根据我瞎 jb 听课，分 ppt 和章节讲解

第一个 PPT:

1. 看误差的概念
2. 有效数字位数
3. 条件数会结合大题考，就记一个矩阵的条件数怎么求

第二个 PPT:太重要，重点看

1. LU 分解要回，切比雪夫就几个正定实数对称
2. 列主元 Guass 消去法做 LU 分解要会
3. 会 1,2，无穷范数，F 范数向量和矩阵的都要会
4. 迭代法记倒数第二个 ppt，几个收敛性条件，难顶，我记不太住

第三个 PPT:

太重要，可能得两道大题

插值就看拉格朗日插值，

将插值节点处的 y 值作为系数，可以由相应的 $l_i(x)$，生成多项式（这些项的线性和）

$$L_n(x)=\sum_{i=0}^{n} y_i l_i(x)$$

$l_i(x)$ 应该有 n 个根，在每个节点 $l_i(x)=0$。因此，它必须具有以下形式：

$$l_i(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}=\prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n}\frac{x-x_j}{x_i-x_j}$$

$$i=0,1,\cdots,n$$

可得

$$L_n(x)=\sum_{i=0}^{n} y_i l_i(x)=\sum_{i=0}^{n} y_i\left(\prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n}\frac{x-x_j}{x_i-x_j}\right)$$

拉格朗日多项式插值误差余项

如何得到 $L_n(x)$ 近似 $f(x)$ 的误差？

插值余项定理：

设节点 $a\le x_0<x_1<\cdots<x_n\le b$，且 f 满足 $f\in C^n[a,b]$

$f^{(n+1)}$ 在 $[a,b]$ 内存在，考察截断误差 有

$$R_n(x)=f(x)-L_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)$$

$$\omega_{n+1}(x)=(x-x_0)(x-x_1)\cdots\cdots(x-x_n)$$

$\xi_x\in(a,b)$ 与 x 相关

应当指出，余项表达式只有在 $f(x)$ 的高阶导数存在时才能应用．ξ_x 在 (a,b) 内的具体位置通常不可能给出．

差商：很重要，尤其是差商和导数的定理，考一道小题轻轻松松

牛顿法插值，鹅鹅鹅鹅鹅，有时间看到例题熟悉一下

最小二乘法，公式记不住，我觉得看个 ppt 最后几个那个正交多项式拟合的就可以了，难得我随缘

传统多项式基函数

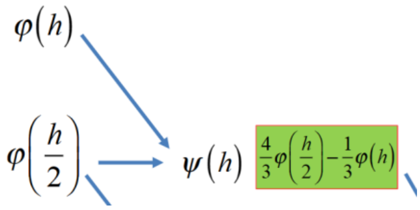
例：用 $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ 拟合

x	1	2	3	4
y	4	10	18	26

比如说这种： 解：$\varphi_0(x) = 1$， $\varphi_1(x) = x$， $\varphi_2(x) = x^2$ ， $w \equiv 1$

第四个 PPT:

太重要外推法可能会考小题，jb 太多，记个φ的公式和Ψ（pussy）就行



牛顿-科特斯系数表

然后记个表

n^k	$c_k^{(n)}$ 0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1/2	1/2		梯形求积公式 代数精度1					
2	1/6	2/3	1/6		辛普森求积公式代数精度3				
3	1/8	3/8	3/8	1/8					
4	7/90	16/45	2/15	16/45	7/90	科特斯求积公式代数精度			

—行和为 1!

高斯求积重要，考一道大题：

看例题就行，就嗯积

第五个 PPT:

太 jb 难，龙格库塔法以及后面的不用看，上课说的太难不考。。。

泰勒级数-梯形法，了解即可

他上课说最多就考改进的泰勒级数法，一道大题，我也不知道是不是骗我的

设 $y_n = y(x_n)$，则 $f(x_n, y_n) = f(x_n, y(x_n)) = y'(x_n)$ 决定于已知的 x_n

可得欧拉公式误差

泰勒级数法——改进的欧拉公式

与欧拉法相比，梯形法提高了计算精度，但迭代过程复杂。

可采用以下方法加以简化：

首先使用欧拉公式给出初始的近似值 $\bar{y}_{n+1}$ 也称为预测值。$\bar{y}_{n+1}$ 的精度很低，继续使用梯形法对其修正，即只迭代一次得到 y_{n+1}，也称为修正值。

$$\begin{cases} \text{预测值} & \bar{y}_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n), \\ \text{修正值} & y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, \bar{y}_{n+1})]. \end{cases}$$

这个预测-校正系统被称为改进的欧拉法。

可表示为

$$\begin{cases} y_p = y_n + hf(x_n, y_n), & \text{预测值} \\ y_c = y_n + hf(x_{n+1}, y_p), & \text{修正值} \\ y_{n+1} = \frac{1}{2}(y_p + y_c) \boxed{= y_n + \frac{h}{2}[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, \bar{y}_{n+1})]} \end{cases}$$

例： 用改进的欧拉法求解初值问题。

$$\begin{cases} y' = y - \dfrac{2x}{y} \quad (0 < x < 1) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

解： 改进的欧拉法求解得到

$$\begin{cases} y_p = y_n + h\left(y_n - \dfrac{2x_n}{y_n}\right), \\ y_c = y_n + h\left(y_p - \dfrac{2x_{n+1}}{y_p}\right), \\ y_{n+1} = \dfrac{1}{2}(y_p + y_c). \end{cases}$$

x_n	y_n	$y(x_n)$	x_n	y_n	$y(x_n)$
0.1	1.0959	1.0954	0.6	1.4860	1.4832
0.2	1.1841	1.1832	0.7	1.5525	1.5492
0.3	1.2662	1.2649	0.8	1.6153	1.6125
0.4	1.3434	1.3416	0.9	1.6782	1.6733
0.5	1.4164	1.4142	1.0	1.7379	1.7321

设$h=0.1$，计算结果如表所示。与欧拉法的相比，可以清楚地看到，改进的欧拉法提高了精度。

第六个 PPT:

二分法误差分析考一道小题

二分法-误差分析

因此，对于一个给定的容差 ε，根据定理，可以找到n的值

$$2^{-(n+1)}\left(b_0 - a_0\right) < \varepsilon$$

为我们提供了停止迭代过程的判断标准

$$n > \frac{\log \dfrac{\left(b_0 - a_0\right)}{\varepsilon}}{\log 2} - 1$$

牛顿法和弦截法复习课没说要不要考，如果考也是考一个迭代吧，不太懂

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f\left(x_n\right)}{f'\left(x_n\right)}$$

牛顿法:

牛顿法的收敛

定理 考虑一个函数$f(x)$，$x\in[a,b]$，且$f''(x)$ 连续。$f(x)$满足：

(i) $f(a)f(b)<0$；(ii) $f'(x)\neq 0$，$x\in[a,b]$；(iii) $f''(x)$在$[a,b]$中符号不变，

则对于任何x_0，如果$f(x_0)f''(x)>0$，则$\{x_k\}$收敛于$f(x)=0$的唯一根。

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{f\left(x_n\right) - f\left(x_{n-1}\right)} f\left(x_n\right) \qquad \left(n \geq 1\right)$$

弦截法: