一、选择题（每题 2 分，共 10 分）

1．数值分析中通常会涉及到以下哪两种误差？（ ）

A．模型误差、舍入误差　　B．观测误差、截断误差

C．截断误差、舍入误差　　D．模型误差、观测误差

2．由四舍五入得到的近似数 0.0024 有（ ）位有效数字。

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 5

3．用列选主元高斯消去法解线性方程组 $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 4x_3 = 1 \\ -x_1 + 2x_2 - 9x_3 = 0 \\ -4x_1 - 3x_2 + x_3 = -1 \end{cases}$，第一步消去 x_1 时应选择主元为（ ）。

A. -9　　B. -4　　C. 3　　D. -1

4. 已知方程 $1 - x - \sin x = 0$ 在区间 $[0,1]$ 内有一个根，若采用二分法求该根，且要求误差不超过 0.5×10^{-4} 时，那么区间二分的次数至少应为（ ）

A. 10　　B. 15　　C. 18　　D. 20

5. 设矩阵 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & -8 & 2 \end{pmatrix}$，那么 $\mathbf{A}$ 的 ∞-范数 $\|\mathbf{A}\|_\infty$ 为（ ）。

A. 14　　B. 13　　C. $\sqrt{112}$　　D. 10.13

1.C 2.A 3.B 4.B 5.B

.

一、填空题（每空 2 分，共 24 分）。

2．函数 $f(x)=x^7+x^4+4x+1$，那么差商 $f[2^0, 2^1, \ldots 2^7]=$______。

3．已知 $n=4$ 时牛顿-柯特斯求积公式的柯特斯系数 $C_0^{(4)}=\frac{7}{90}, C_1^{(4)}=\frac{16}{45}, C_2^{(4)}=\frac{2}{15}, C_4^{(4)}=\frac{7}{90}$，那么 $C_3^{(4)}=$______。

4．对于插值型求积公式，当求积节点数目为 $n+1$ 时，其代数精度至少可达____次；至多只能达到_____次。

5．设 $A=\begin{bmatrix} 0.6 & 0.5 \\ 0.1 & 0.3 \end{bmatrix}$，则 A 的∞-范数等于____、1-范数等于____、F-范数等于______。

2. 1

3. 16/45

4.

5.

二、用变形的 Euler 公式

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + hk_2 \\ k_1 = f(x_i, y_i) \\ k_2 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}hk_1\right) \end{cases}$$

解初值问题

$$\begin{cases} y' = -2y, \quad x > 0 \\ y(0) = \eta \end{cases}$$

时，步长 h 应如何选取才能保证该方法绝对稳定？（本题 8 分）

在上述初值问题中，$f(x,y) = -2y$，所以

$$k_1 = -2y_i, \quad k_2 = -2\left(y_i + \frac{1}{2}hk_1\right) = -2y_i(1-h),$$

（3 分）

$$y_{i+1} = y_i + hk_2 = y_i - 2y_i h(1-h) = y_i[1-2h(1-h)],$$

递推得

$$y_i = [1-2h(1-h)]^i \eta, \quad i = 0,1,\cdots \qquad (3\text{ 分})$$

易知 $\lim\limits_{i\to\infty} y_i = 0$ 的充要条件为 $|1-2h(1-h)| < 1$，即 $0 < h < 1$.　　（2 分）

三、设 $f(x)\in C^2[a,b]$ 且 $f(a)=f(b)=0$，求证：

$$\max_{a\le x\le b}|f(x)|\le\frac{1}{8}(b-a)^2\max_{a\le x\le b}|f''(x)|.\qquad（本题 8 分）$$

以 $x=a$ 和 $x=b$ 为插值节点，建立 $f(x)$ 的不超过一次的插值多项式

$$L_1(x)=f(a)\frac{x-b}{a-b}+f(b)\frac{x-a}{b-a}\equiv 0\qquad (2 分)$$

应用插值余项公式有

$$\begin{aligned}|f(x)-L_1(x)|&=\left|\frac{1}{2!}f''(\xi)(x-a)(x-b)\right|\quad \xi\in(a,b)\\&\le\frac{1}{2}\max_{a\le x\le b}|f''(\xi)|\max_{a\le x\le b}|(x-a)(x-b)|\qquad (4 分)\\&\le\frac{1}{8}(b-a)^2\max_{a\le x\le b}|f''(x)|\end{aligned}$$

所以

$$\max_{a\le x\le b}|f(x)|\le\frac{1}{8}(b-a)^2\max_{a\le x\le b}|f''(x)|\qquad (2 分)$$

四、1、设线性方程组

$$\begin{cases} x_1+0.4x_2+0.4x_3=1 \\ 0.4x_1+x_2+0.8x_3=2 \\ 0.4x_1+0.8x_2+x_3=3 \end{cases}$$

试考察解此方程组的雅可比迭代法及高斯-塞德尔迭代法的收敛性。

2、证明方程组 $Ax=b$ 中，若 A 是实对称正定矩阵，则 Gauss-Seidel 迭代收敛。（本题 15 分）

1、(1)雅可比法的迭代矩阵

$$\boldsymbol{B}_J=\boldsymbol{D}^{-1}(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{U})=\begin{bmatrix} 0 & -0.4 & -0.4 \\ -0.4 & 0 & -0.8 \\ -0.4 & 0.8 & 0 \end{bmatrix} \quad (3\text{ 分})$$

$$|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}_J|=(\lambda-0.8)\left(\lambda^2+0.8\lambda-0.32\right)$$

$\rho(\boldsymbol{B}_J)=1.0928203>1$,故雅可比迭代法不收敛。 （1.5 分）

(2)高斯-塞德尔法的迭代矩阵

$$\boldsymbol{B}_S=(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{L})^{-1}\boldsymbol{U}=\begin{bmatrix} 0 & -0.4 & -0.4 \\ 0 & 0.16 & -0.64 \\ 0 & 0.032 & 0.672 \end{bmatrix} \quad (3\text{ 分})$$

$\rho(\boldsymbol{B}_s)\le\|\boldsymbol{B}_s\|_\infty=0.8<1$,故高斯-塞德尔迭代法收敛。 （1.5 分）

2、由 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{D}+\boldsymbol{L}+\boldsymbol{L}^T$ $\quad \boldsymbol{B}_{G-S}=-(\boldsymbol{D}+\boldsymbol{L})^{-1}\boldsymbol{L}^T$ （1 分）

设 λ 为 $\boldsymbol{B}_{G-S}$ 的任一特征值，x 为其特征向量，则

$$\begin{aligned} -(\boldsymbol{D}+\boldsymbol{L})^{-1}\boldsymbol{L}^T x&=\lambda x \\ \boldsymbol{L}^T x&=-\lambda(\boldsymbol{D}+\boldsymbol{L})x \end{aligned} \quad (1\text{ 分})$$

$$x^T\boldsymbol{L}^T x=-\lambda x^T(\boldsymbol{D}+\boldsymbol{L})x \quad (1\text{ 分})$$

$\boldsymbol{A}$ 正定，故 $p=x^T\boldsymbol{D}x>0$，记 $x^T\boldsymbol{L}^T x=a$，则有 （1 分）

$$x^T\boldsymbol{A}x=x^T(\boldsymbol{D}+\boldsymbol{L}+\boldsymbol{L}^T)x=p+a+a=p+2a>0 \quad (1\text{ 分})$$

$$|\lambda|=\left|\frac{x^T\boldsymbol{L}^T x}{x^T(\boldsymbol{D}+\boldsymbol{L})x}\right|=\left|\frac{a}{p+a}\right| \quad (1\text{ 分})$$

$$\lambda^2=\frac{a^2}{p^2+2pa+a^2}=\frac{a^2}{p(p+2a)+a^2}<1$$

迭代 $\boldsymbol{B}_{G-S}$ 谱半径 <1 得迭代收敛 （1 分）

五、设 $f(x)=x^2+3x+2, x\in[0,1]$，（1）试求 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上关于权函数为 1，$\Phi=\mathrm{span}\{1,x\}$ 的最佳平方逼近多项式。

（2）若取 $\Phi=\mathrm{span}\{1,x,x^2\}$，那么最佳平方逼近多项式是什么？（本题 15 分）

取

$\Phi=\mathrm{span}\{1,x\}, \quad x\in[0,1]$,

$$(1,f)=\int_0^1\left(x^2+3x+2\right)dx=\frac{23}{6}$$

$$(x,f)=\int_0^1 x\left(x^2+3x+2\right)dx=\frac{9}{4}$$

$$(1,1)=\int_0^1 dx=1, (1,x)=\int_0^1 xdx=\frac{1}{2} \quad \text{(6 分)}$$

$$(x,x)=\int_0^1 x^2dx=\frac{1}{3}$$

这样得到法方程组

$$\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_0\\ a_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{23}{6}\\ \frac{9}{4}\end{bmatrix} \quad \text{(2 分)}$$

解得

$$a_0=\frac{11}{6}, a_1=4 \quad \text{(2 分)}$$

则 $f(x)=x^2+3x+2$ 的最佳平方逼近多项式为

$$p_1(x)=4x+\frac{11}{6} \quad \text{(2 分)}$$

六、构造正交多项式并建立高斯型求积公式$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} f(x)\mathrm{d}x \approx A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1)$，其中[redacted]权函数，并求积分$I=\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} e^x \mathrm{d}x$的值，结果保留小数点后三位。（本题 15 分）

解：构造正交多项式$\varphi_2(x) = x^2 + bx + c$ （1 分）

所以，

$$(\varphi_2,\ 1)=0 \ \Rightarrow\ \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\left(x^2+bx+c\right)dx=0$$

$$(\varphi_2,\ x)=0 \ \Rightarrow\ \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x}}\left(x^2+bx+c\right)dx=0$$

（2 分）

所以，

$$\begin{cases} \frac{2}{5}+\frac{2b}{3}+2c=0 \\ \frac{2}{7}+\frac{2b}{5}+\frac{2c}{3}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3+5b+15c=0 \\ 15+21b+35c=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=-\frac{6}{7} \\ c=\frac{3}{35} \end{cases}$$

（4 分）

所以，

$\varphi_2(x) = x^2 - \frac{6}{7}x + \frac{3}{35}$ （1 分）

所以，

$x_0 = \frac{3}{7} - \frac{2}{7}\sqrt{\frac{6}{5}} \approx 0.116,\quad x_1 = \frac{3}{7} + \frac{2}{7}\sqrt{\frac{6}{5}} \approx 0.742$ （2 分）

公式对$f(x)=1, x$准确成立，

$$\begin{cases} 2 = A_0 + A_1 \\ \frac{2}{3} = A_0 x_0 + A_1 x_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_0 = 1.306 \\ A_1 = 0.694 \end{cases}$$

（2 分）

所以，高斯型求积公式为

$1.306 \times f(0.116) + 0.694 \times f(0.742)$ （1 分）

所以，

$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} e^x \mathrm{d}x \approx 1.306 \times e^{0.116} + 0.694 \times e^{0.742} \approx 2.924$ （1 分）

1、基于列主元 Gauss 消去法，用 LU 矩阵分解法解线性方程组。判断是否能使用 Cholesky 分解法求解此线性方程组并简要陈述原因。

(结果精确到小数点后三位，计算过程用分数表示)

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

2、设 $Ax=b$，其中 $A\in R^{n\times n}$ 为非奇异矩阵，证明：

(1) A^TA 为对称正定矩阵

$$L=\begin{bmatrix} 1 & & \\ \frac{1}{2} & 1 & \\ -\frac{1}{2} & -\frac{5}{7} & 1 \end{bmatrix}$$ (2 分)

$$U=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ & \frac{7}{2} & \frac{1}{2} \\ & & \frac{27}{7} \end{bmatrix}$$ (2 分)

$$P=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$ (1 分)

由 $\begin{bmatrix} 1 & & \\ \frac{1}{2} & 1 & \\ -\frac{1}{2} & -\frac{5}{7} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix}$ (1 分)

得 $y_1=4,\quad y_2=4,\quad y_3=9.8571$

由 $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ & \frac{7}{2} & \frac{1}{2} \\ & & \frac{27}{7} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$ (1 分)

得 $x_1=1.111,\quad x_2=0.778,\quad x_3=2.556$ (1 分)

矩阵 A 不是对称正定矩阵 (1 分)

2、(1) 因为 $(A^TA)^T=A^T(A^T)^T=A^TA$

故 A^TA 为对称矩阵

又 A 非奇异，故对任何向量 $x\neq 0$，有 $Ax\neq 0$，从而有

$$x^TA^TAx=(Ax)^T(Ax)>0$$

即 A^TA 为对称正定矩阵 (2 分)