**问题提出**:考虑在一个固定的区间上用插值逼近一个函数.显然 Lagrange 插值中使用的节点越多,插值多项式的次数就越高.我们自然关心插值多项式的次数增加时,$L_n(x)$是否也更加靠近被逼近的函数.Runge 给出的一个例子是极著名并富有启发性的.设区间$[-1,1]$上函数

$$f(x)=\frac{1}{1+25x^2}.$$

**实验内容**:考虑区间$[-1,1]$的一个等距划分,分点为

$$x_i=-1+\frac{2i}{n},\quad i=0,1,2,\cdots,n,$$

则拉格朗日插值多项式为

$$L_n(x)=\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{1+25x_i^2}l_i(x).$$

其中,$l_i(x),i=0,1,2,\cdots,n$ 是 $n$ 次 Lagrange 插值基函数.

**实验要求**:

(1) 选择不断增大的分点数目 $n=2,3,\cdots$,画出原函数 $f(x)$及插值多项式函数 $L_n(x)$在$[-1,1]$上的图像,比较并分析实验结果.

(2) 选择其他的函数,例如定义在区间$[-5,5]$上的函数

$$h(x)=\frac{x}{1+x^4},\quad g(x)=\arctan x,$$

重复上述的实验看其结果如何.

## 实验 3.1

编制以函数$\{x^k\}_{k=0}^{n}$为基的多项式最小二乘拟合程序，并用于对表 3.11 中的数据



作 3 次多项式最小二乘拟合.

**表 3.11**

| $x_i$ | −1.0 | −0.5 | 0.0 | 0.5 | 1.0 | 1.5 | 2.0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y_i$ | −4.447 | −0.452 | 0.551 | 0.048 | −0.447 | 0.549 | 4.552 |

取权数 $w_i \equiv 1$，求拟合曲线 $\varphi^* = \sum\limits_{k=0}^{n} \alpha_k^* x^k$ 中的参数$\{\alpha_k\}$、平方误差 $\delta^2$，并作离散数据$\{x_i, y_i\}$的拟合函数 $y=\varphi^*(x)$的图形.

## 实验 3.2

编制正交化多项式最小二乘拟合程序，并用于求解上题中的 3 次多项式最小二乘拟合问题，作拟合曲线的图形，计算平方误差，并与上题结果进行比较.