}dx$

$= -\frac{1}{8}x\sin^{-2}\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\cot\frac{x}{2} + C$

2) 反三角函数/对数函数 × 幂函数dx

$u \leftarrow \quad dv \rightarrow$

eg. $\int \arctan x\,dx = x\arctan x - \int x\cdot\frac{1}{1+x^2}dx$

$\int \frac{x}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\int\frac{1}{1+x^2}d(1+x^2) = \frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$

eg. $\int x^4\ln x\,dx = \frac{1}{5}\int \ln x\,dx^5 = \frac{1}{5}x^5\ln x - \frac{1}{5}\int x^5\cdot\frac{1}{x}dx = \frac{1}{5}x^5\ln x - \frac{x^5}{25}+C$

eg. $\int x^4\ln^2 x\,dx \rightarrow \int x^4\ln x\,dx \rightarrow \int x^4 dx$

3) 指数函数 × 三角函数dx　谁做u、v都行

eg. $\int e^{ax}\cos bx\,dx$，a.b为常数

$= \frac{1}{b}\int e^{ax}d\sin bx = \frac{1}{b}e^{ax}\sin bx - \frac{a}{b}\int \sin bx\, e^{ax}dx$

$= \frac{1}{b}e^{ax}\sin bx + \frac{a}{b^2}\int e^{ax}d\cos bx$

$= \frac{1}{b}e^{ax}\sin bx + \frac{a}{b^2}e^{ax}\cos bx - \frac{a^2}{b^2}\int \cos bx\, e^{ax}dx$

即 $\frac{a^2+b^2}{b^2}\cdot\int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{1}{b}e^{ax}\sin bx + \frac{a}{b^2}e^{ax}\cos bx + C \Rightarrow$

分部积分题目类型

1) 直接分部化简积分

2) 分部产生循环式，由此解出积分式

注：两次分部选择的u、v类型应不变，解出积分后加C

3) 对含自然数n的积分，通过分部积分建立递推公式

eg. 记 $I_n = \int\frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$，求用 I_n 表示的 I_{n+1}

解：$I_n = \int\frac{dx}{(x^2+a^2)^n} = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n\int\frac{x^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}dx = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n\int\frac{x^2+a^2-a^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}dx$

$= \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2nI_n - 2na^2 I_{n+1}$

$\therefore I_{n+1} = \frac{1}{2na^2}\frac{x}{(x^2+a^2)^n} + \frac{2n-1}{2na^2}I_n$　　且 $I_1 = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C$

eg. 记 $I_n = \int \tan^n x\,dx$，求递推式

$I_n = \int \tan^{n-2}x(\sec^2 x-1)dx = \int\tan^{n-2}x\,d\tan x - I_{n-2} = \frac{1}{n-1}\tan^{n-1}x - I_{n-2}$

eg. $I_5 = \frac{1}{4}\tan^4 x - \frac{1}{2}\tan^2 x + \ln|\sec x| + C$

$I_8 = \frac{1}{7}\tan^7 x - \frac{1}{5}\tan^5 x + \frac{1}{3}\tan^3 x - \tan x + x + C$

No.

Date

幂函数图象的性质

$y=x^a$，a为常数

1、① a是无理数：只有第一象限有图象

② a是有理数，记 $a=\frac{p}{q}$，P、q互质

情况	哪一象限有图象	函数性质(奇偶)	举例
q为偶	一	非奇非偶	$y=\sqrt{x}$　$y=x^{-\frac{3}{4}}=\frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}$
q为奇,P为偶	一、二	偶函数	$y=x^2$　$y=x^{-\frac{2}{3}}$
q、P为奇	一、三	奇函数	$y=x^{\frac{3}{5}}$　$y=\frac{1}{x}$

2、$a>0$时，在$x=0$处有定义　$a<0$时，在$x=0$处无定义

$a=0$时，$y=x^0=1$ $(x\neq 0)$

3、函数在第一象限的图象　必过$(1,1)$

① $\mu<0$　递减

② $0<\mu<1$　递增，y'递减

$\mu=1$　递增，y'不变

$1<\mu$　递增，y'递增

定理：

已知$f(x)$在a点处连续，则：$F(x)=f(x)|x-a|$在$x=a$处可导$\Leftrightarrow f(a)=0$

证：$F(a)=0$，$F'_-(a)=\lim\limits_{x\to a^-}\frac{-f(x)(x-a)-0}{x-a}=-\lim\limits_{x\to a^-}f(x)=-f(a)$

$F'_+(a)=\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f(x)(x-a)-0}{x-a}=\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=f(a)$

则$F(x)$在$x=a$处可导$\Leftrightarrow F'_-(a)=F'_+(a)\Leftrightarrow f(a)=0$ □

例：求$f(x)=(x^2-x-2)|x^3-x|$的不可导点

解：$f(x)=(\underset{2}{x-2})(\underset{-1}{x+1})|\underset{0}{x}||\underset{-1}{x+1}||\underset{1}{x-1}|$，不可导点$x=0,1$

理解：$f(a)=0$使$f(x)$在a处的"尖点"变圆滑

方程近似解

引入:1.对$f(x)$，若$\exists x^*$使$f(x^*)=0$，则称x^*为$f(x)=0$的根，或称x^*为$f(x)$的零点.

eg. $\forall$三次方程 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ $(a\neq 0)$

(1) 均可化为 $x^3+mx-n=0$

(2) 其一个解为 $x=\sqrt[3]{\frac{n}{2}+\sqrt{\frac{n^2}{4}+\frac{m^3}{27}}}+\sqrt[3]{\frac{n}{2}-\sqrt{\frac{n^2}{4}+\frac{m^3}{27}}}$

(1) $x^3+\frac{b}{a}x^2+\frac{c}{a}x+\frac{d}{a}=0$ 记 $b'=\frac{b}{a}$ $c'=\frac{c}{a}$ $d'=\frac{d}{a}$

即三次方程 $\Rightarrow x^3+b'x^2+c'x+d'=0$

令 $z=x+\frac{b'}{a}$ $\Rightarrow z^3+pz+q=0$，$p=c'-\frac{b'^2}{3}$，$q=\frac{2b'^3}{27}-\frac{b'c'}{3}+d'$

(2) 对$x^3+mx-n=0$，设$x=u+v$. 得 $u^3+v^3+3uv(u+v)+m(u+v)-n=0$

$\therefore \underbrace{(3uv+m)}_{0}(u+v)+\underbrace{u^3+v^3-n}_{0}=0$ $\Rightarrow \begin{cases} u^3+v^3=n \\ uv=-\frac{m}{3} \end{cases}$ $u^3v^3=-\frac{m^3}{27}$

构造 $y^2-ny-\frac{m^3}{27}=0$，其解为u^3、v^3

$x_{1,2}=\frac{n\pm\sqrt{n^2+\frac{4}{27}m^3}}{2}=\frac{n}{2}\pm\sqrt{\frac{n^2}{4}+\frac{m^3}{27}}$ $\therefore u,v=\sqrt[3]{\frac{n}{2}\pm\sqrt{\frac{n^2}{4}+\frac{m^3}{27}}}$

$\therefore x=u+v=\sqrt[3]{\frac{n}{2}+\sqrt{\frac{n^2}{4}+\frac{m^3}{27}}}+\sqrt[3]{\frac{n}{2}-\sqrt{\frac{n^2}{4}+\frac{m^3}{27}}}$

但是，五次及五次以上代数方程不存在一般形式的根式解

$\Rightarrow$ 求近似根　方法:区间收缩法 ①确定初始含根区间 ②收缩含根区间

2.迭代法

将$f(x)=0$变换成等价形式$x=\varphi(x)$，构造迭代格式 $x_{k+1}=\varphi(x_k)$

其中$\varphi(x)$称为迭代函数，$x=\varphi(x)$称为不动点方程.

对给定的初值x_0，由迭代格式得到的序列$\{x_k\}$称为迭代序列.

对连续函数$\varphi(x)$，若$\{x_k\}$收敛于x^*，则:

$$x^*=\lim_{k\to\infty}x_{k+1}=\lim_{k\to\infty}\varphi(x_k)=\varphi(x^*)\Rightarrow f(x^*)=0$$

如何选取迭代函数，使$\{x_k\}$收敛呢?

3. 牛顿迭代法

①原理：将非线性方程线性化

设 $f(x)$ 在 x^* 附近可导，x_0 为 $f(x)=0$ 近似根（$f'(x)\neq 0$），用一阶泰勒多项式近似 $f(x)$：

$f(x)\approx P_1(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$

$P_1(x)=0$ 的根 $x_1=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$ 作为 x^* 的第一次近似值

同理，$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$，$k=0,1,2\cdots$ 牛顿迭代公式

作为 x^* 的第 $k+1$ 次近似值

迭代函数：$\varphi(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)}$ 条件：$f(x)$ 在 x^* 附近可导且 $f'(x)\neq 0$

②牛顿迭代法的几何意义："切线法"

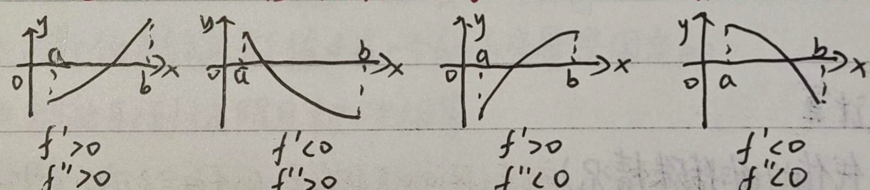
③牛顿法的收敛性：

定理：$f(x)$ 满足 ① 在 $[a,b]$ 上有二阶导数，$f'(x)$、$f''(x)$ 均不变号

② $f(a)f(b)<0$

$\Rightarrow$ 方程 $f(x)=0$ 在 (a,b) 内有唯一实根 x^*，且按牛顿迭代公式给出的 $\{x_k\}$ 收敛于 x^*

④有四种情况



取 a、b 中哪一个为初值？

直观上：选函数值与 f'' 同号的点为初值，否则切线与 x 轴交点未必在 $[a,b]$ 内

$\lim\limits_{k\to\infty}\frac{x_{k+1}-x^*}{(x^*-x_k)^2}=\frac{f''(x^*)}{2f'(x^*)}$ 用来选初值

证：$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$ $\therefore x_{k+1}-x^*=x_k-x^*-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}\cdots$①

$f(t)$ 在 x_k 处展开：$f(t)=f(x_k)+f'(x_k)(t-x_k)+\frac{f''(\xi_k)}{2!}(t-x_k)^2$

将 $t=x^*$ 代入，得：$f(x^*)=0=f(x_k)+f'(x_k)(x^*-x_k)+\frac{f''(\xi_k)}{2}(x^*-x_k)^2$

代入①，得 $x_{k+1}-x^*=x_k-x^*+\frac{f'(x_k)\cdot(x^*-x_k)+f''(\xi_k)(x^*-x_k)^2/2}{f'(x_k)}=\frac{f''(\xi_k)(x^*-x_k)^2}{2f'(x_k)}$

$\therefore\frac{x_{k+1}-x^*}{(x^*-x_k)^2}=\frac{f''(\xi_k)}{2f'(x_k)}$ 令 $k\to\infty$，$x_k\to x^*$，$\xi_k\in(x_k,x^*)$ $\xi_k\to x^*$

$\therefore\lim\limits_{k\to\infty}\frac{x_{k+1}-x^*}{(x^*-x_k)^2}=\frac{f''(x^*)}{2f'(x^*)}$

No.
Date

⑤牛顿法的误差估计

由 $f(x_n)-f(x^*)=f'(\xi)(x_n-x^*)$ ξ在x_n, x^*间

知 $x_n-x^*=\frac{f(x_n)}{f'(\xi)}$ 记 $m=\min|f'(x)|$

$\therefore$误差 $|x_n-x^*|\le\frac{|f(x_n)|}{m}$

绝对值不等式: $||a|-|b||\le|a\pm b|\le|a|+|b|$

$|ab|=|a||b|$, $|\frac{a}{b}|=\frac{|a|}{|b|}$

二项式定理 $(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k a^k b^{n-k}$

n次方差: $a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1})$

平方差: $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$

立方差: $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

立方和: $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

极限的计算

1. 直接代值(非特殊情况)
2. $\frac{0}{0}$、$\frac{\infty}{\infty}$ 洛必达 or 同除
3. 两个重要极限
4. 夹逼定理
5. 无穷小替换(常见、泰勒展开)

复合函数的反函数

$y=\varphi(g(x)) \Rightarrow \varphi^{-1}(y)=g(x) \Rightarrow g^{-1}(\varphi^{-1}(y))=x$

求n阶导数方法 ①莱布尼兹公式 ②泰勒展开

例: $f(x)=x^2\cos x^2$, 求 $f^{(10)}(0)=\underline{\frac{10!}{4!}}$

$\because \cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4)$ $\therefore f(x)=x^2-\frac{x^6}{2!}+\frac{x^{10}}{4!}+o(x^{10})$

由泰勒公式系数的唯一性, $\frac{f^{(10)}(0)}{10!}x^{10}=\frac{1}{4!}x^{10} \Rightarrow f^{(10)}(0)=\frac{10!}{4!}$

No.

Date

例：已知 $f(0)=0$，则 $f(x)$ 在 $\boxed{x=0}$ 处可导的充要条件为（B）

A. $\lim_{h\to0}\frac{1}{h^2}f(1-\cos h)$ 存在　B. $\lim_{h\to0}\frac{1}{h}f(1-e^h)$ 存在　C. $\lim_{h\to0}\frac{1}{h^2}f(h-\sin h)$ 存在　D. $\lim_{h\to0}\frac{1}{h}[f(2h)-f(h)]$ 存在

解：$f(0)=0$ 时 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导：$f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}$ 存在

A：$\lim_{h\to0}\frac{1}{h^2}f(1-\cos h)=\lim_{h\to0}\frac{f(1-\cos h)-f(0)}{1-\cos h}\cdot\lim_{h\to0}\frac{1-\cos h}{h^2}=\frac{1}{2}\lim_{h\to0}\frac{f(1-\cos h)-f(0)}{1-\cos h}$

令 $t=1-\cos h \Rightarrow \frac{1}{2}\lim_{t\to0^+}\frac{f(t)-f(0)}{t}$ 存在 $\Rightarrow f'_+(0)$ 存在 $\not\Rightarrow f'(0)$ 存在

B. $\lim_{h\to0}\frac{1}{h}f(1-e^h)=\lim_{h\to0}\frac{f(1-e^h)-f(0)}{1-e^h}\cdot\lim_{h\to0}\frac{1-e^h}{h}=-\lim_{1-e^h\to0}\frac{f(1-e^h)-f(0)}{1-e^h}$ 存在 $\Leftrightarrow f'(0)$ 存在 ✓

C. $\lim_{h\to0}\frac{f(h-\sin h)-f(0)}{h-\sin h}\cdot\frac{h-\sin h}{h^2}$ 存在，$\because \lim_{h\to0}\frac{h-\sin h}{h^2}=0$ $\therefore$ 原式 $\Rightarrow \frac{f(h-\sin h)-f(0)}{h-\sin h}$ 有界

$\not\Rightarrow \lim_{t\to0}\frac{f(t)-f(0)}{t}$ 存在

D、$\not\Rightarrow f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，$\not\Rightarrow f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，详见下题

例：设 $f(x)$ 在 $\boxed{x=a}$ 的某个邻域内有定义，则 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导的充分条件是（D）

A. $\lim_{h\to+\infty}h[f(a+\frac{1}{h})-f(a)]$ 存在　B. $\lim_{h\to0}\frac{f(a+2h)-f(a+h)}{h}$ 存在

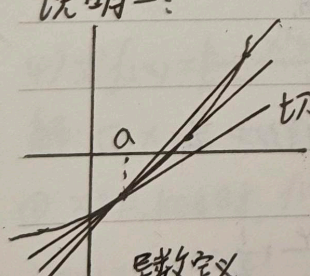
C. $\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$ 存在　D. $\lim_{h\to0}\frac{f(a)-f(a-h)}{h}$ 存在

做法：1.要保证分子上两个作差的函数值中有一个的自变量是固定的

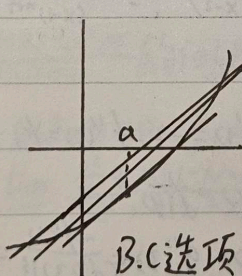
2.要保证两边都能取到极限且极限相等

1.排除 B.C.　2.排除 A

说明一：



导数定义



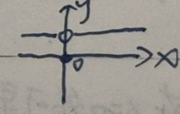
B.C选项

要保证1. 否则不符合导数的定义，且无法保证 $f(x)$ 在 $x=a$ 处连续

*假定一个处处可导的函数 $f(x)$，重新定义 $f(a)$ 使 x 在 a 处不连续，仍满足 B.C 选项

注：B. C 是 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导的必要条件

*例 $f(x)=\begin{cases}1 & x\neq0\\ 0 & x=0\end{cases}$



$\lim_{h\to0}\frac{f(2h)-f(h)}{h}=\frac{1-1}{h}=0$

No.

Date

例：函数 $f(x)=\begin{cases} x^n\sin\frac{1}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$，n为整数，问n在什么条件下，f(x)在x=0处

(1) 连续　(2) 可导　(3) 导数连续

解：(1) $f(0)=0$. $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}x^n\sin\frac{1}{x}=\begin{cases}0 & n\geq 1\\ 不存在 & n\leq 0\end{cases}$ $\therefore n\geq 1$

(2) $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=x^{n-1}\sin\frac{1}{x}=\begin{cases}0 & n\geq 2\\ 不存在 & n\leq 1\end{cases}$ $\therefore n\geq 2$

(3) 在 $n\geq 2$ 时，$f'(x)=\begin{cases}nx^{n-1}\sin\frac{1}{x}-x^{n-2}\cos\frac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$

$\lim\limits_{x\to 0}f'(x)=\lim\limits_{x\to 0}(nx^{n-1}\sin\frac{1}{x}-x^{n-2}\cos\frac{1}{x})=\begin{cases}0 & n\geq 3\\ 不存在 & n\leq 2\end{cases}$ $\therefore n\geq 3$

题型：分母是二次式的有理函数，求其n阶导数. ⇒ 化成一次式

(1) $f(x)=\frac{1}{x^2-1}$，求 $f^{(n)}(x)$

解：$f(x)=\frac{1}{2}(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1})$ $\therefore f^{(n)}(x)=\frac{1}{2}[(\frac{1}{x-1})^{(n)}-(\frac{1}{x+1})^{(n)}]=\frac{1}{2}[\frac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}}-\frac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}}]$

(2) $f(x)=\frac{x^2}{x^2-x-2}$，求 $f^{(n)}(x)$

解：$f(x)=1+\frac{x+2}{x^2-x-2}=1+\frac{1}{3}(\frac{4}{x-2}-\frac{1}{x+1})$

$f^{(n)}(x)=1^{(n)}+\frac{1}{3}[(\frac{4}{x-2})^{(n)}-(\frac{1}{x+1})^{(n)}]=\frac{(-1)^n n!}{3}[\frac{4}{(x-2)^{n+1}}-\frac{1}{(x+1)^{n+1}}]$

(3) $f(x)=\frac{x^4-5x}{x^2-3x+2}$，求 $f^{(n)}(x)$　$(n>2)$

由大除法：$x^4-5x=(x^2+3x+7)(x^2-3x+2)+10x-14$

$\therefore f^{(n)}(x)=(x^2+3x+7)^{(n)}+(\frac{10x-14}{x^2-3x+2})^{(n)}=(\frac{4}{x-1})^{(n)}+(\frac{6}{x-2})^{(n)}=\frac{4(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}}+\frac{6(-1)^n n!}{(x-2)^{n+1}}$

设 f(x)、g(x) 互为反函数，f(x) 二阶可导，且 $f(1)=3$，$f'(1)=-2$，$f''(1)=4$，则 $g''(3)=\frac{1}{2}$

解：记 $y=g(x)$. $x=f(y)$　$y=1$ 时 $x=3$　$y'=g'(x)=\frac{1}{f'(y)}$

$\therefore g''(x)=\frac{d}{dy}\frac{1}{f'(y)}\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{-f''(y)}{(f'(y))^2}\cdot y'=\frac{-f''(y)}{(f'(y))^3}$ ⇒ $g''(3)=\frac{-f''(1)}{[f'(1)]^3}=\frac{-4}{-8}=\frac{1}{2}$

设 f(x) 在 x=0 处可导，$f'(0)\neq 0$，且对 $\forall x\neq 0$，$\exists\,\xi$ 在 0 与 x 之间，使得 $f(x)-f(0)=2f'(\xi)$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\xi}{x}=$

解：$\lim\limits_{x\to 0}(f(x)-f(0))=\lim\limits_{x\to 0}2f(\xi)=2\lim\limits_{x\to 0}f(x)=2f(0)$ ⇒ $f(0)=0$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\xi}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\xi}{f(\xi)}\frac{f(\xi)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\xi}{f(\xi)}\cdot\frac{f(x)-f(0)}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\xi-0}{f(\xi)-f(0)}\cdot\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{1}{f'(0)}\cdot\frac{1}{2}f'(0)=\frac{1}{2}$

法二：特殊值法，设 $f(x)=x$，$x-0=2\xi$ ⇒ $\frac{\xi}{x}=\frac{1}{2}$

Campus

No.

Date

习题课:

$0<B<1$时，$B^{+\infty}\to 0$，$B^{-\infty}\to\infty$

$B=1$时 $B^{f(x)}=1$

$B>1$时，$B^{+\infty}\to\infty$，$B^{-\infty}\to 0$

1) 已知 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n+1}+(a-x)x^n-1}{x^{2n}-ax^n-1}$ 在$[0,+\infty)$连续，则 $a=\underline{\frac{1}{2}}$

解: ① $0\le x<1$时，$f(x)=\dfrac{0+0-1}{0-0-1}=1$，② $x=1$时 $f(x)=\dfrac{a-1}{-a}$

③ $x>1$时，$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x+(a-x)\frac{1}{x^n}-\frac{1}{x^{2n}}}{1-a\frac{1}{x^n}-\frac{1}{x^{2n}}}=\dfrac{x+0-0}{1-0-0}=x$ 同除x^{2n}，使无穷大$\Rightarrow$无穷小

$\therefore f(x)=\begin{cases}1, & 0\le x<1\\ \frac{a-1}{-a}, & x=1\\ x, & x>1\end{cases}$ $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=f(1)\Rightarrow a=\frac12$

2) 已知 $f(x)=\begin{cases}e^{x-a}, & x\le0\\ (\cos x+a\sin^2x)^{\frac{1}{x^2}}, & x>0.\end{cases}$ 在$x=0$处连续，则 $a=\underline{\frac14}$

解: $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}e^{x-a}=e^{-a}$；$f(0)=e^{-a}$；

$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}(1+\cos x-1+a\sin^2x)^{\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to0^+}(1+(-\frac{x^2}{2})+ax^2)^{\frac{1}{x^2}}=e^{a-\frac12}\Rightarrow a=\frac14$

等价: $x\to0$时 $\cos x-1\sim-\frac{x^2}{2}$，$\sin x\sim x$，$\alpha$、$\beta$都是无穷小:"$1^\infty$"型: $\lim\limits_{x\to x_0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\beta}}=e^{\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha}{\beta}}$

3) 已知 $a,b,c>0$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a^n+b^n+c^n}$

解: 取 $M=\max\{a,b,c\}$

$M=\sqrt[n]{M^n}\le\sqrt[n]{a^n+b^n+c^n}\le\sqrt[n]{3M^n}$ $\because\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{3M^n}=\lim\limits_{n\to\infty}3^{\frac1n}M=M$

$\therefore\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a^n+b^n+c^n}=M$

eg. $g(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+|x|^n+(\frac{x^2}{2})^n}$ $\therefore g(x)=\max\{1,|x|,\frac{x^2}{2}\}$，画图，取最上面的图

4) 求 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^2+nx(1-x)\sin^2\pi x}{1+n\sin^2\pi x}$ 的间断点

解: ① $x=k$，$k\in Z$时，$\sin^2\pi x=0$，$f(x)=x^2$

② $x\ne k$，$k\in Z$时，$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{x^2}{n}+x(1-x)\sin^2\pi x}{\frac1n+\sin^2\pi x}=\dfrac{x(1-x)\sin^2\pi x}{\sin^2\pi x}=x(1-x)$ 同除n，使无穷大$\Rightarrow$无穷小

$\therefore f(x)=\begin{cases}x(1-x), & x\ne k, k\in Z\\ x^2, & x=k, k\in Z\end{cases}$

i $x=0$时 $f(x)=0$，$\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$. $\therefore f(x)$在$x=0$处连续

ii $x=k$，$k\in Z$且$k\ne0$时，$f(x)=k^2$，$\lim\limits_{x\to k}f(x)=k(1-k)=k-k^2\ne f(x)$，可去间断点

5) $f(x)=\dfrac{x-1}{\ln|x|}$，求$f(x)$的间断点

解: $x=1,-1,0$时$f(x)$无定义

① $\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$，可去间断点 ② $\lim\limits_{x\to1}f(x)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-1}{\ln(x+1-1)}=\dfrac{x-1}{x-1}=1$，可去间断点

③ $\lim\limits_{x\to-1}f(x)=\infty$，无穷间断点

No.

Date

psp_dada

例：求 $\lim\limits_{x\to-8}\frac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$

解：分子有理化 $\Rightarrow \lim\limits_{x\to-8}\frac{(\sqrt{1-x}-3)(\sqrt{1-x}+3)}{(2+\sqrt[3]{x})(\sqrt{1-x}+3)}=\lim\limits_{x\to-8}\frac{1-x-9}{(2+\sqrt[3]{x})(\sqrt{1-x}+3)}=-\lim\limits_{x\to-8}\frac{x+8}{(2+\sqrt[3]{x})(\sqrt{1-x}+3)}$

分子立方和公式 $=-\lim\limits_{x\to-8}\frac{(\sqrt[3]{x}+2)(\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+4)}{(2+\sqrt[3]{x})(\sqrt{1-x}+3)}=-\frac{4-(-4)+4}{6}=-2$

法二：洛必达 $\Rightarrow \lim\limits_{x\to-8}\frac{\frac{-1}{2\sqrt{1-x}}}{\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}}=\frac{-\frac{1}{6}}{\frac{1}{12}}=-2$

例：已知 $f(x)$ 在 $x=2$ 处连续，且 $\lim\limits_{x\to2}\frac{f(x)}{x-2}=3$，求 $f'(2)$

解：$f(2)=\lim\limits_{x\to2}f(x)=\lim\limits_{x\to2}(x-2)\frac{f(x)}{x-2}=0$

$\therefore f'(2)=\lim\limits_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to2}\frac{f(x)}{x-2}=3$

例：若 $f(1)=0$，$f'(1)$ 存在，求 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(\sin^2x+\cos x)}{(e^x-1)\tan x}$

配凑导数的定义

解：$x\to0$ 时 $(e^x-1)\tan x\sim x^2$，$x\to0$ 时 $\sin^2x+\cos x\to1$

原式 $=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(1+\sin^2x+\cos x-1)-f(1)}{x^2}=\boxed{\lim\limits_{x\to0}\frac{f(1+\sin^2x+\cos x-1)-f(1)}{\sin^2x+\cos x-1}}\cdot\frac{\sin^2x+\cos x-1}{x^2}$

$=f'(1)\cdot\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin^2x+\cos x-1}{x^2}=f'(1)\cdot\left(\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin^2x}{x^2}+\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x-1}{x^2}\right)=f'(1)\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}f'(1)$

例：已知 $f'(x_0)$ 存在，求 $\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{f(x_0+\Delta x+(\Delta x)^2)-f(x_0)}{\Delta x}$

解：原式 $=\lim\limits_{\Delta x\to0}\left(\frac{f(x_0+\Delta x+(\Delta x)^2)-f(x_0)}{\Delta x+\Delta x^2}\cdot\frac{\Delta x+\Delta x^2}{\Delta x}\right)=f'(x_0)\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{\Delta x+o(\Delta x)}{\Delta x}=f'(x_0)$

例：设 $f(x)\in C[0,\pi]$，$f(x)\in D(0,\pi)$，证明至少 $\exists$ 一个 $\xi\in(0,\pi)$，使 $f'(\xi)=-f(\xi)\cot\xi$

证：$f'(\xi)=-f(\xi)\cot\xi \Rightarrow f'(\xi)\sin\xi+f(x)\cos\xi=0$，设 $F(x)=f(x)\sin x$，

$\because F(0)=F(\pi)=0$，且 $F(x)\in C[0,\pi]$，$F(x)\in D(0,\pi)$，$F(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上应用罗尔定理：

$\therefore$ 至少 $\exists$ 一个 $\xi\in(0,\pi)$，$F'(\xi)=0$ 即 $f'(\xi)\sin\xi+f(x)\cos\xi=0$ □

例：求 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+x+x^2)+\ln(1-x+x^2)}{\sec x-\cos x}$

法一：$=\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln((1+x^2)^2-x^2)}{\sec x-\cos x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(x^4+x^2+1)}{\sec x-\cos x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x^4+x^2}{\sec x-\cos x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{4x^3+2x}{(\sec^2x+1)\sin x}=\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}\frac{4x^3+2x}{\sin x}=\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}(4x^2+2)=1$

法二：$=\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+x^2+x^4)}{\frac{1}{\cos x}(1-\cos^2x)}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2+x^4}{\frac{1+\cos x}{\cos x}(1-\cos x)}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2+x^4}{2(1-\cos x)}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2+x^4}{x^2}=1$

Campus

Date

例：求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\sin7x}{\ln\sin5x}$

解：$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln\sin7x}{\ln\sin5x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\sin5x}{\sin7x}\cdot\dfrac{\cos7x\cdot7}{\cos5x\cdot5}=\dfrac75\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\sin5x}{\sin7x}\cdot\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\cos7x}{\cos5x}=\dfrac75\times\dfrac57=1$

例：求 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac32}(\sqrt{x+2}-2\sqrt{x+1}+\sqrt{x})$

法一：$=\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x})^3\left(\dfrac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}}-\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x})^3\cdot\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{x+2}}{(\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x})^3\cdot\dfrac{-2}{(\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})(\sqrt{x}+\sqrt{x+2})}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-2}{\left(\frac{\quad}{\sqrt{x}}\right)\left(\frac{\quad}{\sqrt{x}}\right)\left(\frac{\quad}{\sqrt{x}}\right)}=\dfrac{-2}{2\times2\times2}=-\dfrac14$

法二：令 $t=\frac1x$，$x\to\infty$，$t\to0$ 洛

原式 $=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{\sqrt{1+2t}-2\sqrt{1+t}+1}{t^2}=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{(1+2t)^{-\frac12}-(1+t)^{-\frac12}}{2t}=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{-(1+2t)^{-\frac32}+\frac12(1+t)^{-\frac32}}{2}=-\dfrac14$

例：求 $\lim\limits_{x\to\infty}[x^2\ln(1+\frac1x)-x]$ 洛

法一：$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x\ln(1+\frac1x)-1}{\frac1x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(1+\frac1x)+x\frac{1}{1+\frac1x}(-\frac{1}{x^2})}{-\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(-x^2\ln(1+\frac1x)+\dfrac{x^2}{x+1}\right)$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\left(-x^2\ln(1+\frac1x)+x-1+\frac{1}{x+1}\right)=-\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^2\ln(1+\frac1x)-x\right)+\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x+1}-1\right)$

$\therefore 2\lim\limits_{x\to\infty}[x^2\ln(1+\frac1x)-x]=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x+1}-1\right)=-1$

$\therefore \lim\limits_{x\to\infty}[x^2\ln(1+\frac1x)-x]=-\dfrac12$

法二：令 $t=\frac1x$，$x\to\infty$，$t\to0$

原式 $=\lim\limits_{t\to0}[\frac{1}{t^2}(1+t)-\frac1t]=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{\ln(1+t)-t}{t^2}=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{\frac{1}{1+t}-1}{2t}=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{1-(1+t)}{2t(1+t)}=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{-t}{2t(1+t)}=-\dfrac12$

例：求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x^{100}}e^{-\frac{1}{x^2}}$ 洛　　越洛越复杂 ⇒ 换元

解：令 $t=\frac{1}{x^2}$，$x\to0$，$t\to+\infty$

原式 $=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{t^{50}}{e^t}=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{50t^{49}}{e^t}=\cdots=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{50!}{e^t}=0$

例：求 $\lim\limits_{x\to0}\left[2-\dfrac{\ln(1+x)}{x}\right]^{\frac{1}{e^x-1}}$

解：$=\lim\limits_{x\to0}\left[1+\dfrac{x-\ln(1+x)}{x}\right]^{\frac{1}{e^x-1}}=\lim\limits_{x\to0}e^{\frac{x-\ln(1+x)}{x(e^x-1)}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\frac{1}{x+1}}{2x}}$

$=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{2(x+1)}}=e^{\frac12}$

KOKUYO

No.

Date

例：求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan(\tan x)-\sin(\sin x)}{x-\sin x}$

解：原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan(\tan x)-\tan(\sin x)}{x-\sin x}+\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan(\sin x)-\sin(\sin x)}{x-\sin x}$

左 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sec^2\xi(\tan x-\sin x)}{x-\sin x}$，$\xi\in(\sin x,\tan x)$　$x\to0$，$\sin x,\tan x\to0$，$\xi\to0$，$\sec^2\xi\to1$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x-\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{x^3}{2}}{\frac{x^3}{6}}=3$

右：记 $u=\sin x$，原式 $=\lim\limits_{u\to0}\dfrac{\tan u-\sin u}{\arcsin u-u}=\lim\limits_{u\to0}\dfrac{\frac{x^3}{2}}{\frac{x^3}{6}}=3$

∴原式 $=6$

导数的应用习题课 11.4

① 函数在 $x=0$ 邻域内都可导，但导函数不一定连续

eg. $f(x)=\begin{cases}x^2\sin\frac{1}{x} & x\neq0\\ 0 & x=0\end{cases}$　$f'(x)=\begin{cases}2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x} & x\neq0\\ 0 & x=0\end{cases}$

$f'(0)=0$，但 $\lim\limits_{x\to0}f'(x)$ 不存在 ⇒ 导函数在 $x=0$ 不连续

∴ 求一点的导数，都用定义求　$f'(x)=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

② 一点可导推不出邻域可导

eg. $f(x)=\begin{cases}x^2 & x\in Q\\ 0 & x\in\overline{Q}\end{cases}$　只在 $x=0$ 处连续、可导

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=\begin{cases}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2}{x}=0, & x\in Q\\ \lim\limits_{x\to0}\dfrac{0}{x}=0, & x\in\overline{Q}\end{cases}$

∴ $f'(x)=\begin{cases}0 & x=0\\ \text{不存在} & x\neq0\end{cases}$

③ 定理：设 $f(x)$、$g(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上有 n 阶导数，

且 ① $f^{(k)}(a)=g^{(k)}(a)$，$k=0,1,2\cdots n-1$

② $f^{(n)}(x)>g^{(n)}(x)$ $(x>a)$

则：$x>a$ 时 $f(x)>g(x)$

证：令 $\varphi(x)=f(x)-g(x)$，则 $\varphi^{(k)}(a)=0$，$k=0,1\cdots n-1$；$\varphi^{(n)}(x)>0$，$(x>a)$

将 $\varphi(x)$ 在 $x=a$ 处 $n-1$ 阶展开：

$$\varphi(x)=\varphi(a)+\cdots+\frac{\varphi^{(n)}(\xi)}{n!}(x-a)^n>0\quad(a<\xi<x)$$

∴ $x>a$ 时，$f(x)>g(x)$ □

Campus

No.

Date

例：求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[m]{1+\alpha x}\sqrt[n]{1+\beta x}-1}{x}$

解：原式 $=\lim\limits_{x\to0}[e^{\frac{1}{m}\ln(1+\alpha x)}\cdot e^{\frac{1}{n}\ln(1+\beta x)}-1]/x$

$=\lim\limits_{x\to0}[e^{\frac{1}{m}\alpha x}\cdot e^{\frac{1}{n}\beta x}-1]/x=\lim\limits_{x\to0}(e^{(\frac{\alpha}{m}+\frac{\beta}{n})x}-1)/x$

$=\lim\limits_{x\to0}(\frac{\alpha}{m}+\frac{\beta}{n})x/x$

$=\frac{\alpha}{m}+\frac{\beta}{n}$

数列极限问题

1. 设 $\{a_n\}$、$\{b_n\}$ 满足 $a_1>0$, $b_1>0$, $a_{n+1}=\dfrac{2a_nb_n}{a_n+b_n}$ ①, $b_{n+1}=\sqrt{a_{n+1}b_n}$ ②, 求证 $\{a_n\}\{b_n\}$ 都收敛且极限相同

证：①先证有界，取 $C=\max\{a_1,b_1\}$，有 $a_1\le C$, $b_1\le C$ 假设 $n=k$ 时，$a_k\le C$, $b_k\le C$，则：

$n=k+1$ 时，$a_{k+1}=\dfrac{2a_kb_k}{a_k+b_k}<\dfrac{2C^2}{2C}=C$，$b_{k+1}=\sqrt{a_{k+1}b_k}\le\sqrt{C\cdot C}=C$

$\therefore n\in N_+$, $a_n<C$, $b_n<C$. $\{a_n\}$、$\{b_n\}$ 均有界

②再证单调

由①得 $a_{n+1}\dfrac{a_n+b_n}{2a_nb_n}=a_{n+1}\frac{1}{2}(\frac{1}{a_n}+\frac{1}{b_n})=1$ $\quad\therefore \dfrac{a_{n+1}}{a_n}+\dfrac{a_{n+1}}{b_n}=\dfrac{a_{n+1}}{a_n}+(\dfrac{b_{n+1}}{b_n})^2=2$

下说明 $\frac{a_{n+1}}{a_n}$、$\frac{b_{n+1}}{b_n}$ 中一个恒大于1，一个恒小于1

i 不妨设 $a_1<b_1$, $\dfrac{a_2}{a_1}=\dfrac{2b_1}{a_1+b_1}>1$ $\therefore a_2>a_1$ $\quad\dfrac{a_2}{b_1}=\dfrac{2a_1}{a_1+b_1}<1$ $\therefore b_1>a_2$

$\dfrac{b_2}{b_1}=\sqrt{\dfrac{a_2}{b_1}}<1$ $\therefore b_1>b_2$ $\quad\dfrac{b_2}{a_2}=\sqrt{\dfrac{b_1}{a_2}}>1$ $\therefore b_2>a_2$

$\therefore b_1>b_2>a_2>a_1$ 递推，显然有 $b_1>b_2>\cdots>b_n>a_n>\cdots>a_2>a_1$，

即 $\{a_n\}$、$\{b_n\}$ 均单调

ii 不妨设 $a_1>b_1$，易有 $a_1>a_2>\cdots>a_n>b_n>\cdots>b_2>b_1$，同理

故 $\{a_n\}$、$\{b_n\}$ 单调有界，必有极限，设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=B$，有

$A=\dfrac{2AB}{A+B}$，$B=\sqrt{AB}$ 解得 $A=B$ □

2. 已知 $\{x_n\}$ 满足 $x_1=\frac{1}{2}$, $2x_{n+1}+x_n^2=1$，求证 x_n 收敛，并求其极限 先斩后奏

解：不妨假设 $\{x_n\}$ 收敛，设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，有 $2a+a^2=1$，即 $a=\sqrt{2}-1$

$|x_{n+1}-a|=|\dfrac{1-x_n^2}{2}-\dfrac{1-a^2}{2}|=\frac{1}{2}|x_n+a||x_n-a|$ $\quad$（先证出 $x_n\le\frac{1}{2}$，$x_{n+1}=\dfrac{1-x_n^2}{2}\le\frac{1}{2}$）

$\le\frac{1}{2}|\frac{1}{2}+a||x_n-a|=\dfrac{2\sqrt{2}-1}{4}|x_n-a|<\underbrace{\left(\dfrac{2\sqrt{2}-1}{4}\right)}_{\text{一定要小于1，放缩合适}}{}^{n}|x_1-a|<\varepsilon$ $\quad\forall\varepsilon$，找 N

No.

Date

3. 设 $\{x_n\}$ 有 $x_1=\sqrt{3}$, $x_{n+1}=\sqrt{x_n+3}$, 求证 $\{x_n\}$ 收敛, 并求其极限

法一: 单调有界法

先证有界. $x_1=\sqrt{3}<3$, 假设 $n=k$ 时 $x_k<3$, 则:

$n=k+1$ 时 $x_{k+1}=\sqrt{x_k+3}<\sqrt{3+3}<3$, 即 $n\in N_+$, $x_n<3$

再证单调

$$x_{n+2}-x_{n+1}=\sqrt{x_{n+1}+3}-\sqrt{x_n+3}=\frac{x_{n+1}-x_n}{\sqrt{x_{n+1}+3}+\sqrt{x_n+3}}=\cdots=k(x_2-x_1)$$

其中 $x_2=\sqrt{\sqrt{3}+3}>x_1$, 且 $k>0\Rightarrow x_{n+2}>x_{n+1}$, x_n 单增

设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 有 $a=\sqrt{a+3}\Rightarrow a=\frac{1+\sqrt{13}}{2}$

法二: 用定义求, 先斩后奏

不妨假定 $\{x_n\}$ 收敛, $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$. 有 $a=\sqrt{3+a}\Rightarrow a=\frac{1+\sqrt{13}}{2}$

$|x_{n+1}-a|=|\sqrt{3+x_n}-\sqrt{3+a}|=\frac{|x_n-a|}{\sqrt{3+x_n}+\sqrt{3+a}}<\frac{1}{2\sqrt{3}}|x_n-a|<\cdots<\left(\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^n|x_1-a|<\varepsilon$ 求 N

间断点题型

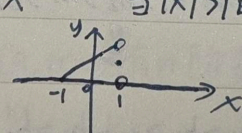
易出现间断点 无定义的点: $\ln x$, $x=0$; 分母$=0$

定义区间分界点、 $|x|$, $x\to0$; $e^{\frac{1}{x}}$, $x\to0$ 常是跳跃间断点

例1. 设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+x}{1+x^{2n}}$

解: 当 $|x|<1$ 时, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+x}{1+x^{2n}}=1+x$ 当 $|x|>1$ 时, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+x}{1+x^{2n}}=0$ 当 $x=-1$ 时, $f(x)=0$; $x=1$, $f(x)=1$

$$\therefore f(x)=\begin{cases}0 & x\le -1\\ 1+x & -1<x<1\\ 1 & x=1\\ 0 & x>1\end{cases}$$



间断点 $x=1$

求证: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0$

证: 先证 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a^n}{n!}\right|=0$ 若 $0\le|a|<1$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}a^n=0$, 显然成立

若 $|a|>1$, 则 $0\le\left|\frac{a^n}{n!}\right|=\frac{|a|}{1}\cdot\frac{|a|}{2}\cdots\frac{|a|}{[|a|]}\cdot\frac{|a|}{[|a|]+1}\cdots\frac{|a|}{n}\le\frac{|a|}{1}\cdot\frac{|a|}{2}\cdots\frac{|a|}{[|a|]}\cdot\frac{|a|}{n}\to0\ (n\to\infty)$

由夹逼定则, $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a^n}{n!}\right|=0$

则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0$

构造导数定义的题型

1. 设$f(x)$在$(-\delta,\delta)$上有定义，$f(0)=1$，且满足$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-2x)+2xf(x)}{x^2}=0$ 则$f(x)$在$x=0$处可微情况为

解：原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-2x)+2xf(x)-2xf(0)+2x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-2x)+2x}{x^2}+\lim\limits_{x\to 0}2\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{-2}{1-2x}+2}{2x}+2f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{-4}{(1-2x)^2}}{2}+2f'(0)=-2+2f'(0)=0$

$\Rightarrow f'(0)=1$

2. 设$f(x)$在$x=0$处可导且$f(0)=0$，求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2f(x)-2f(x^3)}{x^3}=-f'(0)$

解：原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}-2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x^3)}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}-2\lim\limits_{x^3\to 0}\dfrac{f(x^3)-f(0)}{x^3-0}=f'(0)-2f'(0)=-f'(0)$

3. $f(x)\in D(-\infty,+\infty)$，且有$\mathring{U}(0)$满足：$f(e^{x^2})-3f(1+\sin^2x)=2x^2+o(x^2)$，求$f'(1)$

解：令$x\to 0$，原式 $\Rightarrow f(1)-3f(1)=0\Rightarrow f(1)=0$

由原式，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(e^{x^2})-3f(1+\sin^2x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^2+o(x^2)}{x^2}=2$

左 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(e^{x^2})-f(1)}{x^2}-3\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1+\sin^2x)-f(1)}{x^2}$

$=\lim\limits_{e^{x^2}\to 1}\dfrac{f(e^{x^2})-f(1)}{e^{x^2}-1}-3\lim\limits_{1+\sin^2x\to 1}\dfrac{f(1+\sin^2x)-f(1)}{\sin^2x}$

$=f'(1)-3f'(1)$

$\Rightarrow f'(1)=-1$

定积分习题课

1. 和式的极限的求法

利用定义转化为定积分 $\quad I_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}\left[1\ln(1+\tfrac{1}{n})+2\ln(1+\tfrac{2}{n})+\cdots+n\ln(1+\tfrac{n}{n})\right]=\int_0^1 x\ln(1+x)\,dx$

· 可增减项 $\quad I=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\left[\sin\tfrac{2\pi}{n}+\sin\tfrac{3\pi}{n}+\cdots+\sin\tfrac{n+1}{n}\pi\right]=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\left[\sin\tfrac{\pi}{n}+\cdots+\sin\tfrac{n\pi}{n}\right]-\overset{0}{\lim\limits_{n\to\infty}\tfrac{1}{n}\sin\tfrac{\pi}{n}}+\overset{0}{\lim\limits_{n\to\infty}\tfrac{1}{n}\sin\tfrac{n+1}{n}\pi}$

· 可用夹逼 统一分母 $\quad I=\lim\limits_{n\to\infty}\underbrace{\left[\dfrac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\dfrac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\dfrac{\sin\frac{n}{n}\pi}{n+\frac{1}{n}}\right]}_{A_n}\qquad \dfrac{n}{n+1}\cdot\dfrac{1}{n}\left[\sin\tfrac{\pi}{n}+\cdots+\sin\tfrac{n}{n}\pi\right]\le A_n\le\dfrac{1}{n}\left[\sin\tfrac{\pi}{n}+\cdots+\sin\tfrac{n}{n}\pi\right]$

2. 计算被积函数：估算法

求$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1\dfrac{x^ne^x}{1+e^x}dx$ $\quad$ 当$0\le x\le 1$时 $\quad 0\le\dfrac{x^ne^x}{1+e^x}\le x^n$ $\quad\therefore\int_0^1 0\,dx\le\int_0^1\dfrac{x^ne^x}{1+e^x}dx\le\int_0^1 x^n dx$

即 $0\le\int_0^1\dfrac{x^ne^x}{1+e^x}dx\le\dfrac{1}{n+1}$ $\quad$ 当$n\to\infty$，夹逼 $\int_0^1\dfrac{x^ne^x}{1+e^x}dx=0$

No.

Date

3. 积分中值定理

设$f(x)$在$[0,1]$是单减、连续的,证明:$\forall\lambda\in[0,1]$,都有 $\int_0^\lambda f(x)dx \geq \lambda\int_0^1 f(x)dx$

证:当$\lambda=0$或$\lambda=1$时,等号成立

当$0<\lambda<1$时,$\int_0^\lambda f(x)dx-\lambda\int_0^1 f(x)dx=\int_0^\lambda f(x)dx-\lambda\left(\int_0^\lambda f(x)dx+\int_\lambda^1 f(x)dx\right)$

$=(1-\lambda)\int_0^\lambda f(x)dx-\lambda\int_\lambda^1 f(x)dx$

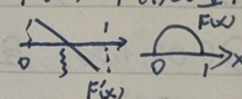
$\exists\xi_1\in(0,\lambda)$,$\xi_2\in(\lambda,1)$,使

$=(1-\lambda)\lambda f(\xi_1)-\lambda(1-\lambda)f(\xi_2)$

$=(1-\lambda)\lambda(f(\xi_1)-f(\xi_2))>0$ □

法二:令$F(x)=\int_0^x f(t)dt-x\int_0^1 f(t)dt$

$F(0)=F(1)=0$且$F'(x)=f(x)-f(\xi)$



$\Rightarrow F(x)\geq 0$

积分中值+微分中值

设$f(x)\in C[0,1]\cap D(0,1)$,且$f(1)=k\int_0^{\frac{1}{k}}xe^{1-x}f(x)dx$ $(k>1)$ 证明:$\exists\xi\in(0,1)$,使$f'(\xi)=(1-\xi^{-1})f(\xi)$

证:积分中值:$\exists\eta\in(0,\frac{1}{k})$,$f(1)=k\cdot\frac{1}{k}\eta e^{1-\eta}f(\eta)=\eta e^{1-\eta}f(\eta)$

令$F(x)=xe^{1-x}f(x)$,$F'(x)=f(x)[e^{1-x}-xe^{1-x}]+xe^{1-x}f'(x)$

$F(1)=1e^{1-1}f(1)=f(1)=F(\eta)$,$\exists\xi\in(1,\eta)$,使

$F'(\xi)=0\Rightarrow f(\xi)(1-\xi)+\xi f'(\xi)=0$ 即$f'(\xi)=(1-\xi^{-1})f(\xi)$ □

区间可加性⇒去绝对值

积分上限函数

设$f(x)\in C[a,b]$且$f(x)>0$,证明:$\int_a^b f(x)dx\int_a^b\frac{1}{f(x)}dx\geq(b-a)^2$

法一:柯西不等式

法二:设$F(x)=\int_a^x f(t)dt\int_a^x\frac{1}{f(t)}dt-(x-a)^2$ 只需证$F(b)\geq F(a)=0$,只需$F(x)$单增

$F'(x)=f(x)\int_a^x\frac{1}{f(t)}dt+\frac{1}{f(x)}\int_a^x f(t)dt-2(x-a)$

$=\int_a^x\frac{f(x)}{f(t)}dt+\int_a^x\frac{f(t)}{f(x)}dt-\int_a^x 2dt=\int_a^x\left(\frac{f(x)}{f(t)}+\frac{f(t)}{f(x)}-2\right)dt\geq 0$

基本不等式≥2

$\therefore F(x)\nearrow$ $\therefore F(b)\geq F(a)=0$ □

定积分的计算

偶倍奇零

eg. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+x}{1+\cos x}dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\cos x}dx+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{x}{1+\cos x}dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\cos x}dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sec^2\frac{x}{2}dx$

$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sec^2\frac{x}{2}d\frac{x}{2}=2\tan\frac{x}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=2\tan\frac{\pi}{4}=2$

No.

Date

eg. $\int_0^{\frac{3}{4}\pi}\frac{dx}{1+\sin^2x}=\int_0^{\frac{3}{4}\pi}\frac{1}{\sin^2x(1+\frac{1}{\sin^2x})}dx=\int_0^{\frac{3}{4}\pi}\frac{1}{1+\csc^2x}\csc^2x\,dx=-\int_0^{\frac{3}{4}\pi}\frac{1}{2+\cot^2x}d\cot x$

令$u=\cot x$ 原式$=-\int_{+\infty}^{-1}\frac{1}{2+u^2}du=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-1}^{+\infty}\frac{1}{1+(\frac{u}{\sqrt2})^2}d\frac{u}{\sqrt2}=\sqrt2\arctan(\frac{u}{\sqrt2})\Big|_{-1}^{+\infty}=\sqrt2(\frac{\pi}{2}+\arctan\frac{\sqrt2}{2})$

定积分的应用

设$f(x)$在$[a,b]$上有连续导数且$f(a)=f(b)=0$ 证明:$\int_a^b f(x)dx\le\frac{(b-a)^2}{4}M$, $M=\max\limits_{x\in[a,b]}|f'(x)|$

证: $\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(x)d(x-\frac{a+b}{2})=(x-\frac{a+b}{2})f(x)\Big|_a^b-\int_a^b(x-\frac{a+b}{2})f'(x)dx$

$=-\int_a^b(x-\frac{a+b}{2})f'(x)dx\le\int_a^b|x-\frac{a+b}{2}||f'(x)|dx\le\int_a^b|x-\frac{a+b}{2}|dx\cdot M$

$=M(\int_a^{\frac{a+b}{2}}(\frac{a+b}{2}-x)dx+\int_{\frac{a+b}{2}}^b(x-\frac{a+b}{2})dx)$

$=\frac{(b-a)^2}{4}M$

法二: 设$F(x)=\int_a^x f(x)dx$, $F'(x)=f(x)$ 将$F(x)$在$x=a$, $x=b$处展开

$F(x)=F(a)+f(a)(x-a)+\frac{f'(\xi_1)}{2}(x-a)^2$ $\xi_1\in(a,\frac{a+b}{2})$

$F(x)=F(b)+f(b)(x-b)+\frac{f'(\xi_2)}{2}(x-b)^2$ $\xi_2\in(\frac{a+b}{2},b)$

将$x=\frac{a+b}{2}$分别代入,得

$F(\frac{a+b}{2})=\frac{f'(\xi_1)}{2}(\frac{b-a}{2})^2=F(b)+\frac{f'(\xi_2)}{2}(\frac{a-b}{2})^2$ $\therefore F(b)=\frac{(b-a)^2}{8}(f'(\xi_1)-f'(\xi_2))$, $F(a)=0$

$\therefore\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)\le|F(b)|=\frac{(b-a)^2}{8}|f'(\xi_1)-f'(\xi_2)|\le\frac{(b-a)^2}{8}(|f'(\xi_1)|+|f'(\xi_2)|)\le\frac{(b-a)^2}{4}\cdot M$

设$f(x)=\int_0^x e^{-y^2+2y}dy$. 求$\int_0^1(x-1)^2f(x)dx$

解: $f'(x)=e^{-x^2+2x}$, $f(0)=0$ 分部积分以出现$f'(x)$

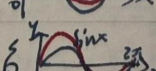
$\int_0^1(x-1)^2f(x)dx=\int_0^1 f(x)d\frac{(x-1)^3}{3}=\frac{(x-1)^3}{3}f(x)\Big|_0^1-\int_0^1\frac{(x-1)^3}{3}f'(x)dx$

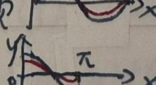
$=-\frac{1}{3}\int_0^1(x-1)^3e^{-x^2+2x}dx=-\frac{1}{3}\int_0^1(x-1)^3e^{-(x-1)^2+1}dx=-\frac{e}{3}\cdot\frac{1}{2}\int_0^1(x-1)^2e^{-(x-1)^2}d(x-1)^2$

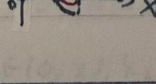
令$u=(x-1)^2$ $=-\frac{e}{6}\int_1^0 ue^{-u}du=\frac{e}{6}\int_0^1ue^{-u}du$

定积分比较大小: 作图法秒杀

只需作出示意图 → 只需确定$\begin{cases}①\ \text{正负由谁决定 先画}\\②\ \text{拉伸/压缩的比例由谁决定 后作用}\end{cases}$

例1: 判断积分$I=\int_0^{2\pi}\frac{\sin x}{x}dx$的正负  正

例2: 判断积分$I=\int_0^{2\pi}e^{\sin t}\sin t\,dt$的正负  正

例3: 判断积分$I=\int_0^{\pi}\frac{\cos x}{\sqrt{x}}dx$的正负  正

} $f(x)g(x)$型, $f(x)$正负不变,只拉伸/压缩图形, $g(x)$决定正负 ⇒ 先画$g(x)$,再作用$f(x)$

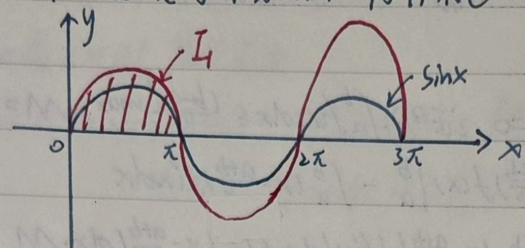
No.

Date

psp_dada

例4：设 $I_k=\int_0^{k\pi} e^{x^2}\sin x\,dx$ （k=1或2或3），比较 I_1, I_2, I_3 大小

先画决定正负的部分 $\sin x$ 再作用 e^{x^2}　$x^2\geq 0$, $e^{x^2}\geq 1$，都为拉伸



$I_1>0$

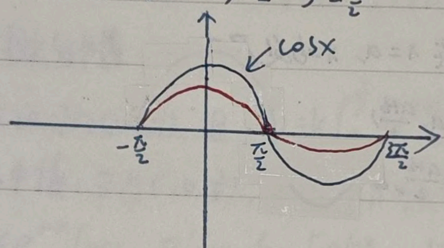
$I_2<0$

$I_3-I_1>0 \Rightarrow I_3>I_1$

$\therefore I_3>I_1>0>I_2$

例5：积分 $I=\int_0^{2\pi}\cos x\ln(2+\cos x)dx$ 的正负　正

由于 $\cos x$ 周期为 2π，$I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\cos x\ln(2+\cos x)dx$　方便观察区间



$\ln(2+\cos x)>0$

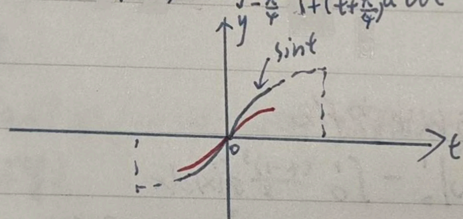
$\cos x$ 正的部分系数 $>\ln 2$

负　$<\ln 2$

例6：设常数 $a>0$，$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+x^a}dx$　$I_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{1+x^a}dx$　比较 I_1, I_2 的大小

记 $I=I_1-I_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x-\cos x}{1+x^a}dx=\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(x-\frac{\pi}{4})}{1+x^a}dx$

令 $x-\frac{\pi}{4}=t$，$=\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin t}{1+(t+\frac{\pi}{4})^a}dt$



$x>0$ 时，被积函数的分母 $\frac{1}{1+(t+\frac{\pi}{4})^a}$ 更大 $\Rightarrow$ 面积更小

$\Rightarrow I<0 \Rightarrow I_1<I_2$

Date

微分中值定理习题

1. 设 $f''(x)<0$，$f(0)=0$，证明：对 $\forall x_1, x_2>0$，有：$f(x_1+x_2)<f(x_1)+f(x_2)$

证：不妨设 $x_1<x_2<x_1+x_2$，由拉格朗日中值定理，$\exists a\in(0,x_1)$，$b\in(x_2,x_1+x_2)$

$$\frac{f(x_1)-f(0)}{x_1-0}=f'(a),\quad \frac{f(x_1+x_2)-f(x_2)}{x_1}=f'(b)$$

在 (a,b) 中，$\exists \xi\in(a,b)$，$\frac{f'(b)-f'(a)}{b-a}=f''(\xi)$

则：$f(x_1+x_2)-f(x_1)-f(x_2)=(f(x_1+x_2)-f(x_2))-(f(x_1)-f(0))=x_1f'(b)-x_1f'(a)$

$$=x_1(f'(b)-f'(a))=\underset{+}{x_1}\,\underset{-}{f''(\xi)}\,\underset{+}{(b-a)}<0$$

即 $f(x_1+x_2)<f(x_1)+f(x_2)$ □

法二：设 $\varphi(x)=f(x_1+x)-f(x_1)-f(x)$，有 $\varphi(0)=0$，因 $f''(x)<0$，$f'(x)\searrow$ $\therefore \varphi'(x)=f'(x_1+x)-f'(x)<0$ $\therefore \varphi(x)\searrow$ $\therefore \varphi(x)<\varphi(0)=0$ $\therefore \varphi(x_2)<0$ 即 $f(x_1+x_2)<f(x_1)+f(x_2)$

2. 设 $f(x)\in D(a,b)$ 且 $f'(x)\neq 1$，证明：$f(x)$ 在 (a,b) 内至多只有一个不动点

（即方程 $f(x)=x$ 在 (a,b) 内至多一个实根）

证：反证法：假设 $f(x)=x$ 有两个解 x_1, x_2 且 $x_1<x_2$，

设 $F(x)=f(x)-x$，$F'(x)=f'(x)-1\neq 0$，$F(x_1)=F(x_2)=0$

由罗尔定理，$\exists \xi\in(x_1,x_2)$ 使 $F'(\xi)=0$ 矛盾，假设不成立

显然，$f(x)$ 有多于两个的不动点也不成立 $\therefore f(x)$ 至多有一个不动点. □

3. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有二阶导数，且：$f(0)=0$，$f(1)=1$，$f(\frac{1}{2})>\frac{1}{4}$

证明：(1) 至少存在一点 $\xi\in(0,1)$，$f''(\xi)<2$，

(2) 若对 $\forall x\in(0,1)$ 有 $f''(x)\neq 2$，则当 $x\in(0,1)$ 时恒有 $f(x)>x^2$

证：(1) 由 $f''(\xi)<2$，$f(x)>x^2$，$f(\frac{1}{2})>\frac{1}{4}$ 知，应构造函数求解

设 $F(x)=f(x)-x^2$，$F'(x)=f'(x)-2x$，$F''(x)=f''(x)-2$，且 $F(0)=0$，$F(1)=0$，$F(\frac{1}{2})>0$

在 $(0,\frac{1}{2})$ $(\frac{1}{2},1)$ 上使用拉格朗日中值定理，$\exists a\in(0,\frac{1}{2})$ $b\in(\frac{1}{2},1)$

$$F'(a)=\frac{F(\frac{1}{2})-F(0)}{\frac{1}{2}-0}=2F(\tfrac{1}{2})>0;\quad F'(b)=\frac{F(1)-F(\frac{1}{2})}{1-\frac{1}{2}}=-2F(\tfrac{1}{2})<0$$

在 (a,b) 上使用拉~，$\exists \xi\in(a,b)$，$F''(\xi)=\frac{F'(b)-F'(a)}{b-a}<0$ 即 $f''(\xi)<2$

(2) $\forall x\in(0,1)$，$F''(x)\neq 0$ 且有一点 ξ，$F''(\xi)<0$，由达布定理，$\forall x\in(0,1)$，$F''(x)<0$

在 $(0,x)$，$(x,1)$ 上使用拉~，$\exists x_1\in(0,x)$，$x_2\in(x,1)$，

KOKUYO

$F'(x_1)=\frac{F(x)-F(0)}{x-0}=\frac{F(x)}{x}$, $F'(x_2)=\frac{F(1)-F(x)}{1-x}=-\frac{F(x)}{1-x}$

在$[x_1,x_2]$上有 $F'(x_2)-F'(x_1)=F''(\gamma)(x_2-x_1)$, $\gamma\in(x_1,x_2)$

即 $-F(x)\left(\frac{1}{1-x}+\frac{1}{x}\right)=F''(\gamma)(x_2-x_1)$

正 负 正

$\Rightarrow F(x)>0$

即 $f(x)>x^2$ □

4. 设$f(x)\in C[0,1]$, $f(x)\in D(0,1)$, 证明:至少存在一个$\xi\in(0,1)$,使:$f'(\xi)=2\xi[f(1)-f(0)]$

证:结论可变形为 $\frac{f(1)-f(0)}{1^2-0^2}=\frac{f'(\xi)}{2\xi}=\frac{f'(x)}{(x^2)'}\Big|_{x=\xi}$

记$F(x)=x^2$, $f(x)$、$F(x)$在$[0,1]$上使用柯西中值定理:

$\exists\xi\in(0,1)$, $\frac{f(1)-f(0)}{1^2-0^2}=\frac{f'(\xi)}{2\xi}$ 即 $f'(\xi)=2\xi[f(1)-f(0)]$ □

5. 试证:至少存在一点$\xi\in(1,e)$, 使 $\sin 1=\cos\ln\xi$.

分析: $\sin 1 \longrightarrow \frac{\sin\ln e-\sin\ln 1}{\ln e-\ln 1}$

$\parallel$

$\cos\ln\xi \longrightarrow \frac{\frac{1}{\xi}\cos\ln\xi}{\frac{1}{\xi}}$

证:取$f(x)=\sin\ln x$, $F(x)=\ln x$, $f(x)$、$F(x)$在$[1,e]$上使用柯西中值定理.

$\exists\xi\in(1,e)$, $\frac{f(e)-f(1)}{F(e)-F(1)}=\frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}$ 即 $\sin 1=\frac{\frac{1}{\xi}\cos\ln\xi}{\frac{1}{\xi}}=\cos\ln\xi$ □

法二: 记$g(x)=\sin\ln x-\sin 1\ln x$, $g(1)=0$, $g(e)=\sin 1-\sin 1=0$

$g(x)$在$[1,e]$上满足罗尔定理, $\exists\xi\in(1,e)$ 使$f'(\xi)=0$

即 $\frac{1}{\xi}\cos\ln\xi-\frac{1}{\xi}\sin 1=0$ 即 $\sin 1=\cos\ln\xi$ □

6. 求证导数极限定理, 即: 设$f(x)$在点x_0某邻域$U(x_0)$内连续, 在$\mathring{U}(x_0)$可导, 则

"极限$\lim\limits_{x\to x_0}f'(x)$存在"是"$f(x)$在$x_0$处可导"的充分非必要条件

$\Rightarrow$ 任取$x\in\mathring{U}(x_0)$, 对$f(x)$在以x_0、x为端点的区间上应用拉中: $\exists\xi$在x_0、x之间, $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(\xi)$

令$x\to x_0$, 则$\xi\to x_0$ 由于$\lim\limits_{x\to x_0}f'(x)$存在, 则$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{\xi\to x_0}f'(\xi)=\lim\limits_{x\to x_0}f'(x)$存在 $\Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$存在

$\therefore f(x)$在点x_0处可导, $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}f'(x)$

$\Leftarrow$ 反例: $f(x)=\begin{cases}x^2\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$ $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0$

$\therefore f'(x)=\begin{cases}2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$ $f'(0)$存在

但$\lim\limits_{x\to 0}f'(x)$不存在

7. 设 $f(x)\in D(a,b)$ 且 $|f'(x)|\le M$，证明：$f(x)$ 在 (a,b) 有界 有限区间，导数有界 ⇒ 函数有界

证：任取 x、$x_0\in(a,b)$ 且 $x\neq x_0$，对 $f(x)$ 在以 x_0、x 为端点的区间上用拉氏中值定理，

得：$f(x)-f(x_0)=f'(\xi)(x-x_0)$，$\xi$ 界于 x、x_0 之间

$\therefore |f(x)|=|f'(\xi)(x-x_0)+f(x_0)|\le|f'(\xi)||x-x_0|+|f(x_0)|$

$\le M\cdot(b-a)+|f(x_0)|=k$，$k$ 为一定值

$\therefore$ 对 $\forall x\in(a,b)$，恒有 $|f(x)|\le k$. □

注 ① 该命题只对有限区间成立

② 若条件改为 $f(x)\in D[a,b]$ 则 $f(x)$ 有最大最小值，$f(x)$ 必有界

③ 函数有界 ⇏ 导数有界. eg. $f(x)=x^{\frac{1}{3}}$，$x\in(0,1)$ $f(x)$ 有界，但 $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)=\infty$ 无界

8. 设 $f(x)\in C[a,b]$，$f(x)\in D(a,b)$，$0<a<b$，证明：$\exists\,\xi,\eta\in(a,b)$，使：$f'(\xi)=\frac{a+b}{2\eta}f'(\eta)$

$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上用拉氏定理：$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$ $\xi\in(a,b)$

要证 $f(b)-f(a)=\frac{b^2-a^2}{2\eta}f'(\eta)$ 即证 $\frac{f(b)-f(a)}{b^2-a^2}=\frac{f'(\eta)}{2\eta}$

$f(x)$、x^2 在 $[a,b]$ 上用柯西中值定理，即：$\frac{f(b)-f(a)}{b^2-a^2}=\frac{f'(\eta)}{2\eta}$，$\eta\in(a,b)$ □

9. 设实数 $a_0, a_1, \cdots a_n$ 满足：$a_0+\frac{a_1}{2}+\cdots+\frac{a_n}{n+1}=0$，证明：方程 $a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n=0$，$x\in(0,1)$ 至少有一实根

证：要使 $F'(x)=a_0+a_1x+\cdots a_nx^n$，可设 $F(x)=a_0x+\frac{a_1}{2}x^2+\cdots+\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$

显然，$F(x)\in C[0,1]$，$F(x)\in D(0,1)$，且 $F(0)=F(1)=0$

由罗尔定理，$\exists\,\xi\in(0,1)$，$F'(\xi)=0$ 即 $a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n=0$ 有一实根 ξ，$\xi\in(0,1)$

10. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导，$f(0)=f(1)$ 且 $|f''(x)|\le 2$，证明：$|f'(x)|\le 1$

证：对 $f(t)$ 在 $t=x$ 处展开 $(x\in[0,1])$，得 $f(t)=f(x)+f'(x)(t-x)+\frac{f''(\xi)}{2!}(t-x)^2$，$\xi\in(0,1)$

将 $t=0$，$t=1$ 代入，得 $f(1)=f(x)+f'(x)(1-x)+\frac{f''(\xi_1)}{2!}(1-x)^2$ ξ_1 在 1、x 之间

$f(0)=f(x)+f'(x)(-x)+\frac{f''(\xi_2)}{2!}(-x)^2$ ξ_2 在 0、x 之间

两式相减，得 $0=f'(x)+\frac{f''(\xi_1)}{2!}(1-x)^2-\frac{f''(\xi_2)}{2!}x^2$，$x\in[0,1]$

$\therefore |f'(x)|=|\frac{1}{2}f''(\xi_1)(1-x)^2-\frac{1}{2}f''(\xi_2)x^2|$

$\le\frac{1}{2}|f''(\xi_1)|(1-x)^2+\frac{1}{2}|f''(\xi_2)|x^2$

$\le(1-x)^2+x^2=1-2x\le 1$

No.

Date

有关中值问题的解题方法：

利用逆向思维，设辅助函数

(1) 证明含一个中值的等式或根的存在，用罗尔定理

(2) 涉及到含中值的两个不同函数，用柯西中值定理

(3) 结论中含两个或以上的中值，多次应用中值定理

(4) 已知条件中含高阶导数，用泰勒公式，或对导函数用中值定理

(5) 若结论为不等式，则适当放大或缩小

常见辅助函数的构造

1. $f'(\xi)+kf(\xi) \Rightarrow F(x)=e^{kx}f(x)$

2. $f'(\xi)+g'(\xi)f(\xi) \Rightarrow F(x)=e^{g(x)}f(x)$ $\quad$ $f'(\xi)+g(\xi)f(\xi) \Rightarrow F(x)=f(x)e^{\int g(x)dx}$

3. $\xi f'(\xi)+f(\xi) \Rightarrow F(x)=xf(x)$

4. 出现 f'^2 $\Rightarrow F(x)=f^2(x)$, $F'(x)=2f(x)f'(x)$ $\quad F''(x)=2(f'^2(x)+f(x)f''(x))$

5. $\xi f'(\xi)-kf(\xi) \Rightarrow F(x)=x^{-k}f(x)$

6. $f''(\xi)-f(\xi) \Rightarrow F(x)=[f(x)+f'(x)]e^{-x}$ $\quad G(x)=f(x)e^{x}$ 有 $G'(x)=[f'(x)+f(x)]e^{x}$ 零点用于F(x)

7. $f\cdot f''-f'^2 \Rightarrow F(x)=\ln f(x)$ $\quad F'(x)=\frac{f'(x)}{f(x)}$ $\quad F''(x)=\frac{f''(x)f(x)-(f'(x))^2}{f^2(x)}$

Campus