

一、选择题（每题 2 分，共 10 分）

1. 数值分析中通常会涉及到以下哪两种误差？( )

- A. 模型误差、舍入误差      B. 观测误差、截断误差  
C. 截断误差、舍入误差      D. 模型误差、观测误差

2. 由四舍五入得到的近似数 0.0024 有 ( ) 位有效数字。

- A. 2      B. 3      C. 4      D. 5

3. 用列选主元高斯消去法解线性方程组  $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 4x_3 = 1 \\ -x_1 + 2x_2 - 9x_3 = 0 \\ -4x_1 - 3x_2 + x_3 = -1 \end{cases}$ ，第一步消去  $x_1$  时应选择主元为 ( )。

- A. -9      B. -4      C. 3      D. -1

4. 已知方程  $1-x-\sin x=0$  在区间  $[0, 1]$  内有一个根，若采用二分法求该根，且要求误差不超过  $0.5 \times 10^{-4}$  时，那么区间二分的次数至少应为 ( )

- A. 10      B. 15      C. 18      D. 20

5. 设矩阵  $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & -8 & 2 \end{pmatrix}$ ，那么  $\mathbf{A}$  的  $\infty$ -范数  $\|\mathbf{A}\|_{\infty}$  为 ( )。

- ⇒ A. 14      B. 13      C.  $\sqrt{112}$       D. 10.13

1.C 2.A 3.B 4.B 5.B



一、填空题（每空 2 分，共 24 分）。←

2. 函数  $f(x)=x^7+x^4+4x+1$ , 那么差商  $f[2^0, 2^1, \dots, 2^7]=\underline{\hspace{2cm}}$ . ←

3. 已知  $n=4$  时牛顿-柯特斯求积公式的柯特斯系数

$C_0^{(4)}=\frac{7}{90}, C_1^{(4)}=\frac{16}{45}, C_2^{(4)}=\frac{2}{15}, C_4^{(4)}=\frac{7}{90}$ , 那么  $C_3^{(4)}=\underline{\hspace{2cm}}$ . ←

4. 对于插值型求积公式，当求积节点数目为  $n+1$  时，其代数精度至少可达        次；至多只能达到        次。←

5. 设  $A=\begin{bmatrix} 0.6 & 0.5 \\ 0.1 & 0.3 \end{bmatrix}$ , 则 A 的  $\infty$ -范数等于       、1-范数等于       、←

F-范数等于       . ←

2. 1

3.  $16/45$

4.

5.

## 二、用变形的 Euler 公式<sup>←</sup>

$$\begin{cases} \underline{y_{i+1} = y_i + hk_2} \\ k_1 = f(x_i, y_i) \\ k_2 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}hk_1\right) \end{cases}$$

解初值问题<sup>←</sup>

$$\begin{cases} y' = -2y, & x > 0 \\ y(0) = \eta \end{cases}$$

时，步长  $h$  应如何选取才能保证该方法绝对稳定？（本题 8 分）

在上述初值问题中， $f(x, y) = -2y$ ，所以<sup>←</sup>

$$\begin{aligned} k_1 &= -2y_i, \quad k_2 = -2\left(y_i + \frac{1}{2}hk_1\right) = -2y_i(1-h), \\ \hat{y}_{i+1} &= y_i + hk_2 = y_i - 2y_i h(1-h) = y_i[1 - 2h(1-h)], \end{aligned} \quad (3 \text{ 分})$$

递推得<sup>←</sup>

$$y_i = [1 - 2h(1-h)]^i \eta, \quad i = 0, 1, \dots \quad (3 \text{ 分})$$

易知  $\lim_{i \rightarrow \infty} y_i = 0$  的充要条件为  $|1 - 2h(1-h)| < 1$ ，即  $0 < h < 1$ 。 (2 分)

三、设  $f(x) \in C^2[a, b]$  且  $f(a) = f(b) = 0$ , 求证:  $\leftarrow$

$$\max_{a \leq x \leq b} |f(x)| \leq \frac{1}{8}(b-a)^2 \max_{a \leq x \leq b} |f''(x)|. \quad (\text{本题 8 分})$$

以  $x=a$  和  $x=b$  为插值节点, 建立  $f(x)$  的不超过一次的插值多项式  $\leftarrow$

$$L_1(x) = f(a) \frac{x-a}{a-b} + f(b) \frac{x-b}{b-a} \equiv 0 \quad (2 \text{ 分}) \leftarrow$$

应用插值余项公式有  $\leftarrow$

$$\begin{aligned} |f(x) - L_1(x)| &= \left| \frac{1}{2!} f''(\xi)(x-a)(x-b) \right| \quad \xi \in (a, b) \\ &\leq \frac{1}{2} \max_{a \leq x \leq b} |f''(\xi)| \max_{a \leq x \leq b} |(x-a)(x-b)| \quad (4 \text{ 分}) \\ &\leq \frac{1}{8} (b-a)^2 \max_{a \leq x \leq b} |f''(x)| \end{aligned}$$

所以  $\leftarrow$

$$\max_{a \leq x \leq b} |f(x)| \leq \frac{1}{8} (b-a)^2 \max_{a \leq x \leq b} |f''(x)| \quad (2 \text{ 分}) \leftarrow$$

#### 四、1、设线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 0.4x_2 + 0.4x_3 = 1 \\ 0.4x_1 + x_2 + 0.8x_3 = 2 \\ 0.4x_1 + 0.8x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$$

试考察解此方程组的雅可比迭代法及高斯-塞德尔迭代法的收敛性。

2、证明方程组  $Ax=b$  中, 若  $A$  是实对称正定矩阵, 则 Gauss-Seidel 迭代收敛。(本题 15 分)

1、(1)雅可比法的迭代矩阵

$$\mathbf{B}_J = \mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L} + \mathbf{U}) = \begin{bmatrix} 0 & -0.4 & -0.4 \\ -0.4 & 0 & -0.8 \\ -0.4 & 0.8 & 0 \end{bmatrix} \quad (3 \text{ 分})$$

$$|\lambda I - \mathbf{B}_J| = (\lambda - 0.8)(\lambda^2 + 0.8\lambda - 0.32)$$

$\rho(\mathbf{B}_J) = 1.0928203 > 1$ , 故雅可比迭代法不收敛。 (1.5 分)

(2)高斯-塞德尔法的迭代矩阵

$$\mathbf{B}_S = (\mathbf{D} - \mathbf{L})^{-1}\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 0 & -0.4 & -0.4 \\ 0 & 0.16 & -0.64 \\ 0 & 0.032 & 0.672 \end{bmatrix} \quad (3 \text{ 分})$$

$\rho(\mathbf{B}_S) \leq \|\mathbf{B}_S\|_{\infty} = 0.8 < 1$ , 故高斯-塞德尔迭代法收敛。 (1.5 分)

2、由  $A = \mathbf{D} + \mathbf{L} + \mathbf{L}^T \quad \mathbf{B}_{G-S} = -(\mathbf{D} + \mathbf{L})^{-1}\mathbf{L}^T \quad (1 \text{ 分})$

设  $\lambda$  为  $\mathbf{B}_{G-S}$  的任一特征值,  $x$  为其特征向量, 则

$$-(\mathbf{D} + \mathbf{L})^{-1}\mathbf{L}^T x = \lambda x \quad (1 \text{ 分})$$

$$\mathbf{L}^T x = -\lambda(\mathbf{D} + \mathbf{L})x$$

$$x^T \mathbf{L}^T x = -\lambda x^T (\mathbf{D} + \mathbf{L})x \quad (1 \text{ 分})$$

$A$  正定, 故  $p = x^T \mathbf{D} x > 0$ , 记  $x^T \mathbf{L}^T x = a$ , 则有 (1 分)

$$x^T A x = x^T (\mathbf{D} + \mathbf{L} + \mathbf{L}^T) x = p + a + a = p + 2a > 0 \quad (1 \text{ 分})$$

$$|\lambda| = \left| \frac{x^T \mathbf{L}^T x}{x^T (\mathbf{D} + \mathbf{L}) x} \right| = \left| \frac{a}{p+a} \right| \quad (1 \text{ 分})$$

$$\lambda^2 = \frac{a^2}{p^2 + 2pa + a^2} = \frac{a^2}{p(p+2a)+a^2} < 1 \quad (1 \text{ 分})$$

迭代  $\mathbf{B}_{G-S}$  谱半径  $< 1$  得迭代收敛 (1 分)

五、设  $f(x) = x^2 + 3x + 2$ ,  $x \in [0,1]$ , (1) 试求  $f(x)$  在  $[0,1]$  上关于权函数为 1,

$\Phi = \text{span}\{1, x\}$  的最佳平方逼近多项式。 ↵

(2) 若取  $\Phi = \text{span}\{1, x, x^2\}$ , 那么最佳平方逼近多项式是什么? (本题 15 分)

取 ↵

$$\Phi = \text{span}\{1, x\}, \quad x \in [0,1],$$

$$(1, f) = \int_0^1 (x^2 + 3x + 2) dx = \frac{23}{6}$$

$$(x, f) = \int_0^1 x(x^2 + 3x + 2) dx = \frac{9}{4} \quad (6 \text{ 分})$$

$$(1, 1) = \int_0^1 dx = 1, (1, x) = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$$

$$(x, x) = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$$

这样得到法方程组 ↵

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{23}{6} \\ \frac{9}{4} \end{bmatrix} \quad (2 \text{ 分})$$

解得 ↵

$$a_0 = \frac{11}{6}, a_1 = 4 \quad (2 \text{ 分})$$

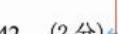
则  $f(x) = x^2 + 3x + 2$  的最佳平方逼近多项式为 ↵

$$p_1(x) = 4x + \frac{11}{6} \quad (2 \text{ 分})$$

六、构造正交多项式并建立高斯型求积公式  $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} f(x) dx \approx A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1)$ , 其中

权函数, 并求积分  $I = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} e^x dx$  的值, 结果保留小数点后三位。(本题 15 分) 

解: 构造正交多项式  $\varphi_2(x) = x^2 + bx + c$  (1 分) 

所以, 

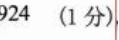
$$(\varphi_2, 1) = 0 \Rightarrow \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} (x^2 + bx + c) dx = 0 \quad (2 \text{ 分}) \quad \text{}$$

$$(\varphi_2, x) = 0 \Rightarrow \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x}} (x^2 + bx + c) dx = 0 \quad \text{$$

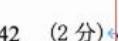
所以, 

$$\begin{cases} \frac{2}{5} + \frac{2b}{3} + 2c = 0 \\ \frac{2}{7} + \frac{2b}{5} + \frac{2c}{3} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 + 5b + 15c = 0 \\ 15 + 21b + 35c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -\frac{6}{7} \\ c = \frac{3}{35} \end{cases} \quad (4 \text{ 分})$$

所以, 

$$\varphi_2(x) = x^2 - \frac{6}{7}x + \frac{3}{35} \quad (1 \text{ 分}) \quad \text{$$

所以, 

$$x_0 = \frac{3}{7} - \frac{2}{7}\sqrt{\frac{6}{5}} \approx 0.116, \quad x_1 = \frac{3}{7} + \frac{2}{7}\sqrt{\frac{6}{5}} \approx 0.742 \quad (2 \text{ 分}) \quad \text{$$

公式对  $f(x)=1, x$  准确成立, 

$$\begin{cases} 2 = A_0 + A_1 \\ \frac{2}{3} = A_0 x_0 + A_1 x_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_0 = 1.306 \\ A_1 = 0.694 \end{cases} \quad (2 \text{ 分}) \quad \text{$$

所以, 高斯型求积公式为 

$$1.306 \times f(0.116) + 0.694 \times f(0.742) \quad (1 \text{ 分}) \quad \text{$$

所以, 

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} e^x dx \approx 1.306 \times e^{0.116} + 0.694 \times e^{0.742} \approx 2.924 \quad (1 \text{ 分})$$

1、基于列主元 Gauss 消去法，用 LU 矩阵分解法解线性方程组。判断是否能使用 Cholesky 分解法求解此线性方程组并简要陈述原因。  
 (结果精确到小数点后三位，计算过程用分数表示)

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

2、设  $Ax=b$ ，其中  $A \in R^{n \times n}$  为非奇异矩阵，证明：

(1)  $A^T A$  为对称正定矩阵

$$L = \begin{bmatrix} 1 & & \\ \frac{1}{2} & 1 & \\ -\frac{1}{2} & -\frac{5}{7} & 1 \end{bmatrix} \quad (2 \text{ 分})$$

$$U = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ \frac{7}{2} & \frac{1}{2} & \\ & \frac{27}{7} & \end{bmatrix} \quad (2 \text{ 分})$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (1 \text{ 分})$$

$$\text{由 } \begin{bmatrix} 1 & & \\ \frac{1}{2} & 1 & \\ -\frac{1}{2} & -\frac{5}{7} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix} \quad (1 \text{ 分})$$

$$\text{得 } y_1=4, \quad y_2=4, \quad y_3=9.857 \quad (1 \text{ 分})$$

$$\text{由 } \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ \frac{7}{2} & \frac{1}{2} & \\ & \frac{27}{7} & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \quad (1 \text{ 分})$$

$$\text{得 } x_1=1.111, \quad x_2=0.778, \quad x_3=2.556 \quad (1 \text{ 分})$$

矩阵  $A$  不是对称正定矩阵 (1 分)

2、(1) 因为  $(A^T A)^T = A^T (A^T)^T = A^T A$

故  $A^T A$  为对称矩阵

又  $A$  非奇异，故对任何向量  $x \neq 0$ ，有  $Ax \neq 0$ ，从而有

$$x^T A^T A x = (Ax)^T (Ax) > 0$$

即  $A^T A$  为对称正定矩阵 (2 分)