数值分析
试题

数值分析复习大纲

第一章　非线性方程求根

1 掌握单点迭代的收敛性，收敛阶，计算效率。
2 掌握 Newton 迭代方法的应用及与割线法的比较。
3 掌握重根上的迭代方法及相关证明。
4 掌握逆 Broyden 方法的应用（不用记公式）。

第二章　线性方程组的数值解法

1 掌握向量、矩阵范数的计算，条件数的计算。
2 掌握三角分解方法解线性方程组（Doolittle、Crout）。
3 理解用条件数分析误差的方法。
4 掌握 Jacobi 迭代和 Gauss-Sedel 迭代解线性方程组（矩阵形式、分量形式、迭代矩阵、收敛条件）
5 掌握共轭梯度法（cg 方法，不用记公式）。

第三章　插值方法与函数逼近

1 掌握 Lagrange、Newton 插值及其余项的推导和应用。
2 掌握有限差分的定义及性质。
3 掌握 Hermite 插值方法，待定系数法及余项表达式，理解分段插值。
4 理解三次样条函数的定义及判别。
5 掌握有理逼近方法。
6 掌握连续形式的最佳平方逼近和最小二乘法。

第四章　数值积分

1 掌握代数精度的概念和积分公式的构造方法。
2 掌握梯形公式、Simpson 公式的应用及其余项的推导。
3 掌握 Romberg 积分方法。
4 掌握 Gauss-Legendre 公式（二点、三点，一般区间）。
~~5 理解带权函数的积分公式。~~

第五章　矩阵特征值的计算

1 掌握乘幂法求矩阵的按模最大的特征值及特征向量。（含反幂法）

第六章　常微分方程初值问题的数值解

1 掌握尤拉(显式)公式、梯形公式和改进的尤拉公式的应用，收敛性，稳定性。
2 掌握线性多步法的一般形式，收敛性，稳定性。
3 掌握局部截断误差、方法阶。（Cq 公式不用记）
4 掌握二阶 Runge-Kutta 法的应用，稳定性。（-2，0）
5 掌握四阶 Runge-Kutta 法经典公式的应用。（-2.78，0）（记公式）
~~6 理解预测-校正法与 Runge-Kutta 法的比较。~~

考试注意事项：1 带实验报告；2 带计算器。
答疑时间：第十七周　周六　下午：13：00-16：30　　地点：诚意楼 203

考试时间：1月4日 18:15～20:30　答疑：1月3日下午 13:30～16:30

2022年秋季学期研究生课程考试试题

考 试 科 目：数值分析A

学生所在院（系）： 机电学院　　学生所在学科： 机械电子工程

学生姓名：严禁纸张记忆盗用　　学生学号： QQ842305604

*****考生注意：答案务必写在答题卡上，答在本题签上无效*****

注意行为规范 遵守考场纪律

主管领导审核签字

一、判断题（每题 4 分，共 20 分，对的打○，错的打×）

1. 解非线性方程的迭代法中，收敛阶越高的迭代效率越高。( )
2. 有限维线性空间的任意两种范数都是等价的。( )
3. 同一个二元一次方程组的雅可比迭代和高斯赛叠尔迭代的收敛条件相同。( )
4. f(x)为连续函数，以 $x_i(i=0,1,\cdots,n)$ 为等距节点构造拉格朗日插值多项式，n 越大 L(x) 越接近 f(x)。( )
5. 隐式欧拉法比显式欧拉法稳定性好。( )

二、填空题（每题 4 分，共 20 分）

1. 设有方程组 $AX=b$，其中 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&-1\\2&2&1\\0&2&2\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{3}\\-\frac{2}{3}\end{bmatrix}$，已知它有解 $\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{1}{3}\\0\end{bmatrix}$，如果右端有小扰动 $\|\delta\boldsymbol{b}\|_\infty=\frac{1}{2}\times10^{-6}$，试估计由此引起的解的相对误差为____________。

2. 设 $0<\alpha<1$，对于函数 $f(x)=x^{1+\alpha}-x$，解方程 $f(x)=0$ 的牛顿迭代法在 0 处的收敛阶为____________。

3. 矩阵 $A=\begin{pmatrix}2\lambda&\lambda\\1&1\end{pmatrix}$，当λ满足____________条件时，$\mathrm{cond}(A)_\infty$有最小值。

4. 分段多项式函数 $S(x)=\begin{cases}x^2(x+1), & 0\leqslant x\leqslant1\\ ax^3+bx^2+cx-1, & 1\leqslant x\leqslant2\end{cases}$ 是以 0，1，2 为节点的三次样条函数，则 a=_______,c=_______。

5. 用乘幂法求矩阵 $\begin{bmatrix}1&-9&2\\1&1&-4\\3&-3&-6\end{bmatrix}$ 的最大特征值为_______，对应的特征向量为_______。(要求迭代 2 步的结果，保留 4 位小数)

5.

注意行为规范

遵守考场纪律

主管领导审核签字

三、(8 分)对于迭代函数 $\varphi(x)=x+c\left(x^2-2\right)$，根据局部收敛定理及收敛阶判定定理，试讨论：

(1) 当 c 为何值时，$x_{k+1}=\varphi\left(x_k\right), k=0,1,2,\cdots$ 产生的序列 $\left\{x_k\right\}$ 收敛于 $\sqrt{2}$；

(2) c 取何值时收敛阶至少为 2 阶?

四、(10 分)设 $l_0(x), l_1(x), \cdots, l_n(x)$ 是以 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 为节点的 Lagrange 插值基函数，试证：

(1) $\sum_{k=0}^{n} l_k(x)=1$；

(2) $\sum_{k=0}^{n} x_k^j l_k(x)=x^j \quad (j=0,1,\cdots,n)$；

(3) $\sum_{k=0}^{n} (x_k-x)^j l_k(x)=0 \quad (j=0,1,\cdots,n)$；

五、(7 分)证明 $1-x-\sin x=0$ 在[0, 1]内仅有一个根. 使用二分法求误差不大于 $\frac{1}{2}\times 10^{-4}$ 的根需要对分多少次?

六、(10 分)对方程组 $\begin{cases} x_1+2x_2-2x_3=1 \\ x_1+x_2+x_3=2 \\ 2x_1+x_2+x_3=3 \end{cases}$，

分别讨论用 Jacobi 迭代法和 Gauss-Seidel 迭代法求解的收敛性.

七、(10 分)求形如 $y=ae^{bx}$ (a，b 为常数且 a>0)的经验公式，使它能和下表数据相似合：

x_i	1.00	1.25	1.50	1.75	2.00
y_i	5.10	5.79	6.53	7.45	8.46

八、(15 分)求解常微分方程初值问题 $\begin{cases} y'=f(x,y), & a\le x\le b \\ y(a)=\eta \end{cases}$

的两步方法 $y_{n+2}-\frac{3}{2}y_{n+1}+\frac{1}{2}y_n=\frac{h}{4}\left(5f_{n+1}-f_n\right)$

(1) 证明方法满足根条件；

(2) 试求其绝对稳定区间；

(3) 若 $f(x,y)=-10y$，由绝对稳定区间确定步长 h 应取多少?

2022年秋季学期研究生课程考试试题

考 试 科 目：数值分析A

学生所在院（系）：　机电学院　　　　　　学生所在学科：　机械电子工程

学生姓名：哈工大资源分享站　　　　　　　学生学号：　QQ2842305604

*****考生注意：答案务必写在答题卡上，答在本题签上无效*****

注意行为规范　遵守考场纪律

主管领导审核签字

一、判断题（每题 4 分，共 20 分，对的打〇，错的打×）

1. 解非线性方程的迭代法中，收敛阶越高的迭代效率越高。(×)
2. 有限维线性空间的任意两种范数都是等价的。(〇)
3. 同一个二元一次方程组的雅可比迭代和高斯赛叠尔迭代的收敛条件相同。(〇)
4. f(x)为连续函数，以 x_i(i＝0，1，…，n)为等距节点构造拉格朗日插值多项式，n 越大 L(x)越接近 f(x)。(×)龙格现象
5. 隐式欧拉法比显式欧拉法稳定性好。(〇) ||前者 A 稳定，后者（-2,0）才稳定

二、填空题（每题 4 分，共 20 分）

1. 设有方程组 $AX=b$，其中 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&-1\\2&2&1\\0&2&2\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{3}\\-\frac{2}{3}\end{bmatrix}$，已知它有解 $\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{1}{3}\\0\end{bmatrix}$，如果右端有小扰动 $\|\delta\boldsymbol{b}\|_\infty=\frac{1}{2}\times10^{-6}$，试估计由此引起的解的相对误差为____________。

分析　本题是讨论方程组右端顶的小误差所引起的解的相对误差的估计问题，这与系数矩阵的条件数有关，只要求出 $\mathrm{Cond}_\infty(\boldsymbol{A})$，再由有关误差估计式即可算得结果.

解　容易求得

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{bmatrix}-1&1&-1\\2&-1&1.5\\-2&1&-1\end{bmatrix}$$

从而 $\mathrm{Cond}_\infty(\boldsymbol{A})=22.5$.

由公式 $\dfrac{\|\delta\boldsymbol{X}\|}{\|\boldsymbol{X}\|_\infty}\le\mathrm{Cond}_\infty(\boldsymbol{A})\cdot\dfrac{\|\delta\boldsymbol{b}\|_\infty}{\|\boldsymbol{b}\|_\infty}$

有 $\dfrac{\|\delta\boldsymbol{X}\|_\infty}{\|\boldsymbol{X}\|_\infty}\le22.5\times\dfrac{\frac{1}{2}\times10^{-6}}{2/3}=1.6875\times10^{-5}$

2. 设 $0<\alpha<1$，对于函数 $f(x)=x^{1+\alpha}-x$，解方程 $f(x)=0$ 的牛顿迭代法在 0 处的收敛阶为

________。‖ 2 （$\alpha+1$ 也对）

$\varphi'(0)=0$，$\varphi''(0)$不存在，由定义知：

$$\lim_{k\to\infty}\frac{|x_{k+1}-0|}{|x_k-0|^p}=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{\alpha x_k^{1+\alpha}}{(1+\alpha)x_k^{p+\alpha}-x_k^p}\right|$$

当 $p=1+\alpha$ 时，$\lim=|-\alpha|\neq 0$

该格式为求根0的 $1+\alpha$ 阶方法

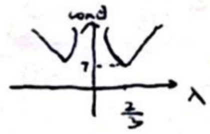
3. 矩阵 $A=\begin{pmatrix}2\lambda & \lambda\\ 1 & 1\end{pmatrix}$，当 λ 满足____________条件时，$\mathrm{cond}(A)_\infty$ 有最小值。

解 $A=\begin{bmatrix}2\lambda & \lambda\\ 1 & 1\end{bmatrix}$，故 $\|A\|_\infty=\begin{cases}3|\lambda|, & |\lambda|\geq\frac{2}{3}\\ 2, & |\lambda|<\frac{2}{3}\end{cases}$

$\lambda=0$ 时 A^{-1} 不存在，故 $\lambda\neq 0$，$A^{-1}=\frac{1}{\lambda}\begin{pmatrix}1 & -\lambda\\ -1 & 2\lambda\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\lambda} & -1\\ -\frac{1}{\lambda} & 2\end{pmatrix}$

故 $\|A^{-1}\|_\infty=2+\frac{1}{|\lambda|}$

$\therefore \mathrm{cond}(A)_\infty=\begin{cases}6|\lambda|+3, & |\lambda|\geq\frac{2}{3}\\ 2\left(2+\frac{1}{|\lambda|}\right), & |\lambda|<\frac{2}{3}\end{cases}$



$\therefore$ 当 $\lambda=\pm\frac{2}{3}$ 时，$\mathrm{cond}(A)_\infty$ 有最小值.

推广 $\begin{bmatrix}a\lambda & b\lambda\\ c & d\end{bmatrix}$，$\lambda=\pm\frac{|c|+|d|}{|a|+|b|}$ 时，$\mathrm{cond}(A)_\infty$ 最小.

4. 分段多项式函数 $S(x)=\begin{cases}x^2(x+1), & 0\leqslant x\leqslant 1\\ ax^3+bx^2+cx-1, & 1\leqslant x\leqslant 2\end{cases}$ 是以 0，1，2 为节点的三次样条函数，则

a=_______,c=_______。

解：利用三次样条函数的定义得

$$\lim_{x\to 1}(x^3+x^2)=\lim_{x\to 1}(ax^3+bx^2+cx-1)$$
$$\lim_{x\to 1}(x^3+x^2)'=\lim_{x\to 1}(ax^3+bx^2+cx-1)'$$
$$\lim_{x\to 1}(x^3+x^2)''=\lim_{x\to 1}(ax^3+bx^2+cx-1)''$$

等价地

$$\lim_{x\to 1}(x^3+x^2)=\lim_{x\to 1}(ax^3+bx^2+cx-1)$$
$$\lim_{x\to 1}(3x^2+2x)=\lim_{x\to 1}(3ax^2+2bx+c)$$
$$\lim_{x\to 1}(6x+2)=\lim_{x\to 1}(6ax+2b)$$

即

$$\begin{cases}a+b+c=3\\ 3a+2b+c=5\\ 6a+2b=8\end{cases}$$

解得 $a=2, b=-2, c=3$.

python资料（密码1920）

5．用乘幂法求矩阵$\begin{bmatrix} 1 & -9 & 2 \\ 1 & 1 & -4 \\ 3 & -3 & -6 \end{bmatrix}$的最大特征值为_______，对应的特征向量为_______。(要求迭代 2 步的结果，保留 4 位小数)

5.

注意行为规范

遵守考场纪律

三、(8 分) 对于迭代函数$\varphi(x)=x+c(x^2-2)$，根据局部收敛定理及收敛阶判定定理，试讨论：

(1) 当c为何值时，$x_{k+1}=\varphi(x_k),k=0,1,2,\cdots$产生的序列$\{x_k\}$收敛于$\sqrt{2}$；

(2) c取何值时收敛阶至少为 2 阶?

解：(1) $\varphi'(x)=1+2cx$，要求$x_{k+1}=\varphi(x_k),k=0,1,2,\cdots$收敛，应有$|\varphi'(\alpha)|<1$，

即$|1+2c\alpha|<1$，解得$-1<c\alpha<0$，且$\alpha=\sqrt{2}$，

故当$-\frac{1}{\sqrt{2}}<c<0$

(2) 当$\varphi'(\alpha)=0$时，迭代至少 2 阶收敛

此时应有$1+2c\alpha=0$，即取$c=-\frac{1}{2\sqrt{2}}$。

主管领导审核签字

四、(10 分) 设$l_0(x),l_1(x),\cdots,l_n(x)$是以$x_0,x_1,\cdots,x_n$为节点的 Lagrange 插值基函数，试证：

(1) $\sum_{k=0}^{n} l_k(x)=1$；

(2) $\sum_{k=0}^{n} x_k^j l_k(x)=x^j \quad (j=0,1,\cdots,n)$；

(3) $\sum_{k=0}^{n} (x_k-x)^j l_k(x)=0 \quad (j=0,1,\cdots,n)$；

分析　本题是关于 Lagrange 插值基函数 $l_k(x)$ (k=0，1，…，n) 的性质问题，观察要证明的结论，应考虑对常数 1 和 x^j进行插值入手，通过插值余项为 0 得到结论.

证　(1) 设 $f(x)$=1，则 $f(x)$ 以$x_0,x_1,\cdots,x_n$为插值节点的插值多项式为$L_n(x)=\sum_{k=0}^{n} f(x_k)l_k(x)=\sum_{k=0}^{n} l_k(x)$

由插值余项定理知$f(x)-L_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)=0$

从而 $L_n(x)=f(x)$　　即　$\sum_{k=0}^{n} l_k(x)=1$

(2) 设$f(x)=x^j \quad (j=0,1,\cdots,n)$，则 $f(x)$ 以$x_0,x_1,\cdots,x_n$为插值节点的 n 次 Lagrange 插值多项式为

$L_n(x)=\sum_{k=0}^{n} f(x_k)l_k(x)=\sum_{k=0}^{n} x_k^j l_k(x)$

由插值余项定理 $f(x)-L_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1!)}\omega_{n+1}(x)=0$

从而 $L_n(x)=f(x)$　　即 $\sum_{k=0}^{n} x_k^j l_k(x)=x^j \quad (j=0,1,\cdots,n)$

(3) 将 $(x_k-x)^j$ 按二项式展开，得 $(x_k-x)^j=\sum_{i=0}^{j}(-1)^i C_j^i x_k^{j-i}x^i$

代入左端，得 $\sum_{k=0}^{n}(x_k-x)^j l_k(x)=\sum_{k=0}^{n}\left[\sum_{i=0}^{j}(-1)^i C_j^i x_k^{j-i}x^i\right]l_k(x)=\sum_{i=0}^{j}(-1)^i C_j^i x^i\sum_{k=0}^{n}x_k^{j-i}l_k(x)$

利用 (2) 的结论，有 $\sum_{k=0}^{n}(x_k-x)^j l_k(x)=\sum_{i=0}^{j}(-1)^i C_j^i x^i x^{j-i}=(x-x)^j=0$

五、(7 分) 证明 $1-x-\sin x=0$ 在 $[0,1]$ 内仅有一个根. 使用二分法求误差不大于 $\frac{1}{2}\times10^{-4}$ 的根需要对分多少次?

解　设 $f(x)=1-x-\sin x$，则 $f(0)=1>0$，$f(1)=-\sin(1)<0$，且 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，故方程 $f(x)=0$ 在 $[0,1]$ 内至少有一个根. 又因为 $f'(x)=-1-\cos x<0,\quad x\in[0,1]$，故 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递减，因此 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有且仅有一个根.

使用二分法，使误差限为 $|\alpha-x^*|\le\frac{1}{2^{k+1}}(b-a)=\frac{1}{2^{k+1}}\le\frac{1}{2}\times10^{-4}$，解得

$2^k\ge10^4$，$k\ge4\ln10/\ln2=13.2877$

所以需对分 14 次即可.

六、(10 分) 对方程组 $\begin{cases}x_1+2x_2-2x_3=1\\x_1+x_2+x_3=2\\2x_1+x_2+x_3=3\end{cases}$，

分别讨论用 Jacobi 迭代法和 Gauss-Seidel 迭代法求解的收敛性.

分析　一般要证明某一种迭代法是收敛的，可利用学过的多种充分条件，也可用充要条件，但若要证明某一种迭代法是发散的，则只能用充要条件. 观察本题的系数阵的特点，它既不严格对角占优，也不正定对称，因此应首先分别写出 Jacobi 和 Gauss-Seidel 迭代法的迭代矩阵 B,

可利用迭代法收敛的充要条件，即通过谱半径$\rho(\boldsymbol{B})$是否小于 1 来判定收敛性.

解　由迭代法的基本收敛定理 7. 1 知，迭代法是否收敛等价于迭代矩阵的谱半径$\rho(\boldsymbol{B})$是否小于 1，为此，下面先分别求迭代矩阵.

由系数矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2&-2\\1&1&1\\2&2&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&&\\1&0&\\2&2&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&2&-2\\&0&1\\&&0\end{bmatrix}$$
$$=\boldsymbol{D}+\boldsymbol{L}+\boldsymbol{U}$$

所以

$$\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{L}=\begin{bmatrix}0&&\\1&0&\\2&2&0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{U}=\begin{bmatrix}0&2&-2\\&0&1\\&&0\end{bmatrix}$$

则 Jacobi 迭代法的迭代矩阵为

$$\boldsymbol{B}_J=\boldsymbol{I}-\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&-2\\1&1&1\\2&2&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&-2&2\\-1&0&-1\\-2&-2&0\end{bmatrix}$$

其特征方程为

$$|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}_J|=\begin{vmatrix}\lambda&2&-2\\1&\lambda&1\\2&2&\lambda\end{vmatrix}=\lambda^3=0$$

因此有$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$，即$\rho(\boldsymbol{B}_J)=0<1$，所以 Jacobi 迭代法收敛.

而对于 Gauss-Seidel 迭代法，由

$$\boldsymbol{D}+\boldsymbol{L}=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\2&2&1\end{bmatrix}$$

容易求得

$$(\boldsymbol{D}+\boldsymbol{L})^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&-2&1\end{bmatrix}$$

则 Gauss-Seidel 迭代法的迭代矩阵为

$$\boldsymbol{B}_G=-(\boldsymbol{D}+\boldsymbol{L})^{-1}\boldsymbol{U}=-\begin{bmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&-2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&2&-2\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&-2&2\\0&2&-3\\0&0&2\end{bmatrix}$$

其特征方程为

$$|\lambda \boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}_G|=\begin{vmatrix}\lambda & 2 & -2\\ 0 & \lambda-2 & 3\\ 0 & 0 & \lambda-2\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-2)^2=0$$

因此有 $\lambda_1=0,\lambda_2=\lambda_3=2$，即 $\rho(\boldsymbol{B}_G)=2>1$，所以 Gauss-Seidel 迭代法发散.

七、(10 分) 求形如 $y=ae^{bx}$ （a，b 为常数且 a>0）的经验公式，使它能和下表数据相似合：

x_i	1.00	1.25	1.50	1.75	2.00
y_i	5.10	5.79	6.53	7.45	8.46

分析　经验公式 $y=ae^{bx}$ 不是多项式，应设法将其变为多项式，本题可通过取对数的办法将 $y=ae^{bx}$ 变为 $\ln y=\ln a+bx$，若令 $\bar{y}=\ln y$，$A=\ln a$，则有 $\bar{y}=A+bx$，通过直线拟合的最小二乘法求出 $\bar{y}=A+bx$ 后，再变回 $y=ae^{bx}$ 即可.

解　对经验公式 $y=ae^{bx}$ 两边取对数，得

$\ln y=\ln a+bx$

作变换 $\bar{y}=\ln y$，$A=\ln a$，则有 $\bar{y}=A+bx$，为了用最小二乘法求出 A、b，需将（x_i，y_i）转化为 $(x_i,\bar{y}_i)$，现将转化数值表列出：

x_i	1.00	1.25	1.50	1.75	2.00
$\bar{y}_i$	1.629	1.756	1.876	2.008	2.135

$N=5$，$\sum_{i=1}^{5}x_i=7.5$，$\sum_{i=1}^{5}x_i^2=11.875$，$\sum_{i=1}^{5}\bar{y}_i=9.404$，$\sum_{i=1}^{5}x_i\bar{y}_i=14.422$

故有正则方程组

$$\begin{cases}5A\quad+7.5b=9.404\\ 7.5A+11.875b=14.422\end{cases}$$

解得　A=1.122 4，b=0.505 6，$a=e^A$=3.072，于是得最小二乘拟合曲线 $y=3.072e^{0.505\,6x}$

八、(15 分) 求解常微分方程初值问题 $\begin{cases}y'=f(x,y), & a\le x\le b\\ y(a)=\eta\end{cases}$

的两步方法 $y_{n+2}-\dfrac{3}{2}y_{n+1}+\dfrac{1}{2}y_n=\dfrac{h}{4}(5f_{n+1}-f_n)$

(1)　证明方法满足根条件；

(2)　试求其绝对稳定区间；

(3) 若 $f(x,y)=-10y$，由绝对稳定区间确定步长 h 应取多少？

解：（1）方法的第一特征多项式为 $\rho(\lambda)=\lambda^2-\frac{3}{2}\lambda+\frac{1}{2}=\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)(\lambda-1)$，

其根为 $\lambda_1=\frac{1}{2},\lambda_2=1$，模均不超过 1，且模为 1 的根为单根，所以方法满足根条件。

（2）方法的稳定多项式为

$$\pi(r,\bar{h})=r^2-\frac{3}{2}r+\frac{1}{2}-\frac{5}{4}\bar{h}r+\frac{1}{4}\bar{h}\ =r^2-\left(\frac{3}{2}+\frac{5}{4}\bar{h}\right)r+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\bar{h},\qquad \bar{h}=h\lambda$$

由二次方程根按模小于 1 的充要条件知，方程 $\pi(r,\bar{h})=0$ 的根按模小于 1 等价于

$$\begin{cases}\left|\frac{3}{2}+\frac{5}{4}\bar{h}\right|<1+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\bar{h}\right)\\ \left|\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\bar{h}\right|<1\end{cases},$$

于是在实数范围内解不等式得 $-2<\bar{h}<0$，所以绝对稳定区间为 $(-2,0)$。

（3）当 $f(x,y)=-10y$ 时，$\bar{h}=-10h$

由 $-2<\bar{h}<0$，可知步长 h 应满足 $0<h<0.2$。

注意行为规范 遵守考场纪律

主管领导审核签字

2021年秋季学期研究生课程考试试题

考 试 科 目：数值分析A

学生所在院（系）： 机电工程学院　　　　学生所在学科： 机械电子工程

学生姓名：哈工大资源分享站　　　　学生学号： QQ2842305604

*****考生注意：答案务必写在答题卡上，答在本题签上无效*****

注意行为规范　遵守考场纪律

主管领导审核签字

一、判断题（每题 4 分，共 20 分，对的打〇，错的打×）

1. 割线法比牛顿迭代法的效率高。（　）
2. 当 f(x)满足一定的连续可微条件时，若构造三次样条插值函数，则 n 越大 Sn(x)越接近于 f(x)。（　）
3. 已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & \boldsymbol{a} & \boldsymbol{a}\\ \boldsymbol{a} & 1 & \boldsymbol{a}\\ \boldsymbol{a} & \boldsymbol{a} & 1\end{bmatrix}$，已知求解方程 Ax=b 的高斯塞迭尔迭代收敛，则求解该方程的雅可比迭代也收敛。（　）
4. 中点公式是典型的牛顿科特斯闭型求积公式。（　）
5. 若用复化梯形求积公式求 $\int_0^1 e^{-x}$ 的近似值，要将积分区间[0, 1]分成 38 份即可保证计算结果有四位有效数字.　　（　）

二、填空题（每题 5 分，共 25 分）

1. n+1 个节点的高斯型求积公式的余项是______________。
2. 设 ad≠0, 在解二元一次方程组 $\begin{cases}ax+by=1\\ cx+dy=2\end{cases}$ 的方法中，雅可比迭代收敛的充要条件是_____，高斯赛叠尔迭代收敛的充要条件是_____ ‖书 P103 结论。
3. 设矩阵 A = $\begin{pmatrix}1 & 2\\ \boldsymbol{a} & 1\end{pmatrix}$，当 a 满足_____时，$\|\boldsymbol{A}\|_\infty$ = a+1。
4. 共轭梯度法解方程组 $\begin{cases}3x+y=5\\ x+2y=4\end{cases}$，需要迭代_____次。
5. 设 $l_0(x), l_1(x), \cdots, l_n(x)$ 是以 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 为节点的 Lagrange 插值基函数，则 $\sum_{k=0}^{n}(x_k-x)^j l_k(x)=$ __________________ $(j=0,1,\cdots,n)$。

三、(8 分) 对于迭代函数 $\varphi(x)=x+c\left(2x^2-3\right)$，根据局部收敛定理及收敛阶判定定理，试讨论：

(1) 当 c 为何值时，$x_{k+1}=\varphi(x_k), k=0,1,2,\cdots$ 产生的序列 $\{x_k\}$ 收敛；

（2） c 取何值时收敛阶至少为 2 阶？

四、（8 分）求 a, b, c，使得 $\int_0^{\pi/2}[(ax^2+bx+c)-\cos x]^2dx$ 最小

注意行为规范

五、（8 分）考虑方程 f（x）=$x^{1+\alpha}-x=0$，$0<\alpha<1$，显然有根 x=0 和 x=1，讨论利用牛顿法求解此方程的收敛速度。

遵守考场纪律

六、（10 分）确定下列求积公式中的待定参数，使其代数精确度尽量高，并指明求积公式所具有代数精度.

（1） $\int_{-h}^{h} f(x)\mathrm{d}x \approx A_{-1} f(-h)+A_0 f(0)+A_1 f(h)$

（2） $\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{1}{3}[f(-1)+2f(x_1)+3f(x_2)]$

（3） $\int_{0}^{h} f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{h}{2}[f(0)+f(h)]+\alpha h^2[f'(0)-f'(h)]$

主管领导审核签字

七、（6 分）取步长 h=0.4，写出用标准四阶 Runge-Kutta 方法求解初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=x\sin(x+y) & 1\le x\le 9\\ y(1)=0\end{cases}$$

的计算公式，并计算 $y(1.8)$ 的近似值，小数点后至少保留 6 位.

八、（15 分）对线性多步法

$$y_{n+1}=a_0y_n+(1-a_0)y_{n-1}+h[(2-\frac{1}{2}a_0)y_n'-\frac{1}{2}a_0y_{n-1}']$$

其中 $0\le a_0<2$，确定它的绝对稳定区间。当 $\alpha_0=0.1$，试验方程中 $\lambda=-20$ 时，如何选取步长 h？

2021年秋季学期研究生课程考试试题

考 试 科 目：数值分析A

学生所在院（系）： 机电学院　　　学生所在学科： 机械电子工程

学生姓名：哈工大资源分享站　　　学生学号： QQ2842305604

*****考生注意：答案务必写在答题卡上，答在本题签上无效*****

注意行为规范　遵守考场纪律

主管领导审核签字

一、判断题（每题 4 分，共 20 分，对的打〇，错的打×）

1. 割线法比牛顿迭代法的效率高。(×)||看θ与 0.44 的关系

2. 当 f(x)满足一定的连续可微条件时，若构造三次样条插值函数，则 n 越大 Sn(x)越接近于 f(x)。(〇)

3. 已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & \boldsymbol{a} & \boldsymbol{a}\\ \boldsymbol{a} & 1 & \boldsymbol{a}\\ \boldsymbol{a} & \boldsymbol{a} & 1\end{bmatrix}$，已知求解方程 Ax=b 的高斯塞迭尔迭代收敛，则求解该方程的雅可比迭代也收敛。(〇)

4. 中点公式是典型的牛顿科特斯闭型求积公式。(×) ||开型的

5. 若用复化梯形求积公式求 $\int_0^1 \mathrm{e}^{-x}$ 的近似值，要将积分区间[0, 1]分成 38 份即可保证计算结果有四位有效数字.　　(×)

记 $f(x)=\mathrm{e}^{-x}$，则 $f''(x)=f^{(4)}(x)=\mathrm{e}^{-x}$. $\int_0^1 \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$ 的真值具有零位整数，所以要求计算结果有四位有效数字，即要求误差不超过 $\frac{1}{2}\times 10^{-4}$.

由复化梯形求积公式的误差 $R(f;T_n)=-\frac{b-a}{12}h^2 f''(\eta)$，其中：$b-a=1-0=1$，$h=\frac{b-a}{n}=\frac{1}{n}$，$f''(x)=\mathrm{e}^{-x}$.

所以，要使 $|R(f;T_n)|=\frac{h^2}{12}f''(\eta)=\frac{1}{12n^2}\mathrm{e}^{-\eta}\le\frac{1}{12n^2}\le\frac{1}{2}\times 10^{-4}$，只要 $n^2\ge\frac{1}{6}\times 10^4$，开平方得 $n\ge 40.8$，取 n=41.

二、填空题（每题 5 分，共 25 分）

1. n+1 个节点的高斯型求积公式的余项是______________。

2. 设 ad≠0，在解二元一次方程组 $\begin{cases}ax+by=1\\ cx+dy=2\end{cases}$ 的方法中，雅可比迭代收敛的充要条件是_____，高斯赛叠尔迭代收敛的充要条件是_____ ‖ 书 P103 结论。

注意行为规范 遵守考场纪律

主管领导审核签字

3. 设矩阵 A $=\begin{pmatrix}1 & 2\\ \boldsymbol{a} & 1\end{pmatrix}$，当 a 满足______时，$\|\boldsymbol{A}\|_\infty$ = a+1。

4. 共轭梯度法解方程组$\begin{cases}3x+y=5\\ x+2y=4\end{cases}$，需要迭代______次。

5. 设$l_0(x),l_1(x),\cdots,l_n(x)$是以$x_0,x_1,\cdots,x_n$为节点的 Lagrange 插值基函数，则$\sum_{k=0}^{n}(x_k-x)^j l_k(x)=$

____________________ $(j=0,1,\cdots,n)$。 ||0

三、(8 分) 对于迭代函数$\varphi(x)=x+c(2x^2-3)$，根据局部收敛定理及收敛阶判定定理，试讨论：

(1) 当c为何值时，$x_{k+1}=\varphi(x_k),k=0,1,2,\cdots$产生的序列$\{x_k\}$收敛；

(2) c取何值时收敛阶至少为 2 阶？

四、(8 分) 求 a, b, c，使得$\int_0^{\pi/2}[(ax^2+bx+c)-\cos x]^2dx$最小

解：设$\varphi_0(x)=1,\ \varphi_1(x)=x,\varphi_2(x)=x^2,S^*(x)=ax^2+bx+c\in\Phi=Span\{\varphi_0,\varphi_1,\varphi_2\}$，则

a,b,c满足正则方程组

$$\begin{cases}c(\varphi_0,\varphi_0)+b(\varphi_0,\varphi_1)+a(\varphi_0,\varphi_2)=(\varphi_0,\cos x)\\ c(\varphi_1,\varphi_0)+b(\varphi_1,\varphi_1)+a(\varphi_1,\varphi_2)=(\varphi_1,\cos x)\\ c(\varphi_2,\varphi_0)+b(\varphi_2,\varphi_1)+a(\varphi_2,\varphi_2)=(\varphi_2,\cos x)\end{cases}$$

直接计算得

$$(\varphi_0,\varphi_0)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}1^2dx=\frac{\pi}{2},\quad (\varphi_0,\varphi_1)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}xdx=\frac{\pi^2}{8}$$

$$(\varphi_0,\varphi_2)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2dx=\frac{\pi^3}{24},\quad (\varphi_1,\varphi_1)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2dx=\frac{\pi^3}{24}$$

$$(\varphi_1,\varphi_2)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^3dx=\frac{\pi^4}{64},\quad (\varphi_2,\varphi_2)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^4dx=\frac{\pi^5}{160}$$

$$(\varphi_0,\cos x)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos xdx=1,(\varphi_1,\cos x)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\cos xdx=\frac{\pi}{2}-1$$

$$(\varphi_2,\cos x)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2\cos xdx=\frac{\pi^2}{4}-2$$

注意行为规范

遵守考场纪律

主管领导审核签字

代入正则方程组

$$\begin{cases} \frac{\pi}{2}c+\frac{\pi^2}{8}b+\frac{\pi^3}{24}a=1 \\ \frac{\pi^2}{8}c+\frac{\pi^3}{24}b+\frac{\pi^4}{64}a=\frac{\pi}{2}-1 \\ \frac{\pi^3}{24}c+\frac{\pi^4}{64}b+\frac{\pi^5}{160}a=\frac{\pi^2}{4}-2 \end{cases}$$

解得

$$c=1.00194,\quad b=-0.13313, a=-0.33824$$

即

$$p_2(x)=1.00194-0.13313x-0.33824x^2$$

是在$[0,\frac{\pi}{2}]$上，利用ax^2+bx+c逼近$\cos x$的最佳平方逼近问题的解.

五、(8 分) 考虑方程 $f(x)=x^{1+\alpha}-x=0$，$0<\alpha<1$，显然有根 $x=0$ 和 $x=1$，讨论利用牛顿法求解此方程的收敛速度。

(1) $\varphi'(1)=0$， $\varphi''(1)=\alpha+1\neq 0$ ，故为二阶收敛

(2) $\varphi'(0)=0$， $\varphi''(0)$不存在，由定义知：

$$\lim_{k\to\infty}\frac{|x_{k+1}-0|}{|x_k-0|^p}=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{\alpha x_k^{1+\alpha}}{(1+\alpha)x_k^{p+\alpha}-x_k^p}\right|$$

当$p=1+\alpha$时， $\lim=|-\alpha|\neq 0$

该格式为求根0的 $1+\alpha$ 阶方法

六、(10 分) 确定下列求积公式中的待定参数，使其代数精确度尽量高，并指明求积公式所具有代数精度.

(1) $\int_{-h}^{h}f(x)\mathrm{d}x\approx A_{-1}f(-h)+A_0f(0)+A_1f(h)$

(2) $\int_{-1}^{1}f(x)\mathrm{d}x\approx\frac{1}{3}[f(-1)+2f(x_1)+3f(x_2)]$

(3) $\int_{0}^{h}f(x)\mathrm{d}x\approx\frac{h}{2}[f(0)+f(h)]+\alpha h^2[f'(0)-f'(h)]$

分析 求解这类题目，一般都应按照求积公式代数精度的定义去作. 即先列出参数满足的代数方

程组，解出这些待定参数，然后用所确定的求积公式判断所具有的代数精度.

解 （1）求积分公式中含有三个待参数，即 A_{-1}， A_0， A_1. 令求积公式对 $f(x)=1,x,x^2$ 精确成立，即

注意行为规范

$$\begin{cases} A_{-1}+A_0+A_1=2h \\ -h(A_{-1}-A_1)=0 \\ h^2(A_{-1}+A_1)=\dfrac{2}{3}h^3 \end{cases}$$

解得 $A_{-1}=A_1=\dfrac{1}{3}h,\quad A_0=\dfrac{4}{3}h$. 所求公式至少具有 2 次代数精确度. 又将 $f(x)=x^3,x^4$ 代入所确定的求积公式，有

遵守考场纪律

$$\int_{-h}^{h}x^3\mathrm{d}x=0=\frac{h}{3}(-h)^3+\frac{h}{3}(h^3)$$

$$\int_{-h}^{h}x^4\mathrm{d}x=\frac{2}{5}h^5\neq\frac{h}{3}(-h)^4+\frac{h}{3}h^4$$

故 $\int_{-h}^{h}f(x)dx\approx\dfrac{h}{3}f(-h)+\dfrac{4h}{3}f(0)+\dfrac{h}{3}f(h)$ 具有 3 次代数精度.

（2）求积公式中含两个待定参数 x_1，x_2，当 $f(x)=1$ 时，易知有

$$\int_{-1}^{1}f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}[f(-1)+2f(x_1)+3f(x_2)]$$

主管领导审核签字

故令求积公式对 $f(x)=x$，x^2 精确成立，即

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2=1 \\ 2x_1^2+3x_2^2=1 \end{cases}$$

由第一式解得 $x_1=(1-3x_2)/2$，代入第二式，得

$$15x_2^2-6x_2-1=0$$

最后解出

$$\begin{cases} x_1=0.689\,90 \\ x_2=-0.126\,60 \end{cases} \text{或} \begin{cases} x_1=-0.289\,90 \\ x_2=0.526\,60 \end{cases}$$

将 $f(x)=x^3$ 代入已确定之求积公式，有

$$\int_{-1}^{1}x^3\mathrm{d}x=0\neq\frac{1}{3}[-1+2x_1^3+3x_2^3]$$

故所建立求积公式具有 2 次代数精度，所求节点为 $x_1=0.689\ 90$，$x_2=-0.126\ 60$ 或 $x_1=-0.289\ 90$，$x_2=0.526\ 60$ 两组.

（3）求积公式中只含有一个待定参数α，当 $f(x)=1$，x 时，有

$$\int_0^h 1\mathrm{d}x=\frac{h}{2}[1+1]+0$$

$$\int_0^h x\mathrm{d}x=\frac{h}{2}[0+h]+\alpha h^2(1-1)$$

故令$f(x)=x^2$时求积公式精确成立，即

$$\int_0^h x^2dx=\frac{h}{2}[0+h^2]+\alpha h^2[2\times 0-2h]$$

解得 $\alpha=\dfrac{1}{12}$.

将$f(x)=x^3$代入上述确定的求积公式，有

$$\int_0^h x^3dx=\frac{h}{2}[0+h^3]+\frac{h^2}{12}[0-3h^2]$$

这说明求积公式至少具有 3 次代数精确度. 再令$f(x)=x^4$，代入求积公式时有

$$\int_0^h x^4dx\neq\frac{h}{2}[0+h^4]+\frac{h^2}{12}[0-4h^3]$$

故所建立求积公式具有 3 次代数精度.

七、(6 分) 取步长 h=0.4，写出用标准四阶 Runge-Kutta 方法求解初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=x\sin(x+y) & 1\le x\le 9\\ y(1)=0\end{cases}$$

的计算公式，并计算 $y(1.8)$ 的近似值，小数点后至少保留 6 位.

解 设 $f(x,y)=x\sin(x+y)$， $x_0=1,y_0=0,x_n=x_0+nh=1+0.4n$ （$n=0,1,2,\cdots,20$）

标准四阶 Runge-Kutta 公式为

$$\begin{cases}y_{n+1}=y_n+\dfrac{h}{6}(K_1+2K_2+2K_3+K_4)\\ K_1=f(x_n,y_n)\\ K_2=f(x_n+\dfrac{h}{2},y_n+\dfrac{h}{2}K_1)\\ K_3=f(x_n+\dfrac{h}{2},y_n+\dfrac{h}{2}K_2)\\ K_4=f(x_n+h,y_n+hK_3)\end{cases}$$

代入$f(x,y)=x\sin(x+y)$有

注意行为规范

遵守考场纪律

主管领导审核签字

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \dfrac{0.4}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) \\ K_1 = (1+0.4n)\sin(1+0.4n+y_n) \\ K_2 = (1.2+0.4n)\sin(1.2+0.4n+y_n+0.2K_1) \\ K_3 = (1.2+0.4n)\sin(1.2+0.4n+y_n+0.2K_2) \\ K_4 = (1.4+0.4n)\sin(1.4+0.4n+y_n+0.4K_3) \end{cases}$$

由 $y_0=1$，计算得

$$y(1.4) \approx 0.460\,389$$
$$y(1.8) \approx 0.911\,704$$

八、(15 分)

对线性多步法

$$y_{n+1} = a_0 y_n + (1-a_0)y_{n-1} + h[(2-\frac{1}{2}a_0)y'_n - \frac{1}{2}a_0 y'_{n-1}]$$

其中 $0 \le a_0 < 2$，确定它的绝对稳定区间。当 $\alpha_0 = 0.1$，试验方程中 $\lambda = -20$ 时，如何选取步长 h？

解：利用模型方程 $y' = \lambda y$ 得

$$y_{n+1} = [a_0 + (2-\frac{1}{2}a_0)\lambda h]y_n + [(1-a_0) - \frac{1}{2}a_0\lambda h]y_{n-1}$$

稳定多项式

$$\pi(r, h\lambda) = r^2 - [a_0 + (2-\frac{1}{2}a_0)\lambda h]r - [(1-a_0) - \frac{1}{2}a_0\lambda h]$$

线性多步法绝对稳定的充分必要条件

$$\left|-[a_0 + (2-\frac{1}{2}a_0)\lambda h]\right| < 1 - [(1-a_0) - \frac{1}{2}a_0\lambda h] < 2$$

$$-2 < \lambda h < 2(\frac{2}{a_0} - 1)$$

故绝对稳定区间为 $(-2, 2(\frac{2}{a_0}-1))$.

当 $\alpha_0 = 0.1$，$\lambda = -20$ 时

$$-2 < -20h < 2(\frac{2}{0.1} - 1) = 38$$

所以 0 < h < 0.1

2021 数值分析 A 小题

一、判断题.

1. 求解非线性方程 $f(x)=0$ 的牛顿迭代法每迭代一次，需要计算1个函数值和1个导数值 (√)
2. 有限维线性空间的任意两种范数都是等价的 (√)
3. 线性插值总是数值稳定的. (√)
4. n个节点的插值型求积公式，代数精度至少为n (×)
5. 改进的Euler法是二阶方法 (√)

二、填空题

1. 求方程 $f(x)=x-\sin x=0$ 的根的二阶牛顿迭代格式是 $x_{k+1}=x_k-3\dfrac{x_k-\sin x_k}{1-\cos x_k}$

2. 设 $x_0,x_1,\cdots,x_n$ 为 $n+1$ 个互异插值节点，$l_0(x),\cdots l_n(x)$ 为 Langrange 插值基函数，则 $\sum_{j=0}^{n}(x_j-x)^k l_j(x)=$ $\underline{\ 0\ }$ $(k=0,1,\cdots,n)$

3. 对于方程组 $\begin{pmatrix}3&2\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$，用迭代法 $x_{k+1}=x_k+\alpha(Ax_k-b)$ 求解，问 $\alpha\in$ $\underline{(-\frac{1}{2},0)}$ 时迭代收敛.

(解) 令 $|\lambda E-(E+\alpha A)|=0$ 得 $(\lambda-1-4\alpha)(\lambda-1-\alpha)=0$

令 $\begin{cases}|1+\alpha|<1\\|1+4\alpha|<1\end{cases}\Rightarrow -\frac{1}{2}<\alpha<0$

4. 对于初值问题 $\begin{cases}y'=2x+1\\y(0)=0\end{cases}$，若 $x_n=nh$，则用Euler法求解该方程得到的方程为 $y_n=$ $\underline{nh+n(n-1)h^2}$ (用n和h表示)

$\Rightarrow\quad y_{n+1}=y_n+hf(x_n,y_n)=y_n+h(2x_n+1)$，由 $y(0)=0$ 得

$y_1=h$

$y_2=y_1+h(2x_1+1)=2h+2hx_1$

$y_3=nh+ah(x_1+x_2)$

$\vdots$

$y_n=nh+2h\times(x_1+\cdots x_{n-1})=nh+2h\times\dfrac{nh(n-1)}{2}=nh+n(n-1)h^2$

5. 用乘幂法求 $A=\begin{bmatrix}2&3&2\\10&3&4\\3&6&1\end{bmatrix}$ 按模最大的特征值为 $\underline{\ 9\ }$.

(初值 $(0,0,1)^T$，迭代2次)

$\Rightarrow$

k	v_k^T	u_k^T
0	0 0 1	0 0 1
1	2 4 1	(0.5, 1, 0.25)
2	(4.5, 9, 7.75)	

2020 年 秋 季学期研究生课程考试试题 A

考 试 科 目：矩阵分析

学生所在院（系）：

学生所在学科：

1. 在 $\mathbb{R}^{2\times2}$ 中，$E_1=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & 0\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0\end{bmatrix}, E_2=\begin{bmatrix}-\frac{\sqrt{2}}{2} & 0\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0\end{bmatrix}, E_3=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}, E_4=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$，回答下述各问：

(1)求

$$\alpha=\begin{bmatrix}a & c\\ b & d\end{bmatrix} \text{在}\{E_1,E_2,E_3,E_4\}\text{下的坐标。}$$

(2) 求从 $\{E_1,E_2,E_3,E_4\}$ 到另一组基

$$e_1=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}, e_2=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}, e_3=\begin{bmatrix}0 & \frac{\sqrt{2}}{2}\\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}, e_4=\begin{bmatrix}0 & \frac{\sqrt{2}}{2}\\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}\text{的过渡矩阵。}$$

(3) $\mathbb{R}^{2\times2}$ 中，若从 $\{E_1,E_2,E_3,E_4\}$ 到一组新基 $\{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4\}$ 的过渡矩阵为 P，求(1)中 α 在这组新基下的坐标。

2. 设 $A\in\mathbb{R}^{2\times2}$，

(1) 试证：映射 $\mathcal{G}:\mathbb{R}^{2\times2}\to\mathbb{R}^{2\times2}: X\mapsto A^T X+XA$ 定义了一个线性变换。

(2) $\forall X\in\mathbb{R}^{2\times2}, Y=A^T X+XA$ 写成 $cs(Y)=P\,cs(X)$ 的形式，$P\in\mathbb{R}^{4\times4}$，求 P 与 A 的关系，cs:矩阵按列展开。

(3) 条件同(2),若 $\lambda I-A$ 的不变因子为 1 和 $\lambda^2+4\xi\lambda+4, \xi>0$，请问关于 X 的矩阵方程 $A^T X+XA=F\in\mathbb{R}^{2\times2}$ 是否一定有解？如果有解，解是否唯一？

3. (1) 什么是 λ 矩阵的行列式因子？

(2) 求 λ 矩阵

$$\begin{bmatrix} \lambda^2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2-2\lambda+1 \end{bmatrix}$$

的初等因子。

(3) 写出(2)中矩阵的 **Smith** 标准型.

4. 方矩阵 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$，其特征矩阵 $\lambda I - A$ 具有如下初等因子：

$\lambda^2, \lambda+0.1, (\lambda+0.1)^2, \lambda+a,$ ：其中 $a \neq 0$ 且 $a \neq 0.1$

(1)写出 A 的 **Jordan** 标准型。

(2)试判断 $a>0$ 时，$\lim\limits_{t\to\infty}\exp(At)$ 是否有界。

(3)试写出 A 的最小多项式。

(4)试给出能使 $\lim\limits_{k\to+\infty} A^k = 0$ 的 a 的取值范围。

(5) 试给出能使矩阵级数 $\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\dfrac{1}{k!}A^k$ 绝对收敛的 a 的取值范围，并写出此极限关于 A 的矩阵函数表达式。

5. 设 V 是 $\mathbb{R}$ 上的线性空间.

(1)写出 V 上内积的定义.

(2) 定义映射 $\tau:\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ 如下:

$$\tau(x,y)=x^T\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}y,$$

证明 τ 是 $\mathbb{R}^2$ 上的内积.

(3) 证明矩阵 $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ 的列向量组按(2)定义的内积不是标准正交组；并用 Schmidt 正交化方法将它化为标准正交组.

(4)求(2)中定义的内积在 $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ 的列向量构成的基下的度量矩阵。

(5) 在(2)中定义的内积意义下，求 $\alpha=[1\quad 0]^T$ 在 $W=span\{[0\quad 1]^T\}$ 上的正交投影。

6.（1）矩阵范数的定义是什么？

（2）试证 $\forall A\in\mathbb{C}^{m\times n}$，$\|A\|_F=\left(\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2\right)^{1/2}$ 是矩阵范数。

正半定

7. 设 A 为 $n\times n$ 维 **Hermite** 矩阵，且正定，B 为 $n\times n$ 维 **Hermite** 矩阵，试证：

2020 年秋季学期研究生课程考试试题 B

考 试 科 目：数值分析 B

学生所在院（系）：　　　　　　　　学生所在学科：

学生姓名：　　　　　　　　　　　　学生学号：

*****考生注意：答案务必写在答题卡上，答在本题签上无效*****

注意行为规范

遵守考场纪律

一、判断题（每题 4 分，共 20 分，对的打 O，错的打 ×）

1. 对任意一个非线性方程求根，割线法比 Newton 法效率指数高。（　）

2. 矩阵 $A=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 2 & -4\end{pmatrix}$，则矩阵 A 的范数有 $\overset{7}{\|A\|_1}<\overset{6}{\|A\|_\infty}$。（　）

3. 插值多项式的次数越高，插值的效果越好。（　）

4. n 个求积节点的插值型求积公式的代数精度最高可达 $2n-1$（　）

5. 能够达到 2 阶的 2 级 Runge-Kutta 法只有一种。（　）

二、填空题（每题 4 分，共 20 分）

1. 设 $f(x)=x-\sin x$，解 $f(x)=0$ 的 2 阶 Newton 迭代公式为__________。

2. 由向量空间 R^n 上的向量范数 $\|x\|_t$ 导出的矩阵从属范数 $\|A\|_t=$__________。

3. 设 $p_1(x)=x, p_2(x)=cx^2-\dfrac{1}{2}$，当 $c=$________时，$p_1(x)$ 与 $p_2(x)$ 在区间 $[1,2]$ 上关于权函数 $\rho(x)=1$ 正交。

4. 求常微分方程 $\begin{cases}y'=f(x,y), & a<x<b\\ y(a)=\eta\end{cases}$ 数值解法的隐式 Euler 公式为__________。

主管领导审核签字

$V_1=(2,\frac{5}{2},\frac{3}{2})^T$　　$V_2=(2,\frac{13}{5},1)^T$

$u_1=(\frac{4}{5},1,\frac{3}{5})^T$　　$u_2=(\frac{10}{13},1,\frac{5}{13})^T$

5. 用乘幂法求矩阵 $\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ 1/2 & 5/2 & -1/2\\ -1/2 & 1/2 & 3/2\end{pmatrix}$ 的最大特征值为__________，对应的特征向量为________。（初值选取为 $(1,1,1)^T$，计算迭代 2 步的结果，保留两位小数）

三、（10 分）设 $\varphi(x)=x+a(x^3-8)$，考虑迭代格式 $x_{k+1}=\varphi(x_k), k=0,1,2,\cdots$，如何选取 a 才能具有局部收敛性？a 取何值时，迭代收敛最快？

$-D^{-1}(L+U) = I - D^{-1}A$

$-(D+L)^{-1}U$

四、（10分）对于方程组 $\begin{cases} x_1+\dfrac{x_2}{5}+\dfrac{x_3}{6}=\dfrac{41}{30} \\ -\dfrac{x_1}{2}+\dfrac{x_2}{2} \qquad\quad =0 \\ -\dfrac{x_1}{6}-\dfrac{x_2}{6}+\dfrac{x_3}{3}=0 \end{cases}$，给出 Jacobi 迭代法和 Gauss-Seidel 迭代法的迭代公式，并讨论收敛性。

$n=0 \quad 2n+1$

五、（15 分）已知求积公式 $\int_a^b f(x)dx \approx A_0 \cdot f(x_0)$，（1）确定 A_0, x_0，使得求积公式达到最高代数精度，该公式是否为 Gauss 型求积公式？（2）求多项式 $H(x)$，满足插值条件 $H\left(\dfrac{a+b}{2}\right)=f\left(\dfrac{a+b}{2}\right), H'\left(\dfrac{a+b}{2}\right)=f'\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$，并给出插值余项。（3）推导出满足（1）问的求积公式余项。

六、（10 分）设函数为 $y=a\sin x+b\sin 2x$，试按最小二乘法确定参数 a,b，已知数据如下：

x	0.5	1	1.5	2
y	2.1600	2.6500	1.2800	-0.6100

（结果保留 4 位小数）

七、（15 分）求解常微分方程初值问题 $\begin{cases} y'=f(x,y), & a\le x\le b \\ y(a)=\eta \end{cases}$ 的两步方法：

$$y_{n+1}=a_0y_n+a_1y_{n-1}+h\left[b_0f(x_n,y_n)+b_1f(x_{n-1},y_{n-1})\right]$$

（1）求出：a_0,a_1,b_0,b_1 使得两步法精度尽可能的高（2）讨论方法的绝对稳定性；

（在局部截断误差中 $C_r=\dfrac{1}{r!}\left\{1-[\sum_{i=0}^{p}(-i)^r a_i+r\sum_{i=-1}^{p}(-i)^{r-1}b_i]\right\}, r=2,3,\cdots$ 。

参考定理：设 x_1 和 x_2 是实系数二次方程 $x^2+bx+c=0$ 的根，则 $|x_1|<1,|x_2|<1$ 的充要条件是 $|b|<1+c,|c|<1$。）

2020 数值分析

1. $x=-3,2$ 分别是方程 $x^3-x^2-8x+12=0$ 的根；讨论用 Newton 迭代法求它们近似值的收敛阶。取初值 $x_0=-2$ 计算根 $x=-3$ 的近似值，要求迭代 3 次。（结果保留 4 位小数）

Ӛ ئ ή ή ή

2. 试确定 $\alpha=0$ 是方程 $f(x)=e^{2x}-1-2x-2x^2=0$ 的几重根；取初值 $x_0=0.25$ 用改进的具有二阶收敛速度的 Newton 迭代法求 $f(x)=0$ 的根 $\alpha=0$ 的近似值。要求迭代 2 次（结果保留 4 位小数）。

3. 试用 Crout 三角分解法求解方程组 $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 10 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 \\ 13 \\ 9 \end{pmatrix}$

4. 设常数 $a \neq 0$，求出 a 的取值范围使得解方程组

$$\begin{pmatrix} a & -2 & -1 \\ 2 & a & -3 \\ 1 & 3 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

的 Jacobi 迭代法收敛。

5. 用共轭梯度方法解方程组：$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$ （取初值 $x^{(0)}=(0,0)^T$ ）。

$$\text{共轭梯度方法:}\begin{cases} \mathbf{p}_0=\mathbf{r}^{(0)}=\mathbf{b}-A\mathbf{x}^{(0)}, \quad \alpha_k=\dfrac{(\mathbf{r}^{(k)},\mathbf{r}^{(k)})}{(\mathbf{p}_k, A\mathbf{p}_k)} \\ \mathbf{x}^{(k+1)}=\mathbf{x}^{(k)}+\alpha_k\mathbf{p}_k, \quad \mathbf{r}^{(k+1)}=\mathbf{r}^{(k)}-\alpha_k A\mathbf{p}_k \\ \beta_k=\dfrac{(\mathbf{r}^{(k+1)},\mathbf{r}^{(k+1)})}{(\mathbf{r}^{(k)},\mathbf{r}^{(k)})}, \quad \mathbf{p}_{k+1}=\mathbf{r}^{(k+1)}+\beta_k\mathbf{p}_k \end{cases}$$

6.给定 $f(x)$ 的函数表：

x	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
$f(x)$	1.0000	1.1052	1.2214	1.3499	1.4918	1.6487

试用线性插值及 2 次插值估算 $f(0.23)$ 的近似值

7. 用最小二乘法求一个形如 $y=ax^2+b$ 的经验公式，使它与下列数据拟合

x_i	19	25	31	38	44
y_i	19.0	32.3	49.0	73.3	97.8

8.若用复化梯形公式计算积分 $\int_1^3 e^x \sin x dx$ ，要求截断误差不超过10^{-4} （舍入误差不计），问需要计算多少个节点上的函数值？

9. 试求求积公式 $\int_{-2}^{2} f(x)dx \approx A_0 f(-\frac{2\sqrt{3}}{3}) + A_1 f(\frac{2\sqrt{3}}{3})$ 的求积系数 A_0, A_1，使得其有尽可能高的代数精度，是否是 Gauss 型的？并用此公式计算积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$（结果保留 5 位小数）。

10. 写出经典 4 阶 Runge-Kutta 方法求解初值问题

$$\begin{cases} y' = 8 - 3y \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

的计算公式，并取步长 $h = 0.2$，计算 $y(0.4)$ 的近似值.（小数点后至少保留 4 位）

4 阶 Runge-Kutta 公式：

$$\begin{cases} K_1 = hf(x_n, y_n), K_2 = hf(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{1}{2}K_1) \\ K_3 = hf(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{1}{2}K_2), K_4 = hf(x_n + h, y_n + K_3) \\ y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) \end{cases}$$

$$n = 0, 1, 2, \cdots$$

11. 利用 4 阶 Runge—Kutta 方法计算

$$\begin{cases} y'(x) = -20y(x), 0 \le x \le 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

当步长h分别取0.1,0.2时，计算稳定吗？

2020 数值分析答案

1. $x=-3,2$ 分别是方程 $x^3-x^2-8x+12=0$ 的根；讨论用 Newton 迭代法求它们近似值的收敛阶。取初值 $x_0=-2$ 计算根 $x=-3$ 的近似值，要求迭代 3 次。（结果保留 4 位小数）

解： 设 $f(x)=x^3-x^2-8x+12$

$$f'(x)=3x^2-2x-8$$

$$f''(x)=6x-2$$

$$f(-3)=0,\quad f'(-3)\neq 0，\ f(2)=0,\quad f'(2)=0,\quad f''(2)=10\neq 0$$

则：-3是$f(x)=0$的单根，故 Newton 迭代在-3附近是平方收敛；

2是$f(x)=0$的二重根，故 Newton 迭代在2附近是线性收敛；

取$x_0=-2$，Newton 迭代：

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}=x_n-\frac{x_n^3-x_n^2-8x_n+12}{3x^2-2x-8}$$

$$=\frac{2x_n^2+3x_n+6}{3x_n+4}$$

$$x_1=\frac{2x_0^2+3x_0+6}{3x_0+4}=$$

$$x_2=\frac{2x_1^2+3x_1+6}{3x_1+4}=$$

$$x_3=\frac{2x_2^2+3x_2+6}{3x_2+4}=$$

2. 试确定 $\alpha=0$ 是方程 $f(x)=e^{2x}-1-2x-2x^2=0$ 的几重根；取初值 $x_0=0.25$ 用改进的具有二阶收敛速度的 Newton 迭代法求 $f(x)=0$ 的根 $\alpha=0$ 的近似值。要求迭代 2 次（结果保留 4 位小数）。

解： $f(x)=e^{2x}-1-2x-2x^2$，

$$f'(x)=2e^{2x}-2-4x$$

$$f''(x)=4e^{2x}-4$$

$$f'''(x)=8e^{2x}$$

$$f(0)=f'(0)=f''(0)=0\,,\ f'''(0)=8\neq 0$$

$\alpha=0$ 是方程 $f(x)=0$ 的 3 重根；

改进的具有二阶收敛速度的 Newton 迭代法：

$$x_{n+1}=x_n-3\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$=x_n-3\frac{e^{2x_n}-1-2x_n-2x_n^2}{2e^{2x_n}-2-4x_n}$$

$$x_1=x_0-3\frac{e^{2x_0}-1-2x_0-2x_0^2}{2e^{2x_0}-2-4x_0}=$$

$$x_2=x_1-3\frac{e^{2x_1}-1-2x_1-2x_1^2}{2e^{2x_1}-2-4x_1}=$$

3. 试用 Crout 三角分解法求解方程组 $\begin{pmatrix}2&3&2\\10&3&4\\3&6&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\13\\9\end{pmatrix}$；

解： Crout 三角分解

$$A=\begin{pmatrix}2&3&2\\10&3&4\\3&6&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&&\\10&-12&\\3&\frac{3}{2}&-\frac{11}{4}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&\frac{3}{2}&1\\&1&\frac{1}{2}\\&&1\end{pmatrix}=LU$$

$$L=\begin{pmatrix}2 & & \\ 10 & -12 & \\ 3 & \frac{3}{2} & -\frac{11}{4}\end{pmatrix},\quad U=\begin{pmatrix}1 & \frac{3}{2} & 1\\ & 1 & \frac{1}{2}\\ & & 1\end{pmatrix}$$

$$Ax=b \Leftrightarrow \begin{cases}Ly=b\\ Ux=y\end{cases}$$

求解 $Ly=b$ 得 $y=\left(\frac{5}{2},1,0\right)^T$

求解 $Ux=y$ 得 $x=(1,1,0)^T$

4. 设常数 $a\neq 0$ ，求出 a 的取值范围使得解方程组

$$\begin{pmatrix}a & -2 & -1\\ 2 & a & -3\\ 1 & 3 & a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ b_3\end{pmatrix}$$

的 Jacobi 迭代法收敛。

解： Jacobi 迭代：

$$x^{(k+1)}=B_J x^{(k)}+g$$

$$B_J=-\begin{pmatrix}a & & \\ & a & \\ & & a\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}0 & -2 & -1\\ 2 & 0 & -3\\ 1 & 3 & 0\end{pmatrix}=-\frac{1}{a}\begin{pmatrix}0 & -2 & -1\\ 2 & 0 & -3\\ 1 & 3 & 0\end{pmatrix}$$

$$g=\begin{pmatrix}a & & \\ & a & \\ & & a\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ b_3\end{pmatrix}$$

迭代矩阵 B_J 的特征方程：

$$\left|\lambda E-B_J\right|=\left|\begin{pmatrix}\lambda & & \\ & \lambda & \\ & & \lambda\end{pmatrix}+\frac{1}{a}\begin{pmatrix}0 & -2 & -1\\ 2 & 0 & -3\\ 1 & 3 & 0\end{pmatrix}\right|=\frac{1}{a}\begin{vmatrix}\lambda a & -2 & -1\\ 2 & \lambda a & -3\\ 1 & 3 & \lambda a\end{vmatrix}=0$$

即： $(\lambda a)^3+14(\lambda a)=0$

特征根： $\lambda=0,\lambda=\pm\frac{\sqrt{14}}{a}i$

谱半径：$\rho(B_J)=\dfrac{\sqrt{14}}{|a|}<1$ 时 Jacobi 迭代收敛

故：$|a|>\sqrt{14}$

5. 纸张记忆复印店用共轭梯度方法解方程组：$\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\ 5\end{pmatrix}$ （取初值 $x^{(0)}=(0,0)^T$ ）。

$$\text{共轭梯度方法：}\begin{cases}\mathbf{p}_0=\mathbf{r}^{(0)}=\mathbf{b}-A\mathbf{x}^{(0)}, \quad \alpha_k=\dfrac{(\mathbf{r}^{(k)},\mathbf{r}^{(k)})}{(\mathbf{p}_k,A\mathbf{p}_k)}\\ \mathbf{x}^{(k+1)}=\mathbf{x}^{(k)}+\alpha_k\mathbf{p}_k, \quad \mathbf{r}^{(k+1)}=\mathbf{r}^{(k)}-\alpha_k A\mathbf{p}_k\\ \beta_k=\dfrac{(\mathbf{r}^{(k+1)},\mathbf{r}^{(k+1)})}{(\mathbf{r}^{(k)},\mathbf{r}^{(k)})}, \quad \mathbf{p}_{k+1}=\mathbf{r}^{(k+1)}+\beta_k\mathbf{p}_k\end{cases}$$

解： $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix}$是对称正定阵；

$$\mathbf{p}_0=\mathbf{r}^{(0)}=\mathbf{b}-A\mathbf{x}^{(0)}=(5\,,5)^T$$

$$\alpha_0=\frac{(\mathbf{r}^{(0)},\mathbf{r}^{(0)})}{(\mathbf{p}_0,A\mathbf{p}_0)}=\frac{2}{7}$$

$$\mathbf{x}^{(1)}=\mathbf{x}^{(0)}+\alpha_0\mathbf{p}_0=(\frac{10}{7},\frac{10}{7})^T$$

$$\mathbf{r}^{(1)}=\mathbf{r}^{(0)}-\alpha_0A\mathbf{p}_0=(\frac{5}{7},-\frac{5}{7})^T$$

$$\beta_0=\frac{(\mathbf{r}^{(1)},\mathbf{r}^{(1)})}{(\mathbf{r}^{(0)},\mathbf{r}^{(0)})}=\frac{1}{49}$$

$$\mathbf{p}_1=\mathbf{r}^{(1)}+\beta_0\mathbf{p}_0(\frac{40}{49},-\frac{30}{49})^T$$

$$\alpha_1=\frac{(\mathbf{r}^{(1)},\mathbf{r}^{(1)})}{(\mathbf{p}_1,A\mathbf{p}_1)}=\frac{7}{10}$$

$$\mathbf{x}^{(2)}=\mathbf{x}^{(1)}+\alpha_1\mathbf{p}_1=(2\,,1)^T$$

$$\mathbf{r}^{(1)}=\mathbf{r}^{(0)}-\alpha_0A\mathbf{p}_0=(0\,,0)^T$$

解为： $\mathbf{x}^{(2)}=(2\,,1)^T$

6. 给定 $f(x)$ 的函数表：

x	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5

$f(x)$	1.0000	1.1052	1.2214	1.3499	1.4918	1.6487

试用线性插值及 2 次插值估算 $f(0.23)$ 的近似值.

解： 线性插值，取 $x_0 = 0.2$，$x_1 = 0.3$

$$L_1(x) = \frac{x-0.2}{0.3-0.2}\cdot 1.3499 + \frac{x-0.3}{0.2-0.3}\cdot 1.2214$$

$$f(0.23) \approx L_1(0.23) = 1.2600$$

2 次插值取 $x_0 = 0.1,\ x_1 = 0.2,\ x_2 = 0.3$

$$L_2(x) = 1.1052\times\frac{(x-0.2)(x-0.3)}{(0.1-0.2)(0.1-0.3)} + 1.2214\times\frac{(x-0.1)(x-0.3)}{(0.2-0.1)(0.2-0.3)}$$

$$+1.3499\times\frac{(x-0.1)(x-0.2)}{(0.3-0.1)(0.3-0.2)}$$

$$f(0.23) \approx L_2(0.23) = 1.2659$$

7. 用最小二乘法求一个形如 $y = ax^2 + b$ 的经验公式，使它与下列数据拟合

x_i	19	25	31	38	44
y_i	19.0	32.3	49.0	73.3	97.8

解： 取 $\varphi_0(x) = 1, \varphi_1(x) = x^2$，

拟合函数为 $y = b\varphi_0(x) + a\varphi_1(x) = b + ax^2$

法方程为：

$$\begin{cases} 5b + 5327a = 271.4 \\ 5327a + 7277699b = 369321.5 \end{cases}$$

得： $a = 0.050351, b = 0.9726045$

拟合函数为 $y = 0.0500351x^2 + 0.9726045$

8. 若用复化梯形公式计算积分 $\int_1^3 e^x \sin x dx$ ，要求截断误差不超过 10^{-4} （舍入误差不计），纸张记忆复印问需要计算多少个节点上的函数值？

解：

$$f(x) = e^x \sin x,\ f'(x) = e^x(\sin x + \cos x),\ f''(x) = 2e^x \cos x,\ f'''(x) = 3e^x(\cos x - \sin x)$$

复化求积公式余项为：

$$E_n(f) = -\frac{(b-a)}{12}h^2 f''(\eta), \qquad \eta \in [a,b]$$

其中： $h = \dfrac{b-a}{n}$

因 $|\cos x| \le 1$，有 $|f''(\eta)| \le 2e^3$

若 $|E_n(f)| \le 10^{-4}$，得：$h^2 \le \dfrac{3\times 10^{-4}}{e^2}$

即 $\quad h \le 3.86\times 10^{-3}$

$$n = \frac{2}{h} \ge 517.5$$

取 $\quad n = 518$，

故至少需 519 个节点才能保证截断误差不超过10^{-4}。

9. 试求求积公式 $\int_{-2}^{2} f(x)dx \approx A_0 f(-\frac{2\sqrt{3}}{3}) + A_1 f(\frac{2\sqrt{3}}{3})$ 的求积系数 A_0, A_1，使得其有尽可能高的代数精度，是否是 Gauss 型的？并用此公式计算积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$（结果保留 5 位小数）。

解： 令 $f(x) = 1, x$ 求积公式准确成立，有：

$$\begin{cases} A_0 + A_1 = 4 \\ A_0(-\frac{2\sqrt{3}}{3}) + A_1(\frac{2\sqrt{3}}{3}) = 0 \end{cases}$$

得： $\quad A_0 = A_1 = 2$

求积公式： $\int_{-2}^{2} f(x)dx \approx 2f(-\frac{2\sqrt{3}}{3}) + 2f(\frac{2\sqrt{3}}{3})$

令 $f(x) = x^2, x^3$ 求积公式准确成立的，$f(x) = x^4$ 求积公式不是准确成立的，

求积公式代数精度为 3，是 Gauss 型的；

作变换 $x = \frac{\pi}{8}(t+2), \quad t \in [-2, 2]$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = \int_{-2}^{2} \frac{\pi}{8} \sin\frac{\pi}{8}(t+2)dt = \frac{\pi}{8}\int_{-2}^{2} \sin\frac{\pi}{8}(t+2)dt \approx 222$$

$$\approx \frac{\pi}{8}[2\sin\frac{\pi}{8}(-\frac{2\sqrt{3}}{3}+2) + 2\sin\frac{\pi}{8}(\frac{2\sqrt{3}}{3}+2))]$$

$$\approx 0.99848$$

10. 写出经典 4 阶 Runge-Kutta 方法求解初值问题纸张记忆复印

$$\begin{cases} y' = 8 - 3y \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

的计算公式，并取步长 $h=0.2$，计算 $y(0.4)$ 的近似值.（小数点后至少保留 4 位）

解： $f(x,y)=8-3y,\quad h=0.2$

$$y_{n+1}=y_n+\frac{h}{6}(K_1+2K_2+2K_3+K_4)$$

$$\begin{cases}K_1=f(x_n,y_n)=8-3y_n\\ K_2=f(x_{n+\frac{1}{2}},y_n+\frac{h}{2}K_1)=5.6-2.1y_n\\ K_3=f(x_{n+\frac{1}{2}},y_n+\frac{h}{2}K_2)=6.32-2.37y_n\\ K_4=f(x_{n+1},y_n+K_3h)=4.108-1.578y_n\end{cases}$$

$$y_{n+1}=1.2016+0.5561y_n$$

$$y(0.2)\approx y_1=2.3138$$

$$y(0.4)\approx y_2=2.4883$$

11 利用 4 阶 Runge—Kutta 方法计算

$$\begin{cases}y'(x)=-20y(x),0\le x\le 1\\ y(0)=1\end{cases}$$

当步长 h 分别取 $0.1,0.2$ 时，计算稳定吗？

解：利用 4 阶 Runge—Kutta 方法

$$y_{n+1}=y_n+\frac{h}{6}(K_1+2K_2+2k_3+k_4)$$

$$K_1=f(x_n,y_n),\ K_2=f(x_n+\frac{h}{2},y_n+\frac{h}{2}K_1)$$

$$K_3=f(x_n+\frac{h}{2},y_n+\frac{h}{2}K_2),\ K_4=f(x_n+h,y_n+hK_3)$$

得

$$y_{n+1}=(1-20h+\frac{1}{2}(-20h)^2+\frac{1}{6}(-20h)^3+\frac{1}{24}(-20h)^4)y_n$$

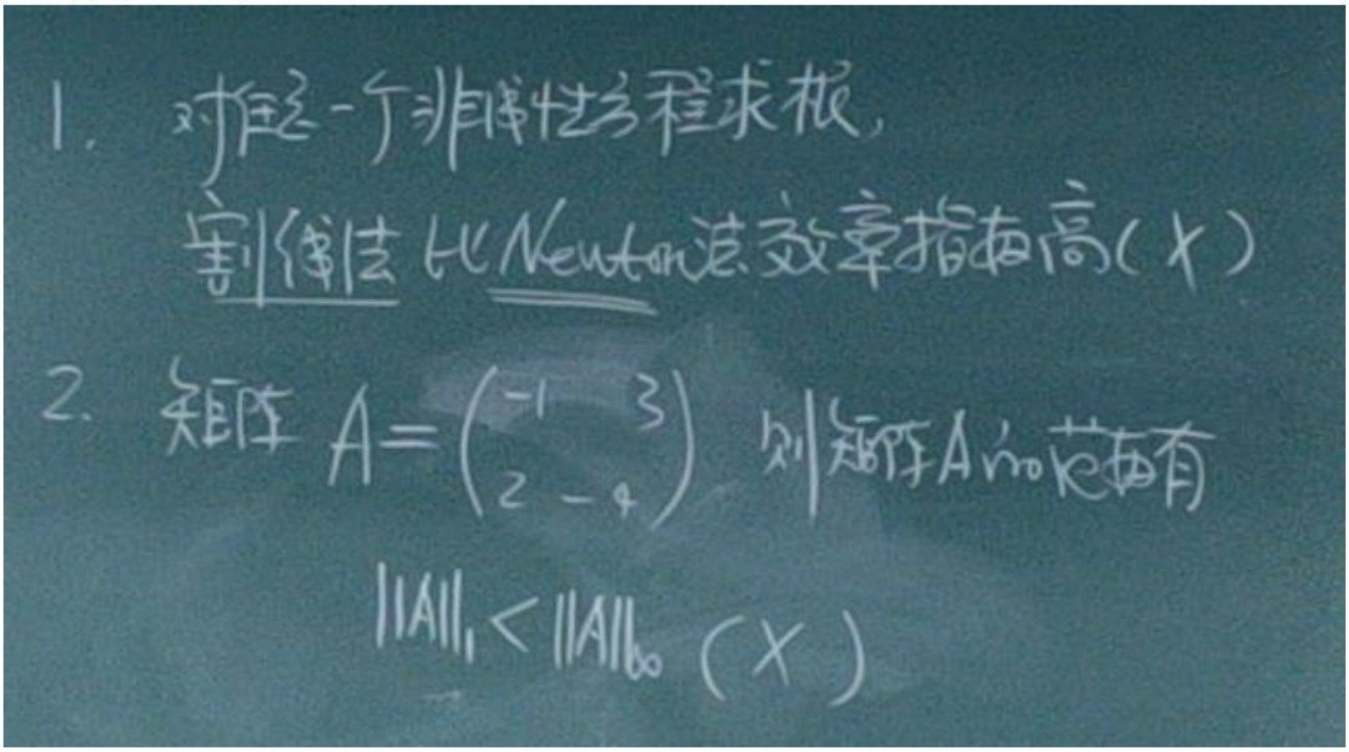
当 $h=0.1$ 时，$y_{n+1}=\frac{1}{3}y_n$，数值计算稳定.

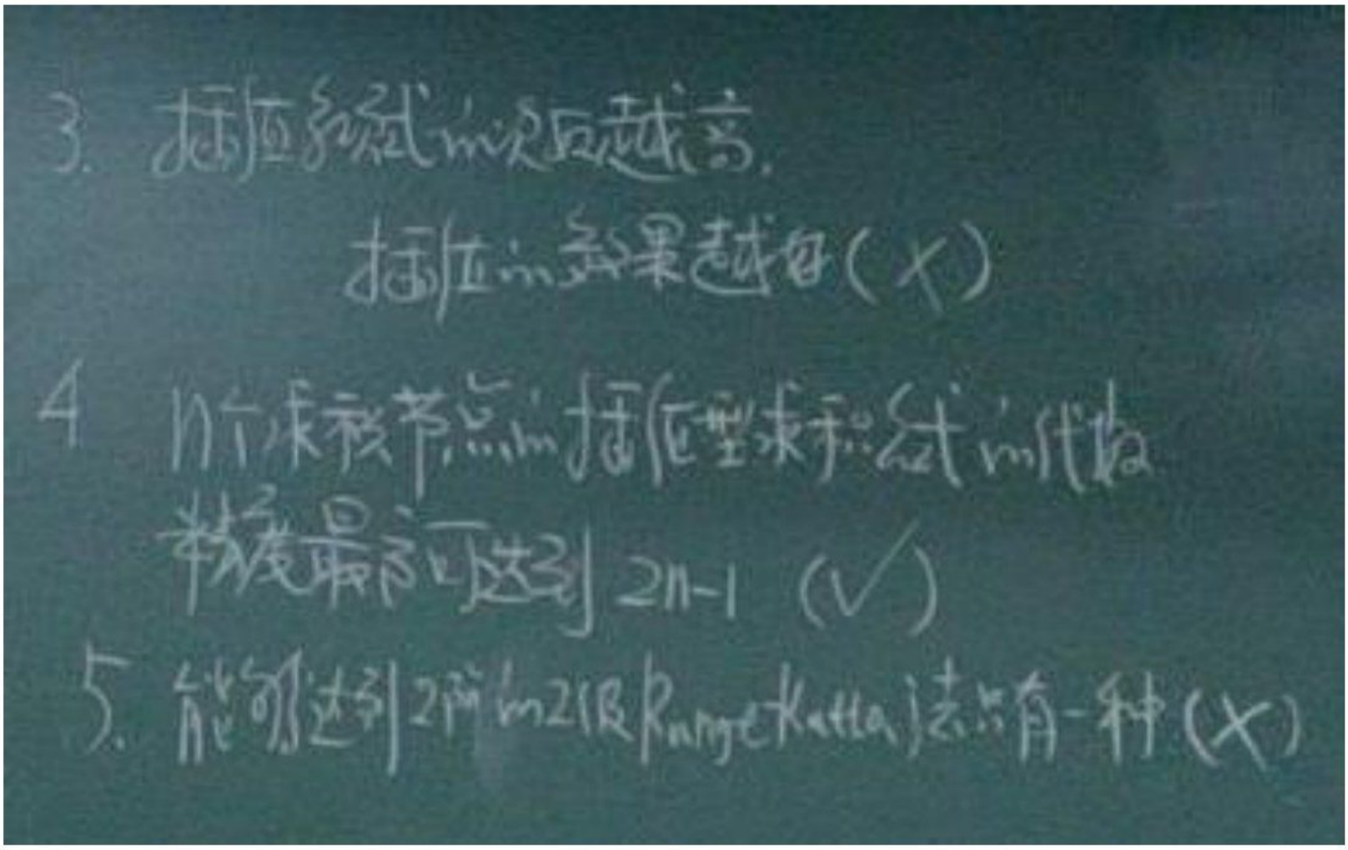
当 $h=0.2$ 时，$y_{n+1}=5y_n$，数值计算不稳定.

哈工大 2020 数值分析试题

本套题为老师上课讲的，电子版不能发送给学生，这里记录一下老师的板书

一、判断题（20 分）





二、填空题（20 分）

1.解 $f(x)=x-\sin x=0$ 的 0 这个解的二阶牛顿迭代法格式是（ ）

2.$\|x\|$是 R^n 上任一种向量范数，则可推导出矩阵 A 的从属范数是（ ）

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

$$x_{k+1}=x_k-3\frac{x_k-\sin x_k}{1-\cos x_k}$$

$$\|A\|_t=\max_{x\neq 0}\frac{\|Ax\|_t}{\|x\|_t}=\sup_{x\neq 0}\frac{\|Ax\|_t}{\|x\|_t}$$

3 设 $p_1(x)=x$，$p_2(x)=cx^2-\frac{1}{2}$

当 $c=$ ______ 时，$p_1(x)$ 与 $p_2(x)$

在区间 $[1,2]$ 上关于权函数 $\rho(x)=1$ 正交

$$0=\int_1^2 p_1(x)p_2(x)dx=\int_1^2 x\left(cx^2-\frac{1}{2}\right)dx$$

4 求常微分方程 $\begin{cases} y'=f(x,y) & a<x<b \\ y(a)=1 \end{cases}$

数值解法的隐式Euler公式为：______

$$y_{n+1}=y_n+hf(x_{n+1},y_{n+1})$$

5

用乘幂法 求矩阵 $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$ 的最大特征值 ___2.6___ 对应的

特征向量 ______ 计算迭代两步结果（保留2位小数） 初值 $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$V_0=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\max V_0=-2.$ $u_2=\dfrac{V_2}{\max(V_2)}=$

$\max(V_0)=1$

$u_0=\dfrac{v_0}{\max(v_0)}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

答疑 6.7日

A207 1:30~4:30

$V_1=AV_0=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ \frac{5}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$

$\max(V_1)=\frac{5}{2}$ $U_1=\dfrac{V_1}{\max(V_1)}=\begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ 1 \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix}$

$V_2=AU_1=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ 1 \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ \frac{13}{5} \\ 1 \end{pmatrix}$

$\max(V_2)=\frac{13}{5}.$

三、设 $\varphi(x)=x+a(x^2-8)$

考虑迭代格式 $x_{k+1}=\varphi(x_k)\ (k=0,1,\cdots)$

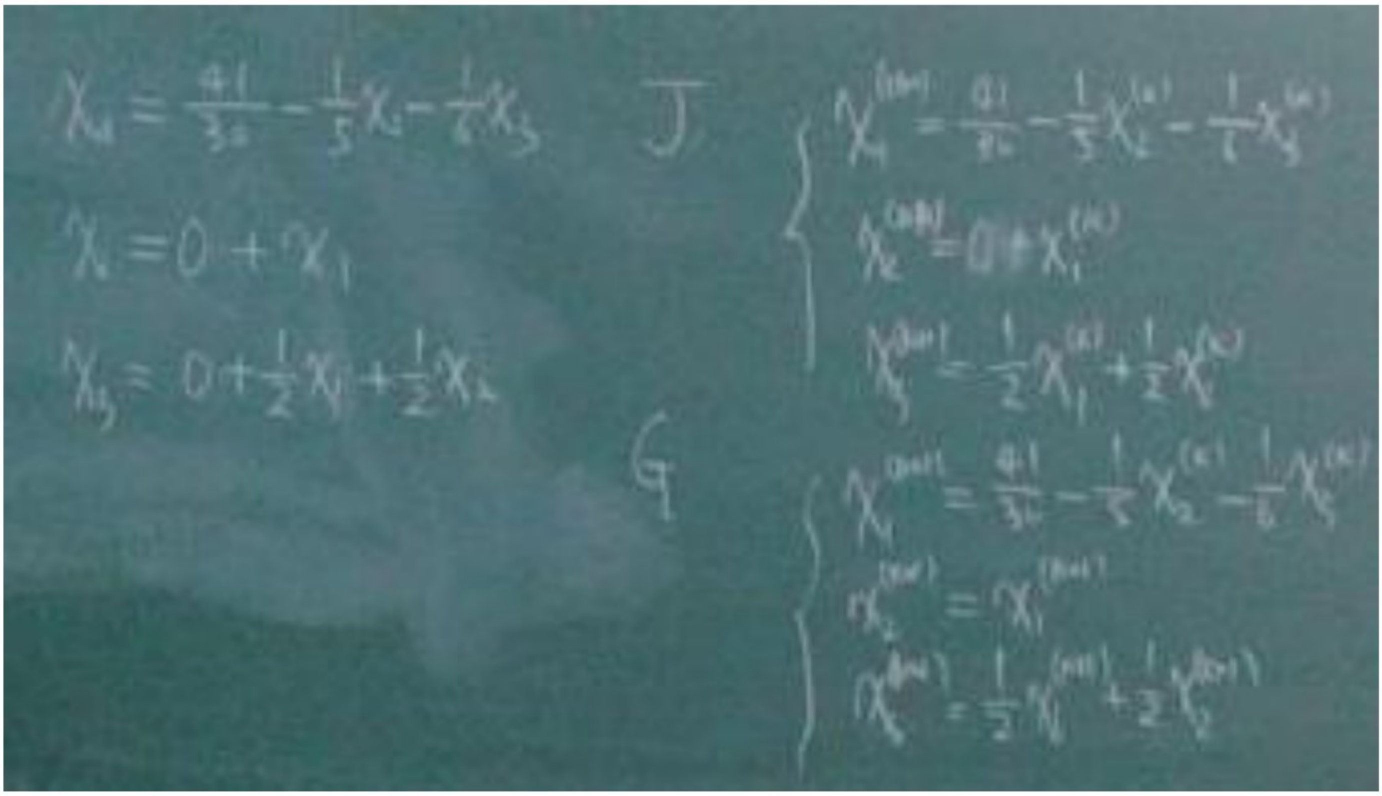
如何选取 a 才能具有局部收敛性？

a 取何值时，迭代收敛最快？

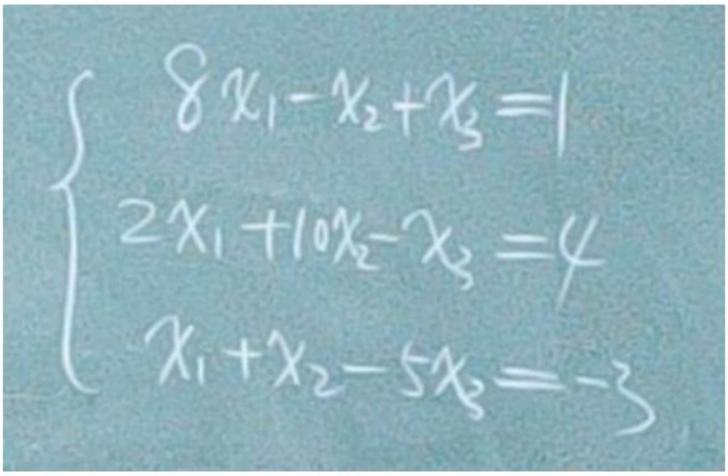
四、对于方程组

$$\begin{cases} x_1+\frac{1}{5}x_2+\frac{1}{6}x_3=\frac{41}{30} \\ -\frac{1}{2}x_1+\frac{1}{2}x_2=0 \\ -\frac{1}{6}x_1-\frac{1}{6}x_2+\frac{1}{3}x_3=0 \end{cases}$$

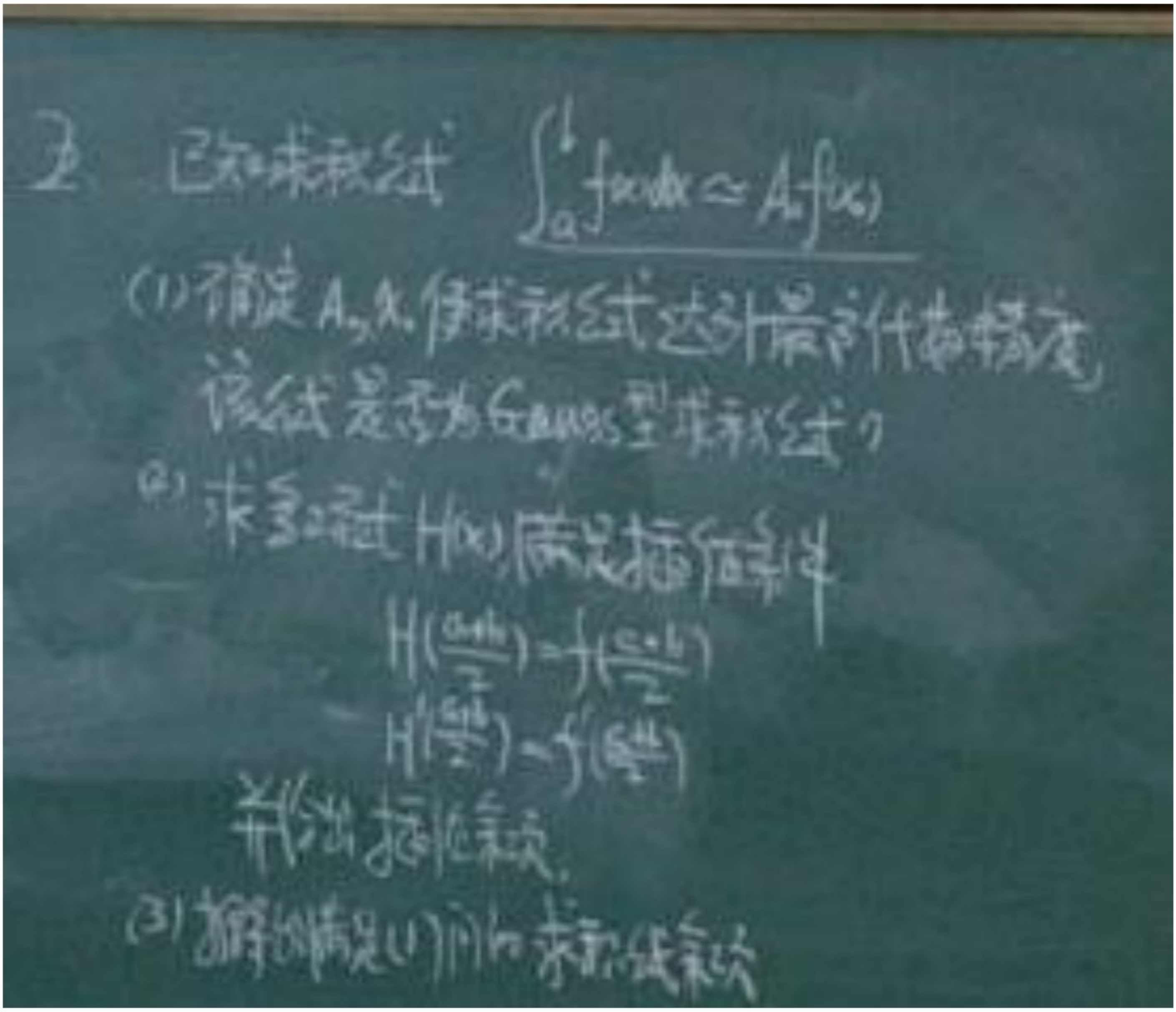
给出 Jacobi 迭代法和 Gass-Seidel 迭代法的迭代格式，并讨论收敛性。



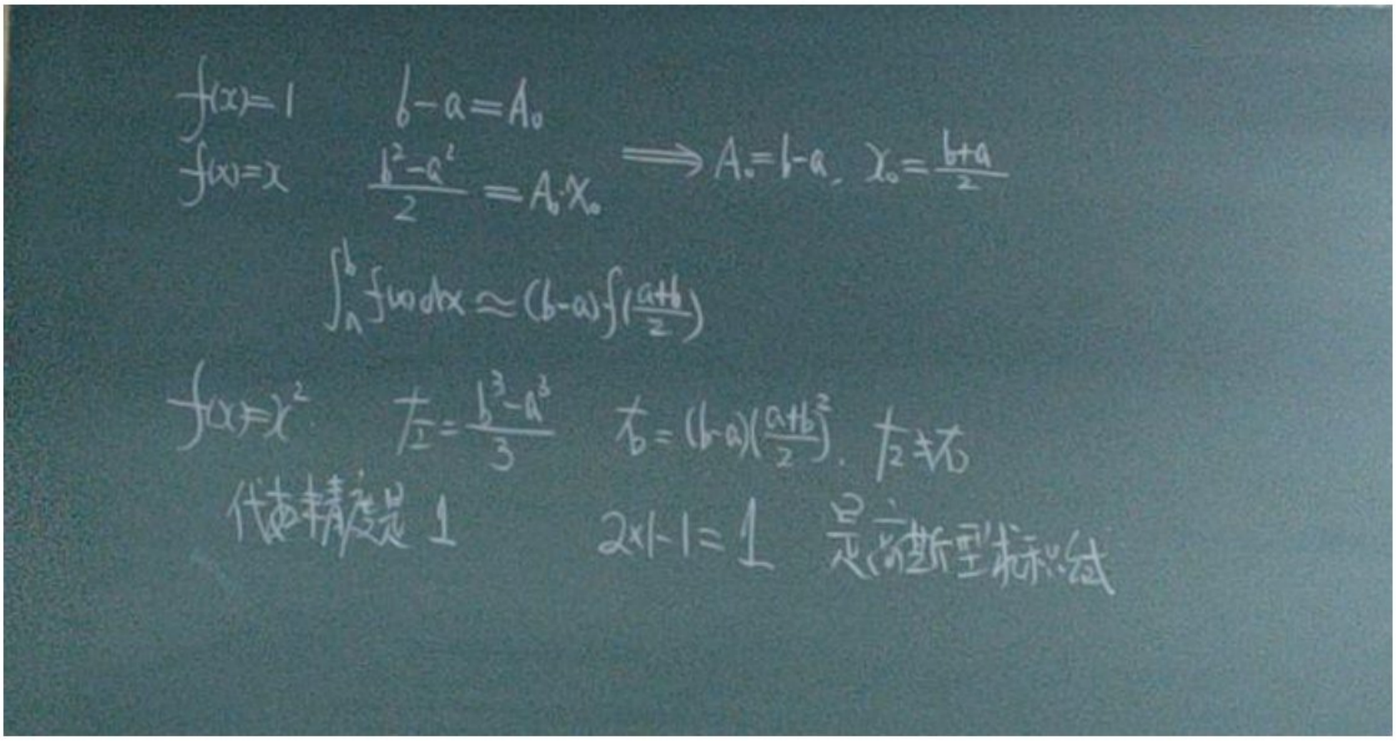
数值分析另一套题矩阵如下



系数矩阵对角占优


2. 已知求积公式 $\int_a^b f(x)dx \simeq A_0 f(x_0)$
(1) 确定 A_0, x_0 使求积公式达到最高代数精度，
该公式是否为Gauss型求积公式?
(2) 求多项式 $H(x)$ 满足插值条件
$H(\frac{a+b}{2}) = f(\frac{a+b}{2})$
$H'(\frac{a+b}{2}) = f'(\frac{a+b}{2})$
并给出插值余项.
(3) 推导满足(1)问的求积公式余项

中矩形公式


$f(x)=1$ $b-a=A_0$
$f(x)=x$ $\frac{b^2-a^2}{2}=A_0 \cdot x_0$ $\Longrightarrow A_0=b-a,\ x_0=\frac{b+a}{2}$
$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)f(\frac{a+b}{2})$
$f(x)=x^2$ 左$=\frac{b^3-a^3}{3}$ 右$=(b-a)(\frac{a+b}{2})^2$, 左$\neq$右
代数精度是 1 $2\times1-1=1$ 是高斯型求积公式

$$H(x)=k_1\left(x-\frac{a+b}{2}\right)+k_2$$

$$H\left(\frac{a+b}{2}\right)=f\left(\frac{a+b}{2}\right)\Longrightarrow k_2=f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

$$H(x)=k_1\left(x-\frac{a+b}{2}\right)+f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

$$H'(x)=k_1\Rightarrow k_1=f'\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

$$H(x)=f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)+f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

$$f(x)-H_1(x)=\frac{f''(\xi)}{2!}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2$$

$$\int_a^b f(x)dx-\int_a^b H(x)dx=\int_a^b\frac{f''(\xi)}{2!}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2dx$$

$$=\frac{f''(\eta)}{2!}\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2dx$$

$$\overset{1}{\int_a^b f(x)dx\approx(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)}\qquad=\frac{(b-a)^3}{24}f''(\eta)$$

$$\int_a^b H_1(x)dx=(b-a)H_1\left(\frac{a+b}{2}\right)=(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

六. 设函数为 $y=a\underbrace{\sin x}_{\varphi_0(x)}+b\underbrace{\sin 2x}_{\varphi_1(x)}$

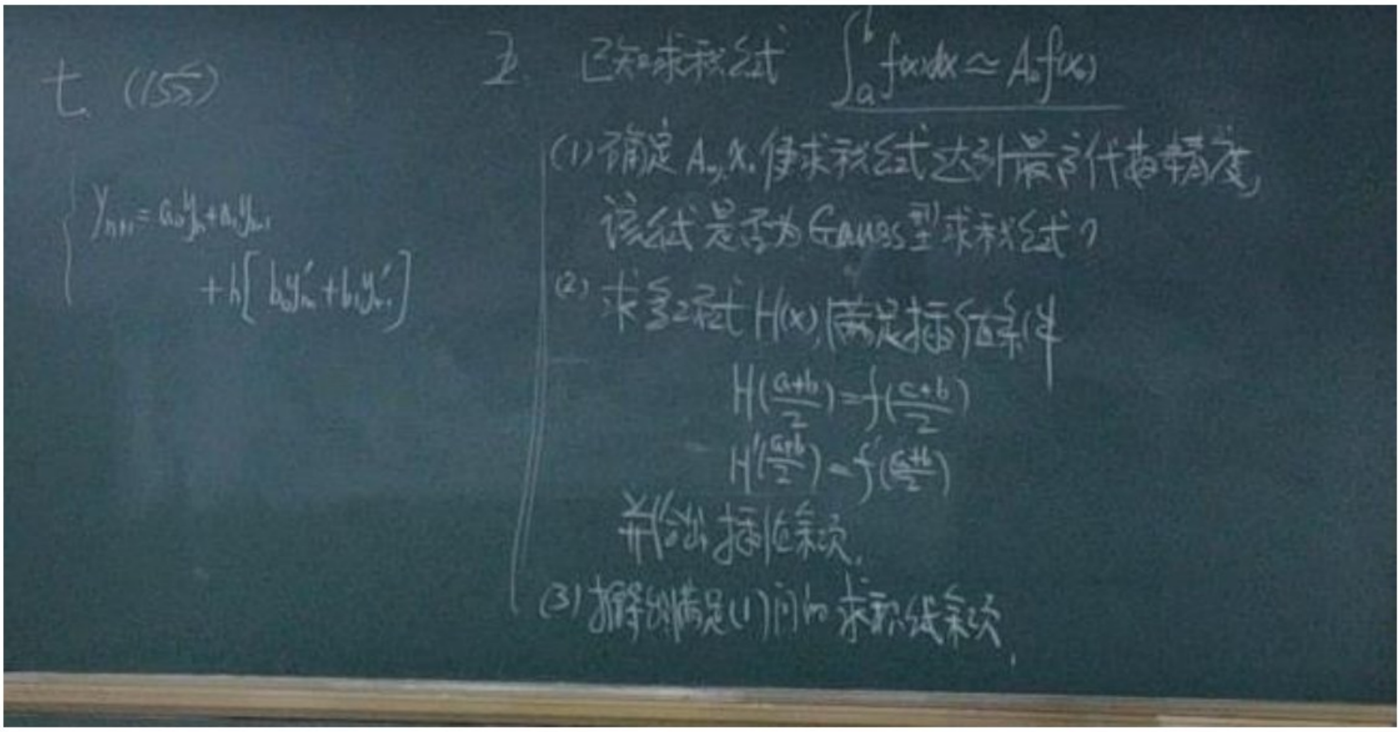
试按最小二乘法确定参数 a, b

已知数据如下

x	0.5	1	1.5	2
y	2.1600	2.6500	1.2800	-0.6100

(结果保留4位小数)

$$\begin{pmatrix}(\varphi_0,\varphi_0) & (\varphi_0,\varphi_1)\\(\varphi_1,\varphi_0) & (\varphi_1,\varphi_1)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\ \end{pmatrix}$$



七、(1)两步法确定 ai,bi （2）绝对稳定性区间

第七题的线性二步法没有绝对稳定区间，7 个大题一共 60 分，线性二步法作为最后一题 15 分

考 试 科 目：数值分析B　　　　2020B

学生所在院（系）：　　　　　　　　学生所在学科：

学生姓名：　　　　　　　　　　　　学生学号：

*****考生注意：答案务必写在答题卡上，答在本题签上无效*****

注意行为规范

遵守考场纪律

主管领导审核签字

一、判断题（每题 3 分，共 15 分，对的打 O，错的打×）

1. 二分法可以近似求解任何非线性方程的根。（　　）
2. 对同一线性方程组，若 Gauss-Seidel 迭代法收敛，则 Jacobi 迭代法也收敛。（　　）
3. 对同一充分光滑函数取相同节点插值，Newton 法与 Lagrange 法结果相同，且余项相等 。（　　）
4. Newton-Cotes 求积公式数值计算是稳定的。（　　）
5. 二级 Rung-Kutta 法的收敛阶最高为二阶。（　　）

二、填空题（每题 4 分，共 20 分）

1. 求方程 $f(x)=x-\sin x=0$ 根的 Newton 迭代公式为__________________。

2. 设 $x_0,x_1,\cdots,x_n$ 为 $n+1$ 个互异插值节点，$l_0(x),l_1(x),\cdots l_n(x)$ 为 Lagrange 插值基函数，则 $\sum_{j=0}^{n} x_j^k l_j(x)=$__________________，$k=1,2,\cdots,n$。

3. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ a & 1\end{pmatrix}$，当 a 满足______________时，$\|A\|_\infty=3$。

4. 若求积公式 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i)$ 为插值型求积公式，则 $\sum_{i=1}^{n} A_i=$______________。

5. 用乘幂法求矩阵 $\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 6 & 1 & -6\\ 6 & -1 & -4\end{pmatrix}$ 的最大特征值为________________，对应的特征向量为__________________。（要求迭代 2 步的结果，保留 4 位小数）

三、（15 分）试建立求 $\frac{1}{97}$ 的 Newton 迭代公式，要求在迭代函数中不用除法运算，并证明当初值 x_0 满足 $0<x_0<\frac{2}{97}$ 时，此算法是收敛的。

四、（10 分）设有方程组 $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \end{cases}$，试讨论解此方程组的 Jacobi 迭代法及 Gauss-Seidel 迭代法的收敛性。

五、（10 分）求一个次数不超过 3 的多项式 $H_3(x)$，满足插值条件

x_i	1	2	3
$f(x_i)$	2	4	12
$f'(x_i)$		3	

并估计误差。

六、（15 分）给定数值积分公式如下：

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \frac{1}{9}\left[5f\left(\sqrt{0.6}\right)+Af(a)+5f\left(-\sqrt{0.6}\right)\right]$$

（1）求积分系数 A 和积分节点 a；

（2）确定上述积分公式代数精度；

（3）利用上述积分公式计算积分 $\int_0^1 \frac{\sin x}{1+x}dx$。

七、（15 分）求解常微分方程初值问题 $\begin{cases} y' = f(x,y), & a \le x \le b \\ y(a) = \eta \end{cases}$ 的两步方法：

$$y_{n+1} = \frac{2}{3}y_n + \frac{1}{3}y_{n-1} + \frac{h}{3}(5y'_n - y'_{n-1})$$

（1）求出局部截断误差；（2）讨论方法的收敛性；（3）讨论方法的绝对稳定性；（4）取试验方程 $y' = \lambda y$ 中 $\lambda = -20$，问步长 h 应取多大？

（在局部截断误差中 $C_r = \frac{1}{r!}\left\{1-[\sum_{i=0}^{p}(-i)^r a_i + r\sum_{i=-1}^{p}(-i)^{r-1}b_i]\right\}, r = 2,3,\cdots$；

参考定理： 设 x_1 和 x_2 是实系数二次方程 $x^2+bx+c=0$ 的根，则 $|x_1|<1, |x_2|<1$ 的充要条件是 $|b|<1+c, |c|<1$。）

2020 推免生 B.

一. × × √ × √

二. 1. $x_{k+1} = x_k - \frac{x_k - \sin x_k}{1-\cos x_k}$ 2. x^k 3. $-2 \le a \le 2$

4. $b-a-\int_a^b l_0(x)dx$ 5. 取初值 (1,1,0) 时为 $-\frac{27}{7}$, $(\frac{2}{27}, \frac{23}{27}, 1)$

三. $f(x) = \frac{1}{x} - 97$ $\therefore x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k(2-97x_k)$

$\because 1-97x_{k+1} = 1-97x_k(2-97x_k) = (1-97x_k)^2$

迭代得: $(1-97x_k) = (1-97x_0)^{2^k}$

当 $0 < x_0 < \frac{2}{97}$ 时, $0 < 97x_0 < 2$, $|1-97x_0| < 1$

$\therefore \lim_{k\to\infty}(1-97x_0)^{2^k} = 0$ $\therefore$ $\lim_{k\to\infty} x_k = \frac{1}{97}$, 算法收敛.

四. $B_J = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & -1/2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}$ $|\lambda I - B_J| = \lambda(\lambda^2 + \frac{5}{4}) = 0$

$\lambda_1 = 0$, $\lambda_{2,3} = \pm\frac{\sqrt{5}}{2}i$ $\rho > 1$ $\therefore$ 不收敛.

$B_G = -(L+D)^{-1}U = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{bmatrix}$ $|\lambda I - B_G| = \lambda(\lambda+\frac{1}{2})^2 = 0$ $\therefore$ 收敛.

五. $H_3(x) = 2+2(x-1)+3(x-1)(x-2)+2(x-1)(x-2)(x-3) = 2x^3-9x^2+15x-6$

$E_3(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-1)(x-2)^2(x-3)$

六. (1) $A=8$, $a=0$ (2) 5次.

七. (1) $a_0 = \frac{2}{3}$, $a_1 = \frac{1}{3}$, $b_{-1} = 0$, $b_0 = \frac{5}{3}$, $b_1 = -\frac{1}{3}$

$C_0 = C_1 = C_2 = 0$ $C_3 = \frac{1}{3!}[1+\frac{1}{3}-3(0-\frac{1}{3})] = \frac{7}{18}$

$T_n = \frac{7}{18}h^3 y^{(3)}(x_n) + \cdots$

(2) $C_0 = C_1 = C_2 = 0$ 相容

$\rho(r) = r^2 - \frac{2}{3}r - \frac{1}{3} = (r-1)(r+\frac{1}{3}) = 0$ $\therefore r = 1, -\frac{1}{3}$ 满足根条件, 收敛

(3) $\pi(r,\bar{h}) = r^2 - (\frac{2}{3}+\frac{5}{3}\bar{h})r - (\frac{1}{3}-\frac{\bar{h}}{3})$

$$\begin{cases} |-(\frac{2}{3}+\frac{5}{3}\bar{h})| < 1-\frac{1}{3}+\frac{\bar{h}}{3} \\ |-(\frac{1}{3}-\frac{\bar{h}}{3})| < 1 \end{cases} \qquad \bar{h} \in (-\frac{2}{3}, 0)$$

$-\frac{2}{3} < -20h < 0$ $\therefore 0 < h < \frac{1}{30}$

☆填空4: 代入 $f(x)=1$ 得: $b-a = ☆ + A_0$; 而 $A_i(x) = \int_a^b l_i(x)dx$.

$\therefore A_0 = \int_a^b l_0(x)dx$ $\therefore ☆ = b-a-\int_a^b l_0(x)dx$

2020 数值分析 A.

一.判断题.

1. 迭代法解方程的收敛阶中,牛顿法高于其他迭代方法 (×)
2. 矩阵$A=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 2 & -4\end{pmatrix}$,则矩阵A的范数有$\|A\|_1>\|A\|_\infty$ (✓)
3. $l_i(x)$是关于节点x_i $(i=0,1,\cdots n)$的拉格朗日插值基函数,则对任何次数不大于n的多项式$P(x)$有$\sum_{i=0}^{n} l_i(x)P(x_i)=P(x)$ (✓) ⇒ 余项为0
4. 阶数不同的高斯型求积公式,没有公共节点 (×)
5. 当一阶常微分方程右端函数$f(x,y)$连续时,方程存在唯一解 (×)

二.填空题.

1. 设$0<\alpha<1$,考虑方程$f(x)=x+x^{1+\alpha}=0$,则求解该方程在0处的Newton迭代法的收敛阶为 $\alpha+1$,渐近误差常数为 α
2. 设$x_0,x_1,\cdots x_n$为$n+1$个互异插值节点,$l_0(x)$、$l_1(x)$ $\cdots$ $l_n(x)$为Lagrange插值基函数,设$0\le k\le n$的正整数,则$\sum_{j=0}^{n} l_j(0)x_j^k=\begin{cases}1, & k=0\\ 0, & k=1,2,\cdots n\end{cases}$

[解]:P176,第三章书后题第8题第(4)问.

3. 设$g_2(x)=x^2+ax+b$,对任意常数C_0,C_1,在区间$[0,1]$上均与$g_1(x)=C_0+C_1x$正交,则$a+6b=$ 0 ‖ $a=-1,b=1/6$
4. 求常微分方程$\begin{cases}y'=f(x,y), & a<x<b\\ y(a)=\eta\end{cases}$的隐式Euler格式是 $y_{n+1}=x_n+hf(x_{n+1},y_{n+1})$
5. $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ a & 1\end{pmatrix}$,当a: $\in(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$时,$Ax=b$的Jacobi迭代和Gauss-Seidel同时收敛. ⇒书P103,第二章书后题第12题.

三.对于迭代函数$\varphi(x)=x+C(x^2-2)$,根据局部收敛定理,试讨论:

(1) C为何值时,$x_{k+1}=\varphi(x_k)$收敛于$\sqrt{2}$? $|1+2C\cdot\sqrt{2}|<1$ ⇒ $-\frac{1}{\sqrt{2}}<C<0$

(2) C取何值时收敛阶至少为2阶? $1+2\sqrt{2}C=0$ ⇒ $C=-\frac{1}{2\sqrt{2}}$

四.(1)用Doolittle解

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 6\\ 2 & 5 & 15\\ 6 & 15 & 46\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{bmatrix}$$

(解): $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ 6 & 3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 6\\ 0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ $y=\begin{pmatrix}-1\\ 3\\ -3\end{pmatrix}$ $x=\begin{pmatrix}-7\\ 12\\ -3\end{pmatrix}$

(2) $\begin{cases}8x_1-x_2+x_3=1\\ 2x_1+10x_2-x_3=4\\ x_1+x_2-5x_3=-3\end{cases}$ 写出Jacobi迭代法和G-S迭代格式并判断收敛性?

⇒严格对角占优.

五、（8 分）确定 $\int_0^h f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{h}{2}[f(0)+f(h)]+\alpha h^2[f'(0)-f'(h)]$ 中的待定参数，使其代数精确度尽量高，并指明求积公式所具有代数精度.

分析 求解这类题目，一般都应按照求积公式代数精度的定义去作.即先列出参数满足的代数方程组，解出这些待定参数，然后用所确定的求积公式判断所具有的代数精度.

解

求积公式中只含有一个待定参数 α，当 $f(x)=1$，x 时，有

$$\int_0^h 1\mathrm{d}x = \frac{h}{2}[1+1]+0$$

$$\int_0^h x\mathrm{d}x = \frac{h}{2}[0+h]+\alpha h^2(1-1)$$

故令 $f(x)=x^2$ 时求积公式精确成立，即

$$\int_0^h x^2 dx = \frac{h}{2}[0+h^2]+\alpha h^2[2\times 0-2h]$$

解得 $\alpha = \frac{1}{12}$.

将 $f(x)=x^3$ 代入上述确定的求积公式，有

$$\int_0^h x^3 dx = \frac{h}{2}[0+h^3]+\frac{h^2}{12}[0-3h^2]$$

这说明求积公式至少具有 3 次代数精确度.再令 $f(x)=x^4$，代入求积公式时有

$$\int_0^h x^4 dx \neq \frac{h}{2}[0+h^4]+\frac{h^2}{12}[0-4h^3]$$

故所建立求积公式具有 3 次代数精度.

六、 (8 分). 求形如 $y=a\mathrm{e}^{bx}$（a，b 为常数且 $a>0$）的经验公式，使它能和下

表数据相似合：

x_i	1.00	1.25	1.50	1.75	2.00
y_i	5.10	5.79	6.53	7.45	8.46

分析 经验公式 $y=ae^{bx}$ 不是多项式，应设法将其变为多项式，本题可通过取对数的办法将 $y=ae^{bx}$ 变为 $\ln y=\ln a+bx$，若令 $\bar{y}=\ln y,\quad A=\ln a$，则有 $\bar{y}=A+bx$，通过直线拟合的最小二乘法求出 $\bar{y}=A+bx$ 后，再变回 $y=ae^{bx}$ 即可.

解 对经验公式 $y=ae^{bx}$ 两边取对数，得

$$\ln y=\ln a+bx$$

作变换 $\bar{y}=\ln y,\quad A=\ln a$，则有 $\bar{y}=A+bx$，为了用最小二乘法求出 A、b，需将（x_i, y_i）转化为 $(x_i,\bar{y}_i)$，现将转化数值表列出：

x_i	1.00	1.25	1.50	1.75	2.00
$\bar{y}_i$	1.629	1.756	1.876	2.008	2.135

$N=5,\quad \sum_{i=1}^{5}x_i=7.5,\quad \sum_{i=1}^{5}x_i^2=11.875,\quad \sum_{i=1}^{5}\bar{y}_i=9.404,\quad \sum_{i=1}^{5}x_i\bar{y}_i=14.422$

故有正则方程组

$$\begin{cases}5A \quad +7.5b=9.404\\ 7.5A+11.875b=14.422\end{cases}$$

解得 $A=1.122\,4$，$b=0.505\,6$，$a=e^A=3.072$，于是得最小二乘拟合曲线

$$y=3.072e^{0.505\,6x}$$

七、（15 分）给定多步法 $y_{n+1}=\frac{4}{5}y_n+\frac{1}{5}y_{n-1}+h\left(\frac{2}{5}y'_{n+1}+\frac{4}{5}y'_n\right)$

（1）求局部阶段误差。

（2）讨论该方法的收敛性。

（3）给出该方法的绝对稳定区间。

t. (1) $T_n = -\frac{1}{30}h^4 y^{(4)}(x_n) + \cdots\cdots$ (2) $\rho(r) =$ 收敛

(3) $\pi(r,\bar{h}) = (1-\frac{2}{5}\bar{h})r^2 - \frac{4}{5}(1+\bar{h})r - \frac{1}{5} = 0$ $\bar{h} \in (-4, 0)$

2019年秋季学期研究生课程考试试题B

考 试 科 目：数值分析B

学生所在院（系）：　　　　　　　　　　学生所在学科：

学生姓名：　　　　　　　　　　　　　　学生学号：

考生注意：答案务必写在答题卡上，答在本题签上无效

注意行为规范

遵守考场纪律

主管领导审核签字

一、判断题（每题3分，共15分，对的打O，错的打×）

1. 二分法可以近似求解任何非线性方程的根。（　　）
2. 对同一线性方程组，若Gauss-Seidel迭代法收敛，则Jacobi迭代法也收敛。（　　）
3. 对同一充分光滑函数取相同节点插值，Newton法与Lagrange法结果相同，且余项相等。（　　）
4. Newton-Cotes求积公式数值计算是稳定的。（　　）
5. 二级Rung-Kutta法的收敛阶最高为二阶。（　　）

二、填空题（每题4分，共20分）

1. 求方程 $f(x)=x-\sin x=0$ 根的Newton迭代公式为____________。
2. 设 $x_0,x_1,\cdots,x_n$ 为 $n+1$ 个互异插值节点，$l_0(x),l_1(x),\cdots l_n(x)$ 为Lagrange插值基函数，则 $\sum_{j=0}^{n}x_j^k l_j(x)=$____________，$k=1,2,\cdots,n$。
3. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&2\\a&1\end{pmatrix}$，当 a 满足____________时，$\|A\|_\infty=3$。
4. 若求积公式 $\int_a^b f(x)\,dx\approx\sum_{i=0}^{n}A_i f(x_i)$ 为插值型求积公式，则 $\sum_{i=1}^{n}A_i=$____________。
5. 用乘幂法求矩阵 $\begin{pmatrix}1&-1&1\\6&1&-6\\6&-1&-4\end{pmatrix}$ 的最大特征值为____________，对应的特征向量为____________。（要求迭代2步的结果，保留4位小数）

三、（15分）试建立求 $\frac{1}{97}$ 的Newton迭代公式，要求在迭代函数中不用除法运算，并证明当初值 x_0 满足 $0<x_0<\frac{2}{97}$ 时，此算法是收敛的。

四、(10 分)设有方程组 $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \end{cases}$，试讨论解此方程组的 Jacobi 迭代法及 Gauss-Seidel 迭代法的收敛性。

五、(10分)求一个次数不超过 3 的多项式 $H_3(x)$，满足插值条件

x_i	1	2	3
$f(x_i)$	2	4	12
$f'(x_i)$		3	

并估计误差。

六、(15 分)给定数值积分公式如下：

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \frac{1}{9}\left[5f\left(\sqrt{0.6}\right) + Af(a) + 5f\left(-\sqrt{0.6}\right)\right]$$

(1) 求积分系数 A 和积分节点 a；

(2) 确定上述积分公式代数精度；

(3) 利用上述积分公式计算积分 $\int_0^1 \frac{\sin x}{1+x}dx$。

七、(15 分)求解常微分方程初值问题 $\begin{cases} y' = f(x,y), & a \le x \le b \\ y(a) = \eta \end{cases}$ 的两步方法：

$$y_{n+1} = \frac{2}{3}y_n + \frac{1}{3}y_{n-1} + \frac{h}{3}(5y'_n - y'_{n-1})$$

(1) 求出局部截断误差；(2) 讨论方法的收敛性；(3) 讨论方法的绝对稳定性；(4) 当试验方程 $y' = \lambda y$ 中 $\lambda = -20$，问步长 h 应取多大？

(在局部截断误差中 $C_r = \frac{1}{r!}\left\{1 - [\sum_{i=0}^{p}(-i)^r a_i + r\sum_{i=-1}^{p}(-i)^{r-1}b_i]\right\}, r = 2,3,\cdots$；

参考定理： 设 x_1 和 x_2 是实系数二次方程 $x^2 + bx + c = 0$ 的根，则 $|x_1| < 1, |x_2| < 1$ 的充要条件是 $|b| < 1 + c, |c| < 1$。)

一、判断题

1. 二分法可以近似求解任何非线性方程的根 (×)

2. 对同一线性方程组，若 Gauss-Seidel 迭代法收敛，则 Jacobi 迭代法收敛 (×) 对对角占优方程组 √.

3. 对同一光滑函数取相同节点插值，Newton 法与 Lagrange 法结果相同且余项相等 (√) √

4. Newton-Cotes 求积公式数值计算是稳定的 (×) 高斯求积公式

5. 二级 Runge-Kutta 法的收敛阶最高为二阶 (√)

二、填空题 $x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}=x_k-\frac{x_k-\sin x_k}{1-\cos x_k}$

(1) 求方程 $f(x)=x-\sin x=0$ 的根的 Newton 迭代公式为 $x_{k+1}=x_k-\frac{x_k-\sin x_k}{1-\cos x_k}$

(2) 设 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 为 $n+1$ 个互异插值节点 $x^k-\sum_{j=0}^{n}x_j^k l_j(x)=\frac{(x^k)^{(n+1)}}{(n+1)!}P_{n+1}(x)=0$

$l_0(x), l_1(x), \cdots, l_n(x)$ 为拉格朗日插值基函数，k最大n. $=0$

则 $\sum_{j=0}^{n}x_j^k l_j(x)=$ $\underline{\quad x^k \quad}$ $k=1,2,\cdots,n$

(3) 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ a & 1\end{pmatrix}$ 3 当 a 满足 $\underline{\quad\uparrow\quad}$ 时，$\|A\|_\infty=3$

$|a|+1\le 3$ $|a|\le 2$ $-2\le a\le 2$

(4) 若求积公式 $\int_a^b f(x)dx\approx\sum_{i=0}^{n}A_i f(x_i)$ 为插值型求积公式 √ 节点个数 -1 至少是 n

则 $\sum_{i=0}^{n}A_i=$ $\underline{\quad b-a \quad}$ $f(x)=1$ $b-a=\sum_{i=0}^{n}A_i$

(5) 用乘幂法求矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 6 & +1 & -6\\ 6 & -1 & -4\end{pmatrix}$ 的最大特征值为 $\underline{\quad / \quad}$

对应的特征向量为 $\underline{\quad | \quad}$

(要求迭代2步的结果) v^0 $v^0=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ $u_0=Av^0$

No.

Date

$$v^0=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$u_0=\frac{v_0}{\max(v^0)}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$ 绝对值最大的分量

$$v_1=Au_0=\begin{pmatrix}1&-1&1\\6&1&-6\\6&-1&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$u_1=\frac{v_1}{\max(v_1)}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$v_2=Au_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

三、设 $\varphi(x)=x+a(x^3-8)$ 考虑迭代格式 $x_{k+1}=\varphi(x_k)$ $k=0,1,2,\cdots$ 如何选取 a 才能具有局部收敛性，a 取何值时，迭代收敛最快?

四. 对方程组
$$\begin{cases}x_1+\frac{x_2}{5}+\frac{x_3}{6}=\frac{41}{30}\\-\frac{1}{2}x_1+\frac{1}{2}x_2=0\\-\frac{1}{6}x_1-\frac{1}{6}x_2+\frac{x_3}{3}=0\end{cases}$$

给出雅可比迭代法和高斯-塞德尔迭代法的迭代公式并讨论收敛性

$$\begin{cases}x_1=\frac{41}{30}-\frac{x_2}{5}-\frac{x_3}{6}\\x_2=x_1\\x_3=\frac{1}{2}x_1+\frac{1}{2}x_2\end{cases}$$

雅可比迭代法
$$\begin{cases}x_1^{(k+1)}=\frac{41}{30}-\frac{1}{5}x_2^{(k)}-\frac{1}{6}x_3^{(k)}\\x_2^{(k+1)}=x_1^{(k)}\\x_3^{(k+1)}=\frac{1}{2}x_1^{(k)}+\frac{1}{2}x_2^{(k)}\end{cases}$$

高斯-塞德尔迭代法
$$\begin{cases}x_1^{(k+1)}=\frac{41}{30}-\frac{1}{5}x_2^{(k)}-\frac{1}{6}x_3^{(k)}\\x_2^{(k+1)}=x_1^{(k+1)}\\x_3^{(k+1)}=\frac{1}{2}x_1^{(k+1)}+\frac{1}{2}x_2^{(k+1)}\end{cases}$$

Campus

$B_J = E - D^{-1}A$

$B_g = -(L+D)^{-1}U$

求特征值. 有一个模 >1 → 发散

模 <1 → 收敛

五. 已知求积公式 $\int_a^b f(x)dx \approx A_0 f(x_0)$

(1) 确定 A_0, x_0 使得求积公式达到最高代数精度

该公式是否为 Gauss 型求积公式?

(2) 求多项式 $H(x)$ 满足插值条件. 并 $H(\frac{a+b}{2}) = f(\frac{a+b}{2})$

$H'(\frac{a+b}{2}) = f'(\frac{a+b}{2})$

并给出插值余项

(3) 推导满足 (1) 问的求积公式余项

(1) $f(x)=1$ $\quad f(x)=x$ $\quad \begin{cases} b-a = A_0 \\ \frac{b^2-a^2}{2} = A_0 x_0 \end{cases} \Rightarrow A_0 = \frac{b-a}{2} \quad x_0 = \frac{a+b}{2}$

$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(\frac{a+b}{2})$ 现在代数精度为1

$f(x)=x^2$ 左 $= \frac{b^3-a^3}{3}$ 右 $= (b-a)(\frac{a+b}{2})^2$

左 ≠ 右 最高代数精度 1.

$2\times1-1=1$ 是 Gauss 型求积公式

(2) $H(x)$: $H(\frac{a+b}{2}) = f(\frac{a+b}{2})$ ①

$H'(\frac{a+b}{2}) = f'(\frac{a+b}{2})$ ②

设 $H(x) = a_1(x-\frac{a+b}{2}) + a_0$

由① ⇒ $a_0 = f(\frac{a+b}{2})$ H' 由② ⇒ $a_1 = f'(\frac{a+b}{2})$

No.

Date

$H(x)=f(\frac{a+b}{2})+f'(\frac{a+b}{2})(x-\frac{a+b}{2})$ ③

余项公式 $f(x)-H(x)=[f(\frac{a+b}{2})+f'(\frac{a+b}{2})(x-\frac{a+b}{2})+\frac{f''(\xi)}{2!}(x-\frac{a+b}{2})^2]$

$-[f(\frac{a+b}{2})+f'(\frac{a+b}{2})(x-\frac{a+b}{2})]$

$=\frac{f''(\xi)}{2!}(x-\frac{a+b}{2})^2$

(3) $\int_a^b f(x)dx-\int_a^b H(x)dx=\int_a^b\frac{f''(\xi)}{2!}(x-\frac{a+b}{2})^2dx$

$=\frac{f''(\eta)}{2!}\int_a^b(x-\frac{a+b}{2})^2dx$

要证明: $\int_a^b H(x)dx=(b-a)f(\frac{a+b}{2})$

$\int_a^b \cancel{f(x)}\, H(x)dx$

$=(b-a)H(\frac{a+b}{2})$

$=(b-a)f(\frac{a+b}{2})$

②⇒ $\int_a^b H(x)dx$

$=\int_a^b f(\frac{a+b}{2})dx+\int_a^b f'(\frac{a+b}{2})(x-\frac{a+b}{2})dx$

$=(b-a)f(\frac{a+b}{2})+f'(\frac{a+b}{2})\underbrace{\int_a^b(x-\frac{a+b}{2})dx}_{=0}$

No.

Date

六、设函数 $y = a\underbrace{\sin x}_{\varphi_0(x)} + b\underbrace{\sin 2x}_{\varphi_1(x)}$ 试用按最小二乘法确定 a、b

已知数据如下：

x	0.5	1	1.5	2
y	2.1600	2.6500	1.2800	-0.6100

(结果保留4位小数.)

$$y_{n+1} = a_0 y_n + a_1 y_{n-1} + h[b_0 y_n' + b_1 y_{n-1}']$$

七、求解常微分方程初值问题 $\begin{cases} y' = f(x, y) & a \le x \le b \\ y(a) = \eta \end{cases}$

的两步法 $y_{n+1} = a_0 y_n + a_1 y_{n-1} + h[b_0 f(x_n, y_n) + b_1 f(x_{n-1}, y_{n-1})]$

(1) 求出 a_0, a_1, b_0, b_1 使得两步法精度尽可能的高？

(2) 讨论两步法的绝对稳定性 (无绝对稳定区间)

(在局部截断误差中 $C_r = \frac{1}{r!}\{1 - [\sum_{i=0}^{p}(-i)^r a_i + r\sum_{i=-1}^{p}(-i)^{r-1} b_i]\}$ $r = 2, 3, \ldots$

参考定理：设 x_1 和 x_2 是实系数二次方程 $x^2 + bx + c = 0$ 的解

则 $|x_1| < 1$, $|x_2| < 1 \Leftrightarrow |b| < 1 + c$ $|c| < 1$

∵两步法

∴ $p = 1$ 最高阶 (代数精度) $2p + 2 = 2 \times 1 + 2 = 4$

a_0 a_1

$b_{-1} = 0$ b_0 b_1

$$y_{n+1} = a_0 y_n + a_1 y_{n-1} + h[b_0 y_n' + b_1 y_{n-1}']$$

令 $y(x) = x$ $y'(x) = 1$

$$x_{n+1} = a_0 x_n + a_1 x_{n-1} + h[b_0 + b_1]$$

$$x_n + h = a_0 x_n + a_1(x_n - h) + h[b_0 + b_1]$$

$$x_n + h = (a_0 + a_1)x_n + [-a_1 + b_0 + b_1]$$

$a_0 + a_1 = 1$ $C_0 = 1 - (a_0 + a_1) = 0$ $C_2 =$

$-a_0 + b_0 + b_1 = 1$ $C_1 = 1 - [-a_1 + b_0 + b_1] = 0$ $C_3 =$

2018-2019 年度推免研究生课程考试试题 A

一、判断题（每题 3 分，共 15 分，对的打√，错的打×）

1. R^n上任意两种向量范数都等价。()
2. 满足相同插值条件的 Lagrange 插值多项式与 Newton 插值多项式是一致的。()
3. Newton-Cotes 求积公式节点越多误差越小。()
4. 若线性多步法满足根条件，则该方法一定是收敛的。()
5. 求非线性方程的割线法一定比 Newton 法的效率指数高。()

二、填空题（每题 4 分，共 20 分）

1. 求方程 $f(x) = (x^2-a)^2=0$ 根的 Newton 迭代公式为____________,公式的收敛阶 P = ____________。
2. 设 $p_2(x)=3x^2-1, p_3(x)=cx^3-3x$, 当 c=____________时，$p_2(x)$与 $p_3(x)$在区间 [0,1]上关于权函数 $\rho(x)=1$ 正交。
3. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ a & 1\end{pmatrix}$, 当 a 满足____________时，解线性方程组 Ax=b 的 Gauss-Seidel 迭代法收敛。
4. 若求积公式$\int_a^b f(x)dx=\sum_{i=0}^n A_i f(x_i)$为插值型求积公式，则 A_i=____________。
5. 求常微分方程$\begin{cases} y' = f(x,y), a < x < b \\ y(a) = \eta \end{cases}$的显示 Euler 格式为____________。

三、（15 分）对于迭代函数$\varphi(x) = x + c(x^2-3)$, 试讨论

（1）当 c 为何值时，$x_{k+1}=\varphi(x_k)$产生的序列$\{x_k\}$收敛于$\sqrt{3}$。

（2）c 取何值时收敛阶最该。

（3）取 $c=-\frac{1}{2}$, 计算$\varphi(x)$的不动点，要求迭代 3 次。（初值 $x_0=1.5$，结果保留三位小数）。

四、(15 分)

(1)用共轭梯度法求解方程组 $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{matrix} 3 \\ 8 \end{matrix}$

(2)用乘幂法求解线性方程组系数阵的按模最大的特征值和对应的特征向量。(取 $v_0=(1,1)^T$,计算迭代两 2 次,结果保留 3 位小数)

五、(10 分)求 $f(x)=\ln x$,在区间[1,2]和函数类 $\Phi=\mathrm{span}\{1, x\}$ 的最佳平方逼近多项式。

六、（10 分）试确定下面求积公式中的求积系数，使其代数精度尽可能高，并给出代数精度。

$$\int_0^{3h} f(x)dx = A_0 f(0) + A_1 f(h) + A_2 f(2h)$$

七、（15 分）给定多步法 $y_{n+1}=\frac{4}{5}y_n+\frac{1}{5}y_{n-1}+h\left(\frac{2}{5}y'_{n+1}+\frac{4}{5}y'_n\right)$

（1）求局部阶段误差。

（2）讨论该方法的收敛性。

（3）给出该方法的绝对稳定区间。

No.

Date

1、R^n上任意两向量范数都等价（ ✓ ）

$c_1\|x\|_q \le \|x\|_p \le c_2\|x\|_q$

2. 满足拉.牛 ✓ 满足相同插值条件的拉格朗日插值和牛顿插值 是一致的

3. 牛顿-柯特斯求积公式 ⊗ 节点越多，误差越小，（复化高斯求积公式 ✓）

4. 若线性多步法满足相容条件 ⊗，则它一定收敛 （还要满足相容）

5. 正解 × 不一定.

Newton $x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$

1、求方程 $f(x)=(x^2-a)^2=0$ $(a>0)$ 根的牛顿迭代公式 ______ 公式的收敛阶 $p=$ <u>1</u>

2、设 $P_2(x)=3x^2-1$，$P_3(x)=cx^3-3x$ 当 c 取 ______ 值时，$P_2(x)$ 与 $P_3(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上关于权函数 $\rho(x)=1$ 正交.

$\int_0^1 1(3x^2-1)(cx^3-3x)dx=0$. $\Rightarrow c$

3. 设矩阵 $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ a & 1\end{bmatrix}$ 当 a 满足 ______ 时. 解线性方程组 $Ax=b$ 的 Gauss-Seidel 迭代法收敛

算迭代矩阵 $B_g=-(L+D)^{-1}U$.

算 特征值模小于 1.

4. 若求积公式 $\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{j=0}^{n} A_i f(x_i)$ 为插值型求积公式

则： $A_i=$ ______

$A_i=\int_a^b l_i(x)dx$

哈工大数值分析Q群

926420643

No.

Date

5. 求常微分方程 $\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x,y) \\ y(a)=\eta \end{cases}$ 的显式Euler格式为 ______

$y_{n+1} = y_n + h f(x_n, y_n)$

3. 试建立求 $\frac{1}{97}$ 的Newton迭代公式，要求在迭代函数中不含有除法运算。并证明，当初值 $0<x_0<\frac{2}{97}$ 时，此算法是收敛的。

（求 $\frac{1}{a}$ 的 Newton迭代公式 ，$a=97$）。

4. 试设有方程组 $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \end{cases}$

试讨论方程组的Jacobi迭代法和高斯-塞德尔迭代法的收敛性

迭代矩阵　特征值

5. 求一个次数不超过3的多项式 $H_3(x)$ 满足

（不完全Hermit 插值）

并估计误差

x_i	1	2	3
$f(x_i)$	2	4	12
$f'(x_i)$		2	

三点Gauss

6. 给定数值积分如下 $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx \frac{1}{9}[5f(\sqrt{0.6}) + Af(a) + 5f(-\sqrt{0.6})]$

(1) 求积分常数A和积分节点a　　(1) 令 $f(x)=1, x$. A和a可求

(2) 确定上述积分公式代数精度 $\longrightarrow$ 三点Gauss　5　$A=8$　$a=0$.

(3) 利用上述积分公式计算积分 $\int_0^1 \frac{\sin x}{1+x} dx$

$2\times3-1=5$　(化成 $-1,1$ 区间)

$f(x)=1$ ✓

$f(x)=x$ ✓

$f(x)=x^2$ ✓

$f(x)=x^3$ ✓

$f(x)=x^4$ ✓

$f(x)=x^5$ ✓

$f(x)=x^6$ ✗

No.

Date

7. 常微分方程数值解法 $\begin{cases} y'=f(x,y) \\ y(a)=\eta \end{cases}$ 		Gr 参考定理

$$y_{n+1}=\frac{2}{3}y_n+\frac{1}{3}y_{n-1}+\frac{h}{3}[5y_n'-y_{n-1}']$$

(1) 求出局部截断误差

(2) 讨论方法绝对收敛性

(3) 		稳定性

(4) 取试验方程 $y'=\lambda y$ 中 $\lambda=-20$ 问步长应取多大?

$<h\lambda<$. 		h范.

哈工大数值分析Q群 926420643

Campus

2018-2019年度推免生课程试题A答案.

一. ✓ ✓ × × ×

二. 填空题.

1. $x_{n+1}=x_n-\frac{x_n^2-a}{4x_n}$ 　　1

2. 3 　　3. $-\frac{1}{2}<a<\frac{1}{2}$ 　　4. $\int_a^b l_i(x)\,dx$ 　　5. $y_{n+1}=y_n+hf(x_n,y_n)$

三. 不妨假设 $c\neq 0$. 首先考虑迭代函数 $\varphi(x)=x+c(x^2-3)$

令 $x=\varphi(x)$ 解得 $x^*=\pm\sqrt{3}$

(1) 注意到 $\varphi'(x)=1+2cx$，为使 $x_{k+1}=\varphi(x_k)$ 有局部收敛性，

只需 $|\varphi'(x^*)|<1$，即：$|1+2c\sqrt{3}|<1$ 　　$\therefore -\frac{\sqrt{3}}{3}<c<0$

(2) 为使迭代收敛最快，只需 $|\varphi'(x^*)|$ 最小

令 $|1+2\sqrt{3}c|=0$ 得 $c=-\frac{\sqrt{3}}{6}$

(3) $\varphi(x)=x-\frac{1}{2}(x^2-3)$ 　　$\therefore x_{k+1}=-\frac{1}{2}x_k^2+x_k+\frac{3}{2}$

$\Rightarrow x_1=1.875$，$x_2=1.617$，$x_3=1.359$

四. (1) 回略

(2) $\begin{cases} u_k=\frac{v_k}{\max(v_k)} \\ v_k=Au_{k-1} \end{cases}$

k	v_k^T	u_k^T	λ
0	(1, 1)	(1, 1)	
1	(3, 8)	$(\frac{3}{8}, 1)$	8
2	$(\frac{7}{4}, \frac{59}{8})$	$(\frac{14}{59}, 1)$	$\frac{59}{8}$

$\therefore \lambda_{max}=7.375$，特征向量 $(0.237, 1)$

五. 设 $y=a+bx$，$\varphi_0=1$，$\varphi_1=x$.

$(\varphi_0,\varphi_0)=\int_1^2 1\,dx=1$，　$(\varphi_1,\varphi_1)=\int_1^2 x^2dx=\frac{7}{3}$，

$(\varphi_1,\varphi_0)=(\varphi_0,\varphi_1)=\int_1^2 x\,dx=\frac{3}{2}$，　$(f,\varphi_0)=\int_1^2 \ln x\,dx = x\ln x-x\Big|_1^2=2\ln 2-1$

$(f,\varphi_1)=\int_1^2 x\ln x\,dx=\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{x^2}{4}\Big|_1^2=2\ln 2-\frac{3}{4}$

$$\begin{bmatrix}1 & \frac{3}{2}\\ \frac{3}{2} & \frac{7}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\ln 2-1\\ 2\ln 2-\frac{3}{4}\end{bmatrix} \Rightarrow y=0.6822x-0.6371$$

注意：$\int x\ln x\,dx=\frac{1}{2}\int \ln x\cdot dx^2=\frac{1}{2}(x^2\ln x-\int x^2\,d\ln x)=\frac{1}{2}(x^2\ln x-\frac{1}{2}x^2)+C$

$=\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{x^2}{4}+C$

六. 将 $f(x)=1, x, x^2$ 分别代入

$$\begin{cases} 3h=A_0+A_1+A_2 \\ \frac{1}{2}(3h)^2=A_1h+A_2\times 2h \\ \frac{1}{3}(3h)^3=A_1h^2+A_2\cdot(2h)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_0=\frac{3}{4}h \\ A_1=0 \\ A_2=\frac{9}{4}h \end{cases}$$ 　精度为2

七. (1) $T_n=-\frac{1}{30}h^4y^{(4)}(x_n)+\cdots\cdots$ 　　(2) $\rho(r)=(r-1)(r-\frac{1}{5})$ 　收敛.

(3) $\pi(r,\bar{h})=(1-\frac{2}{5}\bar{h})r^2-\frac{4}{5}(1+\bar{h})r-\frac{1}{5}=0$ 　　$\bar{h}\in(-4,0)$

2018哈尔滨工业大学硕士研究生课程考试试题

考 试 科 目： 数值分析B

学生所在院（系）：建筑学院

学生所在学科 ：供热供燃气通风及空调工程

学号：18034081 张妍

注：不用抄题，答案写在答题卡上，写在题签上无效

一．（10分）设 $f(x)=\dfrac{x}{x+1}$，取 $x_i=0,1,\cdots,4$，以 $(x_i, f(x_i))$ 为插值数据点作插值多项式 $\varphi_4(x)$，

即 $\varphi_4(x)$ 满足： $\varphi(x_i)=\dfrac{i}{i+1}$，$i=0,1,\cdots,4$，试求 $\varphi_4(5)$。

$\varphi(x_0)=0$ $\varphi(x_1)=\frac{1}{2}$ $\varphi(x_2)=\frac{2}{3}$ $\varphi(x_3)=\frac{3}{4}$ $\varphi(x_4)=\frac{4}{5}$

二．（10分）（1）设用 Doolittle 三角分解法求解方程组 $\begin{pmatrix}2&1&1\\1&3&2\\1&2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\6\\5\end{pmatrix}$；

（2）用乘幂法求方程组系数阵的按摸最大的特征值和对应的特征向量。

（取 $v_0=(1,1,1)^T$ ，计算迭代三次的值，结果保留4位小数）

三．（10分）试确定 $\alpha=0$ 是方程 $f(x)=e^{2x}-1-2x-2x^2=0$ 的几重根，试把 Newton 迭代加以改进使其迭代是平方收敛的。取初值 $x_0=0.25$，求 $f(x)=0$ 的近似根（要求迭代2次，结果保留5位小数）。

四．（10分）方程组 $\begin{pmatrix}1&2&-2\\1&1&1\\2&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix}$

讨论 Jacobi 迭代法和 Gauss-Seidel 迭代解此方程组的收敛性。

五．（10分）对某品牌的电热水器进行保温测试，当室温保持为20°C时，水温加热到80°C切断电源，每隔6小时测量水温，时间 x 和水温 y 有如下数据表：

时间 $x(h)$	0	6	12	18	24
水温 $y(°C)$	80	62	49	40	34

根据传热理论，拟合出经验公式：$y=ae^{bx}+20$；按此公式，当时间分别为1, 2, 5小时时，水温为多少？

六.（10 分）试确定求积公式 $\int_0^4 f(x)dx \approx A_0 f(2-\frac{2}{\sqrt{3}}) + A_1 f(2+\frac{2}{\sqrt{3}})$ 的求积系数 A_0, A_1，使得其有尽可能高的代数精度，并确定代数精度？并用此公式计算积分 $\int_0^2 \frac{1}{2+x}dx$，（结果保留 4 位小数）。

七.（10 分）求次数不超过 4 次的插值多项式 $P(x)$ 来近似 $f(x)$，使得它满足：

$$P(1)=P(3)=0, P(2)=1, P'(1)=0, P'(2)=0$$

并写出余项表达式。

八.（10 分）用共轭梯度方法解方程组：$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

（取初值 $x^{(0)} = (0,0,0)^T$ ）。

共轭梯度方法: $\begin{cases} \mathbf{p}_0 = \mathbf{r}^{(0)} = \mathbf{b} - A\mathbf{x}^{(0)}, \quad \alpha_k = \dfrac{(\mathbf{r}^{(k)}, \mathbf{r}^{(k)})}{(\mathbf{p}_k, A\mathbf{p}_k)} \\ \mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \alpha_k \mathbf{p}_k, \quad \mathbf{r}^{(k+1)} = \mathbf{r}^{(k)} - \alpha_k A\mathbf{p}_k \\ \beta_k = \dfrac{(\mathbf{r}^{(k+1)}, \mathbf{r}^{(k+1)})}{(\mathbf{r}^{(k)}, \mathbf{r}^{(k)})}, \quad \mathbf{p}_{k+1} = \mathbf{r}^{(k+1)} + \beta_k \mathbf{p}_k \end{cases}$

九.（10 分）试用经典四阶 Runge-Kutta 方法求初值问题：

$$\begin{cases} y' = -y+1 \quad , \quad 0 \le x \le 1 \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

的解 $y(x)$ 在 $x=0.3$ 处的近似值（取步长 $h=0.1$ 计算，结果保留 5 位小数）。

十.（10 分）求解常微分方程初值问题 $\begin{cases} y' = f(x,y), \quad a \le x \le b \\ y(a) = \eta \end{cases}$ 的两步方法：

$$y_{n+1} = \frac{5}{4}y_n - \frac{1}{4}y_{n-1} + \frac{h}{8}(11y'_n - 5y'_{n-1})$$

（1）求出局部截断误差；（2）讨论方法的收敛性；（3）讨论方法的绝对稳定性。

（在局部截断误差中 $C_r = \frac{1}{r!}\left\{1 - [\sum_{i=0}^{p}(-i)^r a_i + r\sum_{i=-1}^{p}(-i)^{r-1}b_i]\right\}, r=2,3,\cdots$ ；

参考定理：设 x_1 和 x_2 是实系数二次方程 $x^2+bx+c=0$ 的根，则 $|x_1|<1, |x_2|<1$ 的充要条件是 $|b|<1+c, |c|<1$。 ）

2018 数值分析B.

一.

x	0	1	2	3	4
y	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$

设 $\varphi_4(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx$

代入4組数据得: $\varphi_4(x)=-\frac{1}{120}x^4+\frac{11}{120}x^3-\frac{23}{60}x^2+\frac{4}{5}x$

$\therefore \varphi_4(5)=\frac{2}{3}$

二.(1) $A=LU=\begin{bmatrix}1&0&0\\\frac{1}{2}&1&0\\\frac{1}{2}&\frac{3}{5}&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&1&1\\0&\frac{5}{2}&\frac{3}{2}\\0&0&\frac{3}{5}\end{bmatrix}$, $y=\begin{bmatrix}4\\4\\\frac{3}{5}\end{bmatrix}$, $x=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$

(2) $u_k=\frac{v_k}{\max(v_k)}$, $v_k=A\,u_{k-1}$

k	v_k^T	u_k^T	λ
0	$(1,1,1)$	$(1,1,1)$	
1	$(4,6,5)$	$(\frac{2}{3},1,\frac{5}{6})$	6
2	$(\frac{19}{6},\frac{16}{3},\frac{13}{3})$	$(\frac{19}{32},1,\frac{13}{16})$	$\frac{16}{3}$
3	$(3,\frac{167}{32},\frac{135}{32})$	$(\frac{96}{167},1,\frac{135}{167})$	$\frac{167}{32}$

三.(1) 3重根

(2) $x_{k+1}=x_k-3\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}=x_k-3\cdot\frac{e^{2x_k}-1-2x_k-2x_k^2}{2\cdot e^{2x_k}-2-4x_k}$

(3) $x_0=0.25$, $x_1=0.01075$, $x_2=0.00002$

四.(1) $B_J=\begin{bmatrix}0&-2&2\\-1&0&-1\\-2&-2&0\end{bmatrix}$ $|\lambda I-B_J|=\lambda^3=0$ 收敛

(2) $B_G=-(D+L)^{-1}U=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\2&2&1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0&2&-2\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&-2&2\\0&2&-3\\0&0&2\end{bmatrix}$

$|\lambda I-B_G|=\lambda(\lambda-2)^2=0$ 不收敛

五. $\ln(y-20)=\ln a+bx$.

x	0	6	12	18	24
Y	4.0983	3.7377	3.3673	2.9957	2.6391

$\begin{pmatrix}5&60\\60&1080\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\ln a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}16.8341\\180.0948\end{pmatrix}$

$\Rightarrow\quad y=60.1776\,e^{-0.0609x}+20$

$\therefore y(1)=76.6221$°C, $y(2)=73.2768$°C, $y(5)=64.3805$°C

六. 令 $f(x)=1, x$ 成立得 $A_0=A_1=2$ ；Gauss型. 精度为 $2\times2-1=3$ 次.

$$\int_0^2 \frac{1}{x+2}dx = \int_0^4 \frac{1}{t/2+2}d\frac{t}{2} = \int_0^4 \frac{1}{t+4}dt = 0.6923$$

七. 设 $P(x)=(x-1)^2(x-3)(ax+b)$

代入 $P(2)=1$ 和 $P'(2)=0$ 得：$\begin{cases} a=1 \\ b=-3 \end{cases}$

$\therefore p(x)=(x-1)^2(x-3)^2$ ，$E(x)=\dfrac{f^{(5)}(\xi)}{5!}(x-1)^2(x-2)^2(x-3)$

八. QNMD.

九. $k_1=-y_n+1$ ，$k_2=-y_n-\frac{h}{2}k_1+1=-0.95y_n+0.95$

$k_3=-0.9525y_n+0.9525$ ，$k_4=-y_n-hk_3+1=-0.90475y_n+0.90475$

$y_{n+1}=y_n+\frac{0.1}{6}\times(2\times0.95+2\times0.9525+0.90475+1)(-y_n+1)=0.0951625+0.9048375y_n$

迭代如下:

n	x_n	y_n
0	0	2
1	0.1	1.90484
2	0.2	1.81873
3	0.3	1.70482

十. $a_0=\frac{5}{4}$，$a_1=-\frac{1}{4}$，$b_{-1}=0$，$b_0=\frac{11}{8}$，$b_1=-\frac{5}{8}$

(1) $c_0=c_1=c_2=0$

$c_3=\frac{1}{3!}[1+(-\frac{1}{4})-3(0-\frac{5}{8})]=\frac{7}{16}$

$\therefore T_n=\frac{7}{16}h^3y^{(3)}(x_n)+\cdots$

(2) 相容，$p(r)=r^2-\frac{5}{4}r+\frac{1}{4}=(r-1)(r-\frac{1}{4})$ 收敛

(3) $\pi(r,\bar{h})=r^2-(\frac{5}{4}+\frac{11}{8}\bar{h})r+(\frac{1}{4}+\frac{5}{8}\bar{h})=0$

令 $\begin{cases} |-(\frac{5}{4}+\frac{11}{8}\bar{h})|<1+\frac{1}{4}+\frac{5}{8}\bar{h} \\ |\frac{1}{4}+\frac{5}{8}\bar{h}|<1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{5}{4}<\bar{h}<0 \\ -2<\bar{h}<2 \end{cases}$

$\therefore \bar{h}\in(-\frac{5}{4},0)$

2018年

哈尔滨工业大学硕士研究生课程考试试题

考 试 科 目 ： 数 值 分 析

学生所在院（系）：

学生所在学科：

学号：

注：不用抄题，答案写在答题卡上，写在题签上无效

一．(10分) 设 $f(x)=\dfrac{x}{x+1}$，取 $x_i=0,1,\cdots,4$，以 $(x_i,f(x_i))$ 为插值数据点作插值多项式 $\varphi_4(x)$，

即 $\varphi_4(x)$ 满足： $\varphi(x_i)=\dfrac{i}{i+1}$，$i=0,1,\cdots,4$，试求 $\varphi_4(5)$。

二．(10分)（1）设用 Doolittle 三角分解法求解方程组 $\begin{pmatrix}2&1&1\\1&3&2\\1&2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\6\\5\end{pmatrix}$；

（2）用乘幂法求方程组系数阵的按摸最大的特征值和对应的特征向量。

（取 $v_0=(1,1,1)^T$，计算迭代三次的值，结果保留 4 位小数）

三．(10分) 试确定 $\alpha=0$ 是方程 $f(x)=e^{2x}-1-2x-2x^2=0$ 的几重根，试把 Newton 改进使其迭代是平方收敛的。取初值 $x_0=0.25$，求 $f(x)=0$ 的近似根（要求迭代 2 次，结果保留 5 位小数）。

四．(10分) 方程组 $\begin{pmatrix}1&2&-2\\1&1&1\\2&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix}$

讨论 Jacobi 迭代法和 Gauss-Seidel 迭代解此方程组的收敛性。

五．(10分) 设 $f(x)=\sqrt{x}$，求 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的一次最佳平方逼近多项式 $\varphi(x)=a_0+a_1x$，并求出平方误差。(结果保留 4 位小数)

六．试确定求积公式 $\int_0^4 f(x)dx\approx A_0f(2-\frac{2}{\sqrt{3}})+A_1f(2+\frac{2}{\sqrt{3}})$ 的求积系数 A_0,A_1，使得其有尽可能高的代数精度，并确定代数精度？并用比公式计算积分 $\int^2\frac{1}{\quad}dx$，(结果保留 4 位小数)。

七.（10 分）若 $f(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots a_1x+a_0$ 有 n 个互异的零点 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，

求 $\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^k}{f'(x_i)}$，$k=0,1,\cdots,n-1$ 。

(2.02)
(6.46)

八.（10 分）用共轭梯度方法解方程组：$\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$

（取初值 $x^{(0)}=(0,0,0)^T$ ）。

共轭梯度方法：$\begin{cases}\mathrm{p}_0=\mathrm{r}^{(0)}=\mathrm{b}-A\mathrm{x}^{(0)}, \quad \alpha_k=\dfrac{(\mathrm{r}^{(k)},\mathrm{r}^{(k)})}{(\mathrm{p}_k,A\mathrm{p}_k)}\\ \mathrm{x}^{(k+1)}=\mathrm{x}^{(k)}+\alpha_k\mathrm{p}_k, \quad \mathrm{r}^{(k+1)}=\mathrm{r}^{(k)}-\alpha_kA\mathrm{p}_k\\ \beta_k=\dfrac{(\mathrm{r}^{(k+1)},\mathrm{r}^{(k+1)})}{(\mathrm{r}^{(k)},\mathrm{r}^{(k)})}, \quad \mathrm{p}_{k+1}=\mathrm{r}^{(k+1)}+\beta_k\mathrm{p}_k\end{cases}$

$\frac{2}{3}+\frac{1}{4}$

九.（10 分）用有限差分方法解边值问题：

$$\begin{cases}y''-(1+x^2)y=-1, & -1<x<1\\ y(-1)=y(1)=0\end{cases}$$

[illegible]/12

取步长 $h=\frac{1}{2}$ 计算。（结果保留 4 位小数）

$\frac{2}{3}-\frac{1}{4}$

十.（10 分）求解常微分方程初值问题 $\begin{cases}y'=f(x,y), & a\le x\le b\\ y(a)=\eta\end{cases}$ 的两步方法

$y_{n+1}=\frac{5}{4}y_n-\frac{1}{4}y_{n-1}+\frac{h}{8}(11y_n'-5y_{n-1}')$

求出局部截断误差；（2）讨论方法的收敛性；（3）讨论方法的绝对稳定性。

（在局部截断误差中 $C_r=\frac{1}{r!}\left\{1-[\sum_{i=0}^{p}(-i)^r a_i+r\sum_{i=-1}^{p}(-i)^{r-1}b_i]\right\}, r=2,3,\cdots$

参考定理：设 x_1 和 x_2 是实系数二次方程 $x^2+bx+c=0$ 的根，则 $|x_1|<1,|x_2|<1$ 的充要条件是 $|b|<1+c,|c|<1$ 。）

$-\frac{1}{3}+\frac{1}{12}$

$=\frac{2}{12}$

一、 0 1 2 3 4

0 $\frac{1}{2}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{4}{5}$ $\frac{4}{5}\cdot 4\,3\,2\,1$ $\frac{3}{4}\cdot 3\,2\,1\,(-1)$

$$\varphi_4(x)=\frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}{(-1)(-2)(-3)(-4)}\cdot 0+\frac{(x-0)(x-2)(x-3)(x-4)}{1\cdot(-1)(-2)(-3)}\cdot\frac{1}{2}+\cdots$$

$$=-\frac{1}{12}x(x-2)(x-3)(x-4)+\frac{1}{6}x(x-1)(x-3)(x-4)-\frac{1}{8}x(x-1)(x-2)(x-4)$$

$$+\frac{1}{30}x(x-1)(x-2)(x-3)$$

$$=-\frac{1}{120}x^4+\frac{11}{120}x^3-\frac{23}{60}x^2+\frac{4}{5}x$$

$$\boxed{\varphi_4(5)=\frac{2}{3}}$$

二、(1) $L=\begin{bmatrix}1&0&0\\ \frac{1}{2}&1&0\\ \frac{1}{2}&\frac{3}{5}&1\end{bmatrix}$ $U=\begin{bmatrix}2&1&1\\0&\frac{5}{2}&\frac{3}{2}\\0&0&\frac{3}{5}\end{bmatrix}$

$LUx=b$

$\begin{cases}Ly=b\\ Ux=y\end{cases}$

$\frac{1}{2}y_1+y_2=6$

$\frac{1}{2}y_1+\frac{3}{5}y_2+y_3=5$

2 $\frac{12}{5}$

$\frac{3}{5}x_3=$

$\frac{5}{2}x_2+\frac{3}{2}\times 1=4$

x_1

$y=\begin{bmatrix}4\\4\\ \frac{3}{5}\end{bmatrix}$ $\boxed{x=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}}$

(2)

$v_0=(1,1,1)^T$ $u_0=(1,1,1)$

$v_1=A\cdot v_0=\begin{pmatrix}4\\6\\5\end{pmatrix}$ $u_1=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\1\\ \frac{5}{6}\end{pmatrix}$

$v_2=A\cdot u_1=\left(\frac{19}{6},\frac{16}{3},\frac{13}{3}\right)^T$ $u_2=\left(\frac{19}{32},1,\frac{13}{16}\right)^T$

$v_3=Au_2=\left(3\ \ \frac{167}{32}\ \ \frac{135}{32}\right)^T$ $u_3=\left(\frac{96}{167},1,\frac{135}{167}\right)^T$

$\lambda_1\approx\frac{167}{32}$ $x\approx\left(\frac{96}{167},1,\frac{135}{167}\right)^T$

$\lambda_1\approx 5.2188$ $x_1\approx(0.5749,1,0.8084)^T$

三、 $f'(0)=2e^{2x}-2-4x=0$

$f''(0)=4e^{2x}-4=0$

$f'''(0)=8e^{2x}=8$

∴ 是3重根

$$x_{n+1}=x_n-3\cdot\frac{e^{2x_n}-1-2x_n-2x_n^2}{2\cdot e^{2x_n}-2-4x_n}$$

$$=\frac{2x_n\cdot e^{2x_n}-2x_n-4x_n^2-3e^{2x_n}+6x_n+6x_n^2+3}{2e^{2x_n}-2-4x_n}$$

$$=\frac{(2x_n-3)e^{2x_n}+2x_n^2+4x_n+3}{2e^{2x_n}-2-4x_n}$$

$x_0=0.25$

$x_1=0.01075$

$x_2=0.00002$

四、$B_J = I - D^{-1}A$

$$\cancel{D^{-1}A = \begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&-2\\1&1&1\\2&2&1\end{bmatrix}} =$$

$$= \begin{bmatrix}0&-2&2\\-1&0&-1\\-2&-2&0\end{bmatrix}$$

$$|\lambda I - B_J| = \begin{vmatrix}\lambda&2&-2\\1&\lambda&1\\2&2&\lambda\end{vmatrix} = \lambda^3 + 4 - 4 - (2\lambda + 2\lambda - 4\lambda)$$

$$= \lambda^3 = 0 \qquad \rho(B_J) = 0$$

$\lambda = 0$. $\quad$ ∴收敛

$B_G = -(D+L)^{-1}U$

$$\begin{bmatrix}1&&\\1&1&\\2&2&1\end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix}1&&\\-1&1&\\0&-2&1\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}-1&0&0\\1&-1&0\\0&2&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&2&-2\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}0&-2&2\\0&2&-3\\0&0&2\end{bmatrix}$$

$$|\lambda I - B_G| = \begin{vmatrix}\lambda&2&-2\\0&\lambda-2&3\\0&0&\lambda-2\end{vmatrix} = \lambda(\lambda-2)(\lambda-2)$$

$\lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 = \lambda_3 = 2$

$\rho(B_G) = 2$ $\quad$ 不收敛.

五、~~$Y = \ln y = \ln a$~~

$Y = \ln(y-20) = \ln a + bx$

x	0	6	12	18	24
Y	4.0943	3.7377	3.3673	2.9957	2.6391

取 $\varphi_0 = 1 \quad \varphi_1 = x$

$(\varphi_0, \varphi_0) = 5 \qquad (\varphi_0, \varphi_1) = 60 \qquad (\varphi_1, \varphi_1) = 1080$

$(Y, \varphi_0) \approx 16.8341 \qquad (Y, \varphi_1) \approx 180.0948$

$$\begin{bmatrix}5&60\\60&1080\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\ln a\\b\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}16.8341\\180.0948\end{bmatrix} \qquad \begin{cases}\ln a = 4.0973\\ b \approx -0.0609\end{cases}$$

$a = 60.1776$

$$\boxed{\begin{aligned}&y = 60.1776\, e^{-0.0609x} + 20.\\&y(1) = 76.6221\ ^\circ C\\&y(2) = 73.2768\ ^\circ C\\&y(5) = 64.3805\ ^\circ C\end{aligned}}$$

六、取 $f(x)=1, x$

$4=A_0+A_1$

$8=(2-\frac{2}{\sqrt3})A_0+(2+\frac{2}{\sqrt3})A_1$

$A_0=A_1=2$

当 $f(x)=x^2$ 时

$\frac{1}{3}\cdot 64 \cdot 2\cdot\left[(2-\frac{2}{\sqrt3})^2+(2+\frac{2}{\sqrt3})^2\right]$

$= \quad =(4+\frac{4}{3})\times 4 = \frac{16\times3+16}{3}$

当 $f(x)=x^3$ 时

左 $=\frac{1}{4}\cdot 4^4=64$ 　右 $=2\cdot\left[(2-\frac{2}{\sqrt3})^3+(2+\frac{2}{\sqrt3})^3\right]$

$= \quad =64$

当 $f(x)=x^4$ 时

左 $=\frac{4^5}{5}=204.8$ 　右 $=2\cdot\left[(2-\frac{2}{\sqrt3})^4+2-\frac{2}{\sqrt3})^4\right]$

$\neq \quad =199.11$

$=36$

二、代数精度为3

$\int_0^2\frac{1}{2+x}dx=\int_0^4\frac{1}{2+\frac{t}{2}}d\frac{t}{2}$

$=\int_0^4\frac{1}{4+t}dt$

$=2\left(\frac{1}{4+2-\frac{2}{\sqrt3}}+\frac{1}{4+2+\frac{2}{\sqrt3}}\right)$

≈ 0.6923

七、$L(x)=\frac{(x-2)(x-3)}{(1-2)(1-3)}\cdot 0+\cdots=\frac{(x-1)(x-3)}{(2-1)(2-3)}\cdot 1=-x^2+4x-3$

$(x^3-6x^2+11x-6)(Ax+B)$

$H(x)=L(x)+(Ax+B)(x-1)(x-2)(x-3)$

$=-x^2+4x-3+(Ax+B)(x-1)(x-2)(x-3)$

$H'(x)=-2x+4+A(x^3-6x^2+11x-6)+(Ax+B)(3x^2-12x+11)$

$12-24+11$

$H'(1)=P'(1)=0$ 　　$-2+4+(A+B)\cdot 2=0$

$H'(2)=P'(2)=0$ 　　$-(2A+B)=0$

$\begin{cases}2A+B=0\\2A+2B=-2\end{cases}$

$\therefore\begin{cases}B=-2\\A=1\end{cases}$

$-2x^3+12x^2-22x+12$

$x^4-6x^3+11x^2-6x$

$H(x)=-x^2+4x-3+(x-2)(x^3-6x^2+11x-6)$

$=x^4-8x^3+22x^2-24x+9$

$E(x)=\frac{f^{(5)}(\xi)}{5!}(x-1)^2(x-2)^2(x-3)$

八、$x^{(0)}=(0,0,0)^T$ 　$r^{(0)}=p_0=(2\ 0\ 2)^T$ 　$\alpha_0=\frac{4}{24}=\frac{1}{6}$

$x^{(1)}=(\frac{1}{3}\ 0\ \frac{1}{3})^T$ 　$r^{(1)}=(1\ -\frac{2}{3}\ 1)^T$ 　$\beta_0=\frac{2+\frac{4}{9}}{4}=\frac{1}{6}$ 　$P_1=(\frac{4}{3},-\frac{2}{3}\ \frac{4}{3})^T$

$\alpha_1=\frac{\frac{22}{9}}{8}=\frac{11}{36}$

$x^{(2)}=(\frac{20}{27},\frac{-11}{54}\ \frac{20}{27})^T$ 　$r^{(2)}=(-\frac{1}{54}\ \frac{-19}{27}\ \frac{1}{54})$

2.
$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\ k_1 = f(x_n, y_n) \\ k_2 = f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1) \\ k_3 = f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_2) \\ k_4 = f(x_n + h, y_n + hk_3) \end{cases}$$

$k_1 = -y_n + 1 \quad k_2 = -y_n - \frac{h}{2}k_1 + 1 = -y_n - 0.05(-y_n+1) + 1 = -0.95y_n + 0.95$

$k_3 = -y_n - \frac{h}{2}k_2 + 1 = -y_n - 0.05(-0.95y_n + 0.95) + 1 = -0.9525y_n + 0.9525$

$k_4 = -y_n - hk_3 + 1 = -y_n - 0.1(-0.9525y_n + 0.9525) + 1 = -0.90475y_n + 0.90475$

$y_{n+1} = y_n + \frac{0.1}{6}(2\times0.95 + 2\times0.9525 + 0.90475 + 1)(-y_n + 1)$

$= 0.0951625 + 0.9048375y_n$

n	x_n	y_n
0	0	2
1	0.1	1.90484
2	0.2	1.81873
3	0.3	1.70482

4. $a_0 = \frac{5}{4} \quad a_1 = -\frac{1}{4} \quad b_0 = \frac{11}{8} \quad b_1 = -\frac{5}{8}$

$C_0 = 1 - \sum a_i = 0$

$C_1 = 1 - [\sum i a_i + \sum b_i] = 0$

$C_2 = \frac{1}{2}\{1 - [\sum(-i)^2 a_i + 2\sum(-i) b_i]\} = 0$

$-\frac{1}{4} + \frac{10}{8}$ $\quad \frac{7}{8} \cdot \frac{1}{2}$

$C_3 = \frac{1}{6}\{1 - [\sum(-i)^3 a_i + 3\sum(-i)^2 b_i]\} = (1 + \frac{13}{8}) \cdot \frac{1}{6} = \frac{7}{16}$

$+\frac{1}{4} + 3 \cdot -\frac{5}{8}$

$T_n = \cancel{\frac{7}{16} \frac{(13)}{(3)}} \frac{7}{16} h^3 y^{(3)} + \cdots$

(2) $C_0 = C_1 = 0$ 相容

$\rho(r) = r^2 - \frac{5}{4}r + \frac{1}{4} = (r-1)(r-\frac{1}{4}) = 0$

收敛

$-\frac{5}{2} < 2\bar{h}$

(3) $\pi(r, \bar{h}) = r^2 - (\frac{5}{4} + \frac{11}{8}\bar{h})r + (\frac{1}{4} + \frac{5}{8}\bar{h})$

$-\frac{5}{4} - \frac{5}{8}\bar{h} < \frac{5}{4} + \frac{11}{8}\bar{h} < \frac{5}{4} + \frac{5}{8}\bar{h}$

$\boxed{-\frac{5}{4} < \bar{h} < 0}$

$-1 < \frac{1}{4} + \frac{5}{8}\bar{h} < 1$

$-\frac{5}{4} < \frac{5}{8}\bar{h}$

2018哈尔滨工业大学硕士研究生课程考试试题

考 试 科 目： 数值分析 A

学生所在院（系）：

学生所在学科　：

学号：

注：不用抄题，答案写在答题卡上，写在题签上无效

一.（10 分）设 $f(x)=\dfrac{x}{x+1}$，取 $x_i=0,1,\cdots,4$，以 $(x_i,f(x_i))$ 为插值数据点作插值多项式 $\varphi_4(x)$，

即 $\varphi_4(x)$ 满足： $\varphi(x_i)=\dfrac{i}{i+1}$， $i=0,1,\cdots,4$，试求 $\varphi_4(5)$。

二.（10 分）（1）设用 Doolittle 三角分解法求解方程组 $\begin{pmatrix}2&1&1\\1&3&2\\1&2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\6\\5\end{pmatrix}$；

（2）用乘幂法求方程组系数阵的按摸最大的特征值和对应的特征向量。

（取 $v_0=(1,1,1)^T$ ，计算迭代三次的值，结果保留 4 位小数）

三.（10 分）试确定 $\alpha=0$ 是方程 $f(x)=e^{2x}-1-2x-2x^2=0$ 的几重根，试把 Newton 迭代加以改进使其迭代是平方收敛的。取初值 $x_0=0.25$，求 $f(x)=0$ 的近似根（要求迭代 2 次，结果保留 5 位小数）。

四.（10 分）方程组 $\begin{pmatrix}1&2&-2\\1&1&1\\2&2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix}$

讨论 Jacobi 迭代法和 Gauss-Seidel 迭代解此方程组的收敛性。

五.（10 分）设 $f(x)=\sqrt{x}$，求 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的一次最佳平方逼近多项式 $\varphi(x)=a_0+a_1x$，并求出平方误差。（结果保留 4 位小数）

六. 试确定求积公式 $\int_0^4 f(x)dx\approx A_0f(2-\dfrac{2}{\sqrt{3}})+A_1f(2+\dfrac{2}{\sqrt{3}})$ 的求积系数 A_0,A_1，使得其有尽可能高的代数精度，并确定代数精度？并用此公式计算积分 $\int_0^2\dfrac{1}{2+x}dx$，（结果保留 4 位小数）。

七. (10 分) 若 $f(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 有 n 个互异的零点 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，求 $\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^k}{f'(x_i)}$，$k=0,1,\cdots,n-1$ 。

八. (10 分) 用共轭梯度方法解方程组：$\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix}$

（取初值 $x^{(0)}=(0,0,0)^T$ ）。

共轭梯度方法：
$$\begin{cases}\mathbf{p}_0=\mathbf{r}^{(0)}=\mathbf{b}-A\mathbf{x}^{(0)}, & \alpha_k=\dfrac{(\mathbf{r}^{(k)},\mathbf{r}^{(k)})}{(\mathbf{p}_k,A\mathbf{p}_k)}\\ \mathbf{x}^{(k+1)}=\mathbf{x}^{(k)}+\alpha_k\mathbf{p}_k, & \mathbf{r}^{(k+1)}=\mathbf{r}^{(k)}-\alpha_kA\mathbf{p}_k\\ \beta_k=\dfrac{(\mathbf{r}^{(k+1)},\mathbf{r}^{(k+1)})}{(\mathbf{r}^{(k)},\mathbf{r}^{(k)})}, & \mathbf{p}_{k+1}=\mathbf{r}^{(k+1)}+\beta_k\mathbf{p}_k\end{cases}$$

九. (10 分) 用有限差分方法解边值问题：
$$\begin{cases}y''-(1+x^2)y=-1\quad, & -1<x<1\\ y(-1)=y(1)\end{cases}$$

取步长 $h=\frac{1}{2}$ 计算。(结果保留 4 位小数)

十. (10 分) 求解常微分方程初值问题 $\begin{cases}y'=f(x,y), & a\le x\le b\\ y(a)=\eta\end{cases}$ 的两步方法：
$$y_{n+1}=\frac{5}{4}y_n-\frac{1}{4}y_{n-1}+\frac{h}{8}(11y_n'-5y_{n-1})$$

(1) 求出局部截断误差；(2) 讨论方法的收敛性；(3) 讨论方法的绝对稳定性。

（在局部截断误差中 $C_r=\frac{1}{r!}\left\{1-[\sum_{i=0}^{p}(-i)^ra_i+r\sum_{i=-1}^{p}(-i)^{r-1}b_i]\right\},r=2,3,\cdots$ ；

参考定理：设 x_1 和 x_2 是实系数二次方程 $x^2+bx+c=0$ 的根，则 $|x_1|<1,|x_2|<1$ 的充要条件是 $|b|<1+c,|c|<1$ 。）

2018年试题

哈尔滨工业大学硕士研究生课程考试试题

考 试 科 目： 数值分析 A

学生所在院（系）：

学生所在学科 ：

学号：

注：不用抄题，答案写在答题卡上，写在题签上无效

一.（10 分）设 $f(x)=\dfrac{x}{x+1}$，取 $x_i=0,1,\cdots,4$，以 $(x_i,f(x_i))$ 为插值数据点作插值多项式 $\varphi_4(x)$，即 $\varphi_4(x)$ 满足： $\varphi(x_i)=\dfrac{i}{i+1}$， $i=0,1,\cdots,4$，试求 $\varphi_4(5)$。

二.（10 分）（1）设用 Doolittle 三角分解法求解方程组 $\begin{pmatrix}2&1&1\\1&3&2\\1&2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\6\\5\end{pmatrix}$；

（2）用乘幂法求方程组系数阵的按摸最大的特征值和对应的特征向量。

（取 $v_0=(1,1,1)^T$ ，计算迭代三次的值, 结果保留 4 位小数）

三.（10 分）试确定 α=0 是方程 $f(x)=e^{2x}-1-2x-2x^2=0$ 的几重根，试把 Newton 迭代加以改进使其迭代是平方收敛的。取初值 x_0=0.25，求 $f(x)$=0 的近似根（要求迭代 2 次，结果保留 5 位小数）。

四.（10 分）方程组 $\begin{pmatrix}1&2&-2\\1&1&1\\2&2&\text{[illegible]}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix}$

讨论 Jacobi 迭代法和 Gauss-Seidel 迭代解此方程组的收敛性。

五.（10 分）设 $f(x)=\sqrt{x}$，求 $f(x)$ 在$[0,1]$上的一次最佳平方逼近多项式 $\varphi(x)=a_0+a_1x$，并求出平方误差。(结果保留 4 位小数)

六. 试确定求积公式 $\int_0^4 f(x)dx\approx A_0f(2-\frac{2}{\sqrt{3}})+A_1f(2+\frac{2}{\sqrt{3}})$ 的求积系数 A_0,A_1，使得其有尽可能高的代数精度，并确定代数精度？并用此公式计算积分 $\int_0^2\frac{1}{2+x}dx$，(结果保留 4 位小数)。

七.（10分）若 $f(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots a_1x+a_0$ 有 n 个互异的零点 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，

求 $\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^k}{f'(x_i)}$，$k=0,1,\cdots,n-1$ 。

(2.02) $(6.46)^T$

八.（10分）用共轭梯度方法解方程组：$\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix}$

（取初值 $x^{(0)}=(0,0,0)^T$ ）。

共轭梯度方法：$\begin{cases}\mathrm{p}_0=\mathrm{r}^{(0)}=\mathrm{b}-A\mathrm{x}^{(0)}, & \alpha_k=\dfrac{(\mathrm{r}^{(k)},\mathrm{r}^{(k)})}{(\mathrm{p}_k,A\mathrm{p}_k)}\\ \mathrm{x}^{(k+1)}=\mathrm{x}^{(k)}+\alpha_k\mathrm{p}_k, & \mathrm{r}^{(k+1)}=\mathrm{r}^{(k)}-\alpha_kA\mathrm{p}_k\\ \beta_k=\dfrac{(\mathrm{r}^{(k+1)},\mathrm{r}^{(k+1)})}{(\mathrm{r}^{(k)},\mathrm{r}^{(k)})}, & \mathrm{p}_{k+1}=\mathrm{r}^{(k+1)}+\beta_k\mathrm{p}_k\end{cases}$

九.（10分）用有限差分方法解边值问题：

$$\begin{cases}y''-(1+x^2)y=-1, & -1<x<1\\ y(-1)=y(1)=0\end{cases}$$

取步长 $h=\frac{1}{2}$ 计算。（结果保留4位小数）

十.（10分）求解常微分方程初值问题 $\begin{cases}y'=f(x,y), & a\le x\le b\\ y(a)=\eta\end{cases}$ 的两步方法：

$$y_{n+1}=\frac{5}{4}y_n-\frac{1}{4}y_{n-1}+\frac{h}{8}(11y_n'-5y_{n-1}')$$

（1）求出局部截断误差；（2）讨论方法的收敛性；（3）讨论方法的绝对稳定性。

（在局部截断误差中 $C_r=\frac{1}{r!}\left\{1-[\sum_{i=0}^{p}(-i)^r a_i+r\sum_{i=-1}^{p}(-i)^{r-1}b_i]\right\}, r=2,3,\cdots$；

参考定理：设 x_1 和 x_2 是实系数二次方程 $x^2+bx+c=0$ 的根，则 $|x_1|<1,|x_2|<1$ 的充要条件是 $|b|<1+c,|c|<1$。）

2018年试题

哈尔滨工业大学硕士研究生课程考试试题

考 试 科 目： 数值分析A

学生所在院（系）：

学生所在学科 ：

学号：

注：不用抄题，答案写在答题卡上，写在题签上无效

一.（10分）设 $f(x)=\dfrac{x}{x+1}$，取 $x_i=0,1,\cdots,4$，以 $(x_i,f(x_i))$ 为插值数据点作插值多项式 $\varphi_4(x)$，即 $\varphi_4(x)$ 满足： $\varphi(x_i)=\dfrac{i}{i+1}$， $i=0,1,\cdots,4$，试求 $\varphi_4(5)$。

二.（10分）（1）设用 Doolittle 三角分解法求解方程组 $\begin{pmatrix}2&1&1\\1&3&2\\1&2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\6\\5\end{pmatrix}$；

（2）用乘幂法求方程组系数阵的按摸最大的特征值和对应的特征向量。

（取 $v_0=(1,1,1)^T$ ，计算迭代三次的值，结果保留 4 位小数）

三.（10分）试确定 $\alpha=0$ 是方程 $f(x)=e^{2x}-1-2x-2x^2=0$ 的几重根，试把 Newton 迭代加以改进使其迭代是平方收敛的。取初值 $x_0=0.25$，求 $f(x)=0$ 的近似根（要求迭代 2 次，结果保留 5 位小数）。

四.（10分）方程组 $\begin{pmatrix}1&2&-2\\1&1&1\\2&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix}$

讨论 Jacobi 迭代法和 Gauss-Seidel 迭代解此方程组的收敛性。

五.（10分）设 $f(x)=\sqrt{x}$，求 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的一次最佳平方逼近多项式 $\varphi(x)=a_0+a_1x$，并求出平方误差。（结果保留 4 位小数）.

六. 试确定求积公式 $\int_0^4 f(x)dx\approx A_0f(2-\frac{2}{\sqrt{3}})+A_1f(2+\frac{2}{\sqrt{3}})$ 的求积系数 A_0,A_1，使得其有尽可能高的代数精度，并确定代数精度？并用~~此公式计算积分~~ $\int_1^2\dfrac{1}{2+x}dx$，（结果保留 4 位小数）。

七.（10 分）若 $f(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots a_1x+a_0$ 有 n 个互异的零点 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，

求 $\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{x_i^k}{f'(x_i)}$，$k=0,1,\cdots,n-1$ 。

$(2,0,2)$
$(6,4,6)^T$

八.（10 分）用共轭梯度方法解方程组：$\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix}$

（取初值 $x^{(0)}=(0,0,0)^T$ ）。

共轭梯度方法：
$$\begin{cases}\mathbf{p}_0=\mathbf{r}^{(0)}=\mathbf{b}-A\mathbf{x}^{(0)}, & \alpha_k=\dfrac{(\mathbf{r}^{(k)},\mathbf{r}^{(k)})}{(\mathbf{p}_k,A\mathbf{p}_k)}\\ \mathbf{x}^{(k+1)}=\mathbf{x}^{(k)}+\alpha_k\mathbf{p}_k, & \mathbf{r}^{(k+1)}=\mathbf{r}^{(k)}-\alpha_kA\mathbf{p}_k\\ \beta_k=\dfrac{(\mathbf{r}^{(k+1)},\mathbf{r}^{(k+1)})}{(\mathbf{r}^{(k)},\mathbf{r}^{(k)})}, & \mathbf{p}_{k+1}=\mathbf{r}^{(k+1)}+\beta_k\mathbf{p}_k\end{cases}$$

九.（10 分）用有限差分方法解边值问题：
$$\begin{cases}y''-(1+x^2)y=-1, & -1<x<1\\ y(-1)=y(1)=0\end{cases}$$

取步长 $h=\dfrac{1}{2}$ 计算。（结果保留 4 位小数）

十.（10 分）求解常微分方程初值问题 $\begin{cases}y'=f(x,y), & a\le x\le b\\ y(a)=\eta\end{cases}$ 的两步方法

$$y_{n+1}=\frac{5}{4}y_n-\frac{1}{4}y_{n-1}+\frac{h}{8}(11y_n'-5y_{n-1}')$$

（1）求出局部截断误差；（2）讨论方法的收敛性；（3）讨论方法的绝对稳定性。

（在局部截断误差中 $C_r=\dfrac{1}{r!}\left\{1-[\sum\limits_{i=0}^{p}(-i)^ra_i+r\sum\limits_{i=-1}^{p}(-i)^{r-1}b_i]\right\},r=2,3,\cdots$；

参考定理：设 x_1 和 x_2 是实系数二次方程 $x^2+bx+c=0$ 的根，则 $|x_1|<1,|x_2|<1$ 的充要条件是

$|b|<1+c,|c|<1$。）

$\frac{2}{3}$ $\frac{1}{4}$

$-\frac{3}{12}$

$=\frac{2}{12}$

2018A答案

有限差分法不考

$$\int_0^1 \sqrt{x}\,dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 = \frac{2}{3}$$

$$\int_0^1 x\cdot\sqrt{x}\,dx = \frac{2}{5}$$

$$\cancel{\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}} \quad \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{matrix} a_0 \\ a_1 \end{matrix} \quad \begin{matrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{5} \end{matrix} \qquad \begin{cases} a_0 = \frac{4}{15} \\ a_1 = \frac{4}{5} \end{cases} \qquad \boxed{\|\delta\|_2^2}$$

$$\int_0^1 (\sqrt{x})^2 dx - \frac{4}{15}\cdot\frac{2}{3} - \frac{4}{5}\cdot\frac{2}{5} = \frac{1}{2} - \frac{8}{45} - \frac{8}{25} = \underline{0.0022}$$

$\frac{1}{2}$

例 若$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_0$有$n$个相异的实根$x_1, x_2, \ldots, x_n$，则有

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{x_j^k}{f'(x_j)}=\begin{cases}0 & 0\le k\le n-2\\ a_n^{(-1)} & k=n-1\end{cases}$$

- 证 由于$x_1, x_2, \ldots, x_n$是$f(x)$的n个互异的零点，所以

$$f(x)=a_n(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)=a_n\prod_{i=1}^{n}(x-x_i)$$

$$f'(x_j)=a_n\prod_{\substack{i=1\\ i\ne j}}^{n}(x_j-x_i)$$

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{x_j^k}{f'(x_j)}=\sum_{j=1}^{n}\frac{x_j^k}{a_n\prod\limits_{\substack{i=1\\ i\ne j}}^{n}(x_j-x_i)}=\frac{1}{a_n}\sum_{j=1}^{n}\frac{x_j^k}{\prod\limits_{\substack{i=1\\ i\ne j}}^{n}(x_j-x_i)}$$

记$g(x)=x^k$，则
$$g_k^{(n-1)}(x)=\begin{cases}0 & 0\le k\le n-2\\ (n-1)! & k=n-1\end{cases}$$

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{x_j^k}{f'(x_j)}=\frac{1}{a_n}\sum_{j=1}^{n}\frac{g_k(x_j)}{\prod\limits_{\substack{i=1\\ i\ne j}}^{n}(x_j-x_i)}=\frac{1}{a_n}g_k[x_1,x_2,\cdots,x_n]=\frac{1}{a_n}\frac{g_k^{(n-1)}(\xi)}{(n-1)!}=\begin{cases}0 & 0\le k\le n-2\\ \dfrac{1}{a_n} & k=n-1\end{cases}$$

2017秋-数值分析（A）

1. 在$(0,1)$上给出函数$f(x)=e^x$的等距节点函数表，若想用二次插值来计算$f(x)$的近似值，要求截断误差不超过10^{-6}，问使用多大的步长？

2. 1）用Crout三角分解法求解方程组

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 10 & 3 & 4 \\ 4 & 6 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 8 \end{pmatrix}$$

2）用乘幂法求方程组系数阵的按模最大的特征值和对应的特征向量。

3. 设常数$a\neq 0$，求出a的取值范围使得方程组的Jacobi迭代法收敛。

$$\begin{pmatrix} a & -2 & -1 \\ 2 & a & -3 \\ 1 & 3 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}$$

4. 用一种二阶迭代方法构造 $f(x)=x^2-2xe^{-x}+e^{-2x}=0$ 根的迭代形式，取 $x_0=0.5$，迭代3次，保留4位小数。

5. 用Helmite插值拟合 $f(x)$，拟合函数为 $P(x)$ 其中满足条件：

$p(0)=f(0)=0$，$p'(0)=f'(0)=1$，$p(1)=f(1)=1$，$p'(1)=f'(1)=2$

并求出插值余项。

6. 求出 $f(x)=\cos x$ 在[0,1]之间的最佳平方逼近元素

$p(x)=a_0^*+a_1^*x$ 的系数，并求出最小平方误差。

7. 试确定求积公式 $\int_{-2}^{2}f(x)dx=A_{-1}f(-2)+A_0f(0)+A_1f(2)$ 中的参数 A_{-1} A_0 A_1，使公式的代数精度尽可能高，并导出该公式的余项

8. 用共轭梯度法求解线性方程组（取初值 $x_0=(0,0,0)^T$）

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

共轭梯度方法：
$$\begin{cases} P_0=r^{(0)}=b-Ax^{(0)}, & \alpha_k=\dfrac{(r^{(k)},r^{(k)})}{(P_k,AP_k)} \\ x^{(k+1)}=x^{(k)}+\alpha_k P_k, & r^{(k+1)}=r^{(k)}-\alpha_k AP_k \\ \beta_k=\dfrac{(r^{(k+1)},r^{(k+1)})}{(r^{(k)},r^{(k)})} & P_{k+1}=r^{(k+1)}+\beta_k P_k \end{cases}$$

9. 用改进的 Eular 方法

$$y_{n+1}=y_n+\frac{h}{2}[f(x_n,y_n) + f(x_{n+1}, y_n+hf(x_n,y_n))]$$

解初值问题 $\begin{cases} 10y'+ \text{[illegible]} \\ y(0)=10 \end{cases}$ [illegible]问步长 h 应取何值方能保证方法的绝对稳定性？在 $h=10, 20$ 中选择一个步长，计算 y_{30}

10. 线性多步法 $y_{n+1}=\frac{2}{3}y_n+\frac{1}{3}y_{n-1}+\frac{h}{2}(\frac{5}{3}y'_{n+1}+y'_{n-1})$

1) 确定方法的局部截断误差

2) 讨论方法的收敛性

3) 讨论方法的绝对稳定性

注：局部截断误差中，$c_r=\frac{1}{r!}\{1-[\sum_{i=1}^{p}(-i)^r a_i+r\sum_{i=-1}^{p}(-i)^{r-1}b_i]\}$，$r=2,3,\cdots$

参考定理：设 x_1 和 x_2 是实系数二次方程 $x^2+bx+c=0$ 的根

则 $|x_1|<1$，$|x_2|<1$ 的充要条件是 $|b|<1+c$，$|c|<1$

哈工大 资源分享
QQ 2842205604

说明：本试题为回忆版试题，如有雷同，不胜荣幸。

2017 秋数值分析 A.

1. 记 $f(x)=e^x$ 的二次插值为 $L_2(x)$，余项 $E(x)=\frac{f^{(3)}(\xi)}{3!}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$

令 $x-x_1=t$，则 $x-x_0=t-h$，$x-x_2=t+h$

设 $G(t)=t(t-h)(t+h)=t^3-h^2t$，令 $G'(t)=0$ 得 $t=\pm\frac{h}{\sqrt{3}}$

$\therefore G(t)_{max}=\frac{2}{3\sqrt{3}}h^3$

$\therefore |E_2(x)|\le\frac{e^1}{3!}\times\frac{2}{3\sqrt{3}}h^3=\frac{e}{9\sqrt{3}}h^3\le 10^{-6}$

$\therefore h\le 1.78991\times10^{-3}$

2. QNMD

3. $B_J=\begin{pmatrix}0 & \frac{2}{a} & \frac{1}{a}\\ \frac{2}{a} & 0 & \frac{2}{a}\\ \frac{-1}{a} & -\frac{2}{a} & 0\end{pmatrix}$ 令 $|\lambda I-B_J|=\lambda(\lambda^2+\frac{14}{a^2})$

$\lambda_1=0$，$\lambda_{2,3}=\pm\frac{\sqrt{14}}{a}i$

令 $|\frac{\sqrt{14}}{a}|<1$ 得 $a<-\sqrt{14}$ 或 $a>\sqrt{14}$.

4. $f(x)=(x-e^{-x})^2=0$，x_0 是 2 重根

$\therefore$ ~~x_k~~ $x_{k+1}=x_k-2\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}=x_k-\frac{x_k-e^{-x_k}}{1+e^{-x_k}}=\frac{x_k+1}{e^{x_k}+1}$

5. 设 $p(x)=ax^3+bx^2+cx$

$\begin{cases}c=1\\a+b+c=1\\3a+2b+c=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=1\\b=-1\\c=1\end{cases}$ $\therefore p(x)=x^3-x^2+x$

$E(x)=\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}x^2(x-1)^2$

6. $\varphi=\mathrm{span}\{1,x\}$.

$(\varphi_0,\varphi_0)=1$，$(\varphi_1,\varphi_1)=\int_0^1x^2dx=\frac{1}{3}$，$(\varphi_0,\varphi_1)=(\varphi_1,\varphi_0)=\int_0^1x\,dx=\frac{1}{2}$

$(f,\varphi_0)=\int_0^1\cos x\,dx=\sin1$，$(f,\varphi_1)=\int_0^1x\cdot\cos x\,dx=x\sin x+\cos x\big|_0^1$

$=\sin1+\cos1-1$

$\therefore\begin{cases}1\cdot a_0+\frac{1}{2}a_1=\sin1\\\frac{1}{2}a_0+\frac{1}{3}a_1=\sin1+\cos1-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_0=4\sin1+3\cos1-1\\a_1=6-6\times(\sin1+\cos1)\end{cases}$

$\therefore y=4\sin1+3\cos1-1+6[1-\sin1-\cos1]x$

7. $\int_{-2}^{2}f(x)dx=\frac{2}{3}f(-2)+\frac{8}{3}f(0)+\frac{2}{3}f(2)$ 精度为3

辛普森公式余项：$E=\int_a^bf(x)dx-\int_a^bH_3(x)dx$

$=\frac{1}{4!}\int_a^bf^{(4)}(\xi)\cdot(x-a)(x-\frac{a+b}{2})^2(x-b)dx$

$=-\frac{(b-a)^5}{2880}f^{(4)}(\eta)$ 本题中 $b-a=4$

8. $(1,1,-1)^T$

9. $y'=-\frac{1}{10}y$ 代入方程解得 $-\frac{h}{10}\in(-2,0)$ $\therefore h\in(0,20)$

取步长10.

10. $a_0=\frac{2}{3}$，$a_1=\frac{1}{3}$，$b_{-1}=\frac{5}{6}$，$b_0=0$，$b_1=\frac{1}{2}$

(1) $C_0=C_1=C_2=0$，$C_3=-\frac{4}{9}$

$\therefore T_n=-\frac{4}{9}h^3y^{(3)}(x_n)+\cdots$

(2) 相容，$\rho(r)=r^2-\frac{2}{3}r-\frac{1}{3}=(r-1)(r+\frac{1}{3})$ 满足根条件

$\therefore$ 收敛

(3) $\pi(r,\bar{h})=(1-\frac{5}{6}\bar{h})r^2-\frac{2}{3}r-(\frac{1}{3}+\frac{\bar{h}}{2})$

令 $\begin{cases}\left|\dfrac{-\frac{2}{3}}{1-\frac{5}{6}\bar{h}}\right|<1-\dfrac{\frac{1}{3}+\frac{\bar{h}}{2}}{1-\frac{5}{6}\bar{h}}\\[2ex]\left|\dfrac{-(\frac{1}{3}+\frac{\bar{h}}{2})}{1-\frac{5}{6}\bar{h}}\right|<1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\bar{h}<0 \text{ 且 } \bar{h}<1\\ \bar{h}<4 \text{ 且 } \bar{h}<\frac{1}{2}\end{cases}$

$\therefore$ 绝对稳定区间 $(-\infty,0)$

数值分析复习大纲

第一章　非线性方程求根

1 掌握单点迭代的收敛性，收敛阶，计算效率。
2 掌握 Newton 迭代方法的应用及与割线法的比较。
3 掌握重根上的迭代方法及相关证明。
4 掌握逆 Broyden 方法的应用（不用记公式）。

第二章　线性方程组的数值解法

1 掌握向量、矩阵范数的计算，条件数的计算。
2 掌握三角分解方法解线性方程组（Doolittle、Crout）。
3 理解用条件数分析误差的方法。
4 掌握 Jacobi 迭代和 Gauss-Sedel 迭代解线性方程组（矩阵形式、分量形式、迭代矩阵、收敛条件）
5 掌握共轭梯度法（cg 方法，不用记公式）。

第三章　插值方法与函数逼近

1 掌握 Lagrange、Newton 插值及其余项的推导和应用。
2 掌握有限差分的定义及性质。
3 掌握 Hermite 插值方法，待定系数法及余项表达式。理解分段插值。
4 理解三次样条函数的定义及判别。
5 掌握有理逼近方法。
6 掌握连续形式的最佳平方逼近和最小二乘法。

第四章　数值积分

1 掌握代数精度的概念和积分公式的构造方法。
2 掌握梯形公式、Simpson 公式的应用及其余项的推导。
3 掌握 Romberg 积分方法。
4 掌握 Gauss-Legendre 公式（二点、三点，一般区间）。
~~5 理解带权函数的积分公式。~~

第五章　矩阵特征值的计算

1 掌握乘幂法求矩阵的按模最大的特征值及特征向量。（含反幂法）

第六章　常微分方程初值问题的数值解

1 掌握尤拉(显式)公式、梯形公式和改进的尤拉公式的应用，收敛性，稳定性。
2 掌握线性多步法的一般形式，收敛性，稳定性。
3 掌握局部截断误差，方法阶。（Cq 公式不用记）
4 掌握二阶 Runge-Kutta 法的应用，稳定性。（-2，0）
5 掌握四阶 Runge-Kutta 法经典公式的应用。（-2.78，0）（记公式）
~~6 理解预测-校正法与 Runge-Kutta 法的比较。~~

考试注意事项：1 带实验报告；2 带计算器。
答疑时间：第十七周　周六　下午：13：00-16：30　　地点：诚意楼 203

考试时间：1月4日 18:15～20:30　答疑：1月3日下午 13:00～16:30

2015 年　硕士研究生《数值分析》试卷

1. $x=-3,2$ 分别是方程 $x^3-x^2-8x+12=0$ 的根；讨论用 Newton 迭代法求它们近似值的收敛阶。取初值 $x_0=-2$ 计算根 $x=-3$ 的近似值，要求迭代 3 次。（结果保留 4 位小数）

解：　设 $f(x)=x^3-x^2-8x+12$

$f'(x)=3x^2-2x-8$

$f''(x)=6x-2$

$f(-3)=0$，　$f'(-3)\neq 0$，　$f(2)=0$，　$f'(2)=0$，　$f''(2)=10\neq 0$

则：-3 是 $f(x)=0$ 的单根，故 Newton 迭代在 -3 附近是平方收敛；

2 是 $f(x)=0$ 的二重根，故 Newton 迭代在 2 附近是线性收敛；

取 $x_0=-2$，Newton 迭代：

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}=x_n-\frac{x_n^3-x_n^2-8x_n+12}{3x^2-2x-8}$$

$$=\frac{2x_n^2+3x_n+6}{3x_n+4}$$

$$x_1=\frac{2x_0^2+3x_0+6}{3x_0+4}=$$

$$x_2=\frac{2x_1^2+3x_1+6}{3x_1+4}=$$

$$x_3=\frac{2x_2^2+3x_2+6}{3x_2+4}=$$

2. 设常数 $a\neq 0$ ，求出 a 的取值范围使得解方程组

$$\begin{pmatrix} a & -2 & -1 \\ 2 & a & -3 \\ 1 & 3 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

的 Jacobi 迭代法收敛。

解：Jacobi 迭代：

$$x^{(k+1)}=B_J x^{(k)}+g$$

$$B_J=-\begin{pmatrix} a & & \\ & a & \\ & & a \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & -3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}=-\frac{1}{a}\begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & -3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$g=\begin{pmatrix} a & & \\ & a & \\ & & a \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

迭代矩阵 B_J 的特征方程：

$$|\lambda E-B_J|=\left|\begin{pmatrix} \lambda & & \\ & \lambda & \\ & & \lambda \end{pmatrix}+\frac{1}{a}\begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & -3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}\right|=\frac{1}{a}\begin{vmatrix} \lambda a & -2 & -1 \\ 2 & \lambda a & -3 \\ 1 & 3 & \lambda a \end{vmatrix}=0$$

即：$(\lambda a)^3+14(\lambda a)=0$

特征根：$\lambda=0,\lambda=\pm\dfrac{\sqrt{14}}{a}i$

谱半径：$\rho(B_J)=\dfrac{\sqrt{14}}{|a|}<1$ 时 Jacobi 迭代收敛

故：$|a|>\sqrt{14}$

软件分享群
Q群 626648181

哈工大资源分享
QQ 2842305604

3. 设（1）用 Crout 三角分解法求解方程组 $\begin{pmatrix}2&3&2\\10&3&4\\3&6&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\13\\9\end{pmatrix}$；

（2）用乘幂法求方程组系数阵的按摸最大的特征值和对应的特征向量。

（取 $v_0=(0,0,1)^T$ ，计算迭代三次的值）

解：（1）Crout 三角分解：

$$A=\begin{pmatrix}2&3&2\\10&3&4\\3&6&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&&\\10&-12&\\3&\frac{3}{2}&-\frac{11}{4}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&\frac{3}{2}&1\\&1&\frac{1}{2}\\&&1\end{pmatrix}=LU$$

$$L=\begin{pmatrix}2&&\\10&-12&\\3&\frac{3}{2}&-\frac{11}{4}\end{pmatrix},\ U=\begin{pmatrix}1&\frac{3}{2}&1\\&1&\frac{1}{2}\\&&1\end{pmatrix}$$

$$Ax=b\Leftrightarrow\begin{cases}Ly=b\\Ux=y\end{cases}$$

求解 $Ly=b$ 得 $y=\left(\frac{5}{2},1,0\right)^T$

求解 $Ux=y$ 得 $x=(1,1,0)^T$

（2）$v_0=(0,0,1)^T$，$u_0=\frac{v_0}{\max(v_0)}=(0,0,1)^T$ $\lambda=1$

$v_1=Au_0=(2,4,1)^T$，$u_1=\frac{v_1}{\max(v_1)}=(0.5,1,0.25)^T$ $\lambda=4$

$v_2=Au_1=(\ \ ,\ \ ,\ \ )^T$，$u_2=\frac{v_2}{\max(v_2)}=(0.5,1,0.8611)^T$ $\lambda=9$

$v_3=Au_2=(\ \ ,\ \ ,\ \ )^T$，$u_3=\frac{v_3}{\max(v_3)}=(0.5,1,0.7306)^T$，$\lambda=11.44$

哈工大二手市场

Q群：744900487

4.试确定 $\alpha=0$ 是方程 $f(x)=e^{2x}-1-2x-2x^2=0$ 的几重根，取初值 $x_0=0.25$ 用改进的具有二阶收敛速度的 Newton 迭代法求 $f(x)=0$ 的根 $\alpha=0$ 的近似值。要求迭代 2 次（结果保留 4 位小数）。

(1) $f(\alpha)=0$.

$f'(\alpha)=2e^{2x}-2-4x=0$

$f''(\alpha)=4e^{2x}-4=0$

$f'''(\alpha)=8e^{2x}=8\neq 0$

$\therefore$ α是三重根

(2) $$x_{i+1}=x_i-3\frac{e^{2x_i}-1-2x_i-2x_i^2}{2e^{2x_i}-2-4x_i}$$

5. 求 4 次 Hermit 插值多项式 $H(x)$ ，满足：

$H(0)=H'(0)=0, H(1)=H'(1)=1, H(2)=1$

并写出误差表达式。

解： 方法一：因 $H(0)=H'(0)=0$，故设：$H(x)=x^2(a+bx+cx^2)$

由 $H(1)=H'(1)=1, H(2)=1$，得

$$\begin{cases} a+b+c=1 \\ 2a+3b+4c=1 \\ a+2b+4c=1 \end{cases}$$

得 $a=\frac{9}{4}, b=-\frac{3}{2}, c=\frac{1}{4}$

$H(x)=\frac{1}{4}x^2(x-3)^2$

误差：$E(x)=f(x)-H(x)=\frac{f^{(5)}(\xi)}{5!}x^2(x-1)^2(x-2), \ \xi\in(0,2)$

方法一：满足 $H(0)=0, H(1)=H(2)=1$ 的插值多项式为：

$p_2(x)=\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}x^2$

设：$H(x)=p_2(x)+(A+Bx)(x-0)(x-1)(x-2)$

由
$$H'(0)=\frac{3}{2}+2B=0,$$
$$H'(1)=\frac{1}{2}-(A+B)=1$$

得：由 $A=\frac{1}{4}, B=-\frac{3}{4}$

$$H(x)=\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}(x-3)(x-0)(x-1)(x-2)$$
$$=\frac{1}{4}x^2(x-3)^2$$

误差：$E(x)=f(x)-H(x)=\frac{f^{(5)}(\xi)}{5!}x^2(x-1)^2(x-2), \ \xi\in(0,2)$

6. 试求求积公式 $\int_{-2}^{2} f(x)dx \approx A_0 f(-\frac{2\sqrt{3}}{3}) + A_1 f(\frac{2\sqrt{3}}{3})$ 的求积系数 A_0, A_1，使得其有尽可能高的代数精度，是否是 Gauss 型的？并用此公式计算积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$（结果保留 5 位小数）。

解： 令 $f(x)=1, x$ 求积公式准确成立，有：

$$\begin{cases} A_0 + A_1 = 4 \\ A_0(-\frac{2\sqrt{3}}{3}) + A_1(\frac{2\sqrt{3}}{3}) = 0 \end{cases}$$

得： $A_0 = A_1 = 2$

求积公式： $\int_{-2}^{2} f(x)dx \approx 2f(-\frac{2\sqrt{3}}{3}) + 2f(\frac{2\sqrt{3}}{3})$

令 $f(x)=x^2, x^3$ 求积公式准确成立的，$f(x)=x^4$ 求积公式不是准确成立的，

求积公式代数精度为 3，是 Gauss 型的；

作变换 $x=\frac{\pi}{8}(t+2)$， $t \in [-2,2]$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = \int_{-2}^{2} \frac{\pi}{8} \sin\frac{\pi}{8}(t+2)dt = \frac{\pi}{8}\int_{-2}^{2} \sin\frac{\pi}{8}(t+2)dt \approx 222$$

$$\approx \frac{\pi}{8}[2\sin\frac{\pi}{8}(-\frac{2\sqrt{3}}{3}+2) + 2\sin\frac{\pi}{8}(\frac{2\sqrt{3}}{3}+2))]$$

$$\approx 0.99848$$

7. 用最小二乘法求一个形如 $y=ax^2+b$ 的经验公式，使它与下列数据拟合

x_i	19	25	31	38	44
y_i	19.0	32.3	49.0	73.3	97.8

解：　取　$\varphi_0(x)=1, \varphi_1(x)=x^2$，

拟合函数为 $y=b\varphi_0(x)+a\varphi_1(x)=b+ax^2$

法方程为：

$$\begin{cases} 5b+5327a=271.4 \\ 5327b+7277699a=369321.5 \end{cases}$$

得：　$a=0.050351, b=0.9726045$

拟合函数为 $y=0.0500351x^2+0.9726045$

哈工大二手市场
Q群：744900487

8. 用共轭梯度方法解方程组： $\begin{pmatrix}2 & 1\\1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\5\end{pmatrix}$ （取初值 $x^{(0)}=(0,0)^T$ ）。

共轭梯度方法：
$$\begin{cases} p_0 = r^{(0)} = b - Ax^{(0)}, \quad \alpha_k = \dfrac{(r^{(k)}, r^{(k)})}{(p_k, Ap_k)} \\ x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha_k p_k, \quad r^{(k+1)} = r^{(k)} - \alpha_k A p_k \\ \beta_k = \dfrac{(r^{(k+1)}, r^{(k+1)})}{(r^{(k)}, r^{(k)})}, \quad p_{k+1} = r^{(k+1)} + \beta_k p_k \end{cases}$$

解： $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\1 & 3\end{pmatrix}$ 是对称正定阵；

$$p_0 = r^{(0)} = b - Ax^{(0)} = (5,5)^T$$

$$\alpha_0 = \frac{(r^{(0)}, r^{(0)})}{(p_0, Ap_0)} = \frac{2}{7}$$

$$x^{(1)} = x^{(0)} + \alpha_0 p_0 = (\frac{10}{7}, \frac{10}{7})^T$$

$$r^{(1)} = r^{(0)} - \alpha_0 A p_0 = (\frac{5}{7}, -\frac{5}{7})^T$$

$$\beta_0 = \frac{(r^{(1)}, r^{(1)})}{(r^{(0)}, r^{(0)})} = \frac{1}{49}$$

$$p_1 = r^{(1)} + \beta_0 p_0 (\frac{40}{49}, -\frac{30}{49})^T$$

$$\alpha_1 = \frac{(r^{(1)}, r^{(1)})}{(p_1, Ap_1)} = \frac{7}{10}$$

$$x^{(2)} = x^{(1)} + \alpha_1 p_1 = (2,1)^T$$

$$r^{(1)} = r^{(0)} - \alpha_0 A p_0 = (0,0)^T$$

解为： $x^{(2)} = (2,1)^T$

9. 应用 Heun 方法：

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \frac{h}{4}(K_1 + 3K_2) \\ K_1 = f(x_n, y_n) \\ K_2 = f(x_n + \frac{2}{3}h, y_n + \frac{2}{3}hK_1) \end{cases}$$

解初值问题 $\begin{cases} 5y' + 8y = 0 \\ y(0) = 2 \end{cases}$ 时，问步长 h 应如何选取方能保证方法的绝对稳定性？ 并在 $h = 1, 2$ 中选取数值稳定的步长计算 $y(2)$ 的近似值.

解： 将 Heun 方法应用到方程 $5y' + 8y = 0$ 上，有：

$$y_{n+1} = (1 + \bar{h} + \frac{\bar{h}^2}{2})y_n, \quad \text{其中 } \bar{h} = -\frac{8}{5}h = -1.6h$$

当 $\bar{h} = -(2, 0)$ 时，方法是绝对稳定的，

即 $h = (0, \frac{5}{4}) = (0, 1.25)$ 时方法是绝对稳定的；

故取 $h = 1 \in (0, \frac{5}{4}) = (0, 1.25)$，即 $\bar{h} = -\frac{8}{5}$，方法是绝对稳定的.

$$y_{n+1} = \frac{17}{25}y_n,$$

$$y_1 = \frac{17}{25}y_0 = \frac{34}{25} = 1.36,$$

$$y_2 = \frac{17}{25}y_1 = \frac{17}{25} \times \frac{34}{25} = \frac{578}{625} = 0.9248,$$

软件分享群

Q群 626648181

10．求解常微分方程初值问题$\begin{cases} y'=f(x,y), & a\le x\le b \\ y(a)=\eta \end{cases}$的两步方法：

$$y_{n+1}=y_n+\frac{h}{12}(5y'_{n+1}+8y'_n-y'_{n-1})$$

（1）求出局部截断误差；

（2）讨论方法的收敛性；

（3）讨论方法的绝对稳定性。

解：$a_0=1, a_1=0, b_{-1}=\frac{5}{12}, b_0=\frac{8}{12}, b_1=-\frac{1}{12}$

（1） 把局部截断误差T_n在x_n处Taylor展开：

$$T_n=c_0y(x_n)+c_1hy'(x_n)+\cdots+c_rh^ry^{(r)}(x_n)+\cdots$$

$$c_0=c_1=c_2=c_3=0$$

$$c_4=-\frac{1}{24}\neq 0$$

$$T_n=-\frac{h^4}{24}y^{(4)}(x_n)+\cdots=-\frac{h^4}{24}y^{(4)}(\xi_n),\quad \xi_n\in(x_n,x_{n+1})$$

（2）$c_0=c_1=0$，方法是相容的；

第一特征多项式：$\rho(r)=r^2-r$，$\rho(r)=r^2-r=0$两根为：$r_0=1, r_1=0$，

$|r|_i<1, r_1=1$是单根，方法满足根条件；

由收敛的充分必要条件知方法是收敛的。

（2） 稳定多项式：$\pi(r;\bar{h})=(1-\frac{5}{12}\bar{h})r^2-(1+\frac{2}{3}\bar{h})r+\frac{\bar{h}}{12}$，

由绝对稳定性要求知$\bar{h}<0$，故$1-\frac{5}{12}\bar{h}>0$

由参考定理知：$\pi(r;\bar{h})=0$的两根$|r_{0,1}(\bar{h})|<1\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \left|-\dfrac{1+\frac{2}{3}\bar{h}}{1-\frac{5}{12}\bar{h}}\right|<1+\dfrac{\frac{\bar{h}}{12}}{1-\frac{5}{12}\bar{h}} \\ \left|\dfrac{\frac{\bar{h}}{12}}{1-\frac{5}{12}\bar{h}}\right|<1 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} \left|-(1+\frac{2}{3}\bar{h})\right|<(1-\frac{5}{12}\bar{h})+\frac{\bar{h}}{12} \\ \left|\frac{\bar{h}}{12}\right|<1-\frac{5}{12}\bar{h} \end{cases}$$

故$\bar{h}\in(-6,0)$，即当$\bar{h}\in(-6,0)$时方法是绝对稳定的。

2014年数值分析

1. 若α是$f(x)$的r重根（$r>1$为整数），且$f(x)$在根α的邻域内有充分多阶导数，试证明：求根α的Newton迭代法收敛，且收敛阶为1。

解：α是$f(x)$的r重根，则有$f(\alpha)=f'(\alpha)=\cdots=f^{(r-1)}(\alpha)=0$，有Newton迭代函数

$$
\begin{aligned}
\varphi(x)&=x-\frac{f(x)}{f'(x)}\\
&=x-\frac{f(\alpha)+f'(\alpha)(x-\alpha)+\cdots+\frac{1}{r!}f^{(r)}(\zeta_1)(x-\alpha)^r}{f'(\alpha)+f''(\alpha)(x-\alpha)+\cdots+\frac{1}{(r-1)!}f^{(r)}(\zeta_2)(x-\alpha)^{r-1}}\\
&=x-\frac{1}{r}\frac{f^{(r)}(\zeta_1)}{f^{(r)}(\zeta_2)}(x-\alpha)
\end{aligned}
$$

其中$\zeta_1,\zeta_2\in(x,\alpha)$，

考虑到$\varphi(\alpha)=\alpha$，于是有

$$\varphi'(\alpha)=\lim_{x\to\alpha}\frac{\varphi(x)-\varphi(\alpha)}{x-\alpha}=1-\frac{1}{r}\neq 0,$$

由于$r>1$，则$|\varphi'(\alpha)|<1$，所以此时Newton迭代法收敛且收敛阶为1。

2. 对于迭代函数$\varphi(x)=x+c(x^2-2)$，根据局部收敛定理及收敛阶判定定理，试讨论：

（1）当c为何值时，$x_{k+1}=\varphi(x_k),k=0,1,2,\cdots$产生的序列$\{x_k\}$收敛于$\sqrt{2}$；

（2）c取何值时收敛阶至少为2阶？

解：（1）$\varphi'(x)=1+2cx$，要求$x_{k+1}=\varphi(x_k),k=0,1,2,\cdots$收敛，应有$|\varphi'(\alpha)|<1$，

即$|1+2c\alpha|<1$，解得$-1<c\alpha<0$，且$\alpha=\sqrt{2}$，

故当$-\frac{1}{\sqrt{2}}<c<0$

（2）当$\varphi'(\alpha)=0$时，迭代至少2阶收敛

此时应有$1+2c\alpha=0$，即取$c=-\frac{1}{2\sqrt{2}}$。

3. 用 Doolittle 三角分解法求解下面的线性方程组：

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 6\\2 & 5 & 15\\6 & 15 & 46\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}.$$

解：由 Doolittle 三角分解 $A=L\cdot U$，其中 L 为单位下三角阵，U 为上三角阵，得

$$\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\a_{21} & a_{22} & a_{23}\\a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\l_{21} & 0 & 0\\l_{31} & l_{32} & l_{33}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}u_{11} & u_{12} & u_{13}\\0 & u_{22} & u_{23}\\0 & 0 & u_{33}\end{bmatrix}$$

即 $$\begin{bmatrix}1 & 2 & 6\\2 & 5 & 15\\6 & 15 & 46\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\2 & 1 & 0\\6 & 3 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 2 & 6\\0 & 1 & 3\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

原方程变为 $\begin{cases}Ly=b\\Ux=y\end{cases}$，解得 $y=(-1,3,-3)^T, x=(-7,12,-3)^T$.

4. 设方程组 $\begin{cases}x_1+0.4x_2+0.4x_3=1\\0.4x_1+x_2+0.8x_3=2\\0.4x_1+0.8x_2+x_3=3\end{cases}$，试考察解此方程组的 Jacobi 迭代法及 Gauss-Seidel 迭代法的收敛性。

解：Jacobi 迭代法的迭代矩阵为

$$B_J=D^{-1}(L+U)=\begin{bmatrix}0 & -0.4 & -0.4\\-0.4 & 0 & -0.8\\-0.4 & -0.8 & 0\end{bmatrix}$$

$$|\lambda I-B_J|=(\lambda-0.8)(\lambda^2+0.8\lambda-0.32)$$

$\rho(B_J)=1.0928203>1$，故 Jacobi 迭代法不收敛；

Gauss-Seidel 迭代法的迭代矩阵为

$$B_G=(D-L)^{-1}U=\begin{bmatrix}0 & -0.4 & -0.4\\0 & 0.16 & -0.64\\0 & -0.032 & 0.672\end{bmatrix}$$

$\rho(B_G)\le\|B_G\|_\infty=0.8<1$，故 Gauss-Seidel 迭代法收敛。

5. 给定线性代数方程组$\begin{bmatrix}3 & -1 & 0\\0 & 2 & 3\\2 & 1 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\4\\5\end{bmatrix}$，给出Gauss-Seidel迭代格式，并分析该格式的收敛性。

解：Gauss-Seidel迭代格式为$\begin{bmatrix}x_1^{k+1}\\x_2^{k+1}\\x_3^{k+1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1/3 & 0\\0 & 0 & -3/2\\0 & -1/6 & 3/8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1^k\\x_2^k\\x_3^k\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\2\\1/4\end{bmatrix}$，

迭代矩阵G的特征方程为$\begin{vmatrix}\lambda & -1/3 & 0\\0 & \lambda & 3/2\\0 & 1/6 & \lambda-3/8\end{vmatrix}=0$

解得特征值为$\lambda_1=0,\lambda_2=\dfrac{3+\sqrt{73}}{16},\lambda_3=\dfrac{3-\sqrt{73}}{16}$，

谱半径为$\rho(G)=\dfrac{3+\sqrt{73}}{16}=0.7215<1$，

所以Gauss-Seidel迭代法收敛。

6. 若用等距节点的分段二次插值对函数$f(x)=e^x$在$-4\le x\le 4$上进行插值，要使误差不超过10^{-6}，使用的步长（节点间距）h应取多少？

解：以x_{i-1},x_i,x_{i+1}为等距插值节点，有$x_{i-1}=x_i-h,x_{i+1}=x_i+h$

且插值多项式误差为

$$\begin{aligned}R(x)&=\frac{1}{3!}f'''(\zeta)(x-x_{i-1})(x-x_i)(x-x_{i+1})\\&\le\frac{1}{6}e^4\max_{x_{i-1}\le x\le x_{i+1}}\left|(x-x_{i-1})(x-x_i)(x-x_{i+1})\right|\\&\le\frac{1}{6}e^4\frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt{3}}h^3=\frac{e^4}{9\sqrt{3}}h^3\end{aligned}$$

令$\dfrac{e^4}{9\sqrt{3}}h^3\le10^{-6}$，得$h\le0.00658$。

7. 求函数$f(x)=\dfrac{1}{x}$在区间$x\in[1,3]$上关于$\Phi=span\{1,x\}$的最佳平方逼近多项式。

解：设$\varphi_0(x)=1,\varphi_1(x)=x$，$f(x)$在$\Phi$中的最佳平方逼近多项式为

$$p(x)=a_0\varphi_0(x)+a_1\varphi_1(x),$$

且a_0,a_1满足如下法方程$\begin{bmatrix}(\varphi_0,\varphi_0) & (\varphi_0,\varphi_1)\\(\varphi_1,\varphi_0) & (\varphi_1,\varphi_1)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_0\\a_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(\varphi_0,f)\\(\varphi_1,f)\end{bmatrix}$，即

$\begin{bmatrix}2 & 4\\4 & 26/3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_0\\a_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\ln 3\\2\end{bmatrix}$，解得

$$a_0=\frac{13}{2}\ln 3-6\approx 1.140978, a_1=3-3\ln 3\approx -0.295836,$$

所求最佳平方逼近多项式为$p(x)=1.140978-0.295836x$。

8. 设$\Phi=span\{1,x^2\}$，试在Φ中求$f(x)=|x|$在区间$[-1,1]$上的最佳平方逼近多项式。

解：设$\varphi_0(x)=1,\varphi_1(x)=x^2$，$f(x)$在$\Phi$中的最佳平方逼近多项式为

$$p(x)=a_0\varphi_0(x)+a_1\varphi_1(x),$$

且a_0,a_1满足如下法方程$\begin{bmatrix}(\varphi_0,\varphi_0) & (\varphi_0,\varphi_1)\\(\varphi_1,\varphi_0) & (\varphi_1,\varphi_1)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_0\\a_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(\varphi_0,f)\\(\varphi_1,f)\end{bmatrix}$，即

$\begin{bmatrix}2 & 2/3\\2/3 & 2/5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_0\\a_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1/2\end{bmatrix}$，解得$a_0=3/16, a_1=15/16$，

所求最佳平方逼近多项式为$p(x)=\dfrac{3}{16}+\dfrac{15}{16}x^2$。

9. 已知一组实验数据

x	2	3	4	6
y	0.760	0.340	0.190	0.085

试用最小二乘法确定拟合公式 $y=ax^b$ 中的参数 a,b。

解：对 $y=ax^b$ 两边取对数得 $\ln y=\ln a+b\ln x$，

令 $Y=\ln y, a_0=\ln a, a_1=\ln b, X=\ln x$，则拟合函数变为

$Y=a_a+a_1X$，

所给数据转化为

X	0.6931	1.0986	1.3863	1.7918
Y	−0.2744	−1.0788	−1.6607	−2.4651

则对应法方程为 $\begin{bmatrix} 4 & \sum_{i=1}^{4} X_i=4.9698 \\ \sum_{i=1}^{4} X_i=4.9698 & \sum_{i=1}^{4} X_i^2=6.8197 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{4} Y_i=-5.4790 \\ \sum_{i=1}^{4} X_iY_i=-8.0946 \end{bmatrix}$，

解得 $a_0=1.1098, a_1=-1.9957$，即所求拟合函数为

$Y=1.1098-1.9957X$

$y=e^Y=e^{1.1098-1.9957X}=e^{1.1098}e^{-1.9957\ln x}=3.0338x^{-1.9957}$。

软件分享群
Q群 626648181

10. 已知$s(x)$是$[0,2]$上的已知自然边界条件的三次样条函数，试确定

$$s(x)=\begin{cases}1+2x-x^3, & 0\le x\le 1\\ 2+b(x-1)+c(x-1)^2+d(x-1)^3, & 1\le x\le 2\end{cases}$$ 中的参数b,c,d。

解：

由三次样条函数定义，及自然边界条件$s''(2)=0$可得

$$\lim_{x\to 1}\left(1+2x-x^3\right)=\lim_{x\to 1}\left(2+b(x-1)+c(x-1)^2+d(x-1)^3\right)$$

$$\lim_{x\to 1}\left(1+2x-x^3\right)'=\lim_{x\to 1}\left(2+b(x-1)+c(x-1)^2+d(x-1)^3\right)'$$

$$\lim_{x\to 1}\left(1+2x-x^3\right)''=\lim_{x\to 1}\left(2+b(x-1)+c(x-1)^2+d(x-1)^3\right)''$$

$$\lim_{x\to 2}\left(2+b(x-1)+c(x-1)^2+d(x-1)^3\right)''=0$$

即
$$\begin{cases}2=2\\ b=-1\\ 2c=-6\\ 2c+6d=0\end{cases},$$

解得$b=-1,c=-3,d=1$。

11. 已知函数 $f(x)=5x^4$，（1）试求过 $-1,0,1,2$ 四个点的 Newton 插值多项式 $N_3(x)$，并给出插值余项 $E(x)$；（2）求差商 $f[-1,0,1,2,3]$ 与 $f[-1,0,1,2,3,4]$.

解：（1）由 $f(x)=5x^4$ 知，$f(-1)=5, f(0)=0, f(1)=5, f(2)=80$，计算差商表得

-1	5			
0	0	-5		
1	5	0	5	
2	80	25	15	10

所以
$$\begin{aligned}N_3(x)&=5-5(x+1)+5(x+1)x+10(x+1)(x-1)x\\&=10x^3+5x^2-10x\end{aligned},$$

且余项为 $E(x)=f(x)-N_3(x)=5x^4-10x^3-5x^2+10x$；

（2）由差商与导数的关系 $f[x_0,x_1,\cdots,x_j]=\dfrac{f^{(j)}(\zeta)}{j!}$ 可得

$$f[-1,0,1,2,3]=\frac{f^{(4)}(\zeta)}{4!}=5$$

$$f[-1,0,1,2,3,4]=\frac{f^{(5)}(\zeta)}{5!}=0$$

12. 已知函数值表

x	-2	-1	0	1	2
y	0	1	2	1	0

试用二次多项式 $y=a_0+a_1x+a_2x^2$ 拟合这组数据。

解：记点-2，-1，0，1，2 分别为 x_0,x_1,x_2,x_3,x_4，由离散内积定义 $(f,g)=\sum_{j=4}^{4}f(x_j)g(x_j)$

可得法方程系数矩阵为

$$G=\begin{bmatrix}(1,1) & (1,x) & 1,x^2\\(x,1) & (x,x) & (x,x^2)\\(x^2,1) & (x^2,x) & (x^2,x^2)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sum_{j=0}^{4}1 & \sum_{j=0}^{4}x_j & \sum_{j=0}^{4}x_j^2\\\sum_{j=0}^{4}x_j & \sum_{j=0}^{4}x_j^2 & \sum_{j=0}^{4}x_j^3\\\sum_{j=0}^{4}x_j^2 & \sum_{j=0}^{4}x_j^3 & \sum_{j=0}^{4}x_j^4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & 0 & 10\\0 & 10 & 0\\10 & 0 & 34\end{bmatrix}$$

法方程右端项为

$$b=\left[(y,1),(y,x),(y,x^2)\right]^T=\left[\sum_{j=0}^{4}y_j,\sum_{j=0}^{4}y_jx_j,\sum_{j=0}^{4}y_jx_j^2\right]^T=[4,0,2]^T,$$

解法方程 $Ga=b$，得 $a=[a_0,a_1,a_2]^T=\left[\frac{58}{35},0,-\frac{3}{7}\right]^T$，

那么所求拟合多项式为：$y=\frac{58}{35}-\frac{3}{7}x^2$。

13. 确定求积公式 $\int_{-h}^{h}f(x)dx\approx A_{-1}f(-h)+A_0f(0)+A_1f(h)$ 中的待定参数，使其代数精度尽量的高，并指明求积公式所具有的代数精度。

解：为使公式具有尽量高的代数精度，将 $f(x)=1,x,x^2$ 代入公式两端，并令左右相等，得

$$\begin{cases}A_{-1}+A_0+A_1=2h\\-hA_{-1}+hA_1=0\\h^2A_{-1}+h^2A_1=\frac{2}{3}h^3\end{cases}$$ 解得 $A_{-1}=\frac{8}{3}h,A_0=-\frac{4}{3}h,A_1=\frac{8}{3}h$，公式至少具有 2 次代数精度，

且当 $f(x)=x^3$ 时，左=右=0，

但当 $f(x)=x^4$ 时，左 $=\frac{2}{5}h^5$，右 $=\frac{2}{3}h^4$，左 $\neq$ 右，所以公式的代数精度为 3。

14. 给出计算积分$\int_a^b f(x)dx$的梯形公式，及n等分区间$[a,b]$的复化梯形公式；并讨论若用复化梯形公式计算积分$I=\int_0^1 e^x dx$，问区间$[0,1]$应分多少等分才能使得误差不超过$\frac{1}{2}\times10^{-5}$？

解：梯形公式为$T=\frac{(b-a)}{2}\left[f(a)+f(b)\right]$

n等分区间$[a,b]$，取步长$h=\frac{b-a}{n}$，分点为$x_i=a+ih$，

则复化的公式为$T_n=\frac{h}{2}\sum_{i=0}^{n-1}\left[f(x_i)+f(x_{i+1})\right]$，

由复化梯形公式的误差及误差不超过$\frac{1}{2}\times10^{-5}$得

$$E_n(f)=\left|-\frac{b-a}{12}h^2 f''(\eta)\right|\le\frac{1}{12}\left(\frac{1}{n}\right)^2 e\le\frac{1}{2}10^{-5},\eta\in(0,1)$$

即$n^2\ge\frac{e}{6}10^5,n\ge212.85$，取$n=213$。

15. 求3个不同的求积节点x_0,x_1,x_2，使得求积公式

$\int_{-1}^1 f(t)dt\approx\frac{1}{2}\left[f(x_0)+2f(x_1)+f(x_2)\right]$具有尽可能高的代数精度。

解：为使求积公式具有3次代数精度，当且仅当$f(x)=1,x,x^2,x^3$时，公式两边相等，即

$$\begin{cases}2=2\\ \frac{1}{2}(x_0+2x_1+x_2)=0\\ \frac{1}{2}\left(x_0^2+2x_1^2+x_2^2\right)=\frac{2}{3}\\ \frac{1}{2}\left(x_0^3+2x_1^3+x_2^3\right)=0\end{cases}$$ 解得 $x_0=-\sqrt{\frac{2}{3}},x_1=0,x_2=\sqrt{\frac{2}{3}}$

所以求积公式为

$$\int_{-1}^1 f(t)dt\approx\frac{1}{2}\left[f\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)+2f(0)+f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)\right],$$

且当$f(x)=x^4$时，左$=\frac{2}{5}$，右$\frac{4}{9}$，左$\neq$右，

所以公式具有最高代数精度3。

16. 用 Romberg 积分法计算 $\int_0^1 \frac{4}{1+x^2}dx$，精确到 $\frac{1}{2}\times10^{-5}$。

解：按龙贝格积分法计算步骤如表所示

k	$T_{0,k}$	$T_{1,k-1}$	$T_{2,k-2}$
0	3		
1	3.1	3.133333	
2	3.131176	3.141568	3.142118
3	3.138988	3.141592	3.141594

实际上 $\int_0^1 \frac{4}{1+x^2}dx=\pi=3.1415926\cdots$

由于 $\left|T_{2,1}-T_{1,2}\right|<\frac{1}{2}\times10^{-5}$，所以，取 $T_{2,1}=3.141594\approx I$。

17. 用幂法计算矩阵 $A=\begin{bmatrix}7 & 3 & -2\\ 3 & 4 & -1\\ -2 & -1 & 3\end{bmatrix}$ 按模最大的特征值及对应的特征向量。

（初值为 $(1,1,1)^T$，要求迭代 2 步的结果，小数保留 2 位）。

并计算矩阵 A 的从属范数 $\|A\|_1,\|A\|_\infty$。

解：利用幂法公式

$u_0\neq0, v_k=Au_{k-1}, u_k=\frac{v_k}{\max(v_k)}, k=1,2,\cdots$，计算结果如下表

k	u^T	$\max(v_k)$
1	(1, 0.75, 0)	8
2	(1, 0.648648649, -0.297297297)	9.25

所以矩阵 A 按模最大特征值为 $\lambda_1=9.25$，特征向量为 $(1,0.65,-0.30)^T$。

$\|A\|_1=\max\limits_{1\le j\le n}\sum\limits_{i=1}^{n}\left|a_{ij}\right|=12$

且

$\|A\|_\infty=\max\limits_{1\le i\le n}\sum\limits_{j=1}^{n}\left|a_{ij}\right|=12$

18. 求解常微分方程初值问题$\begin{cases} y'=f(x,y), & a\le x\le b \\ y(a)=\eta \end{cases}$

的两步方法$y_{n+2}-\frac{3}{2}y_{n+1}+\frac{1}{2}y_n=\frac{h}{4}(5f_{n+1}-f_n)$

（1） 证明方法满足根条件；

（2） 试求其绝对稳定区间；

（3） 若$f(x,y)=-20y$，由绝对稳定区间确定步长h应取多少？

解：（1）方法的第一特征多项式为$\rho(\lambda)=\lambda^2-\frac{3}{2}\lambda+\frac{1}{2}=\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)(\lambda-1)$，

其根为$\lambda_1=\frac{1}{2},\lambda_2=1$，模均不超过 1，且模为 1 的根为单根，所以方法满足根条件。

（2）方法的稳定多项式为

$$\begin{aligned}\pi(r,\bar{h})&=r^2-\frac{3}{2}r+\frac{1}{2}-\frac{5}{4}\bar{h}r+\frac{1}{4}\bar{h}\\&=r^2-\left(\frac{3}{2}+\frac{5}{4}\bar{h}\right)r+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\bar{h},\qquad \bar{h}=h\lambda\end{aligned}$$

由二次方程根按模小于 1 的充要条件知，方程$\pi(r,\bar{h})=0$的根按模小于 1 等价于

$$\begin{cases}\left|\frac{3}{2}+\frac{5}{4}\bar{h}\right|<1+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\bar{h}\right)\\ \left|\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\bar{h}\right|<1\end{cases},$$

于是在实数范围内解不等式得$-2<\bar{h}<0$，所以绝对稳定区间为$(-2,0)$。

（3）当$f(x,y)=-20y$时，$\bar{h}=-20h$

由$-2<\bar{h}<0$，可知步长h应满足$0<h<0.1$。

哈工大资源分享
QQ 2842305604

19. 给出经典 4 级 4 阶 Runge-Kutta 方法，并在步长 $h=0.1$ 与 $h=0.2$ 中选取适当的步长计算一阶常微分方程 $\begin{cases} y'(x)=-20y(x), & 0\le x\le 1 \\ y(0)=1 \end{cases}$ （要求计算 2 步，即 y_2 的结果）。

解：经典 4 级 4 阶 Runge-Kutta 方法公式为

$$\begin{cases} y_{n+1}=y_n+\dfrac{h}{6}\left(K_1+2K_2+2K_3+K_4\right) \\ K_1=f\left(x_n,y_n\right) \\ K_2=f\left(x_n+\dfrac{h}{2},y_n+\dfrac{h}{2}K_1\right) \\ K_3=f\left(x_n+\dfrac{h}{2},y_n+\dfrac{h}{2}K_2\right) \\ K_4=f\left(x_n+h,y_n+hK_3\right) \end{cases}$$

可得 $y_{n+1}=\left[1-20h+\dfrac{1}{2}(-20h)^2+\dfrac{1}{6}(-20h)^3+\dfrac{1}{24}(-20h)^4\right]y_n$，

由于方法的绝对稳定区间为 $(-2.78,0)$，则要求 $h\lambda\in(-2.78,0)$，

即 $-20h\in(-2.78,0)$，所以取步长 $h=0.1$，

计算结果为：$y_1=3, y_2=9$。

20. 给出显示 Euler 方法的计算公式，并计算一阶常微分方程

$\begin{cases} y'(x)=-y(x)+x+1, & 0\le x\le 0.5 \\ y(0)=1 \end{cases}$ 解 $y(x)$ 在 0.5 的取值，即 $y(0.5)$ 的近似值，要求步长 $h=0.1$。

解：显示 Euler 方法的公式为 $y_{n+1}=y_n+hf\left(x_n,y_n\right)$，

即 $y_{n+1}=y_n+h\left(-y_n+x_n+1\right)$，

由初值 $h=0.1, y_0=1$ 计算可得

$y_1=1, y_2=1.01, y_3=1.029, y_4=1.0561, y_5=1.09049$，

所以 $y(0.5)\approx 1.09049$。

21. 解线性方程 $f(x)=ax^2-c$（其中 $a\cdot c>0$）在 $[1,2]$ 的根，若对任意的初值 $x_0\in[1,2]$，Newton 迭代法都收敛，试求出 a,c 应满足的关系。

解： Newton 迭代公式为 $x_{i+1}=x_i-\dfrac{ax_i^2-c}{2ax_i}$，函数为 $\varphi(x)=x-\dfrac{ax^2-c}{2ax}$，

若要对任意初值 $x_0\in[1,2]$ 都收敛，即要求 $|\varphi'(x)|<1$，

$$\left|\left(x-\frac{ax^2-c}{2ax}\right)'\right|=\left|1-\frac{2ax\cdot 2ax-2a(ax^2-c)}{2ax\cdot 2ax}\right|$$

即 $$=\left|1-\frac{2ax\cdot 2ax-2a(ax^2-c)}{2ax\cdot 2ax}\right|$$，得

$$=\left|\frac{ax^2-c}{2ax^2}\right|=\left|\frac{1}{2}-\frac{c}{2ax^2}\right|<1$$

$-1<\dfrac{1}{2}-\dfrac{c}{2ax^2}<1,\qquad -1<\dfrac{c}{ax^2}<3$，

由于 $a\cdot c>0$，所以为 $0<\dfrac{c}{a}<3x^2$

由 $x\in[1,2]$，可得 $0<\dfrac{c}{a}<3$。

哈工大资源分享

QQ 2842305604

2013 年 硕士研究生《数值分析》试卷 数值分析考试题

1．(10 分) 设 $a>0$，用 Newton 迭代方法解方程 $x^4-2ax^2+a^2=0$，求根 $x^*=\sqrt{a}$，讨论迭代的收敛阶；设计修正的方法提高迭代的收敛阶；并对 $a=2$，初始近似 $x_0=1$，求这个方程的根（要求迭代三步，结果保留 4 位小数）。

$$f(x)=x^4-2ax^2+a^2$$
$$=(x^2-a)^2=(x-\sqrt{a})^2(x+\sqrt{a})^2$$

用 Newton 迭代法 $f'(x)=4x^3-4ax$ $x^*=\sqrt{a}$ 是重根 所以

则 $x_{i+1}=x_i-\dfrac{f(x_i)}{f'(x_i)}=x_i-\dfrac{x_i^4-2ax_i^2+a^2}{4x_i^3-4ax_i}$ 线性收敛 (如何证)

修正方法为 $x_{i+1}=x_i-2\dfrac{f(x_i)}{f'(x_i)}=x_i-\dfrac{2x_i^4-4ax_i^2+2a^2}{4x_i^3-4ax_i}=\dfrac{x_i^4+a^2}{2x_i^3-2ax_i}$

当 $a=2$ 时．

$x_{i+1}=\dfrac{x_i^4-4}{2x_i^3-4x_i}$

$x_1=\dfrac{1-4}{2-4}=\dfrac{-3}{-2}=1.5$

$x_2=\dfrac{1.5^4-4}{2\times1.5^3-4\times1.5}=1.416666667$

$x_3=$ 1.4142

2.（10 分）在[0,1]上给出函数 $f(x)=e^x$ 的等距节点函数表，若想用二次插值来计算 $f(x)$ 的近似值，要求截断误差不超过10^{-6}，问使用多大的函数表步长？

(4分)

$E_2(x)=f(x)-L_2(x)=\frac{f'''(\xi)}{3!}P_3(x)\le\frac{\sqrt{3}}{27}h^3\overline{M}<10^{-6}$

$\overline{M}=\max\limits_{0\le\xi\le1}|f'''(\xi)|=\max\limits_{0\le x\le1}|e^x|=e$

$\therefore \frac{\sqrt{3}}{27}h^3e\le10^{-6}$

$h\le0.0179$

$h\le0.0178$

$h\le$ $h<$

$h=0.01779$

$h=0.01779$

4.（10 分）已知线性方程组 $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$，(1)写出 Jacobi 迭代法和 Guass-Seidel 迭代法的迭代格式，(2)判断这两种迭代法的收敛性。

(1). $(L+D+U)x=b.$ 设 $Ax=b$

$Dx = b-(L+U)x$ $(L+U)x=b$

$x = D^{-1}b - D^{-1}(A-D)x$ $Dx_{i+1}=-(L+U)x_i+b$

$x=(I-D^{-1}A)x + D^{-1}b.$ $x=-(L+U)D^{-1}x+D^{-1}b$

则. $B_J = I-D^{-1}A = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & & \\ & 1 & \\ & & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$

$f_J = D^{-1}b = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & & \\ & 1 & \\ & & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$

Jacobi 迭代格式: $x^{i+1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} x^i + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$ $\rho(B_J)=\frac{\sqrt{5}}{2}>1$ 不收敛 一定吗?

$(L+D+U)x=b$

$(L+D)x=b-Ux$

$x=-(L+D)^{-1}Ux+(L+D)^{-1}b$

$B_G=-(L+D)^{-1}U = -\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

$(L+D)^{-1}b = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

G-S 迭代. $x^{i+1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} x^i + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ $\rho(B_G)=\sqrt{5}>1$ 不收敛.

7

3.（10 分）（1）试用 Doolittle 分解方法求解方程组 $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 6 & 1 & -6 \\ 6 & -1 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$，

（2）用乘幂法求出系数矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 6 & 1 & -6 \\ 6 & -1 & -4 \end{pmatrix}$ 按模最大特征值及对应的特征向量

（初始向量为 $(1,0,0)^T$，求出迭代 2 步的结果；计算结果保留 4 位小数）。

(1). $A = LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 \\ 6 & \frac{5}{7} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 7 & -12 \\ 0 & 0 & -\frac{10}{7} \end{bmatrix}$

$LUx = b$

令 $Ux = Y$

$LY = b$ 得 $Y = \begin{pmatrix} 2 \\ -12 \\ -\frac{10}{7} \end{pmatrix}$ 得 $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$u_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$v_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2}0.5 \\ 1 & 1 & \frac{1}{2}0.75 \\ 0.5 & 0.75 & 2 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(2).

$v_0 = (1, 0, 0)^T$

$\lambda_1 \to u_0 = (1, 0, 0)^T$

$v_1 = Au_0 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 6 & 1 & -6 \\ 6 & -1 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix}$ $a_1 = 6$

$v_1 = \begin{pmatrix} 2.5 \\ 2.75 \\ 2.75 \end{pmatrix}$ $\lambda = 2.75$

$u_1 = \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}$ 时 $\begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$

λ_2 u_1

$\lambda_1 \to u_1 = \frac{v_1}{\max v_1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$v_2 = Au_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 6 & 1 & -6 \\ 6 & -1 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{6} \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix}$ $a_2 = -4$

$v_2 \cdot u_1$ 如何确定

$P_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\lambda_2 =$

$u_2 =$

v_0 :

u_0

$u_2 = \frac{v_2}{\max v_2} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{24} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ v_1 :

u_1 λ_1

v_2

λ_2

$v_2 = Au_1$.

v_0. u_0.

$v_1 = A^{-1}u_0 \cdot \frac{1}{\lambda_1}$

反

反幂法?

5. (10 分) 设已知一组实验数据：

x_i	19	25	31	38	44
$f(x_i)$	19.0	32.3	49.0	73.3	97.8

试用最小二乘法求形如 $y=a+bx^2$ 的经验公式。

$\Phi_0(x)=1$

$\Phi_1(x)=x^2$

则 $(\Phi_0(x),\Phi_0(x))=5$

$(\Phi_0(x),\Phi_1(x))=5327$

$(\Phi_1(x),\Phi_1(x))=7277699$

$(Y(x),\Phi_0(x))=271.4$

$(Y(x),\Phi_1(x))=369321.5$

则 $\begin{bmatrix}5 & 5327\\ 5327 & 7277699\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}271.4\\ 369321.5\end{bmatrix}$

得 $a=0.05$

$b=0.0509$

则 $y=0.05+0.0509x^2$ 算对?

6.（10 分）求一个次数不高于 3 次的插值多项式 $H_3(x)$ 满足如下条件，

x_i	1	2	3
$f(x_i)$	2	4	12
$f'(x_i)$		3	

并估计误差。

1	2			
2	4	2		
2	4	3	1	
3	12	8	5	2

$\therefore H_3(x) = 2 + 2(x-1) + (x-1)(x-2) + 2(x-1)(x-2)^2$

2/0 - m.

$E_n(x) = f(x) - H_3(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-1)(x-2)^2(x-3)$ $\leq$.

估计误差 咋?

7.（10 分）已知求积公式为 $\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \frac{1}{9}[5f(\sqrt{0.6})+8f(0)+5f(-\sqrt{0.6})]$，

1）确定此求积公式的代数精度；

2）用此求积公式计算积分 $\int_{1}^{3}\frac{1}{x}dx$。（计算中保留小数点后 4 位）

$n+1=3$ 高斯

$n=2$

$2n+1$

$=5$

1) 令 $f(x)=1$ 则 $\frac{1}{9}[5+8+5]=2=\int_{-1}^{1}1dx$

$f(x)=x$ 则 $\frac{1}{9}[5\times\sqrt{0.6}+5\times-\sqrt{0.6}]=0=\int_{-1}^{1}xdx$

$f(x)=x^2$ 则 $\frac{1}{9}[5\times0.6+5\times0.6]=\frac{2}{3}=\int_{-1}^{1}x^2dx$

$f(x)=x^3$ 则 $\frac{1}{9}[5\times0.6\sqrt{0.6}-5\times0.6\sqrt{0.6}]=0=\int_{-1}^{1}x^3dx$

$f(x)=x^4$ 则 $\frac{1}{9}[5\times0.36+5\times0.36]=\frac{2}{5}=\int_{-1}^{1}x^4dx$

$f(x)=x^5$ 则 $\frac{1}{9}[5\times(\sqrt{0.6})^5-5\times(-\sqrt{0.6})^5]=0=\int_{-1}^{1}x^5dx$

$f(x)=x^6$ 则 $\frac{1}{9}[5\times2\times(0.6)^3]=0.24\neq\int_{-1}^{1}x^6dx=\frac{2}{7}$

代数精度为 5.

2）

~~$\int_1^3\frac{1}{x}dx\approx\frac{1}{9}[5\times\frac{1}{\sqrt{0.6}}+8\times\frac{1}{0}+5\times\frac{1}{\sqrt{0.6}}]$~~

$\int_{-1}^{1}\frac{1}{t+2}dt\approx\frac{1}{9}[5\times\frac{1}{\sqrt{0.6}+2}+8\times\frac{1}{2}+5\times\frac{1}{-\sqrt{0.6}+2}]$

$\approx1.0980.$

8.（10 分）试用共轭梯度法（cg 法）求解线性方程组。（初始值取 $x^{(0)}=(0,0)^T$）

$$\begin{pmatrix}6 & 3\\ 3 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ -1\end{pmatrix}$$

已知的计算过程为：

给定 $x^{(0)}$，计算 $r^{(0)}=b-Ax^{(0)}, p_0=r^{(0)}$

对 $k=0,1,\cdots$ 计算

$$\alpha_k=\frac{(r^{(k)},r^{(k)})}{(p_k,Ap_k)}\ ,\quad x^{(k+1)}=x^{(k)}+\alpha_k p_k\ ,\quad r^{(k+1)}=r^{(k)}-\alpha_k Ap_k$$

$$\beta_k=\frac{(r^{(k+1)},r^{(k+1)})}{(r^{(k)},r^{(k)})}\ ,\quad p_{k+1}=r^{(k+1)}+\beta_k p_k$$

$$r^{(0)}=\begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}6&3\\3&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix}\qquad Ap_0=\begin{bmatrix}6&3\\3&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\-2\end{pmatrix}$$

$$p_0=r^{(0)}=\begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix}$$

$$\alpha_0=\frac{(r^0,r^0)}{(p_0,Ap_0)}=\frac{1}{2}$$

$$x^1=x^0+\alpha_0 p_0=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}+\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$$r^1=r^0-\alpha_0 Ap_0=\begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix}-\frac{1}{2}\begin{bmatrix}6&3\\3&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix}=\begin{pmatrix}1.5\\0\end{pmatrix}\qquad Ap_1=\begin{bmatrix}6&3\\3&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1.5\\-2.25\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2.25\\0\end{bmatrix}$$

$$\beta_0=\frac{(r^1,r^1)}{(r^0,r^0)}=\frac{2.25}{1}=2.25$$

$$p_1=r^1+\beta_0 p_0=\begin{bmatrix}1.5\\0\end{bmatrix}+2.25\begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix}=\begin{pmatrix}1.5\\-2.25\end{pmatrix}$$

$$\alpha_1=\frac{(r^1,r^1)}{(p_1,Ap_1)}=\frac{2.25}{\frac{27}{8}}=\frac{2}{3}$$

$$x^2=x^1+\alpha_1 p_1=\begin{bmatrix}0\\-\frac{1}{2}\end{bmatrix}+\frac{2}{3}\begin{pmatrix}1.5\\-2.25\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$$

解 $x=\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$

9.（10 分）应用二阶 Runge-Kutta 方法

$$y_{n+1}=y_n+\frac{h}{4}[f(x_n,y_n)+3f(x_{n+\frac{2}{3}},y_n+\frac{2}{3}hf(x_n,y_n))]$$

解初值问题：$\begin{cases} y'+y=0 \\ y(0)=1 \end{cases}$ 时，问步长 h 应取何值方能保证方法的绝对稳定性？

并计算解在点 $x=0.5$，1.0 的近似值，步长 $h=0.5$。（计算中保留小数点后 4 位）。

$y=-\lambda$ $\quad y'=-y$.

$\cancel{则\ y_{n+1}=y_n+\frac{h}{4}[-y+}$

$y_{n+1}=y_n+\frac{h}{4}[k_1+3k_2]$

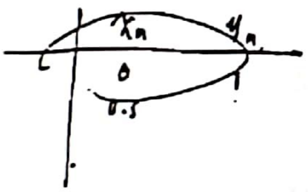
$k_1=f(x_n,y_n)=-y_n$

$k_2=f(x_n+\frac{2}{3}h,\ y_n+\frac{2}{3}hk_1)=-(y_n+\frac{2}{3}hk_1)=-y_n-\frac{2}{3}hk_1=-y_n+\frac{2}{3}hy_n=(\frac{2}{3}h-1)y_n$

$\therefore\ y_{n+1}=y_n+\frac{h}{4}[-y_n+3(\frac{2}{3}h-1)y_n]=y_n+\frac{h}{4}[-y_n+(2h-3)y_n]=(\frac{h^2}{2}-h+1)y_n$

$\therefore\ |\frac{h^2}{2}-h+1|<1$

则 $0<h<\frac{1}{2}$



当步长 $h=0.5$

则 $y_{n+1}=0.625\,y_n$

$x=0.5$ 时 $y_1=0.625y_0=0.625$.

$x=1$ 时 $y_2=0.625y_1=0.3906$.

10.（10 分）线性多步法 $y_{n+1}=\underbrace{\frac{3}{2}}_{a_0}y_n-\underbrace{\frac{1}{2}}_{a_1}y_{n-1}+\frac{h}{4}[\underbrace{5}_{b_0}y'_n-\underbrace{3}_{b_1}y'_{n-1}]$

及初始值 y_0，y_1，（h 为步长）。

（1）确定方法中的局部截断误差主项，并指出方法的阶数；

（2）讨论该方法的收敛性和绝对稳定性。

（在局部截断误差中 $C_r=\frac{1}{r!}\left\{1-[\sum_{i=0}^{p}(-i)^r a_i+r\sum_{i=-1}^{p}(-i)^{r-1}b_i]\right\}, r=2,3,\cdots$ ）

参考定理：设 x_1 和 x_2 是实系数二次方程 $x^2+bx+c=0$ 的根，

则 $|x_1|<1,|x_2|<1$ 的充要条件是 $|b|<1+c,|c|<1$。

(1) $p=1$

$C_0=1-a_0-a_1=1-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}=0$

$C_1=1-\left(\sum_{i=0}^{1}(-i)a_i+\sum_{i=-1}^{1}b_i\right)=1-\left[(0-a_1)+(b_0+b_1)\right]=1-\left[\frac{1}{2}+\frac{5}{4}+0-\frac{3}{4}\right]=0$

$C_2=\frac{1}{2!}\left\{1-\left[\sum_{i=0}^{1}(-i)^2a_i+2\sum_{i=-1}^{1}(-i)b_i\right]\right\}=\frac{1}{2!}\left\{1-(a_1+0-2b_1)\right\}=0$

$C_3=\frac{1}{3!}\left\{1-\left[\sum_{i=0}^{1}(-i)^3a_i+3\sum_{i=-1}^{1}(-i)^2b_i\right]\right\}=\frac{1}{3!}\left\{1-\left[-a_1+3b_1\right]\right\}=\frac{11}{24}\neq 0$

∴ 局部截断误差主项 $\frac{11}{24}h^3y'''(x)$

方法为2阶

(2)

∵ $C_0=0$, $C_1=0$ 则方法相容　　$\rho(r)=0$ 得 $r_1=\frac{1}{2}<1$ $r_2=1\leq 1$ 则满足收敛根条件

$\rho(r)=r^2-\sum_{i=0}^{1}a_ir^{1-i}=r^2-a_0r-a_1=r^2-\frac{3}{2}r+\frac{1}{2}$

$\sigma(r)=\sum_{i=-1}^{1}b_ir^{1-i}=b_0r+b_1=\frac{5}{4}r-\frac{3}{4}$　　方法收敛.

稳定性 令 $\lambda h=\bar{h}$ $\pi(r,\lambda h)=\pi(r,\bar{h})=\rho(r)-\bar{h}\sigma(r)=r^2-\frac{3}{2}r+\frac{1}{2}-\frac{5}{4}r\bar{h}+\frac{3}{4}\bar{h}$

$=r^2-(\frac{3}{2}+\frac{5}{4}\bar{h})r+\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\bar{h}$　根据二次方程根按模小于1的充要条件

则 $1-(\frac{3}{2}+\frac{5}{4}\bar{h})+\frac{3}{4}\bar{h}+\frac{1}{2}>0$ 得 $\bar{h}<0$.

$1+(\frac{3}{2}+\frac{5}{4}\bar{h})+\frac{3}{4}\bar{h}+\frac{1}{2}>0$ 得 $\bar{h}>-\frac{3}{2}$

$1+\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\bar{h}>0$ 得 $\bar{h}>-2$.

∴ $\bar{h}\in(-\frac{3}{2},0)$

10

2001 - 2013 数值分析

2012 年硕士研究生《数值分析》试卷

1、(10 分)、构造求出方程 $f(x)=x^3-2x^2+x=0$ 所有根的 Newton 迭代法，使迭代格式至少 2 阶收敛，并说明 2 阶收敛理由。取初值为 2，计算接近 2 的根（要求迭代两次，结果保留 4 位小数）。

解：$f(x)=x^3-2x^2+x=x(x^2-2x+1)=x(x-1)^2$

$f(x)=0$ 有两根 0、1（重根）

二重根 $f'(x)=3x^2-4x+1$

牛顿：$x_{k+1}=x_k-\dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}$

$=x_k-\dfrac{x_k^3-2x_k^2+x_k}{3x_k^2-4x_k+1}$

根是 0，直接应用牛顿 √ → $\varphi'(\alpha)=0$，$\varphi''(\alpha)\neq 0$

根是 1，改进 $x_{k+1}=x_k-2\dfrac{x_k^3-2x_k^2+x_k}{3x_k^2-4x_k+1}$

$\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{|e_{k+1}|}{|e_k|^2}=\dfrac{1}{r(r+1)}\left|\dfrac{f^{(r+1)}(\alpha)}{f^{(r)}(\alpha)}\right|\neq 0$

$x_0=2$

$x_1=2-2\dfrac{8-8+2}{12-8+1}$

$=2-\dfrac{4}{5}=\dfrac{6}{5}=1.2$

$x_2=\dfrac{6}{5}-2$

装订线内 不得答题

哈工大资源分享
QQ 2842305604

2012年

二、

2012年硕士研究生《数值分析》试卷

(10分) 试确定求积公式 $\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx A_{-1}f(-1)+A_0 f(0)+A_1 f(1)$ 中的待定参数 A_{-1}, A_0, A_1，使公式的代数精度尽可能高，并导出该公式的余项（设 $f(x)\in C^4[-1,1]$）。

即 Simpson 公式

解：

$f(x)=1$，$f(x)=x$，$f(x)=x^2$：

$$\begin{cases} 2 = A_{-1}+A_0+A_1 \\ 0 = A_{-1}(-1)+A_1\cdot 1 \\ \frac{2}{3} = A_{-1}(-1)^2+A_1\cdot 1^2 \end{cases} \Rightarrow A_{-1}=A_1$$

$A_{-1}=A_1=\frac{1}{3}$

$A_0=\frac{6}{3}-\frac{2}{3}=\frac{4}{3}$

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \frac{1}{3}f(-1)+\frac{4}{3}f(0)+\frac{1}{3}f(1)$$

$f(x)=x^3$　左 $=0$，右 $=\frac{1}{3}(-1)^3+\frac{4}{3}\cdot 0^3+\frac{1}{3}\cdot 1^3=0$　左 $=$ 右

$f(x)=x^4$　左 $=\frac{2}{5}$，右 $=\frac{1}{3}(-1)^4+\frac{4}{3}(0)^4+\frac{1}{3}\cdot 1^4=\frac{2}{3}$

~~代数精度为3~~

$H_3(x)$：$H_3(-1)=f(-1)$，$H_3(0)=f(0)$，$H_3(1)=f(1)$，$H_3'(0)=f'(0)$

$f(x)-H_3(x)=C_x(x+1)x^2(x-1)$　对 $[-1,1]$ 中任一不同于 x 的点

引入 $g(t)=f(t)-H_3(t)-C_x(t+1)t^2(t-1)$

$g(-1)=0$，$g(0)=0$，$g(1)=0$，$g(x)=0$，$g'(0)=0$　由罗尔定理推广定理 $g^{(4)}(\xi)=0$，$\xi\in[-1,1]$

$g^{(4)}(t)=f^{(4)}(t)-4!\,C_x$，$C_x=\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}$

$$f(x)-H_3(x)=\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x+1)x^2(x-1)$$

$\therefore \int_{-1}^{1} f(x)dx-\int_{-1}^{1} H_3(x)dx=\frac{f^{(4)}(\eta)}{4!}\int_{-1}^{1}(x+1)x^2(x-1)dx = -\frac{f^{(4)}(\eta)}{90}$

$\int_{-1}^{1} H_3(x)dx=\frac{1}{3}H_3(-1)+\frac{4}{3}H_3(0)+\frac{1}{3}H_3(1)$

12

~~$Q=\frac{b-a}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]$~~　$Q=\frac{h}{3}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]$

$\therefore R(f)=\int_a^b \frac{1}{4!}f^{(4)}(\xi)(x-a)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2(x-b)$

$R(f)=\int_{-1}^{1}\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-a)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2(x-b)\,dx$

$\frac{f^{(4)}(\xi)}{\ldots}\left(\frac{b-a}{\ldots}\right)^5$

12

3.（10 分）方程组 $\begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ -5 & 7 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 10 \end{bmatrix}$

1）用 Crout 三角分解法解方程组；

2）计算其系数矩阵 A 的按模最大的特征值及对应的特征向量，选取初始向量 $v_0=(0,1,1)^T$（要求迭代二次，结果保留 4 位小数）。

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ -5 & 7 & -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \hat{l}_{11} & 0 & 0 \\ \hat{l}_{21} & \hat{l}_{22} & 0 \\ \hat{l}_{31} & \hat{l}_{32} & \hat{l}_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & \hat{u}_{12} & \hat{u}_{13} \\ 0 & 1 & \hat{u}_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\frac{5}{3}$

解：(1)
$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ -5 & -7 & -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & \frac{7}{3} & 0 \\ -5 & \frac{31}{3} & \frac{24}{7} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{7} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

6

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & \frac{7}{3} & 0 \\ 5 & \frac{31}{3} & \frac{24}{7} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 10 \end{bmatrix} \quad 得 \begin{cases} y_1=1 \\ y_2=3 \\ y_3=-\frac{91}{12} \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{7} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -\frac{91}{12} \end{bmatrix} \quad 得 \begin{cases} x_3=-\frac{91}{12} \\ x_2=-\frac{1}{4} \\ x_1=\frac{5}{6} \end{cases} \quad X=(\quad)^T$$

装订线内 不得答题

(2) $v_0=(0,1,1)^T$

12

利用 $\begin{cases} u_n=\dfrac{v_n}{\max(v_n)} \\ v_n=Au_{n-1} \end{cases}$

第一步 $u_0=\dfrac{(0,1,1)^T}{1}=(0,1,1)^T$

$v_1=Au_0=(-2,2,6)^T$

$u_1=\dfrac{v_1}{\max(v_1)}=\dfrac{(-2,2,6)^T}{6}=(-\frac{1}{3},\frac{1}{3},1)^T$

第二步 $v_2=Au_1=(-\frac{5}{3},\frac{1}{3},3)^T$

$u_2=\dfrac{v_2}{\max(v_2)}=\dfrac{(-\frac{5}{3},\frac{1}{3},3)^T}{3}=(-\frac{5}{9},\frac{1}{9},1)^T$

特征值 $\lambda=3$

特征向量 $x=(-\frac{5}{9},\frac{1}{9},1)^T$

已知线性方程组 $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ -5 \end{bmatrix}$

1) 分别写出 Jaccbi 迭代矩阵和 Gauss-Seidel 迭代矩阵;

2) 分别讨论 Jacobi 迭代和 Gauss-Seidel 迭代的收敛性.

解:(1) $B_J = I - D^{-1}A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$

$B_G = -(L+D)^{-1}U = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

(2) Jacobi:

$\rho(\lambda) = |I\lambda - B_J| = \begin{vmatrix} \lambda & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & \lambda & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 + \frac{5}{4}\lambda = 0.$

$\lambda_1 = 0$, $\cancel{\lambda_2 = \frac{\sqrt{5}}{2}i, \quad \lambda_3 = -\frac{\sqrt{5}}{2}i}$ ~~$\rho(B_J) = 0 < 1$ 收敛.~~

修改: $\rho(B_J) = \frac{\sqrt{5}}{2} > 1$ 发散.

Gauss-Seidel:

$\rho(\lambda) = |I\lambda - B_G| = \begin{vmatrix} \lambda & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \lambda+\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \lambda+\frac{1}{2} \end{vmatrix} = \lambda(\lambda+\frac{1}{2})^2$

$\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \lambda_3 = -\frac{1}{2}$ $\quad \rho(B_G) = \frac{1}{2} < 1$; 收敛.

5.（10 分） 试用共轭梯度法（cg 法）求解线性方程组。（初始值取 $x^{(0)}=(0,0,0)^T$）

$$\begin{pmatrix}3\\4\\-4\end{pmatrix} \qquad \begin{bmatrix}4&3&0\\3&4&-1\\0&-1&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}24\\30\\-24\end{bmatrix}\begin{pmatrix}3\\4\\-4\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}6&3\\3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$$

已知的计算过程为：

给定 $x^{(0)}$，计算 $r^{(0)}=b-Ax^{(0)}, p_0=r^{(0)}$ $\qquad Ap_0=\begin{pmatrix}186\\216\\-126\end{pmatrix}$

对 $k=0,1,\cdots$ 计算

$\alpha_k=\dfrac{(r^{(k)},r^{(k)})}{(p_k,Ap_k)}$，$x^{(k+1)}=x^{(k)}+\alpha_k p_k$， $r^{(k+1)}=r^{(k)}-\alpha_k Ap_k$

$\beta_k=\dfrac{(r^{(k+1)},r^{(k+1)})}{(r^{(k)},r^{(k)})}$， $p_{k+1}=r^{(k+1)}+\beta_k p_k$.

解：$r^{(0)}=b-Ax^{(0)}$ $\qquad p_0=r^{(0)}=\begin{pmatrix}24\\30\\-24\end{pmatrix}$ $\qquad \alpha_0=\dfrac{(r^{(0)},r^{(0)})}{(p_0,Ap_0)}=\dfrac{2052}{7920}$

$=\begin{pmatrix}24\\30\\-24\end{pmatrix}-0=\begin{pmatrix}24\\30\\-24\end{pmatrix}$

$x^{(1)}=x^{(0)}+\alpha_0 p_0=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}+-\begin{pmatrix}24\\30\\-24\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\ \end{pmatrix}$

$r^{(1)}=r^{(0)}-\alpha_0 Ap_0$ $\qquad \beta_0=\dfrac{(r^{(1)},r^{(1)})}{(r^{(0)},r^{(0)})}=$ $\qquad p_1=r^{(1)}+\beta_0 p_0=$

$=\begin{pmatrix}24\\30\\-24\end{pmatrix}-$

$\alpha_1=\dfrac{(r^{(1)},r^{(1)})}{(p_1,Ap_1)}=$ $\qquad x^{(2)}=x^{(1)}+\alpha_1 p_1=$

解：$r^0=b-Ax^{(0)}=(24,30,-24)^T$

$p_0=r^{(0)}=(24,30,-24)^T$

$\alpha_0=$

$x^{(1)}=$

$r^{(1)}=$

$\beta_{(0)}=$

$p_1=$

$\alpha_1=$

哈工大二手市场

Q群：744900487

6.（10分）已知函数 $f(x)$ 满足数表：

x	x_0	x_1	x_2
x_i	0	1	4
$f(x_i)$	0	1	2

1）试求 $f(x)$ 在 $[0,4]$ 上的 Hermite 插值多项式 $H(x)$，使之满足下列条件：

$$H(x_i)=f(x_i),\ i=0,1,2,\quad H'(x_1)=\frac{1}{2}$$

2）写出余项 $R(x)=f(x)-H(x)$ 的表达式。

牛顿插值法

$H(x)=f(x_0)+f[x_0,x_1](x-x_0)+f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)$
$+A(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$

由 $H'(x_1)=\frac{1}{2}$ 得

$$A=\frac{\frac{1}{2}-f[x_0,x_1]-f[x_0,x_1,x_2](x_1-x_0)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}$$

$$f[x_0,x_1]=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}=1$$

$$f[x_0,x_1,x_2]=\frac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-\cancel{x_0}}$$ 此处应为 x_1

$$=-\frac{1}{8}$$

$A=\frac{1}{8}$

$$H(x)=x-\frac{1}{8}x(x-1)+\frac{1}{8}x(x-1)(x-4)$$
$$=\frac{1}{8}x^3-\frac{3}{4}x^2+\frac{3}{2}x+\frac{1}{8}$$

(2) $R(x)=f(x)-H(x)$

作辅助函数

$$F(z)=f(z)-H(z)-[f(x)-H(x)]\frac{(z-x_0)(z-x_1)^2(z-x_2)}{(x-x_0)(x-x_1)^2(x-x_2)}$$

x_1 为 $F(z)$ 的二重零点

x_0, x_2 及 x 为单重零点

$$R(x)=\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-x_0)(x-x_1)^2(x-x_2)$$
$$=\frac{f^{(4)}(\xi)}{24}x(x-1)^2(x-4)$$

7.（10 分） 已知数据点(0,7)，(1,4)，(2,2)，(3,3)试利用反差商构造有理插值函数 $R(x)$ 通过已知数据点。

x_j	$v_0(x_j)=f_j$	$v_1(x_j)$	$v_2(x_j)$	$v_3(x_j)$
0	7			
1	4	$-\frac{1}{3}$		
2	2	$-\frac{2}{5}$	-15	
3	3	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{24}{5}$	$\frac{5}{51}$

$$R(x)=7+\cfrac{x-0}{-\frac{1}{3}+\cfrac{x-1}{-15+\cfrac{x-2}{\frac{5}{51}}}}$$

解：反差商表格下式计算

x_i	$v_0(x_i)$	$v_1(x_i)$	$v_2(x_i)$	$v_3(x_i)$
0	7			
1	4	$-\frac{1}{3}$		
2	2	$-\frac{2}{5}$	-15	
3	3	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{24}{5}$	$\frac{5}{51}$

得过一以下有理插值函数

$$Q(x)=7+\cfrac{x}{-\frac{1}{3}+\cfrac{x-1}{-15+\cfrac{x-2}{\frac{5}{51}}}}$$

18.（10分）选择形如 $y=\dfrac{1}{a_0+a_1x}$，（a_0, a_1 为常数）的经验公式拟合给定的数据表：

i	0	1	2	3	4
x_i	1.00	1.25	1.50	1.75	2.00
y_i	5.10	5.79	6.53	7.45	8.46
Y_i	$\frac{1}{5.10}$	$\frac{1}{5.79}$	$\frac{1}{6.53}$	$\frac{1}{7.45}$	$\frac{1}{8.46}$

解 $\dfrac{1}{y}=a_0+a_1x$

令 $Y=\dfrac{1}{y}$

$Y=a_0+a_1x$

取 $\varphi_0=1$，$\varphi_1=x$

做 $Y=a_0+a_1x$ 与 (x_i, Y_i) 的最小二乘拟合

$1+1+1+1+1=5$

$(\varphi_0,\varphi_0)=\sum_{i=0}^{4}\varphi_0(x_i)\varphi_0(x_i)=5$ $=1+1.25+1.5+1.75+2$

$(\varphi_0,\varphi_1)=\sum_{i=0}^{4}\varphi_0(x_i)\varphi_1(x_i)=7.5$ $=1^2+1.25^2+1.5^2+1.75^2+2^2$

$(\varphi_1,\varphi_1)=\sum_{i=0}^{4}\varphi_1(x_i)\varphi_1(x_i)=11.875$

$(\varphi_0,Y)=\sum_{i=0}^{4}\varphi_0(x_i)Y_i=0.77436$

$(\varphi_1,Y)=\sum_{i=0}^{4}\varphi_1(x_i)Y_i=1.11298$

法方程

$$\begin{bmatrix}5 & 7.5\\ 7.5 & 11.875\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_0\\ a_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.77436\\ 1.11298\end{bmatrix}$$

$$\begin{cases}a_0=0.27142\\ a_1=-0.07770\end{cases}$$

结果为 $y=\dfrac{1}{0.27142-0.07770x}$

单步法：(2) 假设 $y'=\lambda y$.

$$y_{n+1}=y_n+\frac{h}{3}(\lambda y_n+2\lambda y_{n+1})$$

$$y_{n+1}-\frac{h}{3}\cdot 2\lambda y_{n+1}=(1+\frac{h}{3}\lambda)y_n$$

$$y_{n+1}=\frac{1+\frac{\bar h}{3}}{1-\frac{2}{3}\bar h}y_n$$

$$\left|\frac{1+\frac{\bar h}{3}}{1-\frac{2}{3}\bar h}\right|<1$$

2012 年硕士研究生《数值分析》试卷

9.（10 分）已知求解常微分方程初值问题的差分方法：

$$y_{n+1}=y_n+\frac{h}{3}(y_n'+2y_{n+1}')$$

$$y_{n+1}=y_n+\frac{h}{3}[f(x_n,y_n)+2f(x_{n+1},y_{n+1})]$$

1）求出局部截断误差主项，指出方法的阶数；

2）讨论其绝对稳定性。 $-\frac{1}{6}h^2y''(x_n)$

解：(1) $p=0$，$a_0=1$，$\cancel{b_{-1}=\frac{2}{3}}$，$b_0=\frac{1}{3}$.

$$c_0=1-\sum_{i=0}^{p}a_i=1-a_0=0$$

$$c_1=1-\left[\sum_{i=0}^{p}(-i)a_i+\sum_{i=-1}^{p}b_i\right]=1-(b_{-1}+b_0)=0$$

$$c_2=\frac{1}{2!}\left\{1-\left[\sum_{i=0}^{p}(-i)^2a_i+2\sum_{i=-1}^{p}(-i)b_i\right]\right\}=\frac{1}{2}(1-2b_{-1})=-\frac{1}{6}\neq 0.$$

∴ ~~主项~~ $\cancel{c_2=-\frac{1}{6}}$ 1阶方法，$c_{r+1}h^{r+1}y^{(r+1)}(x_n)$

$-\frac{1}{6}h^2y''(x_n)$

(2) $\rho(r)=r^{p+1}-\sum_{i=0}^{p}a_ir^{p-i}=r-1$

$$\sigma(r)=\sum_{i=-1}^{p}b_ir^{p-i}=\frac{2}{3}r+\frac{1}{3}$$

$$\pi(r;\bar h)=\rho(r)-\bar h\sigma(r)=(r-1)-\bar h(\frac{2}{3}r+\frac{1}{3})=(1-\frac{2}{3}\bar h)r-(1+\frac{1}{3}\bar h)$$

$\lambda h<0$ 稍微

令 $\pi(r;\bar h)=0$ $\quad r=\frac{3+\bar h}{3-2\bar h}$ $\quad$ 令 $|r|<1$

$\bar h<0$ 或 $\cancel{\bar h>6}$

$\bar h<0$

在 $(-\infty,0)$ ~~或 $(6,+\infty)$~~

$\bar h=\lambda h$
$<0 \quad <0 \quad >0$

哈工大资源分享
QQ 2842305604

10.（10分）给定线性多步法 $y_{n+1}=\frac{1}{2}y_n+\frac{1}{2}y_{n-1}+\frac{h}{4}[7y'_n-y'_{n-1}]$，及初始值 y_0、y_1（h 为步长）。

$\rho(r)=r^{p+1}-\sum a_i r^{p-i}$ $p=1$ $a_0=\frac{1}{2}$ a_1 且 $c_0=c_1=0$ $b_{-1}=0$ $b_0=\frac{7}{4}$ $b_1=-\frac{1}{4}$

1）讨论该方法的收敛性和绝对稳定性；

2）对初值问题 $\begin{cases}y'+10y=0\\y(0)=1.0\end{cases}$ 取步长 $h=0.04$，初值 $y_1=0.6703$，求 $x=0.08$、0.12 时的数值解（计算中保留小数点后4位）。

$y(0.04)$ $x_0=0$ $y_0=1$ $x_1=0.04$ $x_2=0.08$ $y_2=$ $x_3=0.12$ $y_3=$

（参考定理：设 x_1 和 x_2 是实系数二次方程 $x^2+bx+c=0$ 的根，则 $|x_1|<1$，$|x_2|<1$ 的充要条件是 $|b|<1+c$，$|c|<1$。）

解：(1) $p=1$；$a_0=\frac{1}{2}$，$a_1=\frac{1}{2}$，$b_{-1}=0$，$b_0=\frac{7}{4}$，$b_1=-\frac{1}{4}$。

$\rho(r)=r^{p+1}-\sum_{i=0}^{p}a_i r^{p-i}=r^2-\frac{1}{2}r-\frac{1}{2}$。令 $r^2-\frac{1}{2}r-\frac{1}{2}=0$

$r_1=1$，$r_2=-\frac{1}{2}$ 单根。 $|r|\le 1$ 满足根条件

$c_0=1-\sum_{i=0}^{p}a_i=1-(a_0+a_1)=0$

$c_1=1-\left[\sum_{i=0}^{p}(-i)a_i+\sum_{i=-1}^{p}b_i\right]=1+a_1-(b_{-1}+b_0+b_1)=0$

$c_0=c_1=0$ 相容 ∴收敛

$\pi(r,\lambda h)=(1-\lambda h b_{-1})r^{p+1}-\sum_{i=0}^{p}(a_i+h\lambda b_i)r^{p-i}$ $h\lambda<0$

算 $\sigma(r)=\sum_{i=-1}^{p}b_i r^{p-i}=\frac{7}{4}r-\frac{1}{4}$

$\pi(r;\bar{h})=\rho(r)-\bar{h}\sigma(r)=r^2-\frac{1}{2}r-\frac{1}{2}-\bar{h}(\frac{7}{4}r-\frac{1}{4})$

$=r^2+(-\frac{1}{2}-\frac{7}{4}\bar{h})r+(-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\bar{h})$

令 $|-\frac{1}{2}-\frac{7}{4}\bar{h}|<1+(-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\bar{h})$ $|-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\bar{h}|<1$

$\bar{h}\in(-\frac{1}{2},0)$ 绝对~

(2) ~~$y'=-10y$. $y'_1=-10.0$ $y'_1=-6.703$~~

$x=0.08$, $y_2=\frac{1}{2}y_1+\frac{1}{2}y_0+\frac{0.04}{4}[-7\times6.703+10.0]=0.4569$

$x=0.12$, $y_3=\frac{1}{2}y_2+\frac{1}{2}y_1+\frac{0.04}{4}(-7\times\frac{1}{4}\,0.341+6.703)=$

2013.1.8

2012年硕士研究生《数值分析》试卷

一、(10分) 构造求出方程 $f(x)=x^3-2x^2+x=0$ 所有根的Newton迭代法，使迭代格式至少2阶收敛，并说明2阶收敛理由。取初值为2，计算接近2的根(要求迭代两次，结果保留4位小数)。

解：$f(x)=x^3-2x^2+x=x(x^2-2x+1)=x(x-1)^2$；

$f(x)=0$ 有两根 0，1（重根）2重根　$f'(x)=3x^2-4x+1$

牛顿法 $x_{k+1}=x_k-\dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}$

$=x_k-\dfrac{x_k^3-2x_k^2+x_k}{3x_k^2-4x_k+1}$

根是0：直接应用牛顿

根是1：改进 $x_{k+1}=x_k-2\dfrac{x_k^3-2x_k^2+x_k}{3x_k^2-4x_k+1}$

$x_0=2$

$x_1=2-2\cdot\dfrac{8-8+2}{12-8+1}$

$=2-\dfrac{4}{5}=\dfrac{6}{5}=1.2$

$x_2=\dfrac{6}{5}\ldots 2.$

解：$f(x)=x(x^2-2x+1)=x(x-1)^2$

令 $f(x)=0$，$x_1=0$，$x_2=x_3=1$。2重根

~~构造Newton迭代格式~~

~~$x_{n+1}=x_n-\dfrac{f(x)}{f'(x)}$~~

当根为0，构造Newton迭代格式

$x_{n+1}=x_n-\dfrac{f(x)}{f'(x)}=x_n-\dfrac{x_n^3-2x_n^2+x_n}{3x_n^2-4x_n+1}=x_n-\dfrac{x_n(x_n-1)}{3x_n-1}$

$\varphi'(x)=1-\dfrac{(2x-1)(3x-1)-3x(x-1)}{(3x-1)^2}$，$\varphi(0)=0$。

$\varphi''(x)=\dfrac{\cdots 2}{(3x-1)^2}+\dfrac{18x(x^2-1)}{(3x-1)^2}$，$\varphi''(0)=2\neq0$　2阶

当根为1，构造改良的Newton迭代格式

$x_{n+1}=x_n-2\dfrac{f(x)}{f'(x)}=x_n-\dfrac{2x_n^3-4x_n^2+2x_n}{3x_n^2-4x_n+1}=x_n-\dfrac{2x_n(x_n-1)}{3x_n-1}$

此迭代格式对 $x=1$ 迭代2阶收敛

$x_0=2$

$x_1=2-\dfrac{2\times2(2-1)}{3\times2-1}=\dfrac{6}{5}$

$x_2=1.2-\dfrac{2\times\frac{6}{5}\times(\frac{6}{5}-1)}{3\times\frac{6}{5}-1}=\ldots$

$\varphi'(x)=1-\dfrac{6x_n^2-4x_n+2}{(3x_n-1)^2}$　$\varphi'(1)=0$

$\varphi''(x)\neq0$　$\varphi''(1)\neq0$　2阶

1) 令求积公式对 $f(x)=1, x, x^2$ 准确成立。

$$\begin{cases} 2 = A_{-1} + A_0 + A_1 \\ 0 = -A_{-1} + A_1 \\ \frac{2}{3} = A_{-1} + A_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_{-1} = \frac{1}{3} \\ A_0 = \frac{4}{3} \\ A_1 = \frac{1}{3} \end{cases}$$

2012 年硕士研究生《数值分析》试卷

② （10 分）试确定求积公式 $\int_{-1}^{1} f(x)dx = A_{-1}f(-1) + A_0 f(0) + A_1 f(1)$ 中的待定参数 A_{-1}, A_0, A_1，使公式的代数精度尽可能高，并导出该公式的余项（设 $f(x) \in C^4[-1,1]$）。

$r=3$

$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \frac{1}{3}f(-1) + \frac{4}{3}f(0) + \frac{1}{3}f(1)$

对于 $f(x)=x^3$，左边 $=0$，右边 $=0$，准确成立。

对于 $f(x)=x^4$，左边 $=\frac{2}{5}$，右边 $=\frac{2}{3}$，不成立。

∴ 代数精度最高 3 阶。

2) 定理：当 n 为奇数时，Newton-Cotes 公式有 n 次代数精度；n 为偶数时，Newton-Cotes 公式有 $n+1$ 次代数精度。

由定理知 Simpson 公式有 3 次代数精度，即对于次数不超过 3 的多项式求积公式准确成立。

公式 $Q_2(f) = \frac{b-a}{6}[f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b)]$ 精确成立。为此，构造 3 次多项式 $H(x)$，使其满足：$H(-1)=f(-1)$，$H(0)=f(0)$，$H(1)=f(1)$，$H'(0)=f'(0)$，于是

$\int_{-1}^{1} H(x)dx = \frac{2}{6}[H(-1) + 4H(0) + H(1)]$

$= \frac{2}{6}[f(-1) + 4f(0) + f(1)] = Q_2(f)$

故余项 $E(f)$ 可表示为

$E(f) = I(f) - Q_2(f) = \int_{-1}^{1} [f(x) - H(x)]dx$

导插值余项公式有

~~$E(f) = \frac{1}{4!}\int_{-1}^{1} f^{(4)}(\xi)(x+1)x^2(x-1)dx$~~

由于函数 $(x+1)x^2(x-1)$ 在 $[-1,0]$ 上 … 不变号，应用积分第二中值定理得

~~$E(f) = -\frac{f^{(4)}(\eta)}{90}$~~

代数精度为 3。

$f(x)=1$，$f(x)=x$，$f(x)=x^2$

$$\begin{cases} 2 = A_{-1} + A_0 + A_1 \\ 0 = A_{-1}(-1) + A_1 \cdot 1 \\ \frac{2}{3} = A_{-1}(-1)^2 + A_1 \cdot 1^2 \end{cases} \Rightarrow A_{-1} = A_1$$

$A_{-1} = A_1 = \frac{1}{3}$

$A_0 = \frac{6}{3} - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$

$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \frac{1}{3}f(-1) + \frac{4}{3}f(0) + \frac{1}{3}f(1)$

$f(x)=x^3$：左 $=0$，右 $= \frac{1}{3}(-1)^3 + \frac{4}{3}\cdot 0^3 + \frac{1}{3}\cdot 1^3 = 0$，左 $=$ 右

$f(x)=x^4$：左 $= \frac{2}{5}$，右 $= \frac{1}{3}(-1)^4 + \frac{4}{3}(0)^4 + \frac{1}{3}\cdot 1^4 = \frac{2}{3}$

∴ 左 $\neq$ 右

$H_3(x)$：$H_3(-1)=f(-1)$，$H_3(0)=f(0)$，$H_3(1)=f(1)$，$H_3'(0)=f'(0)$

$f(x) - H_3(x) = C_x(x+1)x^2(x-1)$，对 $[-1,1]$ 中任一 x 固定 x 成立。

引入 $g(t) = f(t) - H_3(t) - C_x(t+1)t^2(t-1)$

$g(-1)=0$，$g(0)=0$，$g(1)=0$，$g(x)=0$，$g'(0)=0$

反复应用罗尔定理 $g^{(4)}(\xi)=0$，$\xi \in [-1,1]$

$g^{(4)}(t) = f^{(4)}(t) - 4!\,C_x$，把 ξ 代入，$C_x = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}$

∴ $f(x) - H_3(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x+1)x^2(x-1)$

$\int_{-1}^{1} f(x)dx - \int_{-1}^{1} H_3(x)dx = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}\int_{-1}^{1} x^2(x^2-1)dx = -\frac{4}{15}\cdot\frac{1}{4!}f^{(4)}(\xi)$

$\int_{-1}^{1} H_3(x)dx = \frac{1}{3}H_3(-1) + \frac{4}{3}H_3(0) + \frac{1}{3}H_3(1) =$

$E(f) = -\frac{f^{(4)}(\eta)}{90}\cdot\left(\frac{b-a}{2}\right)^5 = -\frac{f^{(4)}(\eta)}{90}$，$\eta \in (-1,1)$。

2012 -1　P61:

1. 构造求出方程 $f(x)=x^3-2x^2+x=0$ 所有根的Newton迭代法，使迭代格式至少2阶收敛，并说明2阶收敛理由。取初值为2，计算接近2的根。(要求迭代2次，结果保留4位小数).

?

p阶收敛：$\varphi^{(j)}(\alpha)=0$，$j=1,2,\dots,p-1$.
$\varphi^{(p)}(\alpha)\neq 0$

【解】 $f(x)=x^3-2x^2+x=x(x^2-2x+1)=x(x-1)^2$

令 $f(x)=0$ 解得：$x_1=0$，$x_2=x_3=1$ (重根).

对 $x_1=0$，有：

Newton迭代格式 $x_{i+1}=x_i-\dfrac{f(x_i)}{f'(x_i)}$，$i=0,1,2,\dots$

即 $x_{i+1}=x_i-\dfrac{x_i(x_i-1)^2}{3x_i^2-4x_i+1}$ 也 $=x_i-\dfrac{x_i^3-2x_i^2+x_i}{3x_i^2-4x_i+1}$

对 $x_2=x_3=0$ 二重根，用改进的Newton迭代格式 $(r=2)$

$$x_{i+1}=x_i-r\frac{f(x_i)}{f'(x_i)},\quad i=0,1,2,\dots$$

$$=x_i-2\frac{x_i(x_i-1)^2}{3x_i^2-4x_i+1}=x_i-2\times\frac{x_i^3-2x_i^2+x_i}{3x_i^2-4x_i+1}$$

则迭代格式对应的迭代函数为：

$$\varphi'(x_i)=1-\frac{6x_i^2-4x_i+1}{6x_i-4}$$

而 $|\varphi'(\alpha)|=1-\frac{1}{r}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}<1$

$\cancel{\varphi''(\alpha)}$ $\varphi''(\alpha)\neq 0$

∴迭代2阶收敛.

令 $x_0=2$，则：

$$x_1=2-2\times\frac{\cancel{2^3}-\cancel{2\times 2^2}+2}{3\times 2^2-4\times 2+1}=2-2\times\frac{2}{5}=\frac{6}{5}$$

$$x_2=x_1-2\times\frac{x_i(x_i-1)^2}{3x_i^2-4x_i+1}=\frac{6}{5}-2\times\frac{\frac{6}{5}\times\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}}{3\times(\frac{6}{5})^2-4\times\frac{6}{5}+1}=\frac{66}{65}$$

2. 试确定求积公式 $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = A_{-1}f(-1) + A_0 f(0) + A_1 f(1)$ 中的待定参数 A_{-1}, A_0, A_1，使公式的代数精度尽可能高，并导出该公式的余项（设 $f(x) \in C^4[-1,1]$）。书P182:

【解】求积公式中含有3个待定参数，利用代数精度定义，分别令 $f(x) = 1, x, x^2$ 时准确成立，得：

$$\begin{aligned} A_{-1} + A_0 + A_1 &= 2 \\ -A_{-1} + 0 + A_1 &= \int_{-1}^{1} x\,dx = \tfrac{1}{2}x^2\Big|_{-1}^{1} = 0 \\ A_{-1} + 0 + A_1 &= \int_{-1}^{1} x^2\,dx = \tfrac{1}{3}x^3\Big|_{-1}^{+1} = \tfrac{2}{3} \end{aligned}$$

解得 $\begin{cases} A_{-1} = \frac{1}{3} \\ A_0 = \frac{4}{3} \\ A_1 = \frac{1}{3} \end{cases}$

$\therefore \int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \frac{1}{3}f(-1) + \frac{4}{3}f(0) + \frac{1}{3}f(1).$

令 $f(x) = x^3$，左边 $= \int_{-1}^{1} x^3\,dx = \frac{1}{4}x^4\Big|_{-1}^{1} = 0$

右边 $= -\frac{1}{3} + 0 + \frac{1}{3} = 0$ $\therefore$ 左边 = 右边

令 $f(x) = x^4$，左边 $= \int_{-1}^{1} x^4\,dx = \frac{1}{5}x^5\Big|_{-1}^{1} = \frac{2}{5}$

右边 $= \cancel{\frac{1}{3}\times(-\frac{1}{5}} \; -\frac{1}{3} + 0 + \frac{1}{3} = 0$ $\therefore$ 左边 $\neq$ 右边

故代数精度为3次

1. 方程组：$\begin{bmatrix}3&-2&0\\-1&3&-1\\-5&7&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\6\\10\end{bmatrix}$.

① 用Crout三角分解法解方程组

② 计算其系数矩阵A的按模最大的特征值及对应的特征向量，

选取初始向量 $V_0=(0,1,1)^T$，（要求迭代二次，结果保留4位小数）。

[解] ① $A=\hat{L}\hat{U}=[\diagdown][\diagdown]$

由题：$A=\begin{bmatrix}3&-2&0\\-1&3&-1\\-5&7&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\hat{l}_{11}&0&0\\\hat{l}_{21}&\hat{l}_{22}&0\\\hat{l}_{31}&\hat{l}_{32}&\hat{l}_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&\hat{u}_{12}&\hat{u}_{13}\\&1&\hat{u}_{23}\\&&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&-2&0\\-1&3&-1\\-5&7&-1\end{bmatrix}$

$\cancel{\begin{bmatrix}3&-2&0\\-1&3&-1\\-5&7&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&0&0\\-1&&0\\-5&&\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&1\end{bmatrix}}$

$l_{11}=3$

$l_{11}u_{12}=-2 \Rightarrow u_{12}=-\frac{2}{3}$

$l_{11}u_{13}=0 \Rightarrow u_{13}=0$

$l_{21}\cdot 1=-1 \Rightarrow l_{21}=-1$ $\quad l_{22}=\frac{7}{3}$

$l_{21}u_{12}+l_{22}=3 \quad -1\times(-\frac{2}{3})+l_{22}=3$

$l_{21}u_{13}+l_{22}u_{23}=-1 \quad -1\times 0+\frac{7}{3}\times u_{23}=-1.$

$u_{23}=-\frac{3}{7}$

$l_{31}=-5$

$l_{31}u_{12}+l_{32}=7 \quad -5\times(-\frac{2}{3})+l_{32}=7=\frac{21}{3}$

$l_{32}=\frac{11}{3}$

$l_{31}u_{13}+l_{32}u_{23}+l_{33}=-1$

$-5\times 0+\frac{4}{3}\times(-\frac{3}{7})+l_{33}=-1$

$l_{33}=-\frac{3}{7}.$

$\therefore \hat{L}=\begin{bmatrix}3&&\\-1&\frac{7}{3}&\\-5&\frac{4}{3}&-\frac{3}{7}\end{bmatrix}$，$\hat{U}=\begin{bmatrix}1&-\frac{2}{3}&0\\&1&-\frac{3}{7}\\&&1\end{bmatrix}$

$\hat{L}\underline{\hat{U}x}=b$

$Ly=b \quad \begin{bmatrix}3&&\\-1&\frac{7}{3}&\\-5&\frac{4}{3}&-\frac{3}{7}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\6\\10\end{bmatrix}$

$3y_1=3 \qquad y_1=1$

$-y_1+\frac{7}{3}y_2=6 \qquad \frac{7}{3}y_2=7 \quad y_2=7\times\frac{3}{7}=3$

$-5y_1+\frac{4}{3}y_2-\frac{3}{7}y_3=10 \qquad \underbrace{-5+4}_{-1}-\frac{3}{7}y_3=10$

$-\frac{3}{7}y_3=9 \qquad y_3=-\frac{7}{3}\times 9=-21$

$Ux=y \quad \begin{bmatrix}1&-\frac{2}{3}&0\\&1&-\frac{3}{7}\\&&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\3\\-21\end{bmatrix}$ $\quad x_2+\frac{3}{7}\times 21=3 \quad$ $x_1=$ $\quad \frac{42}{7}=x_2$

$x_3=-21$

② $V_0=(0,1,1)^T \quad u_0=\frac{V_0}{\max(V_0)}=(0,1,1)^T \quad \lambda=1$

$V_1=Au_0=\begin{bmatrix}3&-2&0\\-1&3&-1\\-5&7&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\\2\\6\end{bmatrix} \qquad u_1=\frac{V_1}{\max(V_1)}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}\\1\end{bmatrix} \quad \lambda=6.$

$V_2=Au_1=\begin{bmatrix}3&-2&0\\-1&3&-1\\-5&7&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{5}{3}\\\frac{1}{3}\\3\end{bmatrix} \qquad V_2=\frac{V_2}{\max(V_2)}=\begin{bmatrix}-\frac{5}{9}\\\frac{1}{9}\\1\end{bmatrix}\Rightarrow\lambda=3.$

$\lambda_{max}=3$

$[-\frac{5}{9},\frac{1}{9},1]^T.$

3. 方程组: $\begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ -5 & 7 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 10 \end{bmatrix}$.

① 用Crout三角分解法解方程组

② 计算其系数矩阵A的按模最大的特征值及对应的特征向量,

选取初始向量 $v_0 = (0,1,1)^T$, (要求迭代二次, 结果保留4位小数).

【解】① $A = \hat{L}\hat{U} = [\diagdown][\diagdown]$

由题: $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ -5 & 7 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{l}_{11} & 0 & 0 \\ \hat{l}_{21} & \hat{l}_{22} & 0 \\ \hat{l}_{31} & \hat{l}_{32} & \hat{l}_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & \hat{u}_{12} & \hat{u}_{13} \\ & 1 & \hat{u}_{23} \\ & & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ -5 & 7 & -1 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ -5 & 7 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & & 0 \\ -5 & & \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}$

$l_{11} = 3$

$l_{11}u_{12} = -2 \Rightarrow u_{12} = -\frac{2}{3}$

$l_{11}u_{13} = 0 \Rightarrow u_{13} = 0$

$l_{21}\cdot 1 = -1 \Rightarrow l_{21} = -1$ $\qquad l_{22} = \frac{7}{3}$

$l_{21}u_{12} + l_{22} = 3 \quad -1\times(-\frac{2}{3}) + l_{22} = 3$

$l_{21}u_{13} + l_{22}u_{23} = -1 \quad -1\times 0 + \frac{7}{3}\times u_{23} = -1$.

$u_{23} = -\frac{3}{7}$

$l_{31} = -5$

$l_{31}u_{12} + l_{32} = 7 \quad -5\times(-\frac{2}{3}) + l_{32} = 7 \quad \frac{21}{3}$

$l_{32} = \frac{4}{3}$

$l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23} + l_{33} = -1$

$-5\times 0 + \frac{4}{3}\times(-\frac{3}{7}) + l_{33} = -1$

$\underline{l_{33} = -\frac{3}{7}}$.

$\therefore \hat{L} = \begin{bmatrix} 3 & & \\ -1 & \frac{7}{3} & \\ -5 & \frac{4}{3} & -\frac{3}{7} \end{bmatrix}, \quad \hat{U} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{2}{3} & 0 \\ & 1 & -\frac{3}{7} \\ & & 1 \end{bmatrix}$

$\hat{L}\underline{\hat{U}x} = b$

$Ly = b \quad \begin{bmatrix} 3 & & \\ -1 & \frac{7}{3} & \\ -5 & \frac{4}{3} & -\frac{3}{7} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 10 \end{bmatrix}$

$3y_1 = 3 \qquad y_1 = 1$

$-y_1 + \frac{7}{3}y_2 = 6 \qquad \frac{7}{3}y_2 = 7 \quad y_2 = 7\times\frac{3}{7} = 3$

$-5y_1 + \frac{4}{3}y_2 - \frac{3}{7}y_3 = 10 \qquad \underbrace{-5+4}_{-1} - \frac{3}{7}y_3 = 10$

$-\frac{3}{7}y_3 = 9 \quad y_3 = -\frac{7}{3}\times 9 \underline{= -21}$

$x_1 =$ ___.

$Ux = y \quad \begin{bmatrix} 1 & -\frac{2}{3} & 0 \\ & 1 & -\frac{3}{7} \\ & & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -21 \end{bmatrix} \quad x_2 + \frac{3}{7}\times 21 = 3 \quad \frac{42}{7} = x_2$

$x_3 = -21$

② $v_0 = (0,1,1)^T \qquad u_0 = \frac{v_0}{\max(v_0)} = (0,1,1)^T \quad \lambda = 1$

$v_1 = Au_0 = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ -5 & 7 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix} \qquad u_1 = \frac{v_1}{\max(v_1)} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 1 \end{bmatrix} \quad \lambda = 6$.

$v_2 = Au_1 = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ -5 & 7 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 3 \end{bmatrix} \qquad v_2 = \frac{v_2}{\max(v_2)} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{9} \\ \frac{1}{9} \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda = 3$.

$\lambda_{max} = 3$

$[-\frac{5}{9}, \frac{1}{9}, 1]^T$.

4. 已知 $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ -5 \end{bmatrix}$ 　再算一次　Chapter 2

① Jacobi 迭代矩阵和Gauss-Seidel矩阵　②讨论收敛性.

【解】 $A = D + L + U \Rightarrow D = \begin{bmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 2 \end{bmatrix}$, $L = \begin{bmatrix} 0 & & \\ 2 & 0 & \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$, $U = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ & 0 & 2 \\ & & 0 \end{bmatrix}$

①

$$B_J = -D^{-1}(L+U)$$

$$= -\begin{bmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 2 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \cancel{\begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & & \\ & -\frac{1}{4} & \\ & & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix}}$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & & \\ & -\frac{1}{2} & \\ & & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_G = -(D+L)^{-1}U$$

$$= -\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ & 0 & 2 \\ & & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ & 0 & 2 \\ & & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

② 充要条件: $\rho(B)<1$

Jacobi迭代:

$$\rho(B_J) = |\lambda E - B_J| = \begin{vmatrix} \lambda & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & \lambda & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \lambda \end{vmatrix} = \lambda(\tfrac{1}{2}+\lambda)(\lambda-\tfrac{1}{2}).$$

得: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$, $\lambda_3 = \frac{1}{2}$ $\therefore \rho(B_J)<1$. 收敛.

Gauss-Seidel迭代:

$$\rho(B_G) = |\lambda E - B_G| = \begin{vmatrix} \lambda & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \lambda+\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \lambda-\frac{1}{2} \end{vmatrix} = \lambda(\lambda+\tfrac{1}{2})(\lambda-\tfrac{1}{2})$$

$\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \frac{1}{2}$, $\lambda_3 = \frac{1}{2}$ $\therefore \rho(B_G)<1$. 收敛.

5. 用共轭梯度法（CG法）求解（$x^{(0)}=(0,0,0)^T$）

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 24 \\ 30 \\ -24 \end{bmatrix}$$

算到 $r^{(k)}=(0,0,0)^T$.

给定 $x^{(0)}$，计算 $r^{(0)}=b-Ax^{(0)}$，$p_0=r^{(0)}$.

对 $k=0,1,\dots$ 计算：$\alpha_k=\dfrac{(r^{(k)},r^{(k)})}{(p_k,Ap_k)}$，$x^{(k+1)}=x^{(k)}+\alpha_k p_k$，$r^{(k+1)}=r^{(k)}-\alpha_k Ap_k$

$\beta_k=\dfrac{(r^{(k+1)},r^{(k+1)})}{(r^{(k)},r^{(k)})}$，$p_{k+1}=r^{(k+1)}+\beta_k p_k$.

【解】 $x^{(0)}=(0,0,0)^T$

$$r^{(0)}=b-Ax^{(0)}=\begin{bmatrix} 24 \\ 30 \\ -24 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 24 \\ 30 \\ -24 \end{bmatrix}=p_0$$

$$Ap_0=\begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 24 \\ 30 \\ -24 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 186 \\ 216 \\ -126 \end{bmatrix}$$

$$\alpha_0=\frac{(r^{(0)},r^{(0)})}{(p_0,Ap_0)}=\frac{24^2+30^2+24^2}{24\times186+30\times216+(-24)\times(-126)}=\frac{2052}{13968}$$

$$x^{(1)}=x^{(0)}+\alpha_0 p_0$$
$$=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}+\frac{2052}{13968}\begin{bmatrix} 24 \\ 30 \\ -24 \end{bmatrix}=$$

$$r^{(1)}=r^{(0)}-\alpha_0 Ap_0=\begin{bmatrix} 24 \\ 30 \\ -24 \end{bmatrix}-\frac{2052}{13968}\cdot\begin{bmatrix} 186 \\ 216 \\ -126 \end{bmatrix}=$$

$$\beta_0=\frac{(r^{(1)},r^{(1)})}{(r^{(0)},r^{(0)})}=$$

$$p_1=r^{(1)}+\beta_0 p_0=$$

6. $f(x)$ 满足：

x_i	0	1	4
$f(x_i)$	0	1	2
	x_0	x_1	x_2

① 试求 $f(x)$ 在 [0,4] 上的 Hermite 插值多项式 $H(x)$，使之满足：

$$H(x_i)=f(x_i),\ i=0.1.2,\ H'(x_1)=\frac{1}{2}.$$

② 余项：$R(x)=f(x)-H(x)$.

设 $H(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3$，$H'(x)=a_1+2a_2x+3a_3x^2$

$H(0)=a_0=0$ ✓

$H(1)=a_0+a_1+a_2+a_3=1$

$H(4)=a_0+4a_1+16a_2+64a_3=2$

$H'(1)=a_1+2a_2+3a_3=\frac{1}{2}$

$a_1+a_2+a_3=1$

$a_1+2a_2+3a_3=\frac{1}{2}$

$a_1+4a_2+16a_3=\frac{1}{2}$

$-a_2-2a_3=\frac{1}{2}$.

$-a_2-13a_3=0$

$a_1+a_2+a_3=1$

$a_1+4a_2+16a_3=\frac{1}{2}$

$2a_2+3a_3=\frac{1}{2}$.

$3a_2+15a_3=-\frac{1}{2}$

$a_2+5a_3=-\frac{1}{6}$.

$2a_2+3a_3=\frac{1}{2}$

$2a_2+10a_3=-\frac{1}{3}$

$-7a_3=\frac{5}{6}$

$a_3=\frac{5}{6}\times(-\frac{1}{7})$

$=-\frac{5}{42}$

7. 已知数据点 (0,7), (1,4), (2,2), (3,3), 试利用反差商构造有理插值函数 $R(x)$ 通过已知数据点.

x_i	0	1	2	3
$f(x_i)$	7	4	2	3

Chapter 3 有理逼近 P149.

解: 计算反差商表:

$$v_1(x_j)=\frac{x_j-x_0}{v_0(x_j)-v_0(x_0)}$$

x_j	$v_0(x_j)=f_j$	$v_1(x_j)$	$v_2(x_j)$	$v_3(x_j)$
0	$\underline{7}$			
1	4	$\underline{-\frac{1}{3}}$		
2	2	$-\frac{2}{5}$	$\underline{-15}$	
3	3	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{24}{5}$	$\underline{\frac{5}{51}}$

$$v_1(x_j)=\frac{x_j-x_0}{v_0(x_j)-v_0(x_0)}=\frac{x_j-0}{v_0(x_j)-7}$$

$$\therefore v_1(x_1)=\frac{1-0}{4-7}=-\frac{1}{3},\quad v_1(x_2)=\frac{2-0}{2-7}=-\frac{2}{5},\quad v_1(x_3)=\frac{3-0}{3-7}=-\frac{3}{4}$$

$$v_2(x_j)=\frac{x_j-x_1}{v_1(x_j)-v_1(x_1)}=\frac{x_j-1}{v_1(x_j)+\frac{1}{3}}$$

$$\therefore v_2(x_2)=\frac{2-1}{-\frac{2}{5}+\frac{1}{3}}=\frac{1}{-\frac{6}{15}+\frac{5}{15}}=-15,\quad v_2(x_3)=\frac{3-1}{-\frac{3}{4}+\frac{1}{3}}=\frac{2}{\frac{-9+4}{12}}=2\times\frac{-12}{5}$$

$$v_3(x_j)=\frac{x_j-x_2}{v_2(x_j)-v_2(x_2)}=\frac{3-2}{-\frac{24}{5}+15}=\frac{1}{\frac{-24+75}{5}}=\frac{5}{51}.$$

$\therefore$ 有理插值函数:

$$R(x)=v_0(x_0)+\cfrac{x-x_0}{v_1(x_1)+\cfrac{x-x_1}{v_2(x_2)+\cfrac{x-x_2}{v_3(x_3)}}}$$

$$=7+\cfrac{x-0}{-\frac{1}{3}+\cfrac{x-1}{-15+\cfrac{x-2}{\frac{5}{51}}}}$$

8. 选择形如 $y=\frac{1}{a_0+a_1x}$ 的经验公式拟合给定的数据表.

i	0	1	2	3	4
x_i	1.00	1.25	1.50	1.75	2.00
y_i	5.10	5.79	6.53	7.45	8.46
Y_i	0.1961	0.1727	0.1531	0.1342	0.1182.

解: 由 $y=\frac{1}{a_0+a_1x}$ 得: $Y=\frac{1}{y}=a_0+a_1x$.

取 $\varphi_0(x)=1$, $\varphi_1(x)=x$, 作 $Y=a_0+a_1x$ 与 (x_i, Y_i) 的最小二乘拟合.

由 $(\varphi_0, \varphi_0)=\sum_{i=0}^{4}1^2=5$

$(\varphi_0, \varphi_1)=(\varphi_1, \varphi_0)=\sum_{i=0}^{4}\varphi_0(x_i)\varphi_1(x_i)=1.00+1.25+1.50+1.75+2.00=7.5$

$(\varphi_1, \varphi_1)=\sum_{i=0}^{4}\varphi_1^2(x_i)=1^2+1.25^2+1.50^2+1.75^2+2.00^2=11.875$

$(y, \varphi_0)=\sum_{i=0}^{4}\varphi_0 y=5.10+5.79+6.53+7.45+8.46=33.33$

$(y, \varphi_1)=\sum_{i=0}^{4}\varphi_1 y=1.00\times5.10+1.25\times5.79+1.50\times6.53+1.75\times7.45+2\times8.46=52.09$

则法方程为:
$$\begin{cases}5a_0+7.5a_1=33.33\\7.5a_0+11.875a_1=52.09\end{cases}$$
解得:
$$\begin{cases}a_0=1.638\\a_1=3.352\end{cases}$$

$\therefore\ Y=1.638+3.352x$

$\therefore\ y=\frac{1}{1.638+3.352x}$.

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{3}[f(x_n, y_n) + 2f(x_{n+1}, y_{n+1})]$$
$$= \underset{a_0}{y_n} + \frac{h}{3}(y_n' + 2y_{n+1}')$$

① 求局部截断误差主项，指出方法的阶数 ②讨论其绝对稳定性

解: ~~$p=0,\ a_0=1,\ b_1=\frac{2}{3},\ b_0=\frac{1}{3},\ b_1=\frac{2}{3}\neq 0$~~

① $p=0,\ a_0=1,\ b_{-1}=\frac{2}{3},\ b_0=\frac{1}{3},\ b_1=0$

$\therefore C_0 = 1-\sum_{i=0}^{p} a_i = 1-a_0 = 0.$

$C_1 = 1-\left(\sum_{i=0}^{p}(-i)a_i + \sum_{i=-1}^{p} b_i\right) = 1-\left(0+\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\right) = 0.$

$C_2 = \frac{1}{2}\left(1-\left[\sum_{i=0}^{p}(-i)^2 a_i + 2\sum_{i=-1}^{p}(-i)b_i\right]\right) = \frac{1}{2}\left(1-\left(0+2\left(\frac{2}{3}\right)\right)\right) = -\frac{1}{6} \neq 0.$

$\therefore$ 方法为1阶方法

$T_n = C_2 h^2 y''(x_n) = -\frac{1}{6}h^2 y''(x_n)$ —局部截断误差.

② $\rho(r) = r^{p+1} - \sum_{i=0}^{p} a_i r^{p-i} = r - 1$　　令 $\rho(r)=0$ 得 $r=1$. 为单根.

$\sigma(r) = \sum_{i=-1}^{p} b_i r^{p-i} = \frac{2}{3}r + \frac{1}{3}$

$\pi(r;\lambda h) = (1-\lambda h b_{-1})r^{p+1} - \sum_{i=0}^{p}(a_i+\lambda h b_i)r^{p-i}$

$= (1-\frac{2}{3}\lambda h)r - (1+\frac{1}{3}\lambda h)$

令 $\pi(r,\lambda h)=0$ 得: $r = \dfrac{1+\frac{1}{3}\lambda h}{1-\frac{2}{3}\lambda h}$

令 $|r|<1$ 得: $\left|\dfrac{1+\frac{1}{3}\lambda h}{1-\frac{2}{3}\lambda h}\right|<1$　解得: $\lambda h<0$

$\therefore$ 绝对稳定区间为 $(-\infty, 0)$.

10. $y_{n+1} = \frac{1}{2}y_n + \frac{1}{2}y_{n-1} + \frac{h}{4}[7y_n' - y_{n-1}']$ 及初始值 y_0. y (h为步长)

①讨论收敛性和绝对稳定性.

② 对初值问题 $\begin{cases} y' + 10y = 0 \\ y(0) = 1.0 \end{cases}$. 取步长 $h=0.04$, 初值 $y_1 = 0.6703$.

求 $x=0.08$、0.12 时的数值解(保留小数4位).

【解】由题: $p=1$, $a_0 = \frac{1}{2}$, $a_1 = \frac{1}{2}$, $b_{-1} = 0$, $b_0 = \frac{7}{4}$, $b_1 = -\frac{1}{4}$.

$c_0 = 1 - (a_0 + a_1) = 0$

$c_1 = 1 - [\sum_{i=0}^{p}(-i)a_i + \sum_{i=-1}^{p} b_i] = 1 - (-\frac{1}{2} + \underbrace{\frac{7}{4} - \frac{1}{4}}_{\frac{6}{4}=\frac{3}{2}}) = 0$

$\therefore c_0 = c_1 = 0$, 方法相容.

$\rho(r) = r^{p+1} - \sum_{i=0}^{p} a_i r^{p-i} = r^2 - (\frac{1}{2}r + \frac{1}{2}) = r^2 - \frac{1}{2}r - \frac{1}{2} = 0$ 得: $r_0 = 1$, $r_1 = -\frac{1}{2}$

$\therefore |r_i| \le 1$, 满足根条件

$\therefore$ 方法收敛.

$\pi(r;\lambda h) = (1-\lambda h b_{-1})r^{p+1} - \sum_{i=0}^{p}(a_i + \lambda h b_i) r^{p-i}$

$= (1-0)r^2 - (\frac{1}{2} + \frac{7}{4}\lambda h)r - (\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\lambda h)$

$= r^2 - (\frac{1}{2} + \frac{7}{4}\lambda h)r + (\frac{1}{4}\lambda h - \frac{1}{2})$ $\rightarrow (-2, 6)$

令 $|\frac{1}{2} + \frac{7}{4}\lambda h| < 1 + (\frac{1}{4}\lambda h - \frac{1}{2})$ $\rightarrow (-\frac{1}{2}, 0)$ $|-\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\lambda h| < 1$

解得: $\lambda h \in \cancel{(-2, 6)}$ $(-\frac{1}{2}, 0)$. 即绝对稳定区间为:

② $y' + 10y = 0 \Rightarrow y' = -10y$ 而 $y_1 = 0.6703$ $\therefore y_1' = -6.703$.

$x = 0.08$ 时, $y_2 = \frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_0 + \frac{h}{4}(7y_1' - \cancel{7}y_0')$

$= \frac{1}{2} \times 0.6703 + \frac{1}{2} \times \quad + \frac{0.04}{4} \times (-7 \times (-6.703) + \underline{\underline{10}})$?

$x = 0.12$ 时, $y_3 = \frac{1}{2}y_2 + \frac{1}{2}y_1 + \frac{h}{4}(7y_2' - y_1')$

$=$

2011年

2011 年哈工大《数值分析》考试

1、设 $f(x)=\left(x^3-5\right)^2$。(1) 应用 Newton 迭代法于方程 $f(x)=0$，导出 $\sqrt[3]{5}$ 的迭代公式；并讨论迭代公式的收敛速度；(2) 尝试把导出的迭代公式加以改进，提高迭代公式的收敛速度，并用改进后的迭代公式计算 $\sqrt[3]{5}$（取初值 $x_0=1.0$，计算三步，结果保留四位小数）。 $x=\varphi(x)$

设：$p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2$

2、(1) 求 a 及不超过二次多项式 $P(x)$ 使 $S(x)=\begin{cases}a+x^2+x^3, & 0\le x\le 1\\ P(x), & 1\le x\le 2\end{cases}$，具有连续二阶导数且满足 $P(2)=0$；

(2) 当 $f(x)$ 用满足条件 $f(1)=P(1), f(2)=P(2), f'(1)=P'(1)$ 的插值多项式近似时，待定系数法

$P(x)=$

求 $\int_1^2 f(x)dx$。

3、已知方程组 $\begin{bmatrix}a & 2 & 1\\ 2 & a & 2\\ 1 & 2 & a\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 2\\ 1\end{bmatrix}$，

(1) 写出求解此方程组的 Jacobi 迭代格式； $x_{k+1}=-D^{-1}(L+U)x_k+D^{-1}b$

收敛性 ← (2) 用已知结论说明，当 $|a|>4$ 时，该迭代格式收敛； $\|B_J\|_\infty$ $\rho(B_J)$

P不好求时 试试 $\|\cdot\|_\infty$, $\|\cdot\|_1$

(3) 当 $a=5$ 时，取 $\bar{x}^{(0)}=\left(\frac{1}{10},\frac{1}{5},\frac{1}{10}\right)^T$，求出 $\bar{x}^{(2)}$（计算结果保留四位小数）。

4、设 $f(x)=e^x$，在区间 $[0,1]$ 上给出 $f(x)$ 的 $n+1$ 个等距节点 x_i 处的函数值表，若 Lagrange 插值余项用二次插值求 e^x 的近似值，要使截断误差不超过 10^{-6}，问使用的函数表的最大步长是多少？ $E(x)=\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)P_{n+1}(x)$

5、给定求积公式 $\int_0^2 f(x)dx\approx Af(x_0)+f(x_1)$，

(1) 求 A，x_0，x_1 使求积公式具有尽可能高的代数精度，并指出此求积公式的代数精度是多少？(2) 并用此公式计算积分 $\int_0^2 x^4dx$。（计算结果保留四位小数）

区间的线性变换 $x=\frac{b+a}{2}+\frac{b-a}{2}t$

6、试用共轭梯度法（cg 法）求解线性方程组。（初始值取 $\bar{x}^{(0)}=(0,0,0)^T$）。

$$\begin{bmatrix}2 & -1 & 0\\ -1 & 3 & -1\\ 0 & -1 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 3\end{bmatrix}.$$

已知的计算过程为：

给定 $\bar{x}^{(0)}$，计算：$\bar{r}^{(0)}=\bar{b}-A\bar{x}^{(0)}, \bar{p}_0=\bar{r}^{(0)}$

对 $k=0,1,2,\cdots,n-1$，计算：

1） $\alpha_k=\dfrac{(\bar{r}^{(k)},\bar{p}_k)}{(\bar{p}_k,A\bar{p}_k)}$；2） $\bar{x}^{(k+1)}=\bar{x}^{(k)}+\alpha_k\bar{p}_k$；3） $\bar{r}^{(k+1)}=\bar{r}^{(k)}-\alpha_k A\bar{p}_k$；

4） $\bar{\beta}_k=-\dfrac{(\bar{r}^{(k+1)},A\bar{p}_k)}{(\bar{p}_k,A\bar{p}_k)}$；5） $\bar{p}_{k+1}=\bar{r}^{(k+1)}+\beta_k\bar{p}_k$。

7、已知数据点 $(0,1),(1,0),\left(2,\dfrac{1}{3}\right),(3,10)$，试利用反差商构造有理插值函数 $R(x)$ 通过已知数据点。

$$\begin{cases} v_0(x)=f(x) \\ v_k(x)=\dfrac{x_k-x_{k-1}}{v_{k-1}(x)-v_{k-1}(x_{k-1})} \end{cases}$$

8、方程组 $\begin{bmatrix}3 & -4 & 3\\ -4 & 6 & 3\\ 3 & 3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\5\\7\end{bmatrix}$，

$A=L+D+U$

（1）用 Doolittle 分解法解次方程组；

（2）计算其系数矩阵 A 的按模最大特征值及其对应的特征向量。选取初始向量 $\bar{v}_0=(0,1,0)^T$，迭代二次（结果保留四位小数）。

$u_0=\dfrac{v_0}{\max(v_0)}$

$\lambda_1=\max(v_2)$

$x_1=u_2$

9、利用四阶经典的龙格-库塔法求解此初值问题：$\begin{cases}y'+10y=0\\ y(0)=1\end{cases}$，

$h\lambda\in\boxed{(-2.78,0)}$

（1）讨论步长 h 应取何值方能保证方法的稳定性？

（2）取步长 $h=0.2$，求 $x=0.2,0.4$ 时的数值解，要求写出由 h,x_n,y_n 直接计算的迭代公式（计算中保留小数点后四位）。

10、给定线性多步法 $y_{n+1}=\dfrac{1}{2}y_n+\dfrac{1}{2}y_{n-1}+\dfrac{h}{8}\left[3y'_{n+1}+8y'_n+y'_{n-1}\right]$ 及初始值 y_0,y_1，（h 为步长）。

$y_{n+1}=\sum_{i=0}^{p}a_i y_{n-i}+\sum_{i=-1}^{p}b_i y'_{n-i}$

$\rho(r)=r^{p+1}-\sum_{i=0}^{p}a_i r^{p-i}$

$\pi(r,h\lambda)=(1-h\lambda b_{-1})r^{p+1}-\sum_{i=0}^{p}(a_i+h\lambda b_i)r^{p-i}$

（1）确定方法中的局部误差主项，并指出方法的阶数；

（2）讨论该方法的收敛性和绝对稳定性。

$C_{r+1}h^{r+1}y^{(r+1)}(x)$

（在线性多步法的局部截断误差中：$C_r=\dfrac{1}{r!}\left\{1-\left[\sum_{i=0}^{p}(-i)^r a_i+r\sum_{i=-1}^{p}(-i)^{r-1}b_i\right]\right\}, r=2,3,\cdots$）

参考定理：设 x_1 和 x_2 是实系数二次方程 $x^2+bx+c=0$ 的根，则 $|x_1|<1,|x_2|<1$ 的充要条件是 $|b|<1+c,|c|<1$。

2011年试题

Newton 迭代法

1. 解 (1) $x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$

$f'(x) = 2(x^3-5)\cdot 3x^2 = 6x^2(x^3-5)$

$\therefore x_{i+1} = x_i - \frac{(x_i^3-5)^2}{6x_i^2(x_i^3-5)} = x_i - \frac{x_i^3-5}{6x_i^2} = \frac{5x_i^3+5}{6x_i^2}$

收敛速度 $\cancel{f''(x) = f(x) = x^6 - 10x^3 + 25}$ $\quad \varphi(x) = \frac{5x^3+5}{6x^2} \quad \varphi'(x) =$

$\cancel{f^{(6)}(x) = 6! \neq 0}$ $\quad \varphi'(x) =$

$\cancel{f^{(7)}(x) = 0}$

∴ 为7阶收敛

(2) ∵ 根的重数 $r=2$，∴ 改进公式：$x_{i+1} = x_i - 2\frac{f(x_i)}{f'(x_i)} = \frac{2x_i^3+5}{3x_i^2}$

$x_0 = 1.0$，$\quad x_1 = \frac{2x_0^3+5}{3x_0^2} = \frac{7}{3} \approx 2.3333$

$x_2 = \frac{2x_1^3+5}{3x_1^2} = 1.8617$

$x_3 = \frac{2x_2^3+5}{3x_2^2} = 1.7720$

2. (1) 设 $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$

$f(x) = a + x^2 + x^3$

又∵ $f'(x) = 2x+3x^2 \quad p'(x) = a_1 + 2a_2x$

$f''(x) = 2+6x \quad p''(x) = 2a_2$

已知 $\boxed{\begin{cases} f(1^+) = p(1^-) \\ f'(1^+) = p'(1^-) \\ f''(1^+) = p''(1^-) \\ p(2) = 0 \end{cases}} \Rightarrow \therefore \begin{cases} a+2 = a_0+a_1+a_2 \\ 2+3 = a_1+2a_2 \\ 2+6 = 2a_2 \\ a_0+2a_1+4a_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0 = -10 \\ a_1 = -3 \\ a_2 = 4 \\ a = -11 \end{cases}$

$p(x) = -10 + (-3)x + 4x^2$

(2) 设 $p(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2$ $\qquad$ Hermite 1

$\begin{cases} f(1) = p(1) \\ f(2) = p(2) \\ f'(1) = p'(1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -9 = b_0+b_1+b_2 \\ 1 = b_0+2b_1+4b_2 \\ 5 = b_1+2b_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_0 = \cancel{-19}\ -9 \\ b_1 = \cancel{15}\ -5 \\ b_2 = \cancel{-5}\ 5 \end{cases}$ $\therefore \cancel{p(x) = -19+15x-5x^2}$

$p(x) = -9 - 5x + 5x^2$

仿照书上Hermite法

$\because E(x) = \frac{1}{(2n+2)!} f^{(2n+2)}(\xi) p_{n+1}^2(x) = 0$

$\therefore f(x) = p(x)$

$\int_1^2 f(x)dx = \int_1^2 p(x)dx = \int_1^2 -9-5x+5x^2\, dx$

其中 $\begin{cases} n = ab \\ r = p \end{cases}$ $\therefore E(x) = \frac{1}{(n+r+2)!} f^{(n+r+2)}(\xi) \int_1^2 p_{n+1}(x) p_{r+1}(x)\, dx$

$= \frac{1}{3!} f^{(3)}(\xi) \int_1^2 (x-x_0)^2(x-x_1)\, dx$

$= \frac{1}{3!} f^{(3)}(\xi) \int_1^2 (x-1)^2(x-2)\, dx$

3. (1) $A=\begin{bmatrix} a & 2 & 1 \\ 2 & a & 2 \\ 1 & 2 & a \end{bmatrix} = L+D+U$ $\quad b=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

则 $L=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad D=\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$ $\quad U=\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Jacobi: $x_{k+1} = -D^{-1}(L+U)x_k + D^{-1}b$

(2) $B_J = -D^{-1}(L+U) = -\frac{1}{a}\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{2}{a} & -\frac{1}{a} \\ -\frac{2}{a} & 0 & -\frac{2}{a} \\ -\frac{1}{a} & -\frac{2}{a} & 0 \end{bmatrix}$

充要条件 $\rho(B_J)<1$ 或 充分条件 $\|B_J\|<1$ 收敛

① $\|B_J\|_1 = \left|\frac{4}{a}\right| < 1$ ∴ Jacobi 迭代收敛
$\|B_J\|_\infty =$

② $\rho(B_J)$ 计算较复杂（不在此处不适用）

(3) 当 $a=5$ 时，$D^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$ $\quad x^{(0)}=\left[\frac{1}{10}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10}\right]^T$

得:
$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{1}{5}\left(1 - 2x_2^{(k)} - x_3^{(k)}\right) \\ x_2^{(k+1)} = \frac{1}{5}\left(2 - 2x_1^{(k)} - 2x_3^{(k)}\right) \\ x_3^{(k+1)} = \frac{1}{5}\left(1 - x_1^{(k)} - 2x_2^{(k)}\right) \end{cases}$$

当 $k=0$ 时
$$\begin{cases} x_1^{(1)} = \frac{1}{5}\left(1 - 2\times\frac{1}{5} - \frac{1}{10}\right) = \frac{1}{10} \\ x_2^{(1)} = \frac{1}{5}\left(2 - 2\times\frac{1}{10} - 2\times\frac{1}{10}\right) = \frac{8}{25} \\ x_3^{(1)} = \frac{1}{5}\left(1 - \frac{1}{10} - 2\times\frac{1}{5}\right) = \frac{1}{10} \end{cases}$$

当 $k=1$ 时
$$\begin{cases} x_1^{(2)} = \\ x_2^{(2)} = \\ x_3^{(2)} = \end{cases}$$

4. 解：~~$n=2$~~ 设插值点为 x_{k-1}, x_k, x_{k+1}

则 $h=x_k-x_{k-1}$

余项 $\underline{E(x)=\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)(x-x_{k-1})(x-x_k)(x-x_{k+1})}^{\,p_{n+1}(x)}$，$\xi\in[0,1]$ 或：

$=\frac{1}{3!}f^{(3)}(\xi)(x-x_{k-1})(x-x_k)(x-x_{k+1})$

$=\frac{h^3}{3!}f^{(3)}(\xi)\ (n+r)(n+r-1)(n+r-2)$

$\le\frac{h^3}{3!}e\ r(r-1)(r-2)$　　$0\le r\le 2$

令 $x=x_k+rh$ ✓

则 $E(x)=\frac{1}{3!}f^{(3)}(\xi)h^3(r-1)r(r+1)$

$\le\frac{h^3}{3!}e\ r(r^2-1)$　　$(-1\le r\le 1)$

令 $g(r)=r(r^2-1)$

$g'(r)=0$ 得 $\tilde{r}=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$

令：$g(r)=r(r-1)(r-2)$

$g'(r)=0\Rightarrow$ 得 $\tilde{r}=1+\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\therefore\ g(r)_{max}=g(\tilde{r})=\frac{2}{9}\sqrt{3}$

$\therefore\ E(x)\le\frac{h^3}{3!}e\cdot\frac{2}{9}\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{27}eh^3\le 10^{-6}\Rightarrow\quad h_{max}=$

5. (1) 令：$f(x)=1,\ x,\ x^2$.

$$\begin{cases}\int_0^2 1\,dx=2=A+1\\ \int_0^2 x\,dx=2=Ax_0+x_1\\ \int_0^2 x^2\,dx=\frac{8}{3}=Ax_0^2+x_1^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=1\\ x_0=1+\frac{\sqrt{3}}{3}\\ x_1=1-\frac{\sqrt{3}}{3}\end{cases}$$

当 ~~$f(x)=x^3$~~ $f(x)=x^3$ 时，$\int_1^2 x^3\,dx=$　　　，$Ax_0^3+x_1^3=$　　　左≠右

当 $f(x)=x^4$ 时，$\int_1^2 x^4\,dx=$　　　，$Ax_0^4+x_1^4=$　　　左≠右

(2) $\int_0^2 x^4\,dx=Ax_0^4+x_1^4=(1+\frac{\sqrt{3}}{3})^4+(1-\frac{\sqrt{3}}{3})^4=\frac{56}{9}\approx 6.2222$

第一次

6. $A=\begin{bmatrix}2&-1&0\\-1&3&1\\0&-1&4\end{bmatrix}$　$b=\begin{bmatrix}1\\1\\3\end{bmatrix}$

$p_0=r^{(0)}=\ \begin{bmatrix}1\\1\\3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2&-1&0\\-1&3&1\\0&-1&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\\3\end{bmatrix}$

$\alpha_0=\frac{(r^0,p_0)}{(p_0,Ap_0)}=\frac{11}{39}$

$x^{(1)}=x^{(0)}+\alpha_0p_0=\frac{11}{39}\begin{bmatrix}1\\1\\3\end{bmatrix}=(\frac{11}{39},\frac{11}{39},\frac{11}{13})^T$

第二次

$r^{(1)}=r^{(0)}-\alpha_0Ap_0=$

$\beta_0=-\frac{(r^{(1)},Ap_0)}{(p_0,Ap_0)}=$

$p_1=r^1+\beta_0p_1=$

$\alpha_1=\frac{(r^{(1)},p_1)}{(p_1,Ap_1)}=$

$x^{(2)}=x^{(1)}+\alpha_1p_1=$

7.

	x_i	$f(x_i)$ $v_0(x_i)$	$v_1(x_i)$	$v_2(x_i)$	$v_3(x_i)$
x_0	0	1			
x_1	1	0	-1		
	2	$\frac{1}{3}$	-3	$-\frac{1}{2}$	
	3	10	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$

$f(x) = v_0(x)$

$$f(x) = v_0(x_0) + \cfrac{x-x_0}{v_1(x_1) + \cfrac{x-x_1}{v_2(x_2)+\cdots}}$$

根据公式得: $$R(x) = 1 + \cfrac{x-0}{-1 + \cfrac{x-1}{-\frac{1}{2} + \cfrac{x-2}{\frac{1}{2}}}}$$

8. (1) $A = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 3 \\ -4 & 6 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \cancel{L+U}\ L \cdot U$

$AX = b$

设 $LUX = b$

设 $\begin{cases} LY = b \\ Y = UX \end{cases}$

则得: $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{4}{3} & 1 & 0 \\ 1 & L_{32} & 1 \end{bmatrix}$ $U = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 3 \\ 0 & U_{22} & U_{23} \\ 0 & 0 & U_{33} \end{bmatrix}$

$$\begin{cases} -\frac{4}{3} \times (-4) + U_{22} = 6 \\ -\frac{4}{3} \times 3 + U_{23} = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} U_{22} = \frac{2}{3} \\ U_{23} = 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -4 + L_{32} \cdot U_{22} = 3 \\ 3 + L_{32} \cdot U_{23} + U_{33} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} L_{32} = \frac{21}{2} \\ U_{33} = -\frac{151}{2} \end{cases}$$

$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{4}{3} & 1 & 0 \\ 1 & \frac{21}{2} & 1 \end{bmatrix}$ $Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$ $b = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$ 得 Y.

$U = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 3 \\ 0 & \frac{2}{3} & 7 \\ 0 & 0 & -\frac{151}{2} \end{bmatrix}$ $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ $Y = \begin{bmatrix} \ \end{bmatrix}$ 得 X

(2) $U_0 = \frac{V_0}{\max(V_0)} = (0,1,0)^T$

$V_1 = AU_0 = (-4, 6, 3)^T$

$U_1 = \frac{V_1}{\max(V_1)} = (-\frac{2}{3}, 1, \frac{1}{2})^T$

$V_2 = A \cdot U_1 = (-\frac{9}{2}, \frac{61}{6}, \frac{3}{2})^T$

$U_2 = \frac{V_2}{\max(V_2)} = (\quad)^T$

$\lambda_1 = \max(V_2) = \frac{61}{6} \approx 10.167$

$x_1 = U_2 =$

9. (1) $y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 3k_3 + 1k_4)$ $y' = -10y$. 试验方程 $y' = \lambda y$

$$\begin{cases} k_1 = f(x_n, y_n) \\ k_2 = f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1) \\ k_3 = f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_2) \\ k_4 = f(x_n + h, y_n + h k_3) \end{cases}$$

四阶RK绝对稳定区间为 $(-2.78, 0)$

$\therefore -2.78 < \lambda h < 0$

又$\because \lambda = -10$

$\therefore 0 < h < 0.278$

(2)

$k_1 = -10y_n$

$k_2 = \cancel{y_n + \frac{h}{2}} -10[y_n + \frac{h}{2}\cdot(-10y_n)] = -10y_n + 50hy_n$

$k_3 = -10(y_n + \frac{h}{2}k_2) = -10[y_n + \frac{h}{2}(-10y_n + 50hy_n)] = -10y_n + 50hy_n - 250h^2y_n$

$k_4 = -10(y_n + hk_3) = -10[y_n + h(-10y_n + 50hy_n - 250h^2y_n)] = -10y_n + 100hy_n - 500h^2y_n + 2500h^3y_n$

$\therefore y_{n+1} = (\qquad\qquad)y_n$

$y_1 = (\qquad\qquad)y_0 =$

$y_2 = (\qquad\qquad)y_1 =$

10. (1) 一般形式: $y_{n+1} = \sum_{i=0}^{p} a_i y_{n-i} + h\sum_{i=-1}^{p} b_i y'_{n-i}$

知 $p = 1$, $\begin{cases} a_0 = \frac{1}{2} \\ a_1 = \frac{1}{2} \end{cases}$ $\begin{cases} b_{-1} = \frac{3}{8} \\ b_0 = 1 \\ b_1 = -\frac{1}{8} \end{cases}$

$c_0 = 1 - \sum_{i=0} a_i = 1 - (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}) = 0$

$c_1 = 1 - \left(\sum_{i=0}(-i)a_i + \sum_{i=-1} b_i\right) = 1 - \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{8} + 1 - \frac{1}{8}\right) = 0$

$c_2 = 0$

$c_3 = 0$

$c_4 = -\frac{1}{48} \neq 0$

$\therefore$ 此格式为3阶

首项误差 $c_{r+1}h^{r+1}y^{(r+1)}(x_n)$

$= c_4 h^4 y^{(4)}(x_n)$

$= -\frac{1}{48}h^4 y^{(4)}(x_n)$

(2) 收敛性:

$\rho(r) = r^{p+1} - \sum_{i=0}^{p} a_i r^{p-i}$

$= r^2 - \frac{1}{2}r - \frac{1}{2} = 0$

解得 $r_{0,1} = 1, -\frac{1}{2}$

$\because |r_{0,1}| \le 1$ 且 $|r| = 1$ 为单根，且 $c_0 = c_1$ 相容

$\therefore$ 方法收敛

绝对稳定性 $\pi = (1 - \lambda h b_{-1})r^{p+1} - \sum_{i=0}^{p}(a_i + \lambda h b_i)$

特征方程: $\pi(r, h\lambda) = \rho(r) - h\lambda\sigma(r)$

$= \rho(r) - h\lambda\sum_{i=-1}^{1} b_i r^{p-i}$

$= r^2 - \frac{1}{2}r - \frac{1}{2} - h\lambda(\frac{3}{8}r^2 + r + \frac{1}{8})$

$= (1 - \frac{3}{8}h\lambda)r^2 - (\frac{1}{2} + h\lambda)r - (\frac{1}{2} + \frac{\lambda h}{8})$

$$\begin{cases} \left|\frac{1}{2} + h\lambda\right| < 1 - \frac{3}{8}h\lambda - \frac{1}{2} - \frac{1}{8}\lambda h \\ \left|\frac{1}{2} + \frac{1}{8}\lambda h\right| < 1 \end{cases} \Rightarrow -2 < \lambda h < 0$$

2010

一、 应用 Newton 迭代法于方程 $f(x)=x^n-a=0$ 和 $f(x)=1-\frac{a}{x^n}=0$，(a>0)，分别导出求 $\sqrt[n]{a}$ 的迭代公式，并讨论迭代公式的收敛速度。

二、 已知函数表

x_k	0.10	0.20	0.40	0.50
$f(x_k)$	21.00	11.00	7.00	6.00

使用 $\varphi(x)=\frac{C_1}{x}+C_2\sqrt{x}$ 作最小二乘拟合，请确定参数 C_1，C_2（结果取 4 位小数）

三、 写出方程组

$$\begin{bmatrix}-2 & 1 & & \\ 1 & -2 & 1 & \\ & 1 & -2 & 1 \\ & & 1 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$

的 Jacobi 迭代和 Gauss-Seidel 迭代格式，并讨论敛散性。

四、 求 $f(x)=x^4$ 在[0,2]上等距节点的分段 3 次 Hermit 插值，并估计误差（取 h=1）。

五、 求导数 A_1，A_2 和 A_3，使求积公式 $\int_{-1}^{1}f(x)dx=A_1f(-1)+A_2f(-\frac{1}{3})+A_3f(\frac{1}{3})$ 对次数≤2 的一切多项式都精确成立。此公式代数精度是多少？并用此公式计算积分 $\int_{-2}^{4}\frac{1}{x+3}dx$（计算结果保留 4 位小数）。

六、 用逆 Broyden 秩一法，$\begin{cases}x^{l+1}=x^l-H_lF(x^l)\\ H_{l+1}=H_l+(r^l-H_ly^l)\dfrac{(r^l)^TH_l}{(r^l)^TH_ly^l}\end{cases}$，

求解非线性方程组 $\begin{cases}2x_1^3-x_2^2-1=0\\ x_1x_2^3-x_2-4=0\end{cases}$ 的近似解向量 x^2。其中初始近似值 $x^0=(1.2,1.7)^T$。

七、 已知数据点(0,0),(1,1),(2,0.5),(3,3),(4,-0.5)使用反差商构造有利插值函数，R(x)通过已经给出的数据点。

八、 方程组 $\begin{bmatrix}2 & 3 & 2\\10 & 3 & 4\\3 & 6 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\11\\-2\end{bmatrix}$

（1） 用 Doolittle 分解法解方程组

（2） 计算系数矩阵 A 的按模最大特征值及对应的特征向量 $(0,0,1)^T$。迭代两次（结果保留 4 位小数）

九、 对于初始值问题 $\begin{cases}y'+\lambda y=0\\ y(0)=1\end{cases}$，$(\lambda>0, 0\le x\le 1)$ 数

哈工大二手市场.
Q群: 744900487

$$y_{n+1}=y_n+hf\left(x_n+\frac{h}{2},y_n+\frac{h}{2}f(x_n,y_n)\right)$$

（1） 讨论其解的稳定性，步长 h 应取何值方程保证方法的绝对稳定性。

（2） 对 λ=1，取 h=0.2 求方程的数值解。

十、 给定线性多步法

$$y_{n+1}=\frac{1}{2}y_n+\frac{1}{2}y_{n-1}+\frac{h}{4}(7y'_n-y'_{n-1})$$

及其初始值 y_0，y_1（h 为步长）

（1） 确定方法中的局部截断误差主项，并指出方法的阶数

（2） 讨论方法的收敛性和绝对稳定性

软件分享群

Q群 626648181

、2010年试题

1. ① $x_{i+1}=x_i-\frac{f(x)}{f'(x)}$

$=x_i-\frac{x_i^n-a}{nx_i^{n-1}}$

$=\frac{(n-1)x_i^n+a}{nx_i^{n-1}}$

设 $\varphi(x)=\frac{(n-1)x^n+a}{nx^{n-1}}$

$\varphi'(x)=\frac{n-1}{n}+\frac{a(1-n)}{n}\cdot\frac{1}{x^n}$

$\therefore\ \varphi'(\sqrt[n]{a})=0$

$\varphi''(x)=\frac{a(1-n)}{n}(-n)\cdot\frac{1}{x^{n+1}}=a(n-1)\frac{1}{x^{n+1}}$

$\varphi''(\sqrt[n]{a})\neq 0$

∴ 迭代式=阶收敛

② $x_{i+1}=x_i-\frac{f(x)}{f'(x)}$

$\therefore =x_i-\frac{1-\frac{a}{x_i^n}}{n\frac{a}{x_i^{n+1}}}=$

同理.

软件分享群
Q群 626648181

2. $\begin{cases}\varphi_0=\frac{1}{x}\\ \varphi_1=\sqrt{x}\end{cases}$

$$\begin{bmatrix}(\varphi_0,\varphi_0) & (\varphi_0,\varphi_1)\\ (\varphi_1,\varphi_0) & (\varphi_1,\varphi_1)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}C_1\\ C_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(\varphi_0,f)\\ (\varphi_1,f)\end{bmatrix}$$

⇒ $(\varphi_0,\varphi_0)=\sum_{i=0}^{3}\frac{1}{x_i^2}=\frac{1}{0.1^2}+\frac{1}{0.2^2}+\frac{1}{0.4^2}+\frac{1}{0.5^2}=135.2500$

$(\varphi_0,\varphi_1)=(\varphi_1,\varphi_0)=\sum_{i=0}^{3}\frac{1}{\sqrt{x_i}}=\frac{1}{\sqrt{0.1}}+\frac{1}{\sqrt{0.2}}+\frac{1}{\sqrt{0.4}}+\frac{1}{\sqrt{0.5}}=$

$(\varphi_1,\varphi_1)=\sum_{i=0}^{3}x_i=0.1+0.2+0.4+0.5=1.2000$

$(\varphi_0,f)=\sum_{i=0}^{3}\frac{1}{x_i}\cdot f_i=$

$(\varphi_1,f)=\sum_{i=0}^{3}\sqrt{x_i}\cdot f_i=$

解得 $\begin{cases}C_1=\\ C_2=\end{cases}$

3. Jacobi 迭代 $x^{i+1}=-D^{-1}(L+U)x^i+D^{-1}b$

$$B_J=-D^{-1}(L+U)=\begin{bmatrix}0&\frac{1}{2}&0&0\\ \frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}&0\\ 0&\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\ 0&0&\frac{1}{2}&0\end{bmatrix}$$

$\rho(B_J)=|\lambda I-B_J|=\begin{vmatrix}\lambda&-\frac{1}{2}&0&0\\ -\frac{1}{2}&\lambda&-\frac{1}{2}&0\\ 0&-\frac{1}{2}&\lambda&-\frac{1}{2}\\ 0&0&-\frac{1}{2}&\lambda\end{vmatrix}=0$

$\|B_J\|_\infty=1$.

得 $\lambda=0.8090<1$ 迭代收敛.

Gauss-seidel 迭代 $x^{i+1}=-(D+L)^{-1}Ux^i+(D+L)^{-1}b$.

$$B_G=-(D+L)^{-1}U=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&0&0&0\\ \frac{1}{4}&\frac{1}{2}&0&0\\ \frac{1}{8}&\frac{1}{4}&\frac{1}{2}&0\\ \frac{1}{16}&\frac{1}{8}&\frac{1}{4}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}\cdot U=\begin{bmatrix}0&\frac{1}{2}&0&0\\ 0&\frac{1}{4}&\frac{1}{2}&0\\ 0&\frac{1}{8}&\frac{1}{4}&\frac{1}{2}\\ 0&\frac{1}{16}&\frac{1}{8}&\frac{1}{4}\end{bmatrix}$$

$\|B_G\|_\infty=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}=\frac{15}{16}<1$

迭代收敛

4. $x_0=0 \quad f(x_0)=0$
$x_1=1 \quad f(x_1)=1$
$x_2=2 \quad f(x_2)=16$

x_i	0	1	2
$f(x_i)$	0	1	16
$f'(x_i)$	0	4	32

$f'(x)=4x^3$

Hermite插值公式

$$H_3(x)=y(x)=\sum_{j=0}^{n} h_j(x)f(x_j)+\sum_{j=0}^{n}\bar{h}_j(x)f'(x_j)$$

$$E(x)=\frac{1}{(2n+2)!}f^{(2n+2)}(\xi)\,\omega_{n+1}^2(x)=\frac{1}{4!}f^{(4)}(\xi)\,\omega_2^2(x)$$

在[0,1]段 $H_3(x)=h_0(x)f(x_0)+h_1(x)f(x_1)+\bar{h}_0(x)\cdot f'(x_0)+\bar{h}_1(x)\cdot f'(x_1)=h_1(x)f(x_1)+\bar{h}_1(x)\cdot f'(x_1)$

$h_0(x)=[1-2(x-x_0)l_0'(x_0)]\,l_0^2(x)=\left[1-2x\cdot\frac{1}{0-1}\right]\left(\frac{x-1}{0-1}\right)^2=\cdots$

$h_1(x)=[1-2(x-x_1)l_1'(x_1)]\,l_1^2(x)=\left[1-2(x-1)\cdot\frac{1}{1-0}\right]\left(\frac{x-0}{1-0}\right)^2=(3-2x)x^2$

$\bar{h}_1(x)=(x-x_1)\,l_1^2(x)=(x-1)\left(\frac{x-0}{1-0}\right)^2=(x-1)x^2$

$\therefore H_3(x)=(3-2x)x^2+4(x-1)x^2=-x^2+2x^3$ ✓

$E(x)=\frac{1}{4!}f^{(4)}(\xi)\,x^2(x-1)^2=x^2(x-1)^2$

在[1,2]段 用待定系数法

设 $H_3(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3$

$\therefore H_3'(x)=a_1+2a_2x+3a_3x^2$

$$\begin{cases}H_3(1)=a_0+a_1+a_2+a_3=1\\ H_3'(1)=a_1+2a_2+3a_3=4\\ H_3(2)=a_0+2a_1+4a_2+8a_3=16\\ H_3'(2)=a_1+4a_2+12a_3=32\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_0=-4\\ a_1=12\\ a_2=-13\\ a_3=6\end{cases}$$

$\therefore H_3(x)=-4+12x-13x^2+6x^3$

$E(x)=\frac{1}{4!}f^{(4)}(\xi)(x-1)^2(x-2)^2=(x-1)^2(x-2)^2$

5. (1) 令 $f(x)=1,x,x^2$

则
$$\begin{cases}\int_{-1}^{1}1\,dx=2=A_1+A_2+A_3\\ \int_{-1}^{1}x\,dx=0=-A_1-\frac{1}{3}A_2+\frac{1}{3}A_3\\ \int_{-1}^{1}x^2\,dx=\frac{2}{3}=A_1+\frac{1}{9}A_2+\frac{1}{9}A_3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A_1=\frac{1}{2}\\ A_2=0\\ A_3=\frac{3}{2}\end{cases}$$

当 $f(x)=x^3$ 时. 左$=0$, 右$\neq0$. 此公式精度为2

(2) 根据线性变换 $a=-2$, $b=4$ $\quad \boxed{x=\frac{b+a}{2}+\frac{b-a}{2}t}$
$=1+3t$

$\therefore \int_{-2}^{4}\frac{1}{x+3}dx=\int_{-1}^{1}\frac{1}{3t+4}\cdot3dt=\int_{-1}^{1}\frac{3}{3t+4}dt=\frac{1}{2}\times3+\frac{3}{2}\times\frac{3}{5}=2.4000$

6. $x^0=\begin{bmatrix}1.2\\1.7\end{bmatrix}$ 先求 A_0，再求 H_0.

$H_0=A_0^{-1}$

$$A_i=F'(x)=\begin{bmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6x_1^2 & -2x_2\\ x_2^3 & 3x_1x_2^2-1\end{bmatrix}$$

$$\therefore A_0=\begin{bmatrix}8.64 & -3.4\\ 4.913 & 9.404\end{bmatrix}$$

$$\text{又} \quad H_0=A_0^{-1}=\frac{1}{AD-BC}\begin{bmatrix}D & -B\\ -C & A\end{bmatrix}=\frac{1}{8.64\times9.404+3.4\times4.913}\begin{bmatrix}9.404 & 3.4\\ -4.913 & 8.64\end{bmatrix}$$

第一步 $x^1=x^0-H_0F(x^0)$

$$\begin{cases}r^0=x^1-x^0\\ y^0=F(x^1)-F(x^0)\end{cases}$$

$$H_1=H_0+(r^0-H_0y^0)\frac{(r^0)^TH_0}{(r^0)^TH_0y^0}$$

第二步 $x^2=x^1-H_1F(x^1)$

$$v_0(x)=f(x)$$

$$v_k(x)=\frac{x-x_{k-1}}{v_{k-1}(x)-v_{k-1}(x_{k-1})}$$

7. 反差商表

x_i	$v_0(x_i)=f(x_i)$	$v_1(x_i)$	$v_2(x_i)$	$v_3(x_i)$	$v_4(x_i)$
0	0				
1	1	1			
2	0.5	4	$\frac{1}{3}$		
3	3	1	∞	0	
4	-0.5	-8	$-\frac{1}{3}$	-3	$-\frac{1}{3}$

$$\therefore R(x)=0+\cfrac{x-0}{1+\cfrac{x-1}{\frac{1}{3}+\cfrac{x-2}{0+\cfrac{x-3}{-\frac{1}{3}}}}}$$

8. (1) $Ax=b$, $A=LU$

$$L=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 5 & 1 & 0\\ \frac{3}{2} & L_{32} & 1\end{bmatrix} \quad U=\begin{bmatrix}2 & 3 & 2\\ 0 & U_{22} & U_{23}\\ 0 & 0 & U_{33}\end{bmatrix}$$

令 $\begin{cases}LY=b\\ Y=Ux\end{cases}$

$$\begin{cases}5\times3+U_{22}=3\\ 5\times2+U_{23}=4\\ \frac{3}{2}\times3+L_{32}\cdot U_{22}=6\\ \frac{3}{2}\times2+L_{32}\cdot U_{23}+U_{33}=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}U_{22}=-12\\ U_{23}=-6\\ L_{32}=-\frac{1}{8}\\ U_{33}=-\frac{11}{4}\end{cases}$$

(2) $u_0=\frac{v_0}{\max(v_0)}=(0,0,1)^T$

$v_1=Au_0=(2,4,1)^T$

$u_1=\frac{v_1}{\max(v_1)}=(\frac{1}{2},1,\frac{1}{4})^T$

$v_2=Au_1=$

$u_2=\frac{v_2}{\max(v_2)}=$

$$\begin{cases}\lambda_1=\max(v_2)\\ x=u_2\end{cases}$$

9. 一般形式 $y_{n+1}=\sum_{i=0}^{p} a_i y_{n-i}+h\sum_{i=-1}^{p} b_i y'_{n-i}$ $\quad y'=-\lambda y$

(1)

$$y_{n+1}=y_n+h(-\lambda)\left[y_n+\frac{h}{2}(-\lambda y_n)\right]=\left[1-\lambda h+\frac{1}{2}(\lambda h)^2\right]y_n$$

$p=0$ $\quad \pi(r,\lambda h)=(1-\lambda h b_{-1})r^{p+1}-\sum_{i=0}^{p}(a_i+\lambda h b_i)r^{p-i}$

$$=r-\left(1-\lambda h+\frac{1}{2}(\lambda h)^2\right)=0$$

$$r_0=1-\lambda h+\frac{1}{2}(\lambda h)^2$$

若方法绝对稳定 则 $\left|1-\lambda h+\frac{1}{2}(\lambda h)^2\right|<1$ 即: $0<\lambda h<2$

又: $\lambda>0$ $\therefore 0<h<\frac{2}{\lambda}$

(2)

$$\begin{cases} y_{n+1}=(1-0.2+\frac{1}{2}\times 0.2^2)y_n \\ \quad =0.82y_n \\ y_0=1 \end{cases}$$

$y_1=0.82y_0=0.82$

$\vdots$

10. (1) $y_{n+1}=\sum_{i=0}^{p} a_i y_{n-i}+\sum_{i=-1}^{p} b_i y'_{n-i}$

$p=1$ $\quad a_0=\frac{1}{2}$ $\quad b_{-1}=0$

$a_1=\frac{1}{2}$ $\quad b_0=\frac{7}{4}$

$b_1=-\frac{1}{4}$

$C_0=1-\sum_{i=0}^{1}a_i=1-(\frac{1}{2}+\frac{1}{2})=0$

$C_1=1-\left(\sum_{i=0}^{1}(-i)a_i+\sum_{i=-1}^{1}b_i\right)=1-(-\frac{1}{2}+\frac{7}{4}-$

$C_2=\ ---\ =0$

$C_3=\ \cdot\ =\frac{3}{8}\neq 0$

$\therefore$ 方法为2阶

误差首项 $C_{p+1}h^{p+1}y^{(p+1)}(x)=\frac{3}{8}h^3y^3(x)$

(2) 收敛性

$\rho(r)=r^{p+1}-\sum_{i=0}^{p}a_i r^{p-i}=r^2-\frac{1}{2}r-\frac{1}{2}=0$

$r_0=1,\ r_1=-\frac{1}{2}$

$|r_1|<1,\quad r_0=1$ 是单根

且 $C_0=C_1=0$ 方法相容
已知

$\therefore$ 该方法收敛.

特征方程:

$\pi(r,\lambda h)=\rho(r)-h\lambda\sigma(r)$

$=r^{p+1}-\sum_{i=0}^{p}a_i r^{p-i}-h\lambda\sum_{i=-1}^{p}b_i r^{p-i}$

$=(1-\lambda h b_{-1})r^{p+1}-\sum_{i=0}^{p}(a_i+\lambda h b_i)r^{p-i}$

$=r^2-(\frac{1}{2}+\frac{7}{4}\lambda h)r-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\lambda h=0$

若方法绝对稳定, 则 $|r_{0,1}|<1$

即 $\begin{cases}\left|\frac{1}{2}+\frac{7}{4}\lambda h\right|<1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\lambda h \\ \left|\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\lambda h\right|<1\end{cases}\Rightarrow\ <\lambda h<$

2013.1.9

2009年

一、 对于方程 $f(x)=x^4-4x^2+4=0$，请给出一种具有2阶收敛求根 $\sqrt{2}$ 的改进牛顿迭代法。计算效率是多少？当初值是1时，计算迭代两步的近似值（结果保留4位小数）。 Newton: 效率 $EI = p^{\frac{1}{1+\theta}}$

二、 用 Grout 三角分解法求解方程组

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 4 & 7 & 3 \\ 0 & 4 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ -12 \end{bmatrix}$$

三、 对于线性方程组 Ax=b 的系数矩阵

$$A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

讨论 Jacobi 迭代和 Gauss-Seidel 迭代两种迭代法的敛散性。

四、 设 $f(x)=x^4$，$x_0=0$，$x_1=1$，

（1） 试求 f(x) 在 [0,1] 上的 Hermite 插值多项式 H(x) 使之满足 $H(x_i)=f(x_i), H'(x_i)=f'(x_i), (i=0,1)$

（2） 写出余项 R(x)=f(x)-H(x) 的表达式。

五、 试确定常数 a，b，使求积公式 $\int_{-1}^{1} f(x)dx = f(a)+f(b)$ 有尽可能多的代数精度，并且举例说明代数精度不会再高。并用此公式计算积分 $\int_{-2}^{2}\frac{x^2}{x^2+1}dx$（计算结果保留5位小数）。

六、 利用三阶 RK 方法 $y_{n+1}=y_n+\frac{h}{4}\left[f(x_n,y_n)+3f\left(x_n+\frac{2}{3},\frac{2}{3}y_n+\frac{2}{3}hf(x_n,y_n)\right)\right]$，求初值问题 $\begin{cases} y'=-y \\ y(0)=y_0 \end{cases}$，$0\le x\le 1$ 时，步长 h 应取何值，方能保证方法的绝对稳定性。

七、 利用下面数据表构造有理插值

x_k	0	1	2	3
$f(x_k)$	1	0	$1/\sqrt{3}$	10

八、 矩阵 $A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 4 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$，

利用乘幂法求 A 按模最大特征值与对应的特征向量，选取初始向量 $v_0=(1,0,0)^T$，迭代三次（结果保留4位小数）

九、 试用共轭梯度（cg）法求线性代数方程组，初始值取 $x^{(0)}=(0,0,0)^T$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

（给公式）

十、 对于两步法：$y_{n+1} = y_n + h(\frac{3}{2}y'_n - \frac{1}{2}y'_{n-1})$，h 为步长

（1） 确定方法中的局部截断误差主项，并指出方法的阶数

（2） 讨论方法的收敛性和绝对稳定性

六.解：$\lambda = -1$.

二阶RK的绝对稳定区间 $(-2, 0)$

即 $\bar{h} \in (-2, 0)$

~~$\bar{h}$~~ = $\bar{h} = h\lambda$

∴ $h \in (0, 2)$

~~若~~ $y' = -y$.

$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{4}[f(x_n, y_n) + 3f(x_n + \frac{2}{3}, \frac{2}{3}y_n + \frac{2}{3}hf(x_n, y_n))]$

$= y_n + \frac{h}{4}[-y_n + 3f(x_n + \frac{2}{3}, \frac{2}{3}y_n + \frac{2}{3}h(-y_n))]$

$= y_n + \frac{h}{4}[-y_n + 3f(x_n + \frac{2}{3}, \frac{2}{3}(1-h)y_n)]$

$= y_n + \frac{h}{4}[-y_n + 3 \times \frac{2}{3}(1-h)y_n]$

$= (1 - \frac{3h}{4} + \frac{h^2}{2})y_n$.

由此递推 $y_{n+1} = (1 - \frac{3h}{4} + \frac{h^2}{2})^{n+1}y_0$.

显然，对 $y_0 \neq 0$，使 $y_n \to 0\ (n \to +\infty)$ 的充分必要条件是

$|1 - \frac{3h}{4} + \frac{h^2}{2}| < 1$ 即 $h \in (0, \frac{3}{2})$

七.解：反差商按下表计算：

	$V_0(x_i)$	$V_1(x_i)$	$V_2(x_i)$	$V_3(x_i)$
0	1			
	0	-1		
	$1/\sqrt{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$	$\frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$	
	$\frac{1}{2}$	3	$\frac{2+2\sqrt{3}}{\ }$	27

得有理插值函数

$$Q(x) = 1 + \cfrac{x}{-1 + \cfrac{x-1}{\frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} + \cfrac{x-2}{\frac{2+2\sqrt{3}}{1+5\sqrt{3}}}}} = \cdots$$

八.解：取初始向量 $v_0 = (1, 0, 0)^T$.

利用 $\begin{cases} u_m = \frac{v_m}{\max(v_m)} \\ v_m = Au_{m-1} \end{cases}$

第一次：

$u_0 = \frac{v_0}{\max(v_0)} = \frac{(1, 0, 0)^T}{1} = (1, 0, 0)^T$.

$v_1 = Au_0 = (1, -2, 0)^T$.

$u_1 = \frac{v_1}{\max(v_1)} = \frac{(1, -2, 0)^T}{-2} = (-\frac{1}{2}, 1, 0)^T$.

第二次：

$v_2 = Au_1 = (-\frac{3}{2}, 5, -1)^T$.

$u_2 = \frac{v_2}{\max(v_2)} = \frac{(-\frac{3}{2}, 5, -1)^T}{5} = (-\frac{3}{10}, 1, -\frac{1}{5})^T$.

第三次：

$v_3 = Au_2 = (-\frac{13}{10}, 5, -\frac{6}{5})^T$

$u_3 = \frac{v_3}{\max(v_3)} = \frac{(-\frac{13}{10}, 5, -\frac{6}{5})^T}{5} = (-\frac{13}{50}, 1, -\frac{6}{25})^T$

特征值 $\lambda = 5$

特征向量 $x = (-\frac{13}{50}, 1, -\frac{6}{25})^T = ($ $)^T$.

二、2009年试题

1. $x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} = x_i - \frac{x_i^4-4x_i^2+4}{4x_i^3-8x_i} = \frac{3x_i^4-4x_i^2-4}{4x_i^3-8x_i}$

b) $\begin{cases} f(x): x^4-4x^2+4=0 \\ f'(x)=4x^3-8x \end{cases}$ $(x^2-2)^2=0$ 得 $x=\pm\sqrt{2}$. ∴ 重根 $r=2$

∴ $x_{i+1} = x_i - r\frac{f(x_i)}{f'(x_i)} = \frac{x_i^2+2}{2x_i}$, $i=0,1,2$

$FI = r^{\frac{1}{t}} = 2^{\frac{1}{1+t_i}}$ 而 $\frac{f'(x_i)}{f(x_i)}$ ~~此时计算量比比~~

(2) 初值的选取

当 $x_0=1$ 时 $x_1 = \frac{x_0^2+2}{2x_0} = \frac{3}{2}$; $x_2 = \frac{x_1^2+2}{2x_1} =$

2. $A=\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 4 & 7 & 3 \\ 0 & 4 & 8 \end{bmatrix} = \hat{L}\hat{U}$ $\hat{L}=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & L_{22} & 0 \\ 0 & L_{32} & L_{33} \end{bmatrix}$; $\hat{U}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & U_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\begin{cases} 4\times1+L_{22}=7 \\ L_{22}U_{23}=3 \\ L_{32}=4 \\ L_{32}U_{23}+L_{33}=8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} L_{22}=3 \\ U_{23}=1 \\ L_{32}=4 \\ L_{33}=4 \end{cases}$ $\hat{L}=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 4 \end{bmatrix}$ $\hat{U}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

令 $\begin{cases} \hat{L}Y=b \\ \hat{U}X=Y \end{cases}$ $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -12 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} y_1=2 \\ y_2=-1 \\ y_3=-2 \end{cases}$

∴ $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1=1 \\ x_2=1 \\ x_3=-2 \end{cases}$

3. ① Jacobi $B_J = -D^{-1}(L+U) = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$ $\|B_J\|_1 = \frac{3}{2} > 1$

$\|B_J\|_\infty = 2 > 1$ 发散

故 $\rho(B_J)=\rho(\lambda)=$

② Gauss-Seidel $B_G = -(D+L)^{-1}U$

$(D+L)^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

$-(D+L)^{-1}U = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$ $\|B_G\|_\infty = 1$

$\|B_G\|_1 = \frac{3}{2}$

故 $|\lambda I - B_G| = \begin{vmatrix} \lambda & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \lambda+\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \lambda+\frac{1}{2} \end{vmatrix} = \lambda(\lambda+\frac{1}{2})^2 = 0$ 得 $\begin{cases} \lambda_1=0 \\ \lambda_2=\lambda_3=-\frac{1}{2} \end{cases}$ ∴ $|\rho(B_G)| = \frac{1}{2} < 1$, 收敛

4.(1)

x:	0	1
$f(x)$	0	1
$f'(x)$	0	4

① 待定系数法:

设 $H(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$

$$\begin{cases} H(0) = a_0 = f(0) = 0 \\ H(1) = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = f(1) = 1 \\ H'(0) = a_1 = f'(0) = 0 \\ H'(1) = a_1 + 2a_2 + 3a_3 = f'(1) = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = 0 \\ a_2 = -1 \\ a_3 = 2 \end{cases}$$

∴ $H(x) = -x^2 + 2x^3$

② 余式法: $H(x) = \sum_{j=0}^{1} h_j(x) f_j + \sum_{j=0}^{1} \bar{h}_j(x) f'_j$

$= h_1(x) f_1 + \bar{h}_1(x) f'_1$

$= h_1(x) + 4\bar{h}_1(x)$

$h_1(x) = [1 - 2(x-1)\frac{1}{1-0}]\left(\frac{x-0}{1-0}\right)^2 = (3-2x)x^2$

$\bar{h}_1(x) = (x-1)\left(\frac{x-0}{1-0}\right)^2 = (x-1)x^2$

∴ $H(x) = 2x^3 - x^2$

(2) $E(x) = \frac{1}{(2n+2)!} f^{(2n+2)}(\xi)\,\omega_{n+1}^2 = \frac{1}{4!} f^{(4)}(\xi)\,(x-0)^2(x-1)^2 = x^2(x-1)^2$

$n=1$

5.(1) 令 $f(x) = 1, x, x^2$

解得 $\begin{cases} a = \\ b = \end{cases}$

再令 $f(x) = x^3$

$f(x) = x^4$

判断精度

(2) $b=2.\ a=-2$

通过线性变换得, $x = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}t$, $t \in [-1,1]$

6. $f(x_n, y_n) = y_n' = -y_n$

$3f(x_{n+1} + \frac{2}{3}, y_n - \frac{2}{3}h y_n) = 3(\frac{2}{3}h y_n - y_n) = (2h-3)y_n$

∴ $y_{n+1} = y_n + \frac{h}{4}[-y_n + (2h-3)y_n] = \frac{2h^2 - 4h + 4}{4} y_n$

$\pi(r, h) = r - \frac{2h^2 - 4h + 4}{4}$ 　若满足绝对收敛

$r_1(h) = \frac{2h^2 - 4h + 4}{4}$ 　则 $\left|\frac{2h^2 - 4h + 4}{4}\right| < 1$

7.

x_i	$V_0(x_i)=f(x_i)$	$V_1(x_i)$	$V_2(x_i)$	$V_3(x_i)$
0	1			
1	0	-1		
2	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{6}{\sqrt{3}-3}$		
3	10	$\frac{1}{3}$		

$$R(x)=1+\cfrac{x-0}{-1+\cfrac{x-1}{\sqrt{3}-2+\cfrac{x-2}{\cfrac{2}{7-2\sqrt{3}}}}}$$

⋮

8. $u_0=\frac{V_0}{\max(V_0)}=(1,0,0)^T$ $\quad V_1=Au_0=(1,-2,0)^T$

$u_1=\frac{V_1}{\max(V_1)}=(-\frac{1}{2},1,0)^T$ $\quad V_2=Au_1=(-\frac{3}{2},3,-1)^T$

$u_2=\frac{V_2}{\max(V_2)}=$ $\quad V_3=Au_2$

⋮

$\lambda=V_3\max(V_3)$

$x_1=u_3$

9 (0) $r^{(0)}=p_0=b-Ax^0=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}-A\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}=(0,1,0)^T$

(1) $\alpha_0=\frac{(r^0,p_0)}{(p_0,Ap_0)}=\frac{1}{2}$

√ (2) $x^{(1)}=x^{(0)}+\alpha_0p_0=(0,\frac{1}{2},0)^T$

(3) $r^{(1)}=r^{(0)}-\alpha_0Ap_0=$

(4) $\beta_0=\frac{(r^{(1)},r^{(1)})}{(r^{(0)},r^{(0)})}$

(5) $p_1=r^1+\beta_0p_0$

⋮

10 $y_{n+1}=\sum_{i=0}^{p}a_iy_{n-i}+h\sum_{i=-1}^{p}b_if_{n-i}$

$\rho(r)=r^{p+1}-\sum_{i=0}^{p}a_ir^{p-i}$

$\pi(r,\lambda h)=\rho(r)-\lambda h\sigma(r)$

$\sigma(r)=\sum_{i=-1}^{p}b_ir^{p-i}$

$p=1$ $\begin{cases}a_0=1\\a_1=0\end{cases}$ $\begin{cases}b_{-1}=0\\b_0=\frac{3}{2}\\b_1=-\frac{1}{2}\end{cases}$

$c_0=1-\sum_{i=0}^{1}a_i=1-1=0$

$\begin{cases}c_1=0\\c_2=0\\c_3=\frac{5}{12}\end{cases}$

误差首项 $c_{p+1}h^{p+1}y^{(p+1)}(x_n)$

$=c_3\frac{5}{12}h^3y^{(3)}(x_n)$

$\rho(r)=r^2-r=0$ $\quad r_0=0,\ r_1=1$(单根)

$|r_{0,1}|\le1$，且 $c_0=c_1=0$ 相容，∴收敛

$\pi(r,\lambda h)$

$=(1-\lambda hb_{-1})r^{p+1}-\sum_{i=0}^{p}(a_i+\lambda hb_i)r^{p-i}$

$=r^2-(1+\frac{3}{2}\lambda h)r+\frac{1}{2}\lambda h=0$

由实系数二次方程……

$\begin{cases}|1+\frac{3}{2}\lambda h|<1+\frac{1}{2}\lambda h\\|\frac{1}{2}\lambda h|<1\end{cases}$

2009 级研究生《数值分析》试卷

1. 一.（6分）已知描述某实际问题的数学模型为 $u(x,y)=3x^2y+\frac{y^2}{x}$，其中，$x,y$ 由统计方法得到，分别为 $x=2, y=4$，统计方法的误差限为 0.01，试求出 u 的误差限 $\varepsilon(u)$ 和相对误差限 $\varepsilon_r(u)$。

解：$\varepsilon(u)\approx\left|\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}\right|\varepsilon(x)+\left|\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\right|\varepsilon(y)=\left(6xy-\frac{y^2}{x^2}\right)\varepsilon(x)+\left(3x^2+\frac{2y}{x}\right)\varepsilon(y)$

$=(48-4)\times 0.01+(12+4)\times 0.01=0.44+0.16=0.6$

$$\varepsilon_r(u)=\frac{\varepsilon(u)}{3x^2y+\frac{y^2}{x}}\approx\frac{0.6}{56}=0.010714$$

二.（6 分）已知函数 $f(x)=3x^3+1$ 计算函数 $f(x)$ 的 2 阶均差 $f[0,1,2]$，和 4 阶均差 $f[0,1,2,3,4]$。

解：$f[0,1]=\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=\frac{4-1}{1}=3$，　$f[1,2]=\frac{f(2)-f(1)}{2-1}=\frac{25-4}{1}=21$

$f[0,1,2]=\frac{f[1,2]-f[0,1]}{2-0}=\frac{21-3}{2}=9$，　　$f[0,1,2,3,4]=\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}=0$

三.（6 分）试确定求积公式：$\int_0^1 f(x)dx\approx\frac{1}{2}[f(0)+f(1)]+\frac{1}{12}[f'(0)-f'(1)]$ 的代数精度.

解：记 $I=\int_0^1 f(x)dx$　　　$I_n=\frac{1}{2}[f(0)+f(1)]+\frac{1}{12}[f'(0)-f'(1)]$

$f(x)=1$ 时：$I=\int_0^1 1dx=1$　　　$I_n=\frac{1}{2}[2]+\frac{1}{12}[0-0]=1$

$f(x)=x$ 时：$I=\int_0^1 xdx=\frac{1}{2}$　　　$I_n=\frac{1}{2}[1]+\frac{1}{12}[1-1]=\frac{1}{2}$

$f(x)=x^2$ 时：$I=\int_0^1 x^2dx=\frac{1}{3}$　　　$I_n=\frac{1}{2}[1]+\frac{1}{12}[0-2]=\frac{1}{3}$

$f(x)=x^3$ 时：$I=\int_0^1 x^3dx=\frac{1}{4}$　　　$I_n=\frac{1}{2}[1]+\frac{1}{12}[0-3]=\frac{1}{4}$

$f(x)=x^4$ 时：$I=\int_0^1 x^4dx=\frac{1}{5}$　　　$I_n=\frac{1}{2}[1]+\frac{1}{12}[0-4]=\frac{1}{6}$

求积公式 $\int_0^1 f(x)dx\approx\frac{1}{2}[f(0)+f(1)]+\frac{1}{12}[f'(0)-f'(1)]$ 具有 3 次代数精度.

四.（12 分）已知函数 $f(x)=2x^3+x^2+2x-1$ 定义在区间 [-1, 1] 上, 在空间 $\Phi(x)=Span\{1,x,x^2\}$ 上求函数 $f(x)$ 的最佳平方逼近多项式.

其中，权函数 $\rho(x)=1$，$(f(x),\varphi_0(x))=-\dfrac{4}{3}$，$(f(x),\varphi_1(x))=\dfrac{32}{15}$，$(f(x),\varphi_2(x))=-\dfrac{4}{15}$.

解：$(\varphi_0(x),\varphi_0(x))=\int_{-1}^{1}1dx=2$ $\quad(\varphi_0(x),\varphi_1(x))=(\varphi_1(x),\varphi_0(x))=\int_{-1}^{1}xdx=0$.

$$(\varphi_0(x),\varphi_2(x))=(\varphi_2(x),\varphi_0(x))=(\varphi_1(x),\varphi_1(x))=\int_{-1}^{1}x^2dx=\frac{2}{3}$$

$$(\varphi_1(x),\varphi_2(x))=(\varphi_2(x),\varphi_1(x))=\int_{-1}^{1}x^3dx=0$$

$$(\varphi_2(x),\varphi_2(x))=\int_{-1}^{1}x^4dx=\frac{2}{5}$$

解方程组 $\begin{pmatrix}2&0&\frac{2}{3}\\0&\frac{2}{3}&0\\\frac{2}{3}&0&\frac{2}{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_0\\a_1\\a_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{4}{3}\\\frac{32}{15}\\-\frac{4}{15}\end{pmatrix}$ 得 $\begin{pmatrix}a_0\\a_1\\a_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\\frac{16}{5}\\1\end{pmatrix}$.

则 $f(x)$ 的最佳平方逼近多项式为：$p(x)=x^2+\dfrac{16}{5}x-1$

五.（16分）设函数 $f(x)$ 满足表中条件：

k	0	1	2
x_k	0	1	2
$f(x_k)$	1	0	1
$f'(x_k)$		-2	0

(1) 填写均差计算表(标有*号处不填)：

k	x_k	$f[x_k]$	$f[x_k,\ x_{k+1}]$	$f[x_k,\ x_{k+1},\ x_{k+2}]$
0	0	1	***	***
1	1	0	-1	***
2	2	1	1	1

(2) 分别求出满足条件 $L_2(x_k)=f(x_k)$，$N_2(x_k)=f(x_k)$，$(k=0,1,2)$ 的 2次 Lagrange 和 Newton 差值多项式.

(3) 求出一个四次插值多项式 $H_4(x)$，使其满足表中所有条件. 并用多项式降幂形式表示.

解：$L_2(x)=\dfrac{(x-1)(x-2)}{(0-1)(0-2)}+\dfrac{(x-0)(x-1)}{(2-0)(2-1)}=x^2-2x+1$

$N_2(x)=1+(-1)(x-0)+1(x-0)(x-1)=x^2-2x+1$

令 $H_4(x)=x^2-2x+1+(ax+b)x(x-1)(x-2)$

则 $\quad H_4'(x)=2x-2+ax(x-1)(x-2)+(ax+b)(x-1)(x-2)+(ax+b)x(x-2)$

$+(ax+b)x(x-1)$

由 $\begin{cases} H_4'(1)=2-2+(a+b)(1-2)=-2 \\ H_4'(2)=4-2+(2a+b)2(2-1)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b=2 \\ 2a+b=-1 \end{cases}$，解得 $a=-3,\quad b=5$

因此 $H_4(x)=x^2-2x+1+(-3x+5)x(x-1)(x-2)=-3x^4+14x^3-20x^2+8x+1$

六.（16分）

1、(1). 用 Romberg 方法计算 $\int_1^3 \sqrt{x}dx$，将计算结果填入下表(*号处不填).

k	T_{2^k}	$S_{2^{k-1}}$	$C_{2^{k-2}}$	$R_{2^{k-3}}$
0	2.73205	***	***	***
1	2.78024	2.79630	***	***
2	2.79306	2.79734	2.79740	***
3	2.79634	2.79743	2.79744	2.79744

7、(2). 试确定三点 Gauss-Legender 求积公式 $\int_{-1}^1 f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{2} A_k f(x_k)$ 的 Gauss 点 x_k 与系数 A_k，并用三点 Gauss-Legender 求积公式计算积分：$\int_1^3 \sqrt{x}dx$.

解：过点（1，-1）和点（3，1）作直线得 $x=t+y$

所以积分 $\int_1^3 \sqrt{x}dx=\int_{-1}^1 \sqrt{t+2}dt$

由三次 Legendre 多项式 $p_3(x)=\frac{1}{2}(5x^3-3x)$ 得得 Gauss 点：

$$x_0=-\frac{\sqrt{15}}{5},\quad x_1=0,\quad x_2=\frac{\sqrt{15}}{5},$$

再由代数精度得 $\begin{cases} A_0+A_1+A_2=\int_{-1}^1 1dt=2 \\ -\frac{\sqrt{15}}{5}A_0+\frac{\sqrt{15}}{5}A_2=\int_{-1}^1 xdt=0 \\ \frac{3}{5}A_0+\frac{3}{5}A_2=\int_{-1}^1 x^2dt=\frac{2}{3} \end{cases}$

即 $\begin{cases} A_0+A_1+A_2=2 \\ A_0-A_2=0 \\ A_0+A_2=10/9 \end{cases}$ 解得 $A_0=\frac{5}{9},\quad A_1=\frac{8}{9},\quad A_2=\frac{5}{9},$

所以三点Gauss-Legendre求积公式为：

$$\int_{-1}^1 f(x)dx \approx \frac{5}{9}f\left(-\frac{\sqrt{15}}{5}\right)+\frac{8}{9}f(0)+\frac{5}{9}f\left(\frac{\sqrt{15}}{5}\right)$$

因此 $I=\int_{-1}^1 \sqrt{t+2}dx \approx \frac{5}{9}\sqrt{2-\frac{\sqrt{15}}{5}}+\frac{8}{9}\sqrt{2}+\frac{5}{9}\sqrt{2+\frac{\sqrt{15}}{5}}=2.79746$

七. (14 分)

(1) 证明方程 $x-\ln x-2=0$ 在区间 $(1,\infty)$ 有一个单根. 并大致估计单根的取值范围.

(2) 写出 Newton 迭代公式, 并计算此单根的近似值. (要求精度满足: $|x_{k+1}-x_k|<10^{-5}$).

解: 令 $f(x)=x-\ln x-2$

$f'(x)=1-\dfrac{1}{x}>0,\quad x\in(1,\infty)$ 即 $f(x)$ 在区间 $(1,\infty)$ 单调增

又 $f(2)=-\ln 2<0,\ f(e^2)=e^2-4>0$ 所以 $x-\ln x-2=0$ 在区间 $(1,\infty)$ 有一单根 $x_0\in(1,e^2)$

Newton 迭代公式为 $x_{k+1}=x_k-\dfrac{x_k-\ln x_k-2}{1-\dfrac{1}{x_k}}=\dfrac{x_k+x_k\ln x_k}{x_k-1}$

令 $x_0=2$ 计算得

x_0	2	$\lvert x_{k+1}-x_k\rvert$
x_1	3.386294	1.386294
x_2	3.149938	0.236356
x_3	3.146194	0.003744
x_4	3.146193	0.000001

八 (12 分) 用追赶法求解方程组: $\begin{pmatrix}2&1&&\\1&3&1&\\&1&1&1\\&&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\2\\0\end{pmatrix}$ 的解.

解: 由计算公式 $\begin{cases}b_1=\alpha_1,\quad c_1=\alpha_1\beta_1\\ a_i=\gamma_i,\quad b_i=\gamma_i\beta_{i-1}+\alpha_i\quad i=2,\cdots,n\\ c_i=\alpha_i\beta_i,\quad i=2,\cdots,n-1\end{cases}$

得 $\alpha_1=2,\ \alpha_1\beta_1=1,\ \beta_1=\dfrac{1}{2},\ \gamma_2=1,\ \gamma_3=1,\ \gamma_4=2,$

$\gamma_2\beta_1+\alpha_2=b_2\Rightarrow\alpha_2=3-1\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{5}{2}\qquad \alpha_2\beta_2=c_2\Rightarrow\beta_2=\dfrac{c_2}{\alpha_2}=\dfrac{2}{5}$

$\gamma_3\beta_2+\alpha_3=b_3\Rightarrow\alpha_3=1-1\times\dfrac{2}{5}=\dfrac{3}{5},\qquad \alpha_3\beta_3=c_3\Rightarrow\beta_3=\dfrac{c_3}{\alpha_3}=\dfrac{5}{3}$

$$\gamma_4\beta_3+\alpha_4=b_4\Rightarrow\alpha_4=1-2\times\frac{5}{3}=-\frac{7}{3}$$

因此 $\begin{pmatrix}2&1&&\\1&3&1&\\&1&1&1\\&&2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&&&\\1&\frac{5}{2}&&\\&1&\frac{3}{5}&\\&&2&-\frac{7}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&&\\&1&\frac{2}{5}&\\&&1&\frac{5}{3}\\&&&1\end{pmatrix}$ 即 $A=LU$

令 $Ly=b$ 解 $\begin{pmatrix}2&&&\\1&\frac{5}{2}&&\\&1&\frac{3}{5}&\\&&2&-\frac{7}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\2\\0\end{pmatrix}$ 得 $\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/2\\3/5\\7/3\\2\end{pmatrix}$

令 $Ux=y$ 解 $\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&&\\&1&\frac{2}{5}&\\&&1&\frac{5}{3}\\&&&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/2\\3/5\\7/3\\2\end{pmatrix}$ 得 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\2\end{pmatrix}$

九.（12分）设求解初值问题 $\begin{cases}y'=f(x,y)\\y(x_0)=y_0\end{cases}$ 的计算格式为：

$y_{n+1}=y_n+h[af(x_n,y_n)+bf(x_{n-1},y_{n-1})]$，假设 $y(x_n)=y_n$，$y(x_{n-1})=y_{n-1}$，试确定参数 a, b 的值，使该计算格式的局部截断误差为二阶，即截断部分为：$o(h^3)$.

解：$y_{n+1}=y_n+h[af(x_n,y_n)+bf(x_{n-1},y_{n-1})]$

$$=y(x_n)+h[ay'(x_n)+by'(x_{n-1})]$$

$$=y(x_n)+hay'(x_n)+hb[y'(x_n)-hy''(x_n)+\frac{1}{2}h^2y'''(x_n)+\cdots]$$

$$=y(x_n)+h(a+b)y'(x_n)-h^2by''(x_n)+\frac{1}{2}h^3by'''(x_n)+\cdots$$

对比 $y(x_{n+1})=y(x_n)+hy'(x_n)+\frac{1}{2}h^2y''(x_n)+\frac{1}{6}h^3y'''(x_n)+\cdots$

得 $\begin{cases}a+b=1\\b=1/2\end{cases}$，即 $a=b=1/2$ 时该计算格式具有二阶精度.

1.（10分）确定 a,b,c 和 d 的值，使得

$$s(x)=\begin{cases} 2(x+1)+(x+1)^3 & x\in[-1,0] \\ a+bx+cx^2 & x\in[0,1] \\ d+11(x-1)+3(x-1)^2-(x-1)^3 & x\in[1,2] \end{cases}$$

为三次样条函数，并判断是否为自然样条函数。

解：若使 $S(x)$ 为样条自然样条函数，则须要使 $S(x)$ $S'(x)$ $S''(x)$ 连续

且 $S''(-1)=S''(2)=0$

则

$S(0_+)=S(0_-)$ 即 $3=a$

$S(1_-)=S(1_+)$ 即 $a+b+c=d$

$S'(0_-)=S'(0_+)$ 即 $5=b$

$S'(1_-)=S'(1_+)$ 即 $b+2c=11$

$S''(0_+)=S''(0_-)$ 即 $6=2c$

$S''(1_-)=S''(1_+)$ 即 $2c=6$

可得 $\begin{cases} a=3 \\ b=5 \\ c=3 \\ d=11 \end{cases}$ 即 $S(x)=\begin{cases} 2(x+1)+(x+1)^3 & x\in[-1,0] \\ 3+5x+3x^2 & x\in[0,1] \\ \cancel{11+}11x+3(x-1)^2-(x-1)^3 & x\in[1,2] \end{cases}$

$S''(-1)=6(x+1)|_{x=-1}=0$

$S''(2)=12-6x|_{x=2}=0$

即 $S''(-1)=S''(2)$ 故 $S(x)$ 为自然样条函数

装订线内不得答题

主管领导审核签字

2．（10 分）讨论 Jacobi 迭代法和 Gauss-Seidel 迭代法求解线性方程组 $Ax=b$ 的收敛性，其中 $b=0$，

$$A=\begin{bmatrix}2 & -1 & 1\\ 2 & 2 & 2\\ -1 & -1 & 2\end{bmatrix}$$

解：Jacobi 法的迭代矩阵为

$$B_J=-D^{-1}(L+U)=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & 0 & 0\\ 0 & -\frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0 & -1 & 1\\ 2 & 0 & 2\\ -1 & -1 & 0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ -1 & 0 & -1\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\end{bmatrix}$$

解得

$$\rho(B_J)=\max_{1\le i\le 3}\{|\lambda_1|,|\lambda_2|,|\lambda_3|\}=\max(|0|,|\tfrac{\sqrt{5}}{2}i|,|-\tfrac{\sqrt{5}}{2}i|)$$

$$=\frac{\sqrt{5}}{2}>1$$ 故不收敛

Gauss-Seidel 迭代的迭代矩阵为

$$B_G=-(D+L)^{-1}U=-\begin{bmatrix}2 & & \\ 2 & 2 & \\ -1 & -1 & 2\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & 0 & 0\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0\\ 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

解得 B_G 的特征值为 $\lambda_1=0$ $\lambda_2=\lambda_3=-\frac{1}{2}$

$$\rho(B_G)=\max_{1\le i\le 3}|\lambda_i|=\frac{1}{2}<1$$

故收敛

装订线内 不得答题

34

三. (10 分) 应用 Crout 三角分解方法解方程组 $Ax=b$

$$\begin{bmatrix}3&2&1\\2&4&1\\1&2&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\-1\\3\end{bmatrix}$$

解：将 A 进行三角分解，即 $A=LU$，其中

$$L=\begin{bmatrix}3&0&0\\2&\frac{8}{3}&0\\1&\frac{4}{3}&\frac{7}{2}\end{bmatrix} \qquad U=\begin{bmatrix}1&\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\\0&1&\frac{1}{8}\\0&0&1\end{bmatrix}$$

解方程组 $\begin{cases}Ly=b\\Ux=y\end{cases}$

解得 $y=\begin{bmatrix}\frac{2}{3}\\-\frac{7}{8}\\1\end{bmatrix}$

$x=\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}$

综上可得 $x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}$

4.（10分）(1)确定参数 a, b, c，构造高精度的求积公式：

$$\int_{-h}^{h} f(x)dx = h\{af(0)+b[f(-h)+f(h)]+c[f(-2h)+f(2h)]\}$$

(2) 指明此求积公式的代数精度；

(3) 用所求公式计算 $\int_{-2}^{2} x^4 dx$。

解 1) 令 $f(x)=1$ 时 有 $2h = h[a+2b+2c]$

令 $f(x)=x$ 时 有 $0=0$

令 $f(x)=x^2$ 时 有 $\frac{2}{3}h^3 = h[b(h^2+h^2)+c(4h^2+4h^2)]$

令 $f(x)=x^3$ 时 $0=0$

令 $f(x)=x^4$ 时 $\frac{2}{5}h^5 = h[b(h^4+h^4)+c(16h^4+16h^4)]$

由上式可得 $\begin{cases} a = \frac{74}{45} \\ b = \frac{17}{45} \\ c = -\frac{1}{90} \end{cases}$ 即 $\int_{-h}^{h} f(x)dx \approx$ ~~$h[\frac{37}{20}f(0)+\frac{31}{360}[f(-h)+f(h)]+$~~

$= h[\frac{74}{45}f(0)+\frac{17}{45}[f(-h)+f(h)] - \frac{1}{90}[f(-2h)+f(2h)]$

(2) 令 $f(x)=x^5$ 时 左边 $=0$ 右边 $=0$ 故等式成立

令 $f(x)=x^6$ 时 左边 $=\frac{2}{7}h^7$ 右边 $=-\frac{5}{4}h^7$ 左边 ≠ 右边
$-\frac{2}{3}h^7$

故 5阶代数精度

(4) $\int_{-2}^{2} x^4 dx = 2[$ ~~$\frac{37}{20}\times 0+\frac{31}{360}[1+1]+(-\frac{1}{60})(256+256)$~~ $]$

$= 2[\frac{74}{45}\times 0 + \frac{17}{45}(1+1) - \frac{1}{90}(256+256)]$

$= \frac{64}{5}$

$a+21$

36

5. (10 分) 应用 Heun 方法 $y_{n+1} = y_n + \frac{h}{4}[f(x_n, y_n) + 3f(x_{n+\frac{2}{3}}, y_n + \frac{2}{3}hf(x_n, y_n))]$

求初值问题：$\begin{cases} y' = -10y, & 0 \le x \le 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$

在 $x = 0.2$ 的数值解（在步长 $h = 0.1$, 0.2 中选取一个数值稳定的步长进行计算）。

装订线内 不得答题

5. (10 分) 已知数据 (0,7), (1,4), (2,2), (3,3), 利用反差商表构造有理插值函数。

解: 由题可知

	x_0	x_1	x_2	x_3
$i=$	0	1	2	3
x_i	0	1	2	3
y_i	7	4	2	3

x_j	$v_0(x_j)$	$v_1(x_j)$	$v_2(x_j)$	$v_3(x_j)$
0	7			
1	4	$-\frac{1}{3}$		
2	2	$-\frac{1}{2}$	-6	
3	3	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{20}$

$$R(x)=v_0(x_0)+\cfrac{x-x_0}{v_1(x_1)+\cfrac{x-x_1}{v_2(x_2)+\cfrac{x-x_2}{v_3(x_3)}}}=7+\cfrac{x}{-\frac{1}{3}+\cfrac{x-1}{-6+\cfrac{x-2}{\frac{3}{20}}}}$$

$$=\frac{1{:}x^2-251x+336}{48-11x}$$

装订线内 不得答题

38

装订线内

不得答题

7.（10 分）矩阵 $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 3\\ 1 & -2 & 1\\ 3 & 1 & 3\end{bmatrix}$

(1) 利用乘幂法求 A 按模最大的特征值及对应的特征向量，选取初始向量 $v_0=(1,1,1)^T$，计算两步（结果保留 4 位小数）；

(2) 求 A 的范数 $\|A\|_\infty$，$\|A\|_1$

解：(1) $u_0=\frac{v_0}{\max(v_0)}=(1,1,1)^T$

$$v_1=Au_0=\begin{bmatrix}1 & 1 & 3\\ 1 & -2 & 1\\ 3 & 1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}=(5,0,7)^T$$

$$u_1=\frac{v_1}{\max(v_1)}=\frac{(5,0,7)^T}{7}=(\frac{5}{7},0,1)^T$$

$$v_2=Au_1=\begin{bmatrix}1 & 1 & 3\\ 1 & -2 & 1\\ 3 & 1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{5}{7}\\0\\1\end{bmatrix}=(\frac{26}{7},\frac{12}{7},\frac{36}{7})^T=(3.7143,1.7143,5.1429)^T$$

$$u_2=\frac{v_2}{\max(v_2)}=\frac{(\frac{26}{7},\frac{12}{7},\frac{36}{7})^T}{\frac{36}{7}}=(\frac{13}{18},\frac{1}{3},1)^T$$

$$=(0.7222,0.3333,1.0000)^T$$

故 A 的按模最大特征值 $\lambda=\max(v_2)=5.1492$

对应的特征向量为 $x=(0.7222,0.3333,1.0000)^T$

(2) $\|A\|_\infty=\max\limits_{1\le i\le 3}\sum\limits_{j=1}^{3}|a_{ij}|=\max(5,4,7)=7$

$\|A\|_1=\max\limits_{1\le j\le 3}\sum\limits_{i=1}^{3}|a_{ij}|=\max(5,4,7)=7$

3.（10分）确定多项式 $y=a+bx^2$ 中的参数 a 和 b，使已知数据多项式曲线按最小二乘原则拟合于下列数据：　$y=20.3-7t+0.05t^2$

x_i	19	25	31	38
y_i	19.00	32.3	49.0	73.3

解：令 $\varphi_0(x)=1$　$\varphi_1=x^2$　则 $y=a\varphi_0+b\varphi_1$

$(\varphi_0,\varphi_0)=4$　$(\varphi_0,\varphi_1)=(\varphi_1,\varphi_0)=3391$，$(\varphi_1,\varphi_1)=3529603$

$(f,\varphi_0)=173.6$　$(f,\varphi_1)=179980.7$

解方程组 $\begin{pmatrix}(\varphi_0,\varphi_0) & (\varphi_1,\varphi_0)\\(\varphi_0,\varphi_1) & (\varphi_1,\varphi_1)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(f,\varphi_0)\\(f,\varphi_1)\end{pmatrix}$

解得 $a\approx0.93$　$b\approx0.05$

装订线内

不得答题

9.（10分）设 x^* 是 $f(x)=0$ 的三重根，$f(x)$ 在 x^* 的某个邻域内具有三阶连续导数。

(1) 试证：对 $f(x)=0$ 建立的 Newton 迭代在 x^* 附近是线性收敛的；

(2) 试将 Newton 迭代公式变形，使之在 x^* 附近具有平方收敛性，并加以证明。

装订线内 不得答题

解：(1) 证明：迭代函数为 $x=\varphi(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)}$

迭代格式为 $x_{i+1}=\varphi(x_i)=x_i-\frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$

$$\varphi(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)}=x-\frac{f(x^*)+f'(x^*)(x-x^*)+\frac{1}{2}f''(x^*)(x-x^*)^2+\frac{1}{6}f'''(\xi_1)(x-x^*)^3}{f'(x^*)+f''(x^*)(x-x^*)+\frac{1}{2}f'''(\xi_2)(x-x^*)^2}$$

$$=x-\frac{\frac{1}{6}f'''(\xi_1)(x-x^*)^3}{\frac{1}{2}f'''(\xi_2)(x-x^*)^2}$$

$$=x-\frac{1}{3}\cdot\frac{f'''(\xi_1)}{f'''(\xi_2)}(x-x^*)$$

$$\varphi'(x^*)=\lim_{x\to x^*}\frac{\varphi(x)-\varphi(x^*)}{x-x^*}=\lim_{x\to x^*}\frac{x-\frac{1}{3}\frac{f'''(\xi_1)}{f'''(\xi_2)}(x-x^*)-x^*}{x-x^*}=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

故对 $f(x)=0$ 建立的 Newton 迭代在 x^* 附近是线性收敛的

(2) 具有平方收敛的迭代公式为 $\varphi(x)=x-3\frac{f(x)}{f'(x)}$

即 $x_{i+1}=x_i-3\frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$　$i=0,1,2,\cdots$

$$\varepsilon_{i+1}=x^*-x_{i+1}=x^*-x_i+3\frac{f(x_i)}{f'(x_i)}=\frac{x^*f'(x_i)-x_if'(x_i)+3f(x_i)}{f'(x_i)}$$

$$=\frac{(x^*-x_i)f'(x_i)+3f(x_i)}{f'(x_i)}=\frac{G(x_i)}{f'(x_i)}$$

$$=\frac{G(x^*)+G'(x^*)(x_i-x^*)+\frac{1}{2}G''(x^*)(x_i-x^*)^2+\frac{1}{6}G'''(x^*)(x_i-x^*)^3+\frac{1}{24}G^{(4)}(\xi_1)(x_i-x^*)^4}{f'(x^*)+f''(x^*)(x_i-x^*)+\frac{1}{2}f'''(\xi_2)(x_i-x^*)^2}$$

$$=\frac{\frac{1}{24}G^{(4)}(\xi_1)(x_i-x^*)^4}{\frac{1}{2}f'''(\xi_2)(x_i-x^*)^2}=\frac{1}{12}\cdot\frac{G^{(4)}(\xi_1)}{f'''(\xi_2)}\varepsilon_i^2$$

且 $\lim_{i\to\infty}\frac{|\varepsilon_{i+1}|}{\varepsilon_i^2}=\frac{1}{12}\left|\frac{G^{(4)}(x^*)}{f'''(x^*)}\right|\neq 0$

7

10.（10分）设线性两步方法 $y_{n+1} = a_0 y_n + (1-a_0) y_{n-1} + h[(2-\frac{a_0}{2}) y'_n - \frac{1}{2} a_0 y'_{n-1}]$

其中 $0 \le a_0 < 2$。

(1) 求出此方法的局部截断误差，该方法至少是多少阶的；

(2) 讨论此方法的收敛性；

(3) 当 $a_0 = 1$，试确定它的绝对稳定区间。

（在线性多步法的局部截断误差中

$$C_r = \frac{1}{r!}\left\{1-\left[\sum_{i=0}^{p}(-i)^r a_i + r\sum_{i=-1}^{p}(-i)^{r-1} b_i\right]\right\}, r = 2,3\cdots$$
）

解：(1) $c_0 = 1-\sum_{i=0}^{1} a_i = 1-[a_0+(1-a_0)] = 0$

$c_1 = 1-[\sum_{i=0}^{1} -i a_i + \sum_{i=-1}^{1} b_i] = 1-[(-1)(1-a_0)+(2-\frac{a_0}{2})-\frac{1}{2}a_0]$

$= 0$

$c_2 = \frac{1}{2}\{1-[\sum_{i=0}^{1}(-i)^2 a_i + 2\sum_{i=-1}^{1}(-i) b_i]\}$

$= \frac{1}{2}\{1-[1-a_0+a_0]\} = 0$

$c_3 = \frac{1}{6}\{1-[\sum_{i=0}^{1}(-i)^3 a_i + 3\sum_{i=-1}^{1}(-i)^2 b_i]\}$

$= \frac{1}{6}\{1-[a_0-1+3(-\frac{a_0}{2})]\} = \frac{1}{3}+\frac{a_0}{6}$

$T_n = (\frac{1}{3}+\frac{a_0}{6})h^3 y'''(x_n) + O(h^4)$，该方法至少2阶

(2) 该方法的第一第二特征多项式分别为

$\rho(r) = r^{p+1} - \sum_{i=0}^{p} a_i r^{p-i} = r^2 - a_0 r - (1-a_0)$

$\sigma(r) = \sum_{i=-1}^{p} b_i r^{p-i} = (2-\frac{a_0}{2}) r - \frac{a_0}{2}$

$\rho(1) = (1-a_0)-(1-a_0) = 0$ $\quad \rho'(1) = 2-a_0 \quad \sigma(1) = 2-a_0$

故该多步法是相容的

解 $\rho(r)=0$ 的根为 $r_1 = 1$ $\ r_2 = a_0-1$ $\quad -1 \le r_2 < 1$

故当 $a_0 = 0$ 时该方法不收敛，当 $0<a_0<2$ 时收敛。

(2) 当 $a_0 = 1$ 时 稳定多项式为 $\pi(r,\bar{h}) = r^2 - (\frac{3}{2}\bar{h}+1) r + \frac{\bar{h}}{2}$

解得其根为 $r_{1,2}(\bar{h}) = \frac{(\frac{3}{2}\bar{h}+1) \pm \sqrt{\frac{9}{4}\bar{h}^2+\bar{h}+1}}{2}$

绝对稳定区间为 $(0,1)$

1. （10 分）设 $f(x)=1-\frac{a}{x^2}=0\quad(a>0)$，导出求 $\sqrt{a}$ 的 Newton 迭代公式，并用此公式求 $\sqrt{115}$ 的值（要求结果保留 4 位小数）。

构造一个有 $x=\sqrt{a}$ 的式子即可！！

解：$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$

$$= x - \frac{1-\frac{a}{x^2}}{\frac{2a}{x^3}}$$

$$= x - \frac{x^3 - ax}{2a}$$

$$= \frac{-x^3+3ax}{2a}$$

$$x_{i+1} = \varphi(x_i) = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

$$x_{i+1} = \frac{-x_i^3+3ax_i}{2a}$$

求 $a=115$

$$x_{i+1} = \frac{-x_i^3+345x_i}{230}$$

取 $x_0=10$．取个相近的初值．

$x_1 = 10.6522$

$x_2 = 10.7231$

$x_3 = 10.7238$

装订线内 不得答题

2.（10 分）利用 Romberg 积分法，将积分的近似计算结果填在下表空白处，其中第一行数据 $T_{0,k}$ 为复化梯形公式的积分结果。

k	0	1	2	3
$T_{0,k}$	0.9207355	0.9397933	0.9445135	0.9456909
$T_{1,k}$	0.9461459	0.9460869	0.9460834	
$T_{2,k}$	0.9460830	0.9460832		
$T_{3,k}$	0.9460832			

$T_{0,0} = \frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]$

$T_{0,i} = \frac{1}{2}\left[T_{0,i-1} + \frac{b-a}{2^{i-1}}\sum_{j=1}^{2^{i-1}} f\left(a+(2j-1)\frac{(b-a)}{2^i}\right)\right]$，$i=1,2,3\ldots$

$T_{m,k} = \frac{4^m T_{m-1,k+1} - T_{m-1,k}}{4^m-1}$

主管 签名 审核 签字

3.（10分）设线性方程组 $Ax=b$ 的系数阵为 $A=\begin{bmatrix}1 & 0.4 & 0.4\\ 0.4 & 1 & 0.8\\ 0.4 & 0.8 & 1\end{bmatrix}$，$b=\begin{bmatrix}11\\12\\13\end{bmatrix}$

(1)求 Jacobi 迭代矩阵和 Gauss-Seidel 迭代矩阵；

(2)讨论上述两种迭代方法的收敛性。

Jacobi 迭代： $A=D-L-U$

解：Jacobi：$(L+D+U)x=b$

$Dx^{(i+1)}=-(L+U)x^{(i)}+b$

$x^{(i+1)}=-D^{-1}(L+U)x^{(i)}+D^{-1}b$.

$B_G=-D^{-1}(L+U)$

$=\begin{bmatrix}0 & -0.4 & -0.4\\ -0.4 & 0 & -0.8\\ -0.4 & -0.8 & 0\end{bmatrix}$.

$L=\begin{bmatrix}0 & & \\ a_{21} & 0 & \\ \vdots & & \ddots \\ a_{n1} & \cdots & & 0\end{bmatrix}$ $D=\begin{bmatrix}a_{11} & & \\ & a_{22} & \\ & & \ddots \\ & & & a\end{bmatrix}$

$U=\begin{bmatrix}0 & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ & 0 & & \vdots\\ & & \ddots & \\ & & & 0\end{bmatrix}$

$Ax=b \to Dx=-(L+U)x+$

$\to x^{(k+1)}=-D^{-1}(L+U)x^{(k)}+$

$B_J=-D^{-1}(L+U)$

Gauss-Seidel：

$(L+D+U)x=b$

$(L+D)x^{(i+1)}+Ux^{(i)}=b$

~~$x^{(i+1)}=-(L+D)^{-1}Ux^{(i)}+(L+D)^{-1}b$~~

~~$Dx^{(i+1)}=-Lx^{(i+1)}-Ux^{(i)}+b$~~

~~$x^{(i+1)}=-D^{-1}Lx^{(i+1)}-D^{-1}Ux^{(i)}+D^{-1}b$~~

$x^{(i+1)}=-(L+D)^{-1}Ux^{(i)}+(L+D)^{-1}b$.

$B_G=-(L+D)^{-1}U$

$=\begin{bmatrix}0 & -0.4 & -0.4\\ 0 & 0.16 & -0.64\\ 0 & -0.16 & 0.48\end{bmatrix}$

Gauss-seidel：

$x^{(k+1)}=-(L+D)^{-1}U$

$+(D+L)$

$B_G=-(D+L)^{-1}U$

~~(2) Jacobi. $|\lambda E-B_G|=0 \Rightarrow \lambda^3-0.96\lambda+0.256=0$~~

~~解得 $\lambda_1\ \lambda_2\ \lambda_3$ 模均小于1.~~

~~因此 Jacobi 收敛~~

Jacobi $|\lambda E-B_G|=0$

$\Rightarrow \lambda^3-0.96\lambda+0.256=0$.

$|\lambda_1|,|\lambda_2|,|\lambda_3|$ 均小于1.

因此 Jacobi 收敛

$\rho(B_G)=\max\limits_{1\le i\le 3}|\lambda_i|<1$

Jacobi ~~$B_G=\begin{bmatrix}0 & -0.4 & -0.4\\ -0.4 & 0 & -0.8\\ -0.4 & -0.8 & 0\end{bmatrix}$~~

~~矩阵 所以 Jacobi~~

Gauss-Seidel：

$|\lambda E-B_G|=0 \Rightarrow \lambda(\lambda^2-0.64\lambda-0.0256)=0$

$\lambda_1=0$ $\lambda_2=0.32+0.16\sqrt{5}$. $\lambda_3=0.32-0.16\sqrt{5}$.

$|\lambda_1|,|\lambda_2|,|\lambda_3|$ 均小于1

$\rho(B)=\max\limits_{1\le i\le 3}|\lambda_i|<1$

收敛：$\rho(B)<1$；

充分条件：存在范数

因此 Gauss-Seidel 收敛. $\|\cdot\|$ 使 $\|B\|<1$

4.（10 分）. 设 $g_k(x)=\sum_{j=1}^{n} a_j^k l_j(x)$，其中 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为 n 个互异的插值节点；l_j（$j=1,2\cdots n$）为拉格朗日(Lagrange)插值基函数，求 $g_0(3)$、$g_2(3)$、$g_n(0)$ 各等于什么

$=x^k$　　相当于 x_i

解：$g_0(3)=\sum_{j=1}^{n} a_j^0 l_j(3)$

$=\sum_{j=1}^{n} l_j(3)=1$

$g_2(3)=\sum_{j=1}^{n} a_j^2 l_j(3)$　　取 $f(x)=x^2$

$=\sum_{j=1}^{n} a_j^2$

$g_n(0)=\sum_{j=1}^{n} a_j^n l_j(0)$　　取 $f(x)=x^n$

$=\sum_{j=1}^{n} a_j^n$

装订线内　不得答题

$\sum_{j=0}^{n} f(x_j)l_j(x)\equiv f(x)$.

拉格朗日插值公式：$y(x)=\sum_{j=0}^{n} f(x_j)l_j(x)$　（此处为 $g_k(x)$）

$$l_j(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{j-1})(x-x_{j+1})\cdots(x-x_n)}{(x_j-x_0)(x_j-x_1)\cdots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\cdots(x_j-x_n)}$$

$j=0,1,$

为插值基函数

$l_j(x_i)=\begin{cases}0 & i\neq j\\ 1 & i=j\end{cases}$　$j,i=0,1,\cdots,n$

$E(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}P_{n+1}$

$P_{n+1}(x)=(x-x_0)\cdots$

故 $g_0(3)=\sum_{j=1}^{n} a_j^0 l_j(3)=\sum_{j=1}^{n} l_j(3)=1$

实际插值 $f(x)=g(x)+\underline{E(x)}$ 插值余项

由于 f 从 1 开始而不是从 0 开始，故

故 $g_k(x)=f(x)-E(x)$　　而 $f(x)=x^k$.

$E(x)=\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}P_n$

则 ~~$g_0(3)=f(3)$~~ $g_0(3)=3^0-E_0(3)=3^0=1$

$P_n(x)=(x-x_1)\cdots(x-$

$g_2(3)=3^2-E_2(3)=9-0=9$

$n>2$ 时

$f^{(n)}(\xi)\neq 0$

当 $k=n$ 时

$g_n(0)=0^n-E_n(0)=0^n-\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(0-a_1)(0-a_2)\cdots(0-a_n)$

$=(-1)^{n+1}\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}\prod_{i=1}^{n} a_j$

5. (10 分) 确定求积公式 $\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \frac{1}{9}f(1)+Af(\frac{1}{2})+Bf(-\frac{1}{2})+\frac{1}{9}f(-1)$ 的求积系数 A,B，使求积公式有尽可能高的代数精度；并用此公式计算 $\int_1^4 \frac{1}{x+1}dx$.

解. 取 $f(x)\equiv 1$.

$\frac{1}{9}+A+B+\frac{1}{9}=2$.

取 $f(x)=x$

$\frac{1}{9}+\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}B-\frac{1}{9}=0$

解: $A=B=\frac{8}{9}$

取 $f(x)=x^2$

$\frac{2}{3}=\frac{1}{9}+\frac{8}{9}\times\frac{1}{4}+\frac{8}{9}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{9}\times 1$

取 $f(x)=x^3$

$0=\frac{1}{9}+\frac{8}{9}\times\frac{1}{8}-\frac{8}{9}\times\frac{1}{8}-\frac{1}{9}$

取 $f(x)=x^4$

$\frac{2}{5}\neq\frac{1}{9}+\frac{8}{9}\times\frac{1}{16}+\frac{8}{9}\times\frac{1}{16}+\frac{1}{9}$

所以有3次代数精度.

分别令 $f(x)=1, x, \dots, x^r$ 均成立，有 r 次精度，$n+1$ 个求积节点，精度最高可达 $2n+1$.

$\int_1^4 \frac{1}{1+x}dx$ $\qquad x=\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2}t \quad t\in[-1,1]$

取 $x=\frac{5}{2}+\frac{3}{2}t$

$\frac{3}{2}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\frac{5}{2}+\frac{3}{2}t+1}dt = 3\int_{-1}^{1}\frac{1}{3t+7}dt$

~~$=3\times[\frac{1}{9}f(1)+\frac{8}{9}f(\frac{1}{2})+\frac{8}{9}$~~

$=3\times[\frac{1}{9}\times\frac{1}{3\times1+7}+\frac{8}{9}\times\frac{1}{3\times\frac{1}{2}+7}+\frac{8}{9}\times\frac{1}{3\times(-\frac{1}{2})+7}+\frac{1}{9}\times\frac{1}{3\times(-1)+7}]$

$=0.9152406$.

7. (10分) 利用下面数据表构造有理插值函数。

x	0	1	2	4
$f(x)$	0	1	1/2	-1/2

x	$v_0(x)$	$v_1(x)$	$v_2(x)$	$v_3(x)$
0	$\underline{0}$			
1	1	$\underline{1}$		
2	$\frac{1}{2}$	4	$\underline{\frac{1}{3}}$	
4	$-\frac{1}{2}$	-8	$-\frac{1}{3}$	$\underline{-3}$

牛顿了插值：差商

有理插值：反差商

$$R(x) = v_0(x_0) + \cfrac{x-x_0}{v_1(x_1) + \cfrac{x-x_1}{\cdots}}$$

$$R(x) = 0 + \cfrac{x}{1 + \cfrac{x-1}{\frac{1}{3} + \cfrac{x-2}{-3}}}$$

装订线内 不得答题

28

5.（10分）利用二阶 Runge-Kutta 方法 $y_{n+1}=y_n+\frac{h}{2}[f(x_n,y_n)+f(x_{n+1},y_n+hf(x_n,y_n))]$

求初值问题：$\begin{cases} y'=-10y, & 0\le x\le 1 \\ y(0)=1 \end{cases}$

$\lambda h=-1 \quad -2 \quad y_1 \cdots \quad y_{n+1}$

在 $x=0.2$ 的数值解（在步长 $h=0.1$，0.2 中选取一个数值稳定的步长进行计算）。

解：$h=0.1$ 时

$n=0$ 时

$y_1=y_0+\frac{h}{2}[f(x_0,y_0)+f(x_1,y_0+hf(x_0,y_0))]$

$f(x_{n+1},y_n+hf(x_n,y_n))$

~~$=1+\frac{0.1}{2}[-10\times1+[-10\times[1+0.1\times(-10\times1)]]$~~

$=1+\frac{0.1}{2}\{-10\times1-10\times[1+0.1\times(-10)]\}$

$=0.5$

$n=1$ 时

$y_2=y_1+\frac{h}{2}[f(x_1,y_1)+f(x_2,y_1+hf(x_1,y_1))]$

$=0.5+\frac{0.1}{2}(-5-10\times[0.5+0.1\times(-10\times0.5)]$ $=0$ 时

$=0.25$

即 $y(0.2)=0.25$

$-2<\bar{h}<0$

当 $h=0.2$ 时

$n=0$

$y_1=y_0+\frac{h}{2}[f(x_0,y_0)+f(x_1,y_0+hf(x_0,y_0))]$ $\quad -2<h\lambda<0$

$=1+\frac{0.2}{2}\{-10-10[1+0.2\times(-10\times1)]\}$

$=1$

即 $y(0.2)=1$

~~$\bar{h}=h\lambda=0.1\times(-10)=-1$~~

因此步长 $h=0.1$ 时稳定

~~解：而以稳定多项式 $\pi(r,\bar{h})=r-1-\frac{\bar{h}}{2}(1+r)=r-1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}r$~~

~~$\pi(r,\bar{h})=0$ 得 $r=\frac{1}{3}<1$，稳定，故选 $h=0.1$。~~

~~则 $y_1=y_0+\frac{0.1}{2}[-10y_0+(-10\times1)]$~~

8.（10分）矩阵 $A=\begin{bmatrix}2 & 3 & 2\\ 10 & 3 & 4\\ 3 & 6 & 1\end{bmatrix}$，利用乘幂法求 A 按模最大的特征值及对应的特征向量，选取初始向量 $v_0=(0,0,1)^T$，计算两步（结果保留5位小数）。

解：$V_0=(0,0,1)^T$

$V_1=AV_0=(2,4,1)^T \quad \lambda_1=4$

$U_1=\dfrac{V_1}{\max(V_1)}=(0.5,\ 1,\ 0.25)^T$

$V_2=AU_1=(4.5,\ 9,\ 7.75)^T$

$U_2=\dfrac{V_2}{\max(V_2)}=(0.5,\ 1,\ 0.86111)^T. \quad \lambda_2=9.$

9.（10 分）试用共轭梯度法（cg 法）求解线性方程组，（初始值取 $x^{(0)}=(0,0,0)^T$）

$$\begin{bmatrix}2&0&1\\0&1&0\\1&0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\1\\3\end{bmatrix}$$

已知的计算过程为：

给定 $x^{(0)}$，计算 $r^{(0)}=b-Ax^{(0)}$，$p_0=r^{(0)}$

对 $k=0,1,2,\dots,n-1$ 计算

$$\alpha_k=\frac{(r^{(k)},r^{(k)})}{(p_k,Ap_k)}\ ,\quad x^{(k+1)}=x^{(k)}+\alpha_k p_k\ ,\quad r^{(k+1)}=r^{(k)}-\alpha_k A$$

$$\beta_k=\frac{(r^{(k+1)},r^{(k+1)})}{(r^{(k)},r^{(k)})}\ ,\quad p_{k+1}=r^{(k+1)}+\beta_k p_k$$

解：$x^{(0)}=(0,0,0)^T$

$r^{(0)}=b-Ax^{(0)}=(3,1,3)^T \quad P_0=r^{(0)}=(3,1,3)^T \quad AP_0=(9,1,9)^T$

$$\alpha_0=\frac{(r^{(0)},r^{(0)})}{(P_0,AP_0)}=\frac{19}{55}$$

$$x^{(1)}=x^{(0)}+\alpha_0P_0=(0,0,0)^T+\frac{19}{55}(3,1,3)=\left(\frac{57}{55},\frac{19}{55},\frac{57}{55}\right)^T$$

$$r^{(1)}=r^{(0)}-\alpha_0AP_0=(3,1,3)^T-\frac{19}{55}(9,1,9)^T=\left(\frac{-6}{55},\frac{36}{55},\frac{-6}{55}\right)^T$$

$$\beta_0=\frac{(r^{(1)},r^{(1)})}{(r^{(0)},r^{(0)})}=\frac{\frac{1368}{3025}}{19}=\frac{72}{3025}$$

$$P_1=r^{(1)}+\beta_0P_0=\left(\frac{-6}{55},\frac{36}{55},\frac{-6}{55}\right)^T+\frac{72}{3025}(3,1,3)^T$$

$$=\left(\frac{-114}{3025},\frac{2052}{3025},\frac{-114}{3025}\right)^T$$

$$AP_1=\left(\frac{-342}{3025},\frac{2052}{3025},\frac{-342}{3025}\right)^T$$

$$\alpha_1=\frac{(r^{(1)},r^{(1)})}{(P_1,AP_1)}=\frac{\frac{1368}{3025}}{\frac{4288680}{3205^2}}=1.0223285$$

$$x^{(2)}=x^{(1)}+\alpha_1P_1$$

$$=(1.0000000,\ 1.0389481,\ 1.0000000)^T$$

装订线内　不得答题

10.（10分）对线性多步方法 $y_{n+1}=ay_{n-1}+bhy'_n$，h为步长。

(1)确定方法中的参数a和b，使其误差的阶数尽可能高；并指出方法的阶数。

(2)讨论该方法的收敛性和稳定性。

（在线性多步法的局部截断误差中

$$C_r=\frac{1}{r!}\left\{1-\left[\sum_{i=0}^{p}(-i)^r a_i+r\sum_{i=-1}^{p}(-i)^{r-1}b_i\right]\right\},r=2,3,\cdots$$ ）

$y_{n+1}=a_0y_n+a_1y_{n-1}+h(b_{-1}y_{n+1}+b_0y_n\ldots)$

解：(1) $p=1$ $a_0=0$ $a_1=a$ $b_{-1}=0$ $b_0=b$ $b_1=0$

$C_0=1-(a_0+a_1)=1-a=0\Rightarrow a=1$ C_0 恒等于 $=0$

$C_1=1+a_1-(b_{-1}+b_0+b_1)=1+a-b=0\Rightarrow b=2$ 1要求求 a

$C_2=\frac{1}{2}(1-a_1)=0$

$C_3=\frac{1}{3!}(1+a_1)\ne 0$

因此此方法是二阶的

(2) 由于 $C_0=C_1=0$ 所以方法相容

$\rho(r)=r^2-1$

令 $\rho(r)=0\Rightarrow r_0=-1$ $r_1=1$

$|r_0|=|r_1|=1$ 且都为单根，故满足根条件

因此方法稳定

$\rho(r)=r^2-a=r^2-1$

$\sigma(r)=br=2r$

$\rho(1)=0$

$\rho'(1)=2=\sigma(1)$

~~$\pi(r,\bar h)=\frac{1}{r}+2\bar h$~~

$\pi(r,\bar h)=r^2-2\bar h r-1\Rightarrow r_0(\bar h)=\bar h+\sqrt{\bar h^2+1}$ $r_1(\bar h)=\bar h-\sqrt{\bar h^2+1}$

$\frac{|r_1(\bar h)|}{|r_0(\bar h)|}=\frac{|\bar h-\sqrt{\bar h^2+1}|}{|\bar h+\sqrt{\bar h^2+1}|}$ 当 $\bar h\ge 0$ 时 $\frac{|r_1(\bar h)|}{|r_0(\bar h)|}\le 1$

所以相对稳定区间为 $[0,+\infty)$

又由于 当 $\bar h>0$ 时 $|r_0(\bar h)|>1$ $\bar h<0$ 时 $|r_1(\bar h)|<1$

因此不存在绝对稳定区间.

当 $\bar{h} \to 0$ 时，哪个根 $\to 1$，哪个是主根，而 $\bar{h}+\sqrt{\bar{h}^2+1}$ 为主根

$\bar{h} > 0$ 时，由 $|\bar{h}-\sqrt{\bar{h}^2+1}| \le |\bar{h}+\sqrt{\bar{h}^2+1}|$

相对稳定区间为 $[0, +\infty)$

$\bar{h} < 0$ 时 $|\bar{h}-\sqrt{\bar{h}^2+1}| > \underbrace{|\bar{h}+\sqrt{\bar{h}^2+1}|}_{\text{主根}}$ 不满足.

装订线内 不得答题

2.（10 分）设线性方程组 $Ax=b$ 的系数阵为 $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -2\\ 1 & 1 & 1\\ 2 & 2 & 1\end{bmatrix}$

讨论 Jacobi 迭代方法的敛散性。

解 ~~$x^{(k+1)} = -D^{-1}(L+U)x^{(k)} + D^{-1}b$~~

$$\therefore B_J = -D^{-1}(L+U) = -\begin{pmatrix}1 & & 0\\ & 1 & \\ 0 & & 1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}0 & 2 & -2\\ 1 & 0 & 1\\ 2 & 2 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & -2 & \\ -1 & & \\ -2 & & \end{pmatrix}$$

$$\lambda I - B_J = \begin{vmatrix}\lambda & 2 & -2\\ 1 & \lambda & 1\\ 2 & 2 & \lambda\end{vmatrix} = \lambda^3 + 4 - 4 + \cdots = \lambda^3 = 0$$

$\therefore \lambda^3 = 0$

$\therefore \rho(B_J) = 0 < 1$ 故收敛

3.（10 分）利用经典四阶 Runge-Kutta 方法求初值问题：

$$\begin{cases} y' = -y + x + 1, & 0 \le x \le 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

在 $x = 0.2$ 的数值解（取步长 $h = 0.1$）。

$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$

$k_1 = -y_n + x_n + 1$ $\qquad k_2 = -(y_n + \frac{h}{2}k_1) + (x_n + \frac{h}{2}) + 1$

$k_3 = -(y_n + \frac{h}{2}k_2) + (x_n + \frac{h}{2}) + 1$

$k_4 = -(y_n + h k_3) + (x_n + h) + 1$

当 $h = 0.1$ 时 $k_1 = -y_0 + x_0 + 1 = 0$

33

1. (10 分) 已知 $s(x)$ 是 $[0,2]$ 上的已知自然边界条件的三次样条函数

$$s(x)=\begin{cases}1+2x-x^3, & 0\le x\le 1\\ 2+b(x-1)+c(x-1)^2+d(x-1)^3, & 1\le x\le 2\end{cases}$$

试确定其中的参数 b, c 和 d。

解：$S'(x)=\begin{cases}2-3x^2\\ b+2c(x-1)+3d(x-1)^2\end{cases}$

$S''(x)=\begin{cases}-6x\\ 2c+6d(x-1)\end{cases}$

$x=1 \Rightarrow 2-3\times1=b$

$\therefore b=-1$

$-6=2c$

$\therefore c=-3$

$\therefore S''(0)=0 \quad S''(2)=0$

$\therefore 2c+6d=0$

$\therefore -6+6d=0$

$\therefore d=1$

$\therefore b=-1 \quad c=-3, \quad d=1$

$1+2-1=2$

$\{a,\ b\ c$

~~$2c+6d=0$~~

$2c+6d=0$

$b=-1$

$2c=-6$

$c=-3$

$d=0$

$S_1(c)=S_2(c)$

$S_1'(c)=S_2'(c)$

$S_1''(c)=S_2''(c)$

$S_1''(a)=S_2''(b)=0$

装订线内 不得答题

84/54

一、（10 分）利用 Newton 插值公式验证下面等式

$$l_0(x)=1+\frac{x-x_0}{x_0-x_1}+\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}+\cdots+\frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\cdots(x_0-x_n)}$$

其中 $l_0(x)$ 是 Lagrange 插值基函数。

解：由 $l_0(x)$ 的性质可知

x	$l_0(x)$	$l_0(x_0,x_k)$	$l_0(x_0,x_1,x_k)$	$l_0(x_0,x_1,x_2,x_k)$
x_0	1			
x_1	0	$\frac{1}{x_0-x_1}$		
x_2	0	$\frac{1}{x_0-x_2}$	$\frac{1}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}$	
x_3	0	$\frac{1}{x_0-x_3}$	$\frac{1}{(x_0-x_1)(x_0-x_3)}$	$\frac{1}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)}$

……

由牛顿插值公式有

$$l_0(x)=1+\frac{1}{x_0-x_1}(x-x_0)+\frac{1}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}(x-x_0)(x-x_1)+\frac{1}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)}(x-x_0)(x-x_1)$$

$$=1+\frac{x-x_0}{x_0-x_1}+\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}+\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)}+\cdots$$

得证

$$l_0(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_i)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\cdots(x_0-x_i)}$$

装订线内 不得答题

(10 分)确定两点求积公式 $\int_{-1}^{1} f(x)dx = A_0 f(-\frac{\sqrt{3}}{3}) + A_1 f(\frac{\sqrt{3}}{3})$ 的求积系数 A_0, A_1，使求积公式有尽可能高的代数精度；它是否是 Gauss 求积公式；并用此公式计算 $\int_1^4 \frac{1}{x}dx$。

know

解：该 ~~[illegible]~~ 此公式中含有两个未知数

故令此求积公式为 $f(x)=1$，$f(x)=x$ 都成立

则 $\int_{-1}^{1} 1dx \approx A_0 + A_1 = 2$

$\int_{-1}^{1} x dx \approx -\frac{\sqrt{3}}{3}A_0 + \frac{\sqrt{3}}{3}A_1 = \frac{1}{2}x^2\Big|_{-1}^{1} = 0$

$\therefore A_0 = 1$

$A_1 = 1$

$\therefore \int_{-1}^{1} f(x)dx = f(-\frac{\sqrt{3}}{3}) + f(\frac{\sqrt{3}}{3})$

对 $f(x)=x^2$ $\int_{-1}^{1} x^2 dx = \frac{1}{3}x^3\Big|_{-1}^{1} = \frac{2}{3}$

$f(-\frac{\sqrt{3}}{3}) + f(\frac{\sqrt{3}}{3}) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

对 $f(x)=x^3$ $\int_{-1}^{1} x^3 dx = \frac{1}{4}x^4\Big|_{-1}^{1} = 0$

$f(-\frac{\sqrt{3}}{3}) + f(\frac{\sqrt{3}}{3}) = -(\frac{\sqrt{3}}{3})^3 + (\frac{\sqrt{3}}{3})^3 = 0$

对 $f(x)=x^4$ $\int_{-1}^{1} x^4 dx = \frac{1}{5}x^5\Big|_{-1}^{1} = \frac{2}{5}$

$f(-\frac{\sqrt{3}}{3}) + f(\frac{\sqrt{3}}{3}) = \frac{1}{9}\times 2 = \frac{2}{9} \neq \frac{2}{5}$

(1, 4)

$a=1$ $b=4$

$x = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t$

故 $f(x)$ 具有3次精度，而 $n=1$ $(3=2\times1+1)$ 故 是 Gauss

$\int_1^4 \frac{1}{x}dx = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\frac{5}{2}+\frac{3}{2}t}d\frac{3}{2}t = \int_{-1}^{1} \frac{2}{5+3t}dt$ $\therefore \int_1^4 \frac{1}{x}dx = \frac{2}{5+\sqrt{3}}$

1.3862 9

$\frac{3}{2}$

x 4

56

6.（10 分）已知一组试验数据：

	0	1	2	3
x_i	0	1	2	4
y_i	2.010	1.210	0.740	0.450
Y $\ln y_i$	0.698	0.191	-0.301	-0.800

用最小二乘法确定拟合公式 $y=ae^{-bx}$ 中的参数 a,b。

$\ln Y = \ln a - bx$

令 $Y_i = \ln y_i$ 再求 $Y_i = -bX + A$

$Y = -bX + A$

$(\varphi_0,\varphi_0)=4$

$Y_i = \ln y_i$	0.6981347	0.19062036	-0.30110509	-0.7985077
X_iY_i	0	0.19062036	~~1.480~~	~~1.8~~
~~x_i^2~~	0	1		

$A=\ln a$ $B=-b$

$\therefore \varphi_0 = 1$ $\varphi_1 = x$

$(\varphi_0,\varphi_0)=4$ $(\varphi_0,\varphi_1)=0+1+2+4=7$

$(\varphi_1,\varphi_1)=0+1+4+16=21$

$(\varphi_0,Y)= -0.2108577$

$(\varphi_1,Y)= -3.6056206$

$y=1.8123206 e^{-bx}$

2.01

1.158

$$\therefore \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 7 & 21 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A \\ -b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.2108577 \\ -3.6056206 \end{bmatrix}$$

$A = 0.594609486$

$-b = -0.36989382$

$a = 1.8123206$

$A = e^{A}$

 37

7.（10分）利用下面数据表构造有理插值函数。

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	2	3/2	4/5	1/2	6/17

$v_0(x)$

0	2		
1	$\frac{3}{2}$	$\frac{1-0}{\frac{3}{2}-2}=-2$	
2	$\frac{4}{5}$	$\frac{2-0}{\frac{4}{5}-2}=-\frac{5}{3}$	$\frac{2-1}{-\frac{5}{3}+2}=6$
3	$\frac{1}{2}$	$\frac{3-0}{\frac{1}{2}-2}=-2$	
4	$\frac{6}{17}$	$\frac{4-0}{\frac{6}{17}-2}=-\frac{17}{7}$	

装订线内

$$R(x)=V_0(x)+\frac{x-x_0}{V_1(x)+\frac{x-x_1}{V_2(x)+\frac{x-x_2}{V_3+\frac{x-x_3}{V_4(x)}}}}$$

不得答题

58

8. （10分）矩阵 $A=\begin{bmatrix}5 & -3 & 2\\ 6 & -4 & 4\\ 4 & -4 & 5\end{bmatrix}$

（1）利用乘幂法求 A 按模最大的特征值及对应的特征向量，选取初始向量 $v_0=(1,1,1)^T$，计算两步（结果保留5位小数）；

（2）用 Doolittle 分解法求线性方程组 $Ax=b$ 的解，其中 $b=(5,10,11)^T$。

装订线内 不得答题

$$\begin{bmatrix}5 & -3 & 2\\ 6 & -4 & 4\\ 4 & -4 & 5\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}5 & -3 & 2\\ \frac{6}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{8}{5}\\ \frac{4}{5} & -\frac{8}{5} & \frac{120}{25}\end{bmatrix}$$

$-4-(-3)\times\frac{6}{5}$

$=-4+\frac{18}{5}$

$=-\frac{2}{5}$

$$\frac{4-2\times\frac{6}{5}}{4-\frac{12}{5}}$$

$-4+\frac{12}{5}$

$5-\frac{8}{5}+\frac{64}{25}$

$=\frac{60}{5\times5}+\frac{64}{25}$

$=\frac{120}{25}$

9.（10分）用逆 Broyden 法 i 方法：

$$\begin{cases} x^{i+1} = x^i - H_i F(x^i) \\ H_{i+1} = H_i + (r^i - H_i y^i)\dfrac{(r^i)^T H_i}{(r^i)^T H_i y^i} \end{cases}$$

$$r^i = x^{i+1} - x^i \quad ; \quad y^i = F(x^{i+1}) - F(x^i)$$

求非线性方程组

$$F(x) = \begin{bmatrix} x_1^2 + x_2 - 5 \\ x_1 - x_2^2 - 1 \end{bmatrix} = 0$$

的解。要求迭代 2 次，求 x^2=？（其中，初始值取 $x^0=(1,1)^T$）。

$F(x^0) = (-5, -1)^T \qquad F(x^0) =$

$A = F'(x) = \begin{bmatrix} 2x_1 & 1 \\ 1 & -2x_2 \end{bmatrix}$

故 $A_0 = F'(x^0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

故 $H_0 = F'(x^0)^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

$\therefore x^1 = x^0 - H_0 F(x^0)$

$\therefore x^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

装订线内 不得答题

60

10. （10分）对两步方法 $y_{n+1}=\frac{4}{3}y_n-\frac{1}{3}y_{n-1}+\frac{2}{3}hy'_{n+1}$

(1)求出此方法的局部截断误差，该方法是多少阶的；(2)讨论该方法的收敛性；

(3)对方程 $y'=-5y$ 取步长 $h=0.3$，讨论该方法的绝对稳定性。

（三线性多步法的局部截断误差中

$$C_r=\frac{1}{r!}\left\{1-\left[\sum_{i=0}^{p}(-i)^r a_i+r\sum_{i=-1}^{p}(-i)^{r-1}b_i\right]\right\},\ r=2,3,\cdots\ )$$

$$\cancel{C_2=1-\left[\frac{4}{3}+(-1)\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\right]-\frac{1}{2}\left[\frac{4}{3}+\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\right]=-\frac{4}{3}}$$

$$C_0=1-\left(\frac{4}{3}-\frac{1}{3}\right)=0$$

$$C_1=1-\left[\left(\frac{4}{3}+\frac{1}{3}\right)+\frac{2}{3}\right]=\frac{4}{3}\neq 0$$

故 局部截断误差 $\frac{4}{3}\cdot h\cdot y'(x_n)$

$$T_n=y_{n+1}-\frac{4}{3}y_n+\frac{1}{3}y_{n-1}-\frac{2}{3}hy'_{n+1}$$

$$C_0 = 1 - \left(\frac{4}{3} - \frac{1}{3}\right) = 0$$

$$C_1 = 1 - \left[\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\right] = 0$$

$$C_2 = \frac{1}{2!}\left\{1 - \left[-\frac{1}{3} + 2\cdot(1)^1\cdot\frac{2}{3}\right)\right\} = 0$$ 二阶

$$C_3 = \frac{1}{3!}\left\{1 - \left[(-1)^3\left(-\frac{1}{3}\right)3 + 3\cdot(1)^2\frac{2}{3}\right)\right.$$

$$1 - [\ \ ] \quad -\frac{4}{3} \times \frac{1}{3\times 2} = -\frac{2}{9}$$

$$-\frac{2}{9} h^3 y^{(3)}$$

8.（10分）利用4阶经典Runge-Kutta方法求初值问题 $\begin{cases} y'=-10y & 0\le x\le 2 \\ y(0)=1 \end{cases}$ 在 $x=0.4$ 的数值解（分别取步长 $h=0.2,\ 0.4$ 并选取一个数值稳定的步长进行计算。）

$y_{n+1}=y_n+\frac{h}{6}(k_1+2k_2+2k_3+k_4)$

$k_1=f(x_n,y_n)$

$k_2=f(x_n+\frac{h}{2},\ y_n+\frac{h}{2}k_1)$

$k_3=f(x_n+\frac{h}{2},\ y_n+\frac{h}{2}k_2)$

$k_4=f(x_n+h,\ y_n+hk_3)$

2006年秋季学期研究生《数值分析》试卷

9.（10分）对两步方法 $y_{n+1}=(1+a)y_n-ay_{n-1}+\frac{h}{2}[(3-a)y'_n-(1+a)y'_{n-1}]$

(1)当 a 取何值时，方法是收敛的；(2)当 $a=-\frac{1}{2}$ 时，该方法是多少阶的，求出它的绝对稳定区间。（注：线性多步法的局部截断误差 $C_q=\frac{1}{q!}\left\{1-[\sum(-1)^q a_i+q\sum(-1)^{q-1}b_i]\right\},\ q=2,3,\dots$）

（引理：实系数方程 $r^2-\alpha r+\beta=0$ 的两个根按模小于1的充分必要条件是

$1+\alpha+\beta>0,\quad 1-\alpha+\beta>0,\quad 1-\beta>0$）

$=r^2-(1+a)r+a$

$r_1=a \quad r_2=1$

$|a|<1$ 且 $a\ne 1$ $\quad -1\le a<1$ 收敛

$y_{n+1}=\frac{1}{2}y_n+\frac{1}{2}y_{n-1}+\dots$

装订线内 不得答题

八. (10分) 作三次插值多项式，使它在……导数值……，并写出插值余项……

是否可求积公式的余项公式。

九. (10分) 用逆Broyden方法求非线性方程组 $\begin{bmatrix} x_1^2 - x_2 \\ -x_1 + x_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ 的解，其中初始值取 $x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$，只需迭代2步。

十. 考虑初值问题 $\begin{cases} y' = x - y + 1, \\ y(0) = 1, \end{cases}$ $0 \le x \le 1$ 的二步方法

$$y_{n+1} = \frac{1}{2}(y_n + y_{n-1}) + h(\ldots)$$

(1) 确定参数……

(2) 该方法的阶是多少？

(3) 判断方法的收敛性

(4) 讨论方法的绝对稳定性

(5) 取 $h = 0.1$ ……

2000年研究生“数值分析”试题

一， 填空（20分）

1，n＋1 个互异节点插值型数值求积公式的代数精度为________次，最高为________次。

2，SOR 方法收敛的必要条件：松弛因子ω满足条件________。

3，对于插值型求积公式$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$，其节点$x_k\ (k=0,1,\cdots,n)$是高斯点的充分必要条件是________。

4，设$A=(a_{ij})$为 n×n 矩阵，则$\|A\|_1=$________，$\|A\|_\infty=$________。

5，设解方程组$Ax=b$的迭代法为$x^{k+1}=Bx^k+d$，则迭代收敛的充分必要条件是________。

6，判断下面的函数是否为三次样条函数（填是或否）

（1）$f(x)=\begin{cases} 0 & -1\le x<0 \\ x^3 & 0\le x<1 \\ x^3+(x-1)^2 & 1\le x\le 2 \end{cases}$ （2）$f(x)=\begin{cases} x^3+2x+1 & -1\le x<0 \\ 2x^3+2x+1 & 0\le x\le 1 \end{cases}$

二，（10分）

在$-2\le x\le -2$上给出$f(x)=e^{-x}$等距节点函数运用二次插值求e^{-x}的近似值，要使误差不超过10^{-6}，问使用函数表的步长应取多大？

三，（10分）

给出函数表

x_i	0	1	2	3	4
f_i	1	1/2	1/5	1/10	1/17

求有理插值

四，（10分）

设$f(x)$在$[x_0,x_3]$上有三阶连续导数，且$x_0<x_1<x_2<x_3$，

（1） 试作一个次数不高于四次的多项式$p(x)$，满足条件

$$p(x_j)=f(x_j) \qquad j=0，1，2，3$$

$$p'(x_1)=f'(x_1)$$

（2） 推导它的余项 $E(x)=f(x)-p(x)$ 的表达式

五，（10 分）

试用 Romberg（龙贝格）方法，计算积分 $\int_1^3 \frac{1}{x}dx$，并精确到小数点后 4 位。

六，（10 分）

利用数值积分的 Simpson（辛甫生）公式，导出公式

$$y_{n+1}=y_{n-1}+\frac{h}{3}(y'_{n+1}+4y'_n+y'_{n-1})$$

并指出次方法的阶

七，（10 分）

设 $f(x)=0$ 的单根 α， $x=F(x)$ 是 $f(x)=0$ 的等价方程，则： $F(x)$ 可表为

$F(x)= x- m(x)f(x)$

证明： 当 $m(\alpha)\neq[f'(\alpha)]^{-1}$ 时， $F(x)$ 是一阶的。

当 $m(\alpha)=[f'(\alpha)]^{-1}$ 时， $F(x)$ 至少是二阶的。

八，（10 分）

试对方程组

$\begin{cases}2x_1-3x_2+15x_3=30\\20x_1+2x_2+3x_3=24\\x_1+8x_2+x_3=12\end{cases}$，对收敛的 Gauss－Seidel 迭代格式，并取 $x^{(0)}=(0,0,0)^T$，

计算到 $x^{(2)}$

九，（10 分）

试证明高斯求积公式 $\int_{-1}^1 f(x)dx\approx\sum_{k=1}^n A_k f(x_k)$ 的求积系数 A_k 恒为正。

2001/2002 年研究生“数值分析”试题

一， 试解答下列问题

1，已知 $f(x)=x^5+3x^4-4x^3+1$，求：

$f[e^0,e^1,e^2,e^3,e^4,e^5]$ 和 $f[e^0,e^1,e^2,e^3,e^4,e^5,e^6]$

2，若 $y_n=2^n$ 求 $\Delta^4 y_n$ 和 $\nabla^4 y_n$

3，判断下列函数是否是三次样条函数

i $$f(x)=\begin{cases}0 & -1\le x<0\\ x^3 & 0\le x<1\\ x^3+(x-1)^2 & 1\le x<2\end{cases}$$

ii $$f(x)=\begin{cases}x^3+2x+1 & -1\le x<0\\ 2x^3+2x+1 & 0\le x\le 1\end{cases}$$

4，已知 $A=\begin{bmatrix}1 & -3\\ -2 & 4\end{bmatrix}$ 求 $\|A\|_p$， $p=1,2,\infty,F$

5，试用 Euler（尤拉）公式求解初值问题（ $h=0.1$ ）

$$\begin{cases}y'=y-\dfrac{2x}{y},\ 0<x<0.3\\ y(0)=1\end{cases}$$

二， 设 $a>0$ 为实数，试建立求 $\frac{1}{a}$ 的 Newton（牛顿）迭代公式，要求在迭代中不含除法运算，证明当初值 x_0 满足 $0<x_0<\frac{2}{a}$ 时，此算法是收敛的，并用此算法计算 $\frac{1}{99}$ 的近似值（保留 4 位小数）。

三， 应用 Doolittle（杜利特尔）方法解线性方程组

$$\begin{aligned}x_1+2x_2+x_3&=0\\ 2x_1+2x_2+3x_3&=3\\ -x_1-3x_2&=2\end{aligned}$$

四， 设给出 $\cos x$ 的函数表 $(0°\le x\le 90°, h=1'=(\frac{1}{60})°)$

x	$0°\cdots\cdots15.0000°$	$15.0167°$	$15.0333°$	$15.05°\cdots\cdots90°$
$\cos x$	$1\cdots\cdots0.96593$	0.96585	0.96578	$0.96570\cdots\cdots0$

研究用此表进行线性插值求 $\cos x$ 近似值时的最大截断误差界，并用二次 Lagrange（拉格朗日）插值计算 $15.03°$ 的近似值。

五， 已知 Legedre（勒让德）多项式 $P_1(x)$ 的零点为 $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$，试用 Gauss－Legedre 求积公式计算 $\int_{-4}^{4}\frac{1}{1+x^2}dx$ 的近似值。（保留 4 位小数）

六， 应用 Romberg（龙贝格）积分法计算定积分 $\int_1^3\frac{1}{x}dx$ 的近似值（精确到小数点后 4 位，其真值为 1.098612289）。

七， 试讨论求解常微分方程初值问题的 Simpson（辛卜生）方法

$$y_{n+1}=y_{n-1}+\frac{h}{3}(y'_{n+1}+4y'_n+y'_{n-1})$$

的稳定性

八， 分别用 Jocobi（雅可比）和 Gauss－Seidel（高斯－塞德尔）迭代求解下面的方程组（初值取 $x_0=(0,0,0)^T$ 计算 x_1 和 x_4）

$$\begin{aligned} x^{(2)}+4x^{(3)}&=2\\ -x^{(1)}+4x^{(2)}-x^{(3)}&=6\\ 4x^{(1)}-x^{(\,)}&=2 \end{aligned}$$

九， 试回答，在 Lagrange（拉格朗日）插值方法中，是否插值多项式的次数越高，插值精度也越高？为什么？

2003 年研究生“数值分析”试题

一，（8 分）设 $a>0$ 为实数，试建立求 $\frac{1}{a}$ 的 Newton 迭代公式，要求在迭代函数中不含除法运算，并证明：当初值 x_0 满足 $0<x_0<\frac{2}{a}$ 时，此格式时收敛的。

二，（6 分）用 Doolittle 分解法解方程组 $\begin{pmatrix}1&2&3\\2&5&2\\3&1&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}14\\18\\20\end{pmatrix}$

三，（8 分）设 $A=\begin{bmatrix}10&a&0\\b&10&b\\0&a&5\end{bmatrix}$，$\det A\neq 0$，用 a，b 表示方程组 $Ax=d$ 的 Jacobi 迭代法及 Gauss－Seidel 迭代法收敛的充分必要条件。

四，（8 分）设方程组 $Ax=b$，其中 $A=\begin{pmatrix}1&0&-1\\2&2&1\\0&2&1\end{pmatrix}$，$b=\begin{pmatrix}1/2\\1/3\\-2/3\end{pmatrix}$。已知它有解 $x=(\frac{1}{2},-\frac{1}{3},0)^T$，如果右端有小扰动 $\|\delta b\|_\infty=\frac{1}{2}\times10^{-6}$，试估计由此引起的解的相对误差。

五，（10 分）求出一个次数不高于 4 次的 Hermite 插值多项式 $P(x)$，使它满足 $P(0)=P'(0)=0$，$P(1)=P'(1)=1$，$P(2)=1$，并写出余项表达式。

六，（6 分）用 Romberg 方法计算积分 $\int_0^1 e^{-x}dx$，计算到 $T_{3,0}$。

七，（6 分）已知函数表

x_i	0　1　2　3　4

$f(x_i)$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{17}$

求有理插值函数 $R(x)$。

八，（6 分）设

（1）$f(x)=\begin{cases} x^3+x^2 & 0\le x\le 1 \\ 2x^3+bx^2+cx-1 & 1\le x\le 2 \end{cases}$ 是以 0，1，2 为节点的三次样条函数，求出 b,c。

（2）$f(x)=\begin{cases} ae^x+2x+1 & x<0 \\ x^3+bx+1 & x\ge 0 \end{cases}$ 是以 0 节点的三次样条函数，求出 a,b。

九，（10 分）求出二点 Gauss 求积公式 $\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx H_0 f(x_0)+H_1 f(x_1)$ 中系数 H_0，H_1 及节点 x_0，x_1。并用此公式计算积分 $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$（结果保留 5 位小数）。

十，（6 分）用逆 Broyden 秩 1 方法求方程组 $F(x)=\begin{pmatrix} x_1^2+x_1x_2^3-9 \\ 3x_1^2x_2-x_2^3-4 \end{pmatrix}=0$ 的解，取初值 $x^0=(x_1,x_2)^T=(1.2,1.6)^T$，来计算迭代二次的值。

十一，（6 分）使用乘幂法求矩阵 $A=\begin{pmatrix} -4 & 14 & 0 \\ -5 & 13 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 的最大特征值和对应的特征向量（只需计算前两次迭代的值）

十二，（20 分）考虑线性多步方法 $y_{n+1}=-\alpha(y_n-y_{n-1})+y_{n-2}+\frac{1}{2}(3+\alpha)h(y'_n+y'_{n-1})$

（1） 证明存在 α 的一个值使方法是 4 阶的；
（2） 写出局部截断误差的首项；
（3） 当使用用 4 阶方法时，需要几个初始启动值（表头），通常情况用什么方法计算表头；举出一个实例并写出公式表达式；
（4） 讨论收敛性，如方法是收敛的，其阶数应不超过多少？
（5） 讨论绝对稳定性。

（其中在局部截断误差中 $C_q=\frac{1}{q!}\{1-[\sum_{i=0}^{p}(-i)^q a_i+q\sum_{i=-1}^{p}(-1)^{q-1}b_i]\}$ $\quad q=2,3,\cdots$

三次方程 $t^3+at^2+bt+c=0$ 根 t_1，t_2，t_3 满足关系 $\begin{cases} t_1+t_2+t_3=-a \\ t_1t_2+t_2t_3+t_3t_1=b \\ t_1t_2t_3=-c \end{cases}$ ）

2004 年研究生“数值分析”试题

一，（10 分）设 α 是 $f(x)=0$ 的 m 重根 $(m=1)$，证明 Newton 迭代仅为线性收敛；

并写出一个平方收敛的 Newton 迭代公式。

二，（8 分）用 Doolittle 分解法解方程组$\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 2 & 3\\ -1 & -3 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 3\\ 2\end{pmatrix}$

三，（10 分）用迭代公式$x^{(k+1)}=x^{(k)}+\alpha(Ax^{(k)}-b)$求解$Ax=b$，若$A=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 2\end{pmatrix}$，

问（1）α取何值的范围迭代收敛？（2）α取何值时迭代收敛最快？

四，（10 分）设 $f(x)=\sin x$，求 $[0,\frac{\pi}{2}]$上的一次最佳平方逼近多项式 $p_1^*(x)=a_0^*+a_1^*x$

五，（6 分）用共轭梯度法方法（CG 方法）解方程组$\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\ 1\end{pmatrix}$

六，（10 分）求下面两个方程组的解，并利用矩阵的条件数估计$\frac{\|\delta x\|_\infty}{\|x\|_\infty}$。

$$\begin{bmatrix}240 & -319\\ -179 & 240\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\ 4\end{bmatrix}\quad,\qquad Ax=b$$

$$\begin{bmatrix}240 & -319.5\\ -179.5 & 240\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\ 4\end{bmatrix}\quad,\qquad (A+\delta A)(x+\delta)=b$$

七，（8 分）设$f(x)\in C^{n+2}[a,b]$，$y(x)$是以$x_0,x_1,\cdots x_n$为节点的 n 次插值多项式，试推导：在一节点x_k处有

$$f'(x_k)-y'(x_k)=\frac{f^{(n+1)}(\eta)}{(n+1)!}p'_{n+1}(x_k)\qquad,\ \eta\in(a,b)$$

其中$p_{n+1}(x)=(x-x_0)\cdots(x-x_n)$

八，（8 分）推导出复化梯形求积公式及误差公式。

九，（10 分）确定求积公式$\int_{-1}^{1}f(x)dx\approx A_1f(-\frac{\sqrt{3}}{3})+A_2f(\frac{\sqrt{3}}{3})$中系数$A_1,A_2$使公式有尽可能高的代数精度；代数精度是多少？并用此公式计算积分$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos xdx$（结果保留 5 位小数）。

十，（6 分）使用乘幂法求矩阵 $A=\begin{pmatrix}-12 & 3 & 3\\ 3 & 1 & -2\\ 3 & -2 & 7\end{pmatrix}$ 的最大特征值和对应的特征向量（只需计算前两次迭代的值）取初值 $v_0=(1,1,1)^T$

十一，（14 分）对二步法 $y_{n+1}=ay_{n-1}+h(by'_{n+1}+cy'_n+dy'_{n-1})$

（1） 确定 a,b,c,d，使方法是 4 阶的；

（2） 讨论 4 阶方法的收敛性和稳定性；

（3） 其中：在线性多步法的局部截断误差中

$$C_q=\frac{1}{q!}\{1-[\sum_{i=0}^{p}(-i)^q a_i+q\sum_{i=-1}^{p}(-i)^{q-1}b_i]\} \qquad q\ge 2$$

2008 年研究生“数值分析”试题

一.（10 分）设给实数 $a>0$，初值 $x_0>0$：

⑴试建立求 $\frac{1}{a}$ 的 Newton 迭代公式，要求在迭代函数中不含除法运算；

⑵证明给定初值 x_0，迭代收敛的充分必要条件为 $0<x_0<\frac{2}{a}$；

⑶该迭代的收敛速度是多少？

⑷取 $x_0=0.1$，计算 $\frac{1}{5}$ 的近似值，要求计算迭代三次的值（结果保留 5 位小数）。

二.（10 分）试确定参数 a,b,c，使得下面分段多项式函数 $s(x)$ 是三次样条函数。

$$s(x)=\begin{cases}x^3 & ,0\le x\le 1\\ -\frac{1}{2}(x-1)^3+a(x-1)^2+b(x-1)+c, & 1\le x\le 3\end{cases}$$

$s(x)$ 是否是自然样条函数？

三.（10 分）利用 Dollite 三角分解方法求解方程组

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 2 & 3\\ -1 & -3 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 3\\ 2\end{bmatrix}$$

四.（10 分）给定 3 阶线性方程组

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & -2\\ 1 & 1 & 1\\ 2 & 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\ 1\\ 3\end{bmatrix}$$

讨论其 Jacobi 迭代格式的收敛性

五.（10 分） 推导出中矩形求积公式$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)f(\frac{a+b}{2})$ ，并求出其截断误差。

六.（10 分） 已知一组试验数据：

x_i	1	2	3	4
y_i	60	30	20	15

用最小二乘法确定拟合公式 $y = ae^{bx}$ 中的参数 a, b 。

七.（10 分） 根据已知函数表：

x_i	0	1	2	4
$f(x_i)$	1	9	23	3

建立不超过三次的 Newton 插值项式。

八.（10 分） 试确定常数 A_0, A_1,使求积公式

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx A_0 f(-\frac{1}{\sqrt{3}}) + A_1 f(\frac{1}{\sqrt{3}})$$

有尽可能高的代数精度,并指出代数精度是多少,该公式是否是 Gauss 型?并用此

公式计算积分 $I = \int_1^3 \frac{1}{x} dx$ （结果保留 5 位小数）。

九.（10 分） 利用经典四阶 Runge-Kutta 方法求初值问题：

$$\begin{cases} y' = -20y, \quad 0 \le x \le 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

在 $x = 0.2$ 处的数值解（取步长 $h = 0.1$）。

10.（10 分） 讨论两步方法 $y_{n+1} = \frac{1}{3}(4y_n - y_{n-1}) + \frac{2}{3}hy'_{n+1}$

的局部截断误差，求出它的局部阶段误差的首项（主部），它是多少阶的？（在线性多步法的局部截断误差中

$$C_r = \frac{1}{r!}\left\{1 - [\sum_{i=0}^{p}(-i)^r a_i + r\sum_{i=-1}^{p}(-i)^{r-1} b_i]\right\}, r = 2,3,\cdots \quad)$$

2008年计算试题

一、

(1) 解：令设 $f(x) = \frac{1}{x} - a$，则 $\frac{1}{a}$ 即为方程 $f(x)=0$ 的根。

Newton迭代公式为：

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

$$= x_i(2 - a x_i)$$

(2) 证明：令 $r_i = \frac{x_i - \frac{1}{a}}{\frac{1}{a}} = 1 - a x_i$

$\therefore r_{i+1} = 1 - a x_{i+1} = 1 - a x_i(2 - a x_i) = (1 - a x_i)^2 = r_i^2$

$\therefore r_{i+1} = r_i^2 = (r_{i-1})^4 = \cdots = (r_0)^{2^{i+1}}$

$r_0 = 1 - a x_0$

要使迭代收敛，则 $r_{i+1} \to 0$，

即 $|r_0| < 1$，

即 $|1 - a x_0| < 1$

$\therefore \quad 0 < x_0 < \frac{2}{a}$

充分性：$0 < x_0 < \frac{2}{a}$ 时，$|r_0| < 1$，此时迭代收敛。

(3) 解：$\because \varphi(x) = x(2 - a x)$ 在根 $\alpha = \frac{1}{a}$ 邻域内具有连续的各阶导数，

且 $\varphi'(\frac{1}{a}) = 2 - 2a \cdot \frac{1}{a} = 0$，

$\varphi''(\frac{1}{a}) = -2a \cdot \frac{1}{a} = -2 \neq 0$。

$\therefore$ 该迭代的收敛速度为2阶。

(4) 解：$x_1 = x_0(2 - 5x_0) = 0.198$

$x_2 = x_1(2 - 5x_1) = 0.1998$

$x_3 = x_2(2 - 5x_2) = 0.19999$

二、解：要使 $S(x)$ 为三次样条函数，则

$$\begin{cases} S(1^-) = S(1^+) \\ S'(1^-) = S'(1^+) \\ S''(1^-) = S''(1^+) \end{cases} \quad \begin{cases} c = 1 \\ \cdots \end{cases}$$

解得 $a = 3, \ \ldots = -1$

$S''(a) = S''(0) = 6 \times 0 = 0$

$S''(b) = S''(3) = -3(3-1) + 6 = 0$

$\therefore S(x)$ 是自然样条函数

三、解：$A = LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix}$

比较得：依次计算解得 $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$ $U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

先解 $Ly = b$，

即 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$

得 $y_1 = 0, \ y_2 = 3, \ y_3 = \frac{1}{2}$

再解 $Ux = y$。

即 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

得 $x_1 = 1 \quad x_2 = -1 \quad x_3 = 1$

~~四 五 六 相~~

Go.

1.

解：Jacobi 迭代的分量形式如下：

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = 5 - 2x_2^{(k)} + 2x_3^{(k)} \\ x_2^{(k+1)} = 1 - x_1^{(k)} - x_3^{(k)} \\ x_3^{(k+1)} = -3 - 2x_1^{(k)} - 2x_2^{(k)} \end{cases}$$

$$\therefore B_J = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

特征方程为 $|\lambda E - B_J| = \begin{vmatrix} \lambda & 2 & -2 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 2 & 2 & \lambda \end{vmatrix} = 0$

即 $\lambda^3 = 0$，

$\therefore \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$

$\therefore \rho(B_J) = 0 < 1$

$\therefore$ Jacobi 迭代收敛

五.

证明：$f(x) = f(\frac{a+b}{2}) + f'(\frac{a+b}{2})(x-\frac{a+b}{2}) + f''(\xi)(x-\frac{a+b}{2})^2$ $\quad \xi \in (x, \frac{a+b}{2})$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(\tfrac{a+b}{2})dx + \int_a^b f'(\tfrac{a+b}{2})(x-\tfrac{a+b}{2})dx + \int_a^b f''(\xi)(x-\tfrac{a+b}{2})^2 dx$$

$$= f(\tfrac{a+b}{2})(b-a) + f''(\eta)\int_a^b (x-\tfrac{a+b}{2})^2 dx$$

$$= f(\tfrac{a+b}{2})(b-a) + \underbrace{\frac{f''(\eta)}{12}(b-a)^3}_{\text{余项}}$$

六. 解：令 $z = \ln y = \ln a + bx$

$= c + bx \quad [c = \ln a]$

设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & x_0 \\ 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ 1 & x_3 \end{bmatrix}$

$A^TA\begin{bmatrix} c \\ b \end{bmatrix} = A^Tz$

即 $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & x_0 \\ 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ 1 & x_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ln 60 \\ \ln 30 \\ \ln 20 \\ \ln 15 \end{bmatrix}$

解得 $b = -0.4564 \quad a = e^c = 84.8521$

七. 解：

设 Newton 插值多项式：

$y(x) = f[x_0] + f[x_0,x_1](x-x_0) + f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)$

$+ f[x_0,x_1,x_2,x_3](x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$ ~~+余项~~ 如不加余项

$f[x_0] = 1$

$f[x_0, x_1] = \dfrac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} = 8$

$f[x_0, x_2] = \dfrac{f(x_2)-f(x_0)}{x_2-x_0} = 11$

$f[x_0, x_3] = \dfrac{f(x_3)-f(x_0)}{x_3-x_0} = \dfrac{1}{2}$

$f[x_0, x_1, x_2] = \dfrac{f[x_0, x_2]-f[x_0, x_1]}{x_2-x_1} = 3$

$f[x_0, x_1, x_3] = -\dfrac{7}{6}$

$f[x_0, x_1, x_2, x_3] = \dfrac{f[x_0, x_1, x_3]-f[x_0, x_1, x_2]}{x_3-x_2} = -\dfrac{25}{12}$

余项 $E(x) = \cancel{f[x_0, x_1, \ldots]}\ f[x_0, x_1, x_2, x_3, x](x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$

$\therefore y(x) = 1 + 8(x-x_0) + 3(x-x_0)(x-x_1) - \dfrac{25}{12}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$

$= 1 + 8x + 3x(x-1) - \dfrac{25}{12}x(x-1)(x-2)$

八解：由题意知，令 $f(x)=1, x$ 时求积公式

……精确成立，得

$$\begin{cases} \int_{-1}^{1} 1\,dx = A_0 + A_1 = 2 \\ \int_{-1}^{1} x\,dx = -\frac{1}{\sqrt{3}}A_0 + \frac{1}{\sqrt{3}}A_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_0 = 1 \\ A_1 = 1 \end{cases}$$

$\therefore$ 求积公式为 $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx f(-\frac{1}{\sqrt{3}}) + f(\frac{1}{\sqrt{3}})$

$f(x)=x^2$ 时，左边 $= \int_{-1}^{1} x^2 dx = \frac{2}{3} =$ 右边 $= \frac{2}{3}$

$f(x)=x^3$ 时，左边 $\int_{-1}^{1} x^3 dx = 0 =$ 右边 $= 0$

$f(x)=x^4$ 时，左边 $= \int_{-1}^{1} x^4 dx = \frac{2}{5} \neq$ 右边 $= \frac{2}{9}$

$\therefore$ 代数精度为 3.

由于该方法的代数精度 $r=3=2n+1$，故

该公式是 Gauss 型.

令 $x = 2+t$，则

$I = \int_{1}^{3} \frac{1}{x}\,dx = \int_{-1}^{1} \frac{1}{2+t}\,dt$

$= \dfrac{1}{2-\sqrt{3}} + \dfrac{1}{2+\sqrt{3}}$

$= \dfrac{12}{11}$

九解：令 $x_0 = 0$，$x_1 = 0.1$，$x_2 = 0.2$.

经典四阶 R-K 法公式为

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\ k_1 = f(x_n, y_n) \\ k_2 = f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1) \\ k_3 = f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_2) \\ k_4 = f(x_n + h, y_n + hk_3) \end{cases}$$

计算结果如下

x_0	k_1	k_2	k_3	k_4	y_i
0					1
0.1	-20	0	-20	20	~~-5.6667~~ 0.3333
0.2	~~113.3333~~ -6.66667	0	~~113.3333~~ -6.66667	~~5.6667~~ 0	~~5.6667~~ ~~5.9444~~ $\frac{1}{9}$

$\therefore$ 在 $x=0.2$ 处的数值解为 ~~5.9444~~ $\frac{1}{9}$

十解：由题意知

$a_0 = \frac{4}{3}$，$a_1 = -\frac{1}{3}$，$b_{-1} = \frac{2}{3}$，$b_0 = 0$，$b_1 = 0$，$p = 1$.

$\therefore c_0 = 1 - a_0 - a_1 = 0$

$c_1 = 1 - [-a_1 + b_{-1}] = 0$

$c_2 = \frac{1}{2!}\{1 - [a_1 + 2b_{-1}]\} = 0$

$\therefore = \frac{1}{3!}\{1-[-a_1+3b_{-1}]\} = -\frac{2}{9} \neq 0$、

局部截断误差 $T_n = C_3 h^3 y^{(3)}(x_n) + C_4 h^4 y^{(4)}(x_n) + \cdots$

主部：$C_3 h^3 y^{(3)}(x_n) = -\frac{2}{9} h^3 y^{(3)}(x_n)$

$\therefore$ 该方法为 2 阶、

$T_n = -\frac{2}{9} h^3 y'''(x_n) + O(h^4)$

软件分享群
Q群 626648181

2013.11.6

2007年

一、已知 S(x) 是 [0,2] 上的已知自然边界条件的三次样条函数

$$S(x)=\begin{cases}1+2x-x^3, & 0\le x\le 1\\ 2+b(x-1)+c(x-1)^2+d(x-1)^3, & 1\le x\le 2\end{cases}$$，是确定其中的参数 b, c, d.

二、设线性方程组 Ax=b 的系数矩阵为

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -2\\ 1 & 1 & 1\\ 2 & 2 & 1\end{bmatrix}$$

讨论 Jacobi 迭代和 Gauss-Seidel 迭代两种迭代法的敛散性

三、利用经典 RK 方法求初值问题 $\begin{cases}y'=-y+x+1\\ y(0)=1\end{cases}$，$x\ge 0$ 在 x=0.2 处的数值解（取步长 h=0.1）

四、利用 Newton 插值方法验证下面等式：

$$l_0(x)=1+\frac{x-x_0}{x_0-x_1}+\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}+\cdots+\frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\cdots(x_0-x_n)}$$，

其中，$l_0(x)$是 lagrange 插值基函数。

五、确定两点求积公式 $\int_{-1}^{1}f(x)dx=A_0f(-\frac{1}{\sqrt{3}})+A_1f(\frac{1}{\sqrt{3}})$ 的求积系数 A_0、A_1，使公式有尽可能高的代数精度。它是否是 Gauss 求积公式？并用此公式计算积分 $\int_1^4\frac{1}{x}dx$（计算结果保留 4 位小数）。

六、利用下面数据表构造有理插值

x_k	0	1	2	3	4
$f(x_k)$	2	3/2	4/5	1/2	6/17

七、由数据点

x	0	1	2	3
y	2.010	1.210	0.740	0.450

用最小二乘法确定拟合方程 $y=ae^{-bx}$ 的参数 a，b

八、矩阵 $A=\begin{bmatrix}5 & -3 & 2\\ 6 & -4 & 4\\ 4 & -4 & 5\end{bmatrix}$，

（1）利用乘幂法求 A 按模最大特征值与对应的特征向量。选取初始向量 $v_0=(1,1,1)^T$，迭代两步（结果保留 5 位小数）

（2）用 Doolittle 三角分解法求线性方程组 Ax=b 的解，其中 $b=(5,10,11)^T$

九、用逆 Broyden 秩一法，$\begin{cases}x^{l+1}=x^l-H_lF(x^l)\\ H_{l+1}=H_l+(r^l-H_ly^l)\dfrac{(r^l)^TH_l}{(r^l)^TH_ly^l}\end{cases}$，

Doolittle：$A=LU$ $\begin{cases}LY=b\\ UX=Y\end{cases}$

Crout：$A=\tilde{L}\tilde{U}$ $\begin{cases}\tilde{L}Y=b\\ \tilde{U}X=Y\end{cases}$

$$A = F'(x) = \begin{bmatrix} 2x_1 & 1 \\ 1 & -2x_2 \end{bmatrix} \quad A_0 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \quad H_0 = A_0^{-1}$$

$r^0 = x^1 - x^0$

$y^0 = F(x^1) - F(x^0)$

求解非线性方程组 $F(x) = \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2 - 5 \\ x_1 - x_2^2 - 1 \end{pmatrix} = 0$ 的解向量 x^2。其中初始近似值 $x^0 = (1,1)^T$。 迭代2次

$y_{n+1} = \sum_{i=0}^{p} a_i y_{n-i} + h\sum_{i=-1}^{p} b_i y'_{n-i}$　$p=1$　$a_0 = \frac{4}{3}$，$a_1 = -\frac{1}{3}$　$b_{-1} = \frac{2}{3}$，$b_0 = b_1 = 0$

误差首项：$C_{p+2}h^{p+2}y^{(p+2)}(x_n)$

对于两步法：$y_{n+1} = \frac{4}{3}y_n - \frac{1}{3}y_{n-1} + \frac{2}{3}hy'_{n+1}$，h 为步长　线性多步法

$C_0 =$

$C_1 =$

$C_2 =$

$\vdots$

（1）　确定方法中的局部截断误差主项，并指出方法的阶数

（2）　讨论方法的收敛性　$\rho(r) = r^{p+1} - \sum_{i=0}^{p} a_i r^{p-i}$　$y_{n+1} = \sum_{i=0}^{p} a_i y_{n-i} + h\sum_{i=-1}^{p} b_i y'_{n-i}$

（3）　对方程 $y' = -5y$ 取步长 $h=0.3$，试讨论该方法的绝对稳定性　$\lambda = -5$　$\bar{\lambda} = -5\ (1.02)$

$\pi(r, \lambda h) = (1 - \lambda h b_{-1})r^{p+1} - \sum_{i=0}^{p}(a_i - \lambda h b_i)r^{p-i}$　$n = p, p+1, \ldots$

六.解：反差商插值表计算：

	$V_0(x_i)$	$V_1(x_i)$	$V_2(x_i)$	$V_3(x_i)$	$V_4(x_i)$
$0 = x_0$	2				
$1 = x_1$	$\frac{3}{2}$	-2			
$2 = x_2$	$\frac{4}{5}$	$-\frac{5}{3}$	3		
$3 = x_3$	$\frac{1}{2}$	-2	0	$-\frac{1}{3}$	
$4 = x_4$	$\frac{6}{17}$	$-\frac{17}{7}$	$-\frac{14}{3}$	$\frac{3}{14}$	$\frac{42}{25}$

得有理插值函数

$$Q(x) = 2 + \cfrac{x}{-2 + \cfrac{x-1}{3 + \cfrac{x-2}{-\frac{1}{3} + \cfrac{x-3}{\frac{42}{25}}}}}$$

七.解：构造多项式为 $y = ae^{-bx}$.

~~$\Phi = \mathrm{Span}\{\varphi_0(x), \varphi_1(x)\}$~~

~~$\varphi_0(x) = 1,\ \varphi_1(x) = x$~~

取对数得 $\ln y = \ln a + (-bx)$.

令 $Y = \ln y$, $A = \ln a$.

$Y = A - bx$.

取 $\varphi_0(x) = 1$, $\varphi_1(x) = x$

写出 $Y = A + (-bx)$ 与 (x_i, Y_i), $i = 0,1,2,3$ 做最小二乘拟合

i	x_i	y_i	Y_i	x_iY_i
0	0	2.010	0.698	0
1	1	1.210	0.191	0.191
2	2	0.740	-0.301	-0.602
3	3	0.450	-0.799	-2.397

6.5

$(\varphi_0, \varphi_0) = \sum_{i=0}^{3}\varphi_0(x_i)\varphi_0(x_i) = 4$

$(\varphi_0, \varphi_1) = \sum_{i=0}^{3}\varphi_0(x_i)\varphi_1(x_i) = 6$

$(\varphi_1, \varphi_1) = \sum_{i=0}^{3}\varphi_1(x_i)\varphi_1(x_i) = 14$

$(\varphi_0, Y) = \sum_{i=0}^{3}\varphi_0(x_i)Y_i = -0.211$

$(\varphi_1, Y) = \sum_{i=0}^{3}\varphi_1(x_i)Y_i = -2.808$

法方程为

$$\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 14 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A \\ -b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.211 \\ -2.808 \end{bmatrix}$$

得 $\begin{cases} A = 0.694 \\ b = 0.4983 \end{cases}$

故 $a = 2.003$

得最小二乘拟合曲线 $y = 2.003e^{-0.4983x}$

八.解：初始向量 $v_0 = (1,1,1)^T$.

利用 $\begin{cases} u_m = \frac{v_m}{\max(v_m)} \\ v_m = Au_{m-1} \end{cases}$

第一步

$u_0 = \frac{(1,1,1)^T}{1} = (1,1,1)^T$.

$$v_1 = Au_0 = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 6 & -4 & 4 \\ 4 & -4 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$u_1 = \frac{v_1}{\max(v_1)} = \frac{(4,6,5)^T}{6} = (\frac{2}{3}, 1, \frac{5}{6})^T$.

第二步

$$v_2 = Au_1 = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 6 & -4 & 4 \\ 4 & -4 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ 1 \\ \frac{5}{6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ \frac{10}{3} \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

∴ 它在[0, 1]上是3次多项式。

由 $S(x)\in C^2[0,2]$，得

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to1}(1+2x-x^3)=\lim\limits_{x\to1}(2+b(x-1)+c(x-1)^2+d(x-1)^3)\\ \lim\limits_{x\to1}(2-3x^2)=\lim\limits_{x\to1}(b+2c(x-1)+3d(x-1)^2)\\ \lim\limits_{x\to1}(-6x)=\lim\limits_{x\to1}(2c+6d(x-1))\end{cases}$$

得 $b=-1$，$c=-3$.

又 $S(x)$ 满足自然样条边界条件，

$S''(2)=2\times(-3)+6d(2-1)=0$，得 $d=1$.

二. 解:

(1) Jacobi迭代格式的迭代矩阵为

$$B_J=I-D^{-1}A=\begin{bmatrix}0&-2&2\\-1&0&-1\\-2&-2&0\end{bmatrix}$$

计算其谱半径

$$\rho(\lambda)=|\lambda I-B_J|=\begin{vmatrix}\lambda&2&-2\\1&\lambda&1\\2&2&\lambda\end{vmatrix}=\lambda^3=0$$

解得 $\lambda=0$.

即 $\rho(B_J)=0<1$.

Jacobi 迭代格式是收敛的。

(2) Gauss-Seidel 迭代格式的迭代矩阵为

$$B_G=-(D+L)^{-1}U=\begin{bmatrix}0&-2&2\\0&2&-2\\0&0&2\end{bmatrix}$$

计算其谱半径

$$\rho(\lambda)=|\lambda I-B_G|=\begin{vmatrix}\lambda&2&-2\\0&\lambda-2&2\\0&0&\lambda-2\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-2)^2=0$$

解得 $\lambda_1=0$，$\lambda_2=\lambda_3=2$.

即 $\rho(B_G)=\max\limits_{1\le i\le3}|\lambda_i|=2>1$

Gauss-Seidel 迭代格式是发散的。

$\int_1^4\frac{1}{x}dx=\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{5}{3}}\frac{3}{2x}d(\frac{3}{2}x)=\int_{\frac{?}{}}^{\frac{8}{3}}\frac{1}{x}dx=\int_{-1}^{1}\frac{1}{x-\frac{5}{3}}dx$

$=\frac{1}{[illegible]}+\frac{1}{[illegible]}=-\frac{15}{11}\approx1.3636$

三. 解:

$$\begin{cases}y_{n+1}=y_n+\frac{h}{6}(k_1+2k_2+2k_3+k_4)\\ k_1=f(x_n,y_n)\\ k_2=f(x_n+\frac{h}{2},\ y_n+\frac{h}{2}k_1)\\ k_3=f(x_n+\frac{h}{2},\ y_n+\frac{h}{2}k_2)\\ k_4=f(x_n+h,\ y_n+hk_3)\end{cases}$$

取步长 $h=0.1$，计算结果如下表

x_n	y_n	k_1	k_2	k_3	k_4	y_{n+1}
0	1	0	0.05	0.0475	0.0953	1.0048
0.1	1.0048	0.0952	0.1404	0.1382	0.1814	1.0187
0.2	1.0187					

即解初值问题在0.2处的近似值解为1.0187。

四. 证明：利用Newton插值公式证明，先计算差商表。

	0阶	1阶	2阶	…	n阶
x_0	1				
x_1	0	$\frac{1}{x_0-x_1}$			
x_2	0	$\frac{1}{x_0-x_2}$	$\frac{1}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}$		
⋮	⋮	⋮	⋮	…	
x_n	0	$\frac{1}{x_0-x_n}$	$\frac{1}{(x_0-x_1)(x_0-x_n)}$		$\frac{1}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\cdots(x_0-x_n)}$

~~$l_0(x)=1+\frac{1}{x_0-x_1}+\frac{1}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}$~~

$l_0(x)=f(x_0)+f[x_0,x_1](x-x_0)+\cdots+f[x_0,x_1,\cdots,x_n](x-x_0)\cdots(x-x_{n-1})$

$=1+\frac{x-x_0}{x_0-x_1}+\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}+\cdots+\frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\cdots(x_0-x_n)}$.

五. 解：使求积公式对 $f(x)=1,x$ 精确成立，有

$$\begin{cases}2=A_0+A_1\\0=-\frac{1}{\sqrt3}A_0+\frac{1}{\sqrt3}A_1\end{cases}\Rightarrow A_0=A_1=1.$$

即 $\int_{-1}^{1}f(x)dx=f(-\frac{1}{\sqrt3})+f(\frac{1}{\sqrt3})$.

对于 $f(x)=x^2$，左边 $=\frac{2}{3}$，右边 $=\frac{2}{3}$，左边 = 右边，精确成立。

对于 $f(x)=x^3$，左边 $=0$，右边 $=0$，左边 = 右边，精确成立。

对于 $f(x)=x^4$，左边 $=\frac{2}{5}$，右边 $=\frac{2}{9}$，左边 ≠ 右边。

其代数精度为3阶。

因为有 $n+1=2$ 个节点，$n=1$，$2n+1=3$.

故该公式是Gauss求积公式。

$u_2 = \frac{v_2}{\max(v_2)} = \frac{(1, \frac{5}{3}, \frac{11}{12})}{\frac{5}{3}} = (\frac{3}{5}, 1, \frac{11}{20})^T$.

计算2步得A按模最大的特征值的$\lambda = \frac{10}{3} \approx 3.33333$

对应的特征向量为$x = (0.60000, 1.00000, 0.55000)^T$.

(2) Doolittle分解法，

$$\begin{bmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 6 & -4 & 4 \\ 4 & -4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{6}{5} & 1 & 0 \\ \frac{4}{5} & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 0 & -\frac{2}{5} & \frac{8}{5} \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{6}{5} & 1 & 0 \\ \frac{4}{5} & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \\ 11 \end{bmatrix}$$

得 $y_1 = 5$, $y_2 = 4$, $y_3 = -9$.

$$\begin{bmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 0 & -\frac{2}{5} & \frac{8}{5} \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ -9 \end{bmatrix}$$

得 $x_3 = 3$, $x_2 = 2$, $x_1 = 1$.

$x = (1, 2, 3)^T$.

6.解：首先计算Jacobi矩阵

$$J(x) = \begin{bmatrix} 2x_1 & 1 \\ -2x_2 & 1 \end{bmatrix}$$

选Broyden方法的计算公式

$$\begin{cases} H_0 = A^{-1}, \ A = J(x^0) \\ x^1 = x^0 - H_0 F(x^0) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^{i+1} = x^i - H_i F(x^i) \\ H_{i+1} = H_i + (r^i - H_i y^i)\frac{(r^i)^T H_i}{(r^i)^T H_i y^i} \\ r^i = x^{i+1} - x^i \\ y^i = F(x^{i+1}) - F(x^i) \end{cases} \quad i = 1, 2, \cdots.$$

第一步 $x^0 = (1, 1)^T$.

$F(x^0) = (-3, -1)^T$.

$A_0 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ $A_0^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

$x^1 = x^0 - H_0 F(x^0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \end{bmatrix}$

第二步 $F(x^1) = (\frac{1}{4}, -\frac{1}{2})$.

$r^0 = x^1 - x^0 = (\frac{1}{2}, 2)^T$.

$y^0 = F(x^1) - F(x^0) = (\frac{13}{4}, -\frac{15}{2})^T$.

$$H_1 = H_0 + (r^0 - H_0 y^0)\frac{(r^0)^T H_0}{(r^0)^T H_0 y^0} = \begin{bmatrix} 1.0967 & 0.40860 \\ -1.0967 & -0.74194 \end{bmatrix}$$

$x^2 = x^1 - H_1 F(x^1) = (4.69891, -3.06230)^T$.

十.解：(1) $p = 1$, $a_0 = \frac{4}{3}$, $a_1 = -\frac{1}{3}$, $b_{-1} = \frac{2}{3}$, $b_0 = b_1 = 0$

$C_0 = 1 - \sum_{i=0}^{p} a_i = 1 - (a_0 + a_1) = 0$

$C_1 = 1 - \left[\sum_{i=0}^{p}(-i)a_i + \sum_{i=-1}^{p} b_i\right] = 1 + a_1 - b_{-1} = 0$

$C_2 = \frac{1}{2!}\left\{1 - \left[\sum_{i=0}^{p}(-i)^2 a_i + 2\sum_{i=-1}^{p}(-i) b_i\right]\right\} = \frac{1}{2}(1 - a_1 - 2b_{-1}) \neq 0$.

故局部截断误差主项为$C_2 = \frac{2}{3}$，方法是1阶的。

(2) 由$C_0 = C_1 = 0$得方法是相容的。

$\rho(r) = r^{p+1} - \sum_{i=0}^{p} a_i r^{p-i} = r^2 - \frac{4}{3}r + \frac{1}{3}$.

令$\rho(r) = 0$，解得 $r_1 = 1$, $r_2 = \frac{1}{3}$.

$|r_i| \le 1$ 且 $|r_i| = 1$的单根，满足根条件。

∴方法收敛。

(3) $\sigma(r) = \sum_{i=-1}^{p} b_i r^{p-i} = \frac{2}{3}r^2$

$\pi(r; \bar{h}) = \rho(r) - \bar{h}\sigma(r) = r^2 - \frac{4}{3}r + \frac{1}{3} - \frac{2}{3}\bar{h}r^2$

$= (1 - \frac{2}{3}\bar{h})r^2 - \frac{4}{3}r + \frac{1}{3}$.

当$\lambda = -5$, $h = 0.3$时，$\bar{h} = \lambda h = -1.5$

$\pi(r; \bar{h}) = 2r^2 - \frac{4}{3}r + \frac{1}{3}$. 令$2r^2 - \frac{4}{3}r + \frac{1}{3} = 0$ ~~$r = \frac{1}{6}$~~.

$|r| < 1$. 绝对稳定.

2016年

填空：(20')

1) 设 $f(x)$ 可微，则求方程 $x=f(x)$ 的牛顿迭代格式是 $x_{i+1}=x_i-\frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$

2) 给定线性方程组
$\begin{pmatrix}1 & a\\ 2a & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\end{pmatrix}$，则求解该线性方程组的 Jacobi 迭代与 Gauss-Seidel 迭代均收敛的 a 的取值范围 ______

3) 设 x_j ($j=0,1,\cdots,n$) 是区间 $[a,b]$ 上任意一组节点，则插值型求积公式 $\int_a^b f(x)dx$ 的代数精度至少为 n，最高为 $2n+1$，插值型求积公式中求积系数 $A_j=$ ______ 且 $\sum_{j=0}^{n} A_j=$ ______

4) 满足插值条件 $\begin{cases}H(a)=f(a)\\ H'(a)=f'(a)\end{cases}$，$H(\frac{a+b}{2})=f(\frac{a+b}{2})$，$H_3(b)=f(b)$ 的 Hermite 插值多项式的余项表达式为 $R(x)=\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-a)^2(x-\frac{a+b}{2})(x-b)$

5) 给定矩阵 $A=\begin{pmatrix}4 & 0 & 0\\ -1 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 2\end{pmatrix}$，利用乘幂法求按模最大的特征值及对应的特征向量，选取初始向量 $V_0=(1,1,1)^T$，计算两步（保留两位小数），则 $u_2=$ $(-0.94,\ 1,\ -0.12)$，$\max(V_2)=$ -4.25

二、在 $0\le x\le\frac{\pi}{2}$ 上给出 $f(x)=\sin x$ 的等距节点函数表，若用线性插值求 $\sin x$ 的近似值，要使截断误差不超过 10^{-4}，问使用函数表的步长应取多大？

三、用 Doolittle 分解方法解方程组 $\begin{pmatrix}2 & 2 & 3\\ 4 & 7 & 7\\ -2 & 4 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\ 4\\ -1\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ -1 & 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 2 & 3\\ 0 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 6\end{pmatrix}$

四、试确定常数 A、B、C 及 α，使求积公式 $\int_{-2}^{2}f(x)dx\approx Af(-\alpha)+Bf(0)+Cf(\alpha)$ 有尽可能高的代数精度，并指出其代数精度是多少？该公式是否是 Gauss 求积公式？并用此求积公式计算 $\int_{-2}^{2}\frac{1}{x+3}dx$（结果保留4位小数）

五、试用共轭梯度法（CG法）求解线性方程组（初始值取 $x^{(0)}=(0,0)^T$）

$\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$，其计算过程为：给定 $x^{(0)}$，计算 $r^{(0)}=b-Ax^{(0)}$，$p_0=r^{(0)}$，对 $k=1,2,\cdots,n-1$ 计算

$\alpha_k=\frac{(r^{(k)},r^{(k)})}{(p_k,Ap_k)}$，$x^{(k+1)}=x^{(k)}+\alpha_k p_k$，$r^{(k+1)}=r^{(k)}-A\alpha_k p_k$，$\beta_k=\frac{(r^{(k+1)},r^{(k+1)})}{(r^{(k)},r^{(k)})}$

$p_{k+1}=r^{(k+1)}+\beta_k p_k$.

六、已知下列观测数据随机分布在一条指数函数曲线近旁，求出这条拟合曲线及拟合的平方误差。

x_i	-2	-1	0	1	2
y_i	10^{-2}	10^{0}	10^{2}	10^{4}	10^{1}

七、用逆 Broyden 秩1方法 $\begin{cases}x^{i+1}=x^i-H_iF(x^i)\\ H_{i+1}=H_i+(r^i-H_iy^i)\frac{(r^i)^TH_i}{(r^i)^TH_iy^i}\end{cases}$，求下面 $F(x)=\begin{cases}2x_1^2-2x_1x_2+x_1\\ x_2^2-x_1^2x_2+2x_1^2\end{cases}=0$

非线性方程组的解，其中，初值取 $x^0=(1,1)^T$，迭代2次，求 $x^2=$？

八、利用4阶经典 Runge-Kutta 方法求初值问题 $\begin{cases}y'=-10y, & 0\le x\le 2\\ y(0)=1\end{cases}$ 在 $x=0.4$ 时的数值解。

（在步长 $h=0.2$，0.4 时以一种稳定性质的步长计算）

$6r^2-4r+1=0$

$(1-\frac{2}{3}\times(-\frac{1}{3})\times\frac{3}{2}\ )r^2$

$r=\frac{4\pm\sqrt{16-4\times6}}{12}$

$=\frac{4\pm2\sqrt{2}i}{12}$

答

1.填空

(1) 令 $f(x)-x=0$ ∴ $x_{i+1}=x_i-\frac{f(x_i)-x_i}{f'(x_i)-1}$ $=\frac{1}{3}$

(2). 令 $A=L+D+U$

$B_J=-D^{-1}(L+U)=-\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0&a\\2a&0\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&a\\2a&0\end{bmatrix}$

$=-\begin{bmatrix}0&a\\2a&0\end{bmatrix}$

$|\lambda E-B_J|=\begin{vmatrix}\lambda&a\\2a&\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-2a^2=0$ ∴ $\lambda=\pm\sqrt{2}a$

∵ $\rho(B_J)<1$ ∴ $|\pm\sqrt{2}a|<1$ $\Rightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2}<a<\frac{\sqrt{2}}{2}$

$B_G=-(L+D)^{-1}U=-\begin{bmatrix}1&0\\2a&1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0&a\\0&0\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}1&0\\-2a&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&a\\0&0\end{bmatrix}$

$=-\begin{bmatrix}0&a\\0&-2a^2\end{bmatrix}$

$|\lambda E-B_G|=\begin{vmatrix}\lambda&a\\0&\lambda-2a^2\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-2a^2)=0$ $\lambda_1=0$ $\lambda_2=\sqrt{2}a$ $\lambda_3=-\sqrt{2}a$

∵ $\rho(B_G)<1$ ∴ $|\pm\sqrt{2}a|<1$ $\Rightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2}<a<\frac{\sqrt{2}}{2}$

∴ 解为 $a\in[-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}]$

$l_j(x)=\prod_{\substack{i=0\\i\neq j}}^{n}\frac{(x-x_i)}{(x_j-x_i)}$; $\sum_{j=0}^{n}A_j=b-a$

(3). 至少为n次; 最高为 $2n-1$; $A_j=\int_a^b l_j(x)dx$

$H_j=\int_a^b l_j(x)dx,\ j=0,1,\cdots,n$

(4). ∵ 不完全的Hermite插值余项为

$E(x)=\frac{f^{(n+r+2)}(\xi)}{(n+r+2)!}P_{n+1}(x)P_{r+1}(x)$. $l_j(x)=\prod_{\substack{i=0\\i\neq j}}^{n}\frac{(x-x_i)}{(x_j-x_i)}$ $2x_{10}=\frac{3}{5}$

在此题中 $n=2$ $r=0$

∴ 余项 $E(x)=\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-a)^2(x-\frac{a+b}{2})^2(x-b)$.

(5). 令 $v_0=(1,1,1)^T$ 则 $u_0=\frac{v_0}{\max(v_0)}=(1,1,1)^T$

$v_1=Au_0=\begin{bmatrix}4&0&0\\-1&2&-1\\0&-1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\0\\1\end{bmatrix}$ $u_1=\frac{v_1}{\max(v_1)}=\begin{bmatrix}1\\0\\0.25\end{bmatrix}$

$v_2=Au_1=\begin{bmatrix}4&0&0\\-1&2&-1\\0&-1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\0.25\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4.00\\-1.25\\0.50\end{bmatrix}$ $u_2=\frac{v_2}{\max(v_2)}=\begin{bmatrix}1\\-0.31\\0.125\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1.00\\-0.31\\0.13\end{bmatrix}$

∴ $\max(v_2)=4$.

相应特征向量 $\xi=[1.00,\ -0.31,\ 0.13]^T$ $\frac{1}{9}+\frac{5}{36}$ 19

2006-1

2、∵余项误差限为 $|E(x)| \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}|P_{n+1}(x)|$ $\quad M_{n+1}=\max_{a\le x\le b}|f^{(n+1)}(x)|$

∴用线性插值即 $n=1$ $\quad |E(x)|=|f(x)-L_n(x)| \le \frac{M_2}{2!}|P_{n+1}(x)|$

任取

x_i	x_{i+1}
$f(x_i)$	$f(x_{i+1})$

$P_{n+1}(x)=(x-x_i)(x-x_{i+1})$

令 $x=x_i+th \quad t\in[0,1]$

则 $|P_{n+1}(x)| = th\cdot(t-1)h = (t^2-t)h^2$ $\quad$ 令 $\varphi(t)=t^2-t$

则 $\varphi'(t)=2t-1=0 \quad t=\frac{1}{2}$

∴ $\max|\varphi(t)| = \{|\varphi(0)|, |\varphi(\frac{1}{2})|, \varphi(1)\} = |\varphi(\frac{1}{2})| = \frac{1}{4}$

又∵ $f(x)=\sin x \quad f'(x)=\cos x \quad f''(x)=-\sin x$ ∴

∴ $M_2=\max_{a\le x\le b}|f''(x)|=1$

∴ $|E(x)| \le \frac{M_2}{2!}(x-x_i)(x-x_{i+1}) \le \frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{4}h^2=\frac{1}{8}h^2$

令 $|E(x)|<\varepsilon$ 即 $\frac{1}{8}h^2<10^{-4}$ 解得 $h=0.0283$

∴最大步长为 0.0283

3、将A分解为 $A=LU$

$$\begin{bmatrix}2&2&3\\4&7&7\\-2&4&5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&0\\-1&2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&2&3\\0&3&1\\0&0&6\end{bmatrix}$$

∴ $\begin{cases}LY=b\\UX=Y\end{cases}$

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&0\\-1&2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\4\\-1\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases}y_1=3\\y_2=-2\\y_3=6\end{cases}$$

$$\begin{bmatrix}2&2&3\\0&3&1\\0&0&6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\-2\\6\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases}x_1=1\\x_2=-1\\x_3=1\end{cases}$$

∴解得 $(x_1,x_2,x_3)^T=(1,-1,1)^T$

5. $p_0 = r_0 = b - Ax^0 = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}2 & 1\\1 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} = [1,1]^T$

$Ap_0 = Ar_0 = \begin{bmatrix}2 & 1\\1 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} = [3,5]^T$

$\therefore \alpha_0 = \dfrac{(r^0, r^0)}{(p_0, Ap_0)} = \dfrac{1}{4}$ $\therefore x^1 = x^0 + \alpha_0 p_0 = (0,0)^T + \frac{1}{4}(1,1)^T = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4})^T$

$r^1 = r^0 - \alpha_0 Ap_0 = (1,1)^T - \frac{1}{4}\begin{bmatrix}2 & 1\\1 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{1}{4}\\-\frac{1}{4}\end{bmatrix}$

$\beta_0 = \dfrac{(r^1, r^1)}{(r^0, r^0)} = \dfrac{1}{16}$

$p_1 = r^1 + \beta_0 p_0 = (\frac{1}{4}, -\frac{1}{4})^T + \frac{1}{16}(1,1)^T = (\frac{5}{16}, -\frac{3}{16})^T$

$Ap_1 = \begin{bmatrix}2 & 1\\1 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{5}{16}\\-\frac{3}{16}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{7}{16}\\-\frac{7}{16}\end{bmatrix}$

$\alpha_1 = \dfrac{(r^1, r^1)}{(p_1, Ap_1)} = \dfrac{4}{7}$

$x^2 = x^1 + \alpha_1 p_1 = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4})^T + \frac{4}{7}(\frac{5}{16}, -\frac{3}{16})^T = (\frac{3}{7}, \frac{1}{7})^T$

$\therefore$ 所得 $x = (\frac{3}{7}, \frac{1}{7})^T$

6.

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	10^{-2}	10^0	10^2	10^4	10^6
Y	-4.605	0	4.605	9.210	13.816

$\because$ 分布在指数函数附近 $\therefore$ 用 $y = ae^{bx}$ 作最小二乘逼近

$\ln y = \ln a + bx$ 令 $\ln y = Y$ $\ln a = A$

$\therefore$ $Y = A + bx$. Y的值如上表所示

设 $\varphi_0 = 1$ $\varphi_1 = x$

$(\varphi_0, \varphi_0) = \sum_{i=0}^{n} \varphi_0(x_i)\varphi_0(x_i) = 5$ $(\varphi_0, \varphi_1) = (\varphi_1, \varphi_0) = \sum_{i=0}^{n} x_i = 0.$

$(\varphi_1, \varphi_1) = \sum_{i=0}^{n} x_i^2 = 10.$ $(\varphi_0, Y_i) = \sum_{i=0}^{n} Y_i = 23.026$

$(\varphi_1, Y_i) = \sum_{i=0}^{n} x_i Y_i = 46.052$

正规方程为

$\begin{cases} 5A + 0 \cdot b = 23.026 \\ 0 \cdot A + 10b = 46.052 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 4.6052 \\ b = 4.6052 \end{cases}$ $\therefore a = e^A = 100.003$

$\therefore$ 所求拟合曲线为 $y = 100.003\, e^{4.6052x}$

$r^{(0)} = r_0 = b - Ax^{(0)}$

$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \alpha_k p_k$

$\alpha_k = \dfrac{(r^{(k)}, r^{(k)})}{(p_k, Ap_k)}$

$r^{(k+1)} = r^{(k)} + \alpha_k Ap_k$

2006-3

$\frac{1}{16} + \frac{1}{16}$ $\frac{2}{16} = \frac{1}{8}$

数值分析 2005年

1.（6分）当α是非线性方程 $f(x)=0$ 的重根时（根的重根数未知），怎样使用Newton方法可以得到二阶收敛的迭代格式？此格式的计算效率指数是多少？

$\mu(x)=\frac{f(x)}{f'(x)}$ $x_{i+1}=x_i-\frac{\mu(x_i)}{\mu'(x_i)}$ $\frac{1}{2^{\frac{1}{2}}}$

2.（6分）试确定参数 a,b,c，使得分段多项式函数 $S(x)=\begin{cases}x^3+x^2 & 0\le x\le 1\\ ax^3+bx^2+cx-1 & 1\le x\le 2\end{cases}$ 是以0，1，2为节点的三次样条函数。

$\begin{cases}2=a+b+c-1\\ 4=3a+2b+c\\ 6a+2b=0\end{cases}$ $\begin{cases}a=-1\\ b=3\end{cases}$ $S(x)=\begin{cases}x^3+x^2\\ -x^3+3x^2+x-1\end{cases}$

3.（7分）使用乘幂法求矩阵 $A=\begin{bmatrix}3&1&0\\0&4&2\\1&0&6\end{bmatrix}$ 的按模最大特征值和对应的特征向量（取 $V_0=(1,1,0)^T$，只需计算前两次迭代的值）。

$u_0=\frac{V_0}{\max(V_0)}=(1,1,0)^T$ $V_1=Au_0=(4,4,1)^T$ $u_1=\frac{V_1}{\max(V_1)}=(1,1,\frac{1}{4})^T$ $V_2=Au_1=(4,4.5,2.5)$

4.（7分）利用反差商，试构造有理插值函数 $R(x)$，使其满足 $R(0)=-2$，$R(1)=-\frac{1}{3}$，$R(-1)=3$。

5.（10分）利用Doolittle分解法解方程组 $\begin{bmatrix}4&-2&-4\\-2&17&10\\-4&10&9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10\\3\\-7\end{bmatrix}$

6.（10分）利用共轭梯度方法解方程组 $\begin{pmatrix}6&3\\3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$ 初值取 $x^{(1)}=(0,0)^T$

7.（10分）试确定常数A，B及α，使求积公式 $\int_{-2}^{2}f(x)dx\approx Af(-\alpha)+Bf(\alpha)$ 有尽可能高的代数精度，并指出代数精度是多少。该公式是否是Gauss型。

8.（10分）作三次插值多项式 $H_3(x)$，使它在 $x=0$ 与 $x=\frac{\pi}{2}$ 处与 $f(x)=\cos x$ 相一致，并直接写出插值余项。对积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx$，求出用 $H_3(x)$ 逼近 $f(x)$ 所构造的求积公式、余项公式。

9.（10分）用Broyden方法求非线性方程组 $\begin{bmatrix}-x_1^2-x_2\\-x_1+x_2^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$ 的解，其中初始值取 $x_0=\begin{pmatrix}1\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}$，只需迭代2步。

10. 若解初值问题 $\begin{cases}y'=x-y+1, & 0\le x\le 1\\ y(0)=1\end{cases}$ 的二步方法

$y_{n+1}=\frac{1}{2}(y_n+y_{n-1})+h(b_{-1}y'_{n+1}-\frac{1}{4}y'_n+\frac{3}{4}y'_{n-1})$ 是相容的，

试 ① 确定参数 b_{-1} 的值。

② 求方法的阶是多少？并写出局部截断误差首项。

③ 判断方法的收敛性。

④ 讨论方法的绝对稳定性。

⑤ 取 $h=0.1$，初值 $y_0=1$，$y_1=1.0048$，直接用该方法计算出 y_2。

2005年试题

一、

解：设a是$f(x)=0$的r重根，则改进的Newton迭代格式为：

$$x_{i+1} = x_i - r\frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

E1 $\xi = p^{\frac{1}{\theta}} = 2^{\frac{1}{\theta_1+1}}$

二解：要使$S(x)$为三次样条函数，则

$$\begin{cases} S(1-0) = S(1+0) \\ S'(1-0) = S'(1+0) \\ S''(1-0) = S''(1+0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b+c-1=2 \\ 3a+2b+c=5 \\ 6a+2b=8 \end{cases}$$

解得 $a=2,\ b=-2,\ c=3$

三解：$V_0=(1,1,0)^T$. $U_0=\frac{V_0}{\max(V_0)}=(1,1,0)^T$.

$$V_1=AU_0=\begin{bmatrix}3&1&0\\0&4&2\\1&0&6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\4\\1\end{bmatrix}\quad s_1=\max(V_1)=4,\ U_1=\begin{bmatrix}1\\1\\\frac{1}{4}\end{bmatrix}$$

$$V_2=AU_1=\begin{bmatrix}3&1&0\\0&4&2\\1&0&6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\\frac{1}{4}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\\frac{9}{2}\\\frac{5}{2}\end{bmatrix}\quad s_2=\max(V_2)=\frac{9}{2},\ U_2=\begin{bmatrix}\frac{8}{9}\\1\\\frac{5}{9}\end{bmatrix}$$

∴特征值为 $\lambda=\frac{9}{2}=4.5000$

对应的特征向量 $x=[\frac{8}{9}\ 1\ \frac{5}{9}]^T=[0.8889, 1.0000, 0.5556]^T$

四解：设 $x_0=-2,\ x_1=1,\ x_2=-1$.

$a=v_0(x_0)\quad b=v_1(x_1)\quad c=v_2(x_2)$.

$$\therefore R(x)=v_0(x_0)+\frac{x-x_0}{v_1(x_1)+\frac{x-x_1}{v_2(x_2)}}$$

$$= a+\frac{xc}{bc+x-1}$$

将由 $\begin{cases} R(0)=-2 \\ R(1)=-\frac{1}{3} \\ R(-1)=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-2 \\ a+\frac{1}{b}=-\frac{1}{3} \\ a+\frac{-c}{bc-2}=3 \end{cases}$

解得 $a=-2,\ b=\frac{3}{5},\ c=\frac{5}{2}$.

$\triangle\ R(x_i)=f(x_i)$.

$$\therefore R(x)=-2+\frac{\frac{5}{2}x}{\frac{3}{2}+x-1}$$

$$=\frac{x-2}{2x+1}$$

五解：$A=LU=\begin{bmatrix}1&0&0\\l_{21}&1&0\\l_{31}&l_{32}&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_{11}&u_{12}&u_{13}\\0&u_{22}&u_{23}\\0&0&u_{33}\end{bmatrix}$

解得 $L=\begin{bmatrix}1&0&0\\-\frac{1}{2}&1&0\\-1&\frac{1}{2}&1\end{bmatrix}\quad U=\begin{bmatrix}4&-2&-4\\0&16&8\\0&0&1\end{bmatrix}$

先解 $LY=b$，

即 $\begin{bmatrix}1&0&0\\-\frac{1}{2}&1&0\\-1&\frac{1}{2}&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10\\3\\-7\end{bmatrix}$

得 $y_1=10\quad y_2=8\quad y_3=-1$

再解 $UX=y$

$$\begin{bmatrix}4&-2&-4\\0&16&8\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10\\8\\-1\end{bmatrix}$$

得：$x_1=2\quad x_2=1\quad x_3=-1$

故方程组的解为 $x=[2,1,-1]^T$.

2004年推荐免试硕士研究生"数值分析"课程试题.（魏范珍、王永福）

一、(10') 设α是f(x)=0的m重根(m>1)，证明Newton迭代为线性收敛；

课本P17

写一个平方收敛的改进的Newton迭代公式。

(1) 证明：

∵ α是f(x)=0的m重根，∴ $f(\alpha)=f'(\alpha)=\cdots=f^{(m-1)}(\alpha)=0$

牛顿迭代公式为：$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$

迭代函数满足：$\varphi(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)}$

$$=x-\frac{f(\alpha)+f'(\alpha)(x-\alpha)+\cdots+\frac{1}{m!}f^{(m)}(\xi_1)(x-\alpha)^m}{f'(\alpha)+f''(\alpha)(x-\alpha)+\cdots+\frac{1}{(m-1)!}f^{(m)}(\xi_2)(x-\alpha)^{m-1}}$$

$$=x-\frac{1}{m}\frac{f^{(m)}(\xi_1)}{f^{(m)}(\xi_2)}(x-\alpha)$$ ，ξ_1,ξ_2在x与α之间

注意到$\varphi(\alpha)=\alpha$，则 $\varphi'(\alpha)=\frac{\varphi(x)-\varphi(\alpha)}{x-\alpha}=1-\frac{1}{m}\neq 0$ ，$m\neq 1$

∵ m>1 ∴ $\varphi'(\alpha)=1-\frac{1}{m}<1$

∴ Newton迭代法.m重根(m>1)α是线性收敛的

(2) 平方收敛的改进的Newton迭代公式：

① 根的重数m已知时：$x_{k+1}=x_k-m\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$ ，$k=0,1,2\cdots$

② 根的重数m未知时：$x_{k+1}=x_k-\frac{u(x_k)}{u'(x_k)}$ ，$k=0,1,2\cdots$ ；$u(x)=\frac{f(x)}{f'(x)}$

二、(8') 用Doolittle分解法解方程组：

$$\begin{bmatrix}1&2&1\\2&2&3\\-1&-3&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\3\\2\end{bmatrix}$$

解：对系数矩阵A作Doolittle分解：A=LU

$$L=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&0\\-1&\frac{1}{2}&1\end{bmatrix}\qquad U=\begin{bmatrix}1&2&1\\0&-2&1\\0&0&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

Ax=b 即 LUx=b.

设 Ux=y 则 Ly=b

先解Ly=b 即

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&0\\-1&\frac{1}{2}&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\3\\2\end{bmatrix}\Rightarrow y_1=0,\ y_2=3,\ y_3=\frac{1}{2}$$

再解 $Ux=y$，即 $\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & -2 & 1\\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 3\\ \frac{1}{2}\end{bmatrix} \Rightarrow x_1=1,\ x_2=-1,\ x_3=1$

类似于绿皮书 P60. 31题

三.(10') 用迭代公式 $x^{(k+1)}=x^{(k)}+a(Ax^{(k)}-b)$，求解 $Ax=b$. 若 $A=\begin{bmatrix}3 & 2\\ 1 & 2\end{bmatrix}$

问 (1) a 取何值的范围迭代收敛？ (2) a 取何值迭代收敛最快？

解：迭代公式：

$$x^{(k+1)}=x^{(k)}+a(Ax^{(k)}-b)=(I+aA)x^{(k)}-ab.$$

迭代矩阵：

$$B=I+aA=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3a & 2a\\ a & 2a\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3a+1 & 2a\\ a & 2a+1\end{bmatrix}$$

特征方程：

$$P(\lambda)=|\lambda I-B|=\begin{vmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}3a+1 & 2a\\ a & 2a+1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-1-3a & -2a\\ -a & \lambda-2a-1\end{vmatrix}$$

$$=\lambda^2-(5a+2)\lambda+(4a^2+5a+1)=[\lambda-(4a+1)][\lambda-(a+1)]$$

令 $P(\lambda)=0 \Rightarrow \lambda_1=4a+1$；$\lambda_2=a+1$

$\rho(B)=\max\limits_{a}\{|4a+1|,|a+1|\}$

若 $\rho(B)<1$，则迭代收敛。 令 $|4a+1|<1$，$|a+1|<1$

得：$-\frac{1}{2}<a<0$，$-2<a<0$ $\therefore -\frac{1}{2}<a<0$

$\therefore$ 当 $-\frac{1}{2}<a<0$ 时，$\rho(B)<1$，迭代收敛.

(2) 当 $\rho(B)$ 最小时，迭代收敛最快。求 $\rho(B)$ 的最小值，令 $|4a+1|=|a+1|$

$\Rightarrow a_1=0$，$a_2=-\frac{2}{5}$

当 $a\in(-\frac{1}{2},-\frac{2}{5})$ 时，$\frac{3}{5}<\rho(B)=|4a+1|<1$

当 $a=-\frac{2}{5}$ 时，$\rho(B)=|4a+1|=|a+1|=\frac{3}{5}$.

当 $a\in(-\frac{2}{5},0)$ 时 $\frac{3}{5}<\rho(B)=|a+1|<1$

$\therefore$ 当 $a=-\frac{2}{5}$ 时，$\rho(B)$ 取最小值 $\frac{3}{5}$，此时迭代收敛最快.

四.(10') 设 $f(x)=\sin x$，求 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上的一次最佳平方逼近多项式 $P_1(x)=a_0+a_1x$

解：设 $\varphi_0(x)=1$，$\varphi_1(x)=x$， $P_1(x)=a_0+a_1x\in\Phi=\mathrm{span}\{\varphi_0,\varphi_1\}$

$(\varphi_0,\varphi_0)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx=\frac{\pi}{2}$；$(\varphi_0,\varphi_1)=(\varphi_1,\varphi_0)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\,dx=\frac{\pi^2}{8}$；$(\varphi_1,\varphi_1)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2dx=\frac{\pi^3}{24}$

$(\varphi_0, f)=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx=-\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=1$; $(\varphi_1, f)=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,dx=-[x\cos x-\sin x]\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=1$

$$\therefore \begin{bmatrix} \frac{\pi}{2} & \frac{\pi^2}{8} \\ \frac{\pi^2}{8} & \frac{\pi^3}{24} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow a_0=\frac{8(\pi-3)}{\pi^2} \approx 0.1147 ; \quad a_1=\frac{24(4-\pi)}{\pi^3} \approx 0.66444$$

$\therefore P_1(x)=0.1147+0.66444x$

五、用共轭梯度方法解方程组 $\begin{pmatrix}2&1\\1&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ $\boxed{\text{用绿皮书, P62, 33.(1)}}$

解：$Ax=b$，$A=\begin{pmatrix}2&1\\1&5\end{pmatrix}$，$b=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ 设 $x^{(0)}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

$r^{(0)}=p_0=b-Ax^{(0)}=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-5\end{pmatrix}$; $a_0=\dfrac{(r^{(0)}, r^{(0)})}{(p_0, Ap_0)}=\dfrac{25}{125}=\dfrac{1}{5}$

$x^{(1)}=x^{(0)}+a_0p_0=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\-5\end{pmatrix}\times\frac{1}{5}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$; $r^{(1)}=r^{(0)}-a_0Ap_0=\begin{pmatrix}0\\-5\end{pmatrix}-\frac{1}{5}\begin{pmatrix}2&1\\1&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\-5\end{pmatrix}$

$\beta_0=\dfrac{(r^{(1)}, r^{(1)})}{(r^{(0)}, r^{(0)})}=\dfrac{1}{25}$; $p_1=r^{(1)}+\beta_0p_0=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+\frac{1}{25}\begin{bmatrix}0\\-5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\-\frac{1}{5}\end{bmatrix}$

$a_1=\dfrac{(r^{(1)}, r^{(1)})}{(p_1, Ap_1)}=\dfrac{5}{9}$; $x^{(2)}=x^{(1)}+a_1p_1=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+\frac{5}{9}\begin{bmatrix}1\\-\frac{1}{5}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{14}{9}\\-\frac{1}{9}\end{bmatrix}$

$\therefore$ 方程的精确解为 $(\frac{14}{9}, -\frac{1}{9})^T$

~~六、~~(10) 求下面两个方程组的解，并利用矩阵的条件数估计 $\dfrac{\|\delta x\|_\infty}{\|x\|_\infty}$

$$① \begin{bmatrix} 240 & -319 \\ -179 & 240 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} ;\quad ② \begin{bmatrix} 240 & -319.5 \\ -179.5 & 240 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$A\quad x\quad =b \qquad\qquad (A+\delta A)(x+\delta x)=b$

解：方程组①的精确解为：$x_1=4$，$x_2=3$

方程组②的精确解为：$x_1=8$，$x_2=6$

$\delta A=\begin{pmatrix}0&-0.5\\-0.5&0\end{pmatrix}$，$\therefore \|\delta A\|_\infty=0.5$ ； $\delta x=\begin{pmatrix}8\\6\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$ 不等

$\mathrm{cond}_\infty(A)=\|A\|_\infty\cdot\|A^{-1}\|_\infty=559\times\dfrac{559}{499}=626.2144289$

$$\therefore \frac{\|\delta x\|_\infty}{\|x\|_\infty}\le\frac{\mathrm{cond}_\infty(A)\dfrac{\|\delta A\|_\infty}{\|A\|_\infty}}{1-\mathrm{cond}_\infty(A)\dfrac{\|\delta A\|_\infty}{\|A\|_\infty}}=\frac{626.2144289\times\frac{0.5}{559}}{1-\cdots}=1.27335$$

七、设 $f(x)\in C^{n+1}[a,b]$，$y(x)$ 是以 $x_0, x_1, \cdots x_n$ 为节点的 n 次插值多项式，试推导在一节点 x_k 处有 $f'(x_k)-y'(x_k)=\dfrac{f^{(n+1)}(\eta)}{(n+1)!}P_{n+1}'(x)$，$\eta\in(a,b)$。 课本 P108

其中 $P_{n+1}(x)=(x-x_0)\cdots\cdots(x-x_n)$

解：当 $x=x_i$ $(i=0,1,2\cdots n)$ 时，$E(x)=f(x)-y(x)=\dfrac{F^{(n+1)}(\eta)}{(n+1)!}P_{n+1}(x)=0$ 成立。

对任意固定的 $x\neq x_i$ $(i=0,1,2,\cdots n)$，$x\in(a,b)$

设 $E(x)=f(x)-y(x)=k(x)P_{n+1}(x)$

构造关于 z 的函数：

$$F(z)=f(z)-y(z)-k(x)P_{n+1}(z)$$

显然，当 $z=x_0, x_1, \cdots x_n$ 及 $z=x$ 时，有 $F(z)=0$

$\therefore F(x)$ 在 $[a,b]$ 上有 $n+2$ 个零点。

由 Rolle 定理知，$F'(z)$ 在 $[a,b]$ 上至少有 $n+1$ 个零点：

对 $F''(z)$ 在 (a,b) 上至少有 n 个零点

$\therefore$

$F^{(n+1)}(z)$ 在 (a,b) 上至少存在一个零点，设其为 η，

$y^{(n+1)}(z)=0$，$P_{n+1}^{(n+1)}(z)=(n+1)!$

$\therefore F^{(n+1)}(\eta)=f^{(n+1)}(\eta)-k(x)(n+1)!=0$

即 $k(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\eta)}{(n+1)!}$

$\therefore E(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\eta)}{(n+1)!}P_{n+1}(x)$，$\eta\in(a,b)$

即 $f(x)-y(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\eta)}{(n+1)!}P_{n+1}(x)$

$\therefore f'(x)-y'(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\eta)}{(n+1)!}P_{n+1}'(x)$

即 $f'(x_k)-y'(x_k)=\dfrac{f^{(n+1)}(\eta)}{(n+1)!}P_{n+1}'(x_k)$ 成立.

1. 推导出复化梯形公式及误差公式 $\boxed{\text{课本 P91}}$

解：(1) 将区间 $[a,b]$ n 等分，步长为 $h=\frac{b-a}{n}$，分点 $x_i=a+ih$ $(i=0,1,2,\dots,n)$

在每个区间 $[x_i,x_{i+1}]$ $(i=0,1,\dots,n-1)$ 上采用梯形公式，得：

$$\therefore I=\int_a^b f(x)\,dx=\sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx=\frac{h}{2}\sum_{i=0}^{n-1}[f(x_i)+f(x_{i+1})]+R_n(f)$$

记 $T_n=\frac{h}{2}\sum_{i=0}^{n-1}[f(x_i)+f(x_{i+1})]=\frac{h}{2}[f(a)+2\sum_{i=1}^{n-1}f(x_i)+f(b)]$

称为复化的梯形公式

(2) 误差公式：

由梯形公式余项：$E(f)=\frac{f''(\eta)}{2}\int_a^b (x-a)(x-b)\,dx=-\frac{(b-a)^3}{12}f''(\eta)$

得复化梯形公式余项：$R_n(f)=-\frac{h^3}{12}\sum_{i=0}^{n-1}f''(\eta_i)$

$$=-\frac{(b-a)h^2}{12}\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}f''(\eta_i),\quad \eta_i\in(x_i,x_{i+1})$$

$f(x)\in C^2[a,b]$ 则：$\min\limits_{x\in[a,b]} f''(x)\le\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}f''(\eta_i)\le\max\limits_{x\in[a,b]} f''(x)$

由闭区间上连续函数的介值定理得，则有 $\eta\in(a,b)$，使得 $f''(\eta)=\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}f''(\eta_i)$

$\therefore$ 复化的梯形公式的余项为：$R_n(f)=-\frac{b-a}{12}h^2f''(\eta)$，$\eta\in(a,b)$

2. 确定求积公式 $\int_{-1}^{1}f(x)\,dx\approx A_1f(-\frac{\sqrt3}{3})+A_2f(\frac{\sqrt3}{3})$ 中的系数 A_1、A_2，使公式有尽可能高的代数精度；代数精度是多少？并用此公式计算积分 $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx$

（结果保留5位小数）

解：(1) 求积公式中有2个待定参数，利用代数精度定义，分别令 $f(x)=x$，$f(x)=1$ 时

精确成立，所以
$$\begin{cases}A_1+A_2=2\\ -\frac{\sqrt3}{3}A_1+\frac{\sqrt3}{3}A_2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A_1=1\\ A_2=1\end{cases}$$

$$\therefore\int_{-1}^{1}f(x)\,dx\approx f(-\tfrac{\sqrt3}{3})+f(\tfrac{\sqrt3}{3})$$

令 $f(x)=x^2$，则左边 $=\frac{2}{3}$，右边 $=\frac{2}{3}$，左边 $=$ 右边

令 $f(x)=x^3$，则左边 $=0$，右边 $=0$，左边 $=$ 右边

令 $f(x)=x^4$，则左边 $=\frac{2}{5}$，右边 $=\frac{2}{9}$，左边 $\ne$ 右边，$\therefore$ 代数精度为三次

(2) $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx=\frac{\pi}{4}\int_{-1}^{1}\cos[\frac{\pi}{4}(t+1)]\,dt=\frac{\pi}{4}\{\cos[\frac{\pi}{4}(1-\frac{\sqrt3}{3})]+\cos[\frac{\pi}{4}(1+\frac{\sqrt3}{3})]\}$

$=\frac{\pi}{4}\times(0.999983+0.999766)=1.57060$

十. 使用乘幂法求矩阵 $A=\begin{bmatrix}-12 & 3 & 3\\ 3 & 1 & -2\\ 3 & -2 & 7\end{bmatrix}$ 的最大特征值和对应的特征向量

（只需计算前两次迭代的值），取初值 $v_0=(1,1,1)^T$

解：$v_0=(1,1,1)^T$

$$u_0=\frac{v_0}{\max(v_0)}=(1,1,1)^T$$

$$v_1=Au_0=\begin{bmatrix}-12 & 3 & 3\\ 3 & 1 & -2\\ 3 & -2 & 7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-6\\2\\8\end{bmatrix}$$

$$u_1=\frac{v_1}{\max(v_1)}=\begin{bmatrix}-\frac{3}{4}\\ \frac{1}{4}\\ 1\end{bmatrix}$$

$$v_2=Au_1=\begin{bmatrix}-12 & 3 & 3\\ 3 & 1 & -2\\ 3 & -2 & 7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\frac{3}{4}\\ \frac{1}{4}\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{51}{4}\\ -4\\ \frac{17}{4}\end{bmatrix}$$

$$u_2=\frac{v_2}{\max(v_2)}=\begin{bmatrix}1\\ -\frac{16}{51}\\ \frac{1}{3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1.00\\ -0.3137255\\ 0.3333333\end{bmatrix}$$

$\therefore$ A的最大特征值为：$\lambda=\max(v_2)=\frac{51}{4}=12.75$

对应的特征向量为 $x=(1.00,-0.3137255,0.3333333)^T$

十一. 第六章的， 待续 ^^

大18大

哈尔滨工业大学

2004年推荐免试硕士研究生"数值分析"课程试

P1 一.（10分）设α是$f(x)=0$的m重根($m>1$)，证明Newton迭代仅为线性收敛。试构造一个平方收敛的改进的Newton迭代公式。P教材P1.习题

二.（8分）用Doollite分解法解方程组 $\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 2 & 3\\ -1 & -3 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 3\\ 2\end{pmatrix}$

P2 三.（10分）用迭代公式 $x^{(k+1)}=x^{(k)}+\alpha(Ax^{(k)}-b)$ 求解 $Ax=b$

若 $A=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 2\end{pmatrix}$，问(1) α取何值的范围迭代收敛？(2) α取何值迭代收敛最快？

四.（10分）设$f(x)=\sin x$，求$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上的一次最佳平方逼近多项式 $p_1(x)=a_0+$

P2 五.（6分）用共轭梯度方法（CG方法）解方程组 $\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\ 1\end{pmatrix}$

P2 六.（10分）求下面两个方程组的解，并利用矩阵的条件数估计 $\frac{\|\delta x\|_\infty}{\|x\|_\infty}$。

$$\begin{bmatrix}240 & -319\\ -179 & 240\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\ 4\end{bmatrix},\quad Ax=b$$

$$\begin{bmatrix}240 & -319.5\\ -179.5 & 240\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\ 4\end{bmatrix},\quad (A+\delta A)(x+\delta x)=b$$

七（8分）设$f(x)\in C^{n+2}[a,b]$，$y(x)$是以$x_0,x_1,\cdots,x_n$为节点的n次插值多项式，试证在一节点x_k处有 $f'(x_k)-y'(x_k)=\frac{f^{(n+1)}(\eta)}{(n+1)!}p'_{n+1}(x_k)$，$\eta\in(a,b)$

其中 $p_{n+1}(x)=(x-x_0)\cdots(x-x_n)$

67

八.（8分）推导出复化梯形求积公式及误差公式。

九.（10分）确定求积公式 $\int_{-1}^{1} f(x)dx = A_1 f(-\frac{\sqrt{3}}{3}) + A_2 f(\frac{\sqrt{3}}{3})$ 中系数 A_1、A_2 使公式有尽可能高的代数精度；代数精度是多少？并用此公式计算积分 $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$（结果保留3位小数）

十.（6分）使用乘幂法求矩阵 $A=\begin{pmatrix} -12 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 7 \end{pmatrix}$ 的最大特征值和对应的特征向量（只需计算前两次迭代的值）取初值 $v_0 = (1,1,1)^T$。

十一.（14分）对三步方法 $y_{n+1} = a y_{n-1} + h(b y'_{n+1} + c y'_n + d y'_{n-1})$ Simpson公

(1)确定 a,b,c,d，使方法是4阶的；(2)讨论4阶方法的收敛性和稳定性。

其中：在线性多步法的局部截断误差中

$$C_q = \frac{1}{q!}[1 - \sum (-i)^q \alpha_i + q \sum_{i=-1} (-i)^{q-1} \beta_i] \quad (q \geq 2)$$

2006年秋季学期研究生《数值分析》试卷

2.（10分）在 $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$ 上给出 $f(x)=\sin x$ 的等距节点函数表，若用线性插值求 $\sin x$ 的近似值，要使截断误差不超过 10^{-6}，问使用函数表的步长应取多少？

$$\frac{x-x_0}{x_1-x_0} f(x_1) + \frac{x-x_1}{x_0-x_1} f(x_0)$$

$$\frac{(x-x_0)(x_1-x_0)}{(x_1-x_0)(x_1-x_0)}$$

$f''(x) = -\sin x$

3.（10分）用 Doolittle 分解法求解方程组

$$\begin{bmatrix} 2 & [illegible] & 3 \\ 4 & 7 & [illegible] \\ [illegible] & [illegible] & [illegible] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [illegible] \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$Ly = b$

$Ux = y$

不得答题

4.（10 分）试确定常数 A,B,C 及 α，使求积公式

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = Af(-\alpha)+Bf(0)+Cf(\alpha)$$

有尽可能高的代数精确度，并指出其代数精确度是多少？该公式是否是 Gauss 求积公式？并用此求积公式计算 $\int_{-1}^{1}\frac{1}{x+3}dx$（结果保留五位小数）。

2006 年秋季学期研究生《数值分析》试卷

5.（10 分）试用共轭梯度法（cg 法）求解线性方程组。（初始值取 $x^{(0)}=(0,0)^T$）

$$\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$$

已知的计算过程为：

给定 $x^{(0)}$，计算 $r^{(0)}=b-Ax^{(0)}$，$p_0=r^{(0)}$

对 $k=0,1,2,\ldots,n-1$ 计算

$$\alpha_k=\frac{(r^{(k)},r^{(k)})}{(p_k,Ap_k)},\quad x^{(k+1)}=x^{(k)}+\alpha_k p_k,\quad r^{(k+1)}=r^{(k)}-\alpha_k Ap_k$$

$$\beta_k=\frac{(r^{(k+1)},r^{(k+1)})}{(r^{(k)},r^{(k)})},\quad p_{k+1}=r^{(k+1)}+\beta_k p_k$$

2006 年秋季学期研究生《数值分析》试卷

6.（10 分）已知下列观测数据随机分布在一条指数函数曲线近旁，求出这条拟合曲线及拟合的平方误差。

x_i	-2	-1	0	1	2
y_i	10^{-2}	10^0	10^2	10^4	10^6