第四章 机械振动

一、选择题

第 173 题

【3001】把单摆摆球从平衡位置向位移正方向拉开，使摆线与竖直方向成一微小角度 θ，然后由静止放手任其振动，从放手时开始计时。若用余弦函数表示其运动方程，则该单摆振动的初相为

(A) π (B) $\pi/2$ (C) 0 (D) θ

第 174 题

【3002】两个质点各自作简谐振动，它们的振幅相同、周期相同。第一个质点的振动方程为 $x_1 = A\cos(\omega t+\alpha)$。当第一个质点从相对于其平衡位置的正位移处回到平衡位置时，第二个质点正在最大正位移处。则第二个质点的振动方程为：

(A) $x_2 = A\cos\left(\omega t+\alpha+\frac{1}{2}\pi\right)$ (B) $x_2 = A\cos\left(\omega t+\alpha-\frac{1}{2}\pi\right)$

(C) $x_2 = A\cos\left(\omega t+\alpha-\frac{3}{2}\pi\right)$ (D) $x_2 = A\cos\left(\omega t+\alpha+\pi\right)$

第 175 题

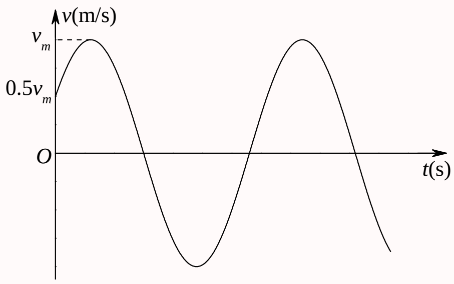
【3007】一质量为 m 的物体挂在劲度系数为 k 的轻弹簧下面，振动角频率为 ω。若把此弹簧分割成二等份，将物体 m 挂在分割后的一根弹簧上，则振动角频率是

(A) 2ω (B) $\sqrt{2}\omega$ (C) $\omega/\sqrt{2}$ (D) $\omega/2$

第 176 题

【3396】一质点作简谐振动。其运动速度与时间的曲线如图所示。若质点的振动规律用余弦函数描述，则其初相应为

(A) $\pi/6$ (B) $5\pi/6$ (C) $-5\pi/6$ (D) $-\pi/6$ (E) $-2\pi/3$



第 177 题

【3552】一个弹簧振子和一个单摆（只考虑小幅度摆动），在地面上的固有振动周期分别为 T_1 和 T_2。将它们拿到月球上去，相应的周期分别为 T_1' 和 T_2'。则有

(A) $T_1' > T_1$ 且 $T_2' > T_2$　　(B) $T_1' < T_1$ 且 $T_2' < T_2$

(C) $T_1' = T_1$ 且 $T_2' = T_2$　　(D) $T_1' = T_1$ 且 $T_2' > T_2$

第 178 题

【5178】一质点沿 x 轴作简谐振动，振动方程为 $x = 4 \times 10^{-2} \cos\left(2\pi t + \frac{1}{3}\pi\right)$(SI)。从 $t = 0$ 时刻起，到质点位置在 $x = -2$ cm 处，且向 x 轴正方向运动的最短时间间隔为

(A) $\frac{1}{8}$ s　(B) $\frac{1}{6}$ s　(C) $\frac{1}{4}$ s　(D) $\frac{1}{3}$ s　(E) $\frac{1}{2}$ s

第 179 题

【5179】一弹簧振子，重物的质量为 m，弹簧的劲度系数为 k，该振子作振幅为 A 的简谐振动。当重物通过平衡位置且向规定的正方向运动时，开始计时。则其振动方程为：

(A) $x = A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \frac{1}{2}\pi\right)$　(B) $x = A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t - \frac{1}{2}\pi\right)$　(C) $x = A\cos\left(\sqrt{\frac{m}{k}}t + \frac{1}{2}\pi\right)$

(D) $x = A\cos\left(\sqrt{\frac{m}{k}}t - \frac{1}{2}\pi\right)$　(E) $x = A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$

第 180 题

【5312】一质点在 x 轴上作简谐振动，振辐 $A = 4$ cm，周期 $T = 2$ s，其平衡位置取作坐标原点。若 $t = 0$ 时刻质点第一次通过 $x = -2$ cm 处，且向 x 轴负方向运动，则质点第二次通过 $x = -2$ cm 处的时刻为

(A) 1 s　(B) (2/3) s　(C) (4/3) s　(D) 2 s

第 181 题

【5501】一物体作简谐振动，振动方程为 $x = A\cos\left(\omega t + \frac{1}{4}\pi\right)$。在 $t = T/4$（T 为周期）时刻，物体的加速度为

(A) $-\frac{1}{2}\sqrt{2}A\omega^2$　(B) $\frac{1}{2}\sqrt{2}A\omega^2$　(C) $-\frac{1}{2}\sqrt{3}A\omega^2$　(D) $\frac{1}{2}\sqrt{3}A\omega^2$

第 182 题

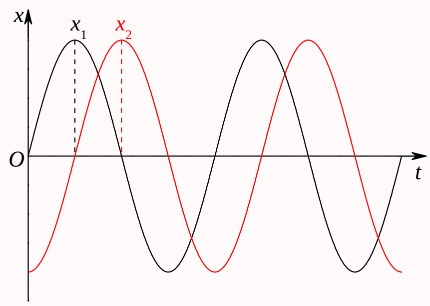
【5502】一质点作简谐振动，振动方程为 $x = A\cos(\omega t + \varphi)$。在时间 $t = T/2$（T 为周期）时，质点的速度为

(A) $-A\omega\sin\varphi$　(B) $A\omega\sin\varphi$　(C) $-A\omega\cos\varphi$　(D) $A\omega\cos\varphi$

第 183 题

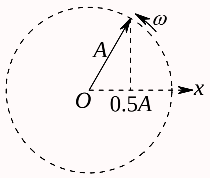
【3030】两个同周期简谐振动曲线如图所示。x_1 的相位比 x_2 的相位

(A) 落后 $\pi/2$　(B) 超前 $\pi/2$　(C) 落后 π　(D) 超前 π

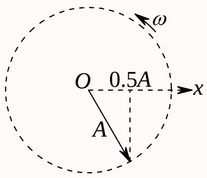


第 184 题

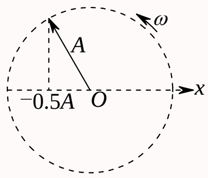
【3042】一个质点作简谐振动，振幅为 A，在起始时刻质点的位移为 $\frac{1}{2}A$，且向 x 轴的正方向运动，代表此简谐振动的旋转矢量图为



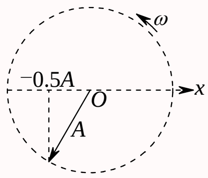
(A)



(B)



(C)



(D)

第 185 题

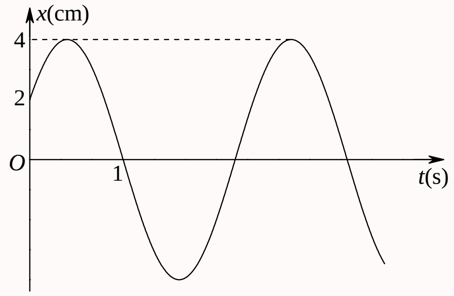
【3254】一质点作简谐振动，周期为 T。质点由平衡位置向 x 轴正方向运动时，由平衡位置到二分之一最大位移这段路程所需要的时间为

(A) $T/4$　(B) $T/6$　(C) $T/8$　(D) $T/12$

第 186 题

【3270】一简谐振动曲线如图所示。则振动周期是

(A) 2.62 s (B) 2.40 s (C) 2.20 s (D) 2.00 s

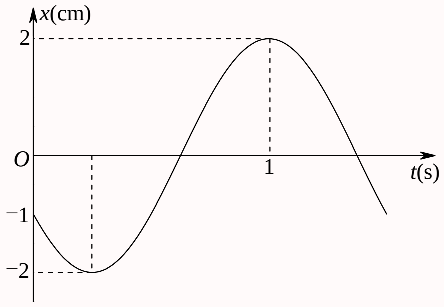


第 187 题

【5186】已知某简谐振动的振动曲线如图所示，位移的单位为厘米，时间单位为秒。则此简谐振动的振动方程为：

(A) $x = 2\cos\left(\frac{2}{3}\pi t + \frac{2}{3}\pi\right)$ (B) $x = 2\cos\left(\frac{2}{3}\pi t - \frac{2}{3}\pi\right)$ (C) $x = 2\cos\left(\frac{4}{3}\pi t + \frac{2}{3}\pi\right)$

(D) $x = 2\cos\left(\frac{4}{3}\pi t - \frac{2}{3}\pi\right)$ (E) $x = 2\cos\left(\frac{4}{3}\pi t - \frac{1}{4}\pi\right)$



第 188 题

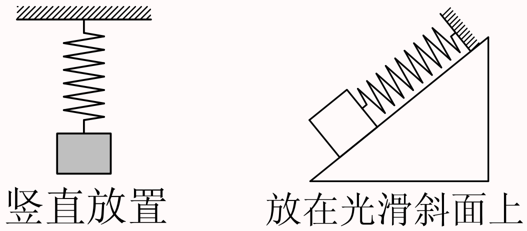
【3023】一弹簧振子，当把它水平放置时，它可以作简谐振动。若把它竖直放置或放在固定的光滑斜面上，试判断下面哪种情况是正确的：

(A) 竖直放置可作简谐振动，放在光滑斜面上不能作简谐振动

(B) 竖直放置不能作简谐振动，放在光滑斜面上可作简谐振动

(C) 两种情况都可作简谐振动

(D) 两种情况都不能作简谐振动



第 189 题

【3028】一弹簧振子作简谐振动，总能量为 E_1，如果简谐振动振幅增加为原来的两倍，重物的质量增为原来的四倍，则它的总能量 E_2 变为

(A) $E_1/4$ (B) $E_1/2$ (C) $2E_1$ (D) $4E_1$

第 190 题

【3393】当质点以频率 ν 作简谐振动时，它的动能的变化频率为

(A) 4ν (B) 2ν (C) ν (D) $\frac{1}{2}\nu$

第 191 题

【3560】弹簧振子在光滑水平面上作简谐振动时，弹性力在半个周期内所作的功为

(A) kA^2 (B) $\frac{1}{2}kA^2$ (C) $\frac{1}{4}kA^2$ (D) 0

第 192 题

【5182】一弹簧振子作简谐振动，当位移为振幅的一半时，其动能为总能量的

(A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (D) $\frac{3}{4}$ (E) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

第 193 题

【5504】一物体作简谐振动，振动方程为 $x = A\cos\left(\omega t + \frac{1}{2}\pi\right)$。则该物体在 $t = 0$ 时刻的动能与 $t = T/8$（T 为振动周期）时刻的动能之比为：

(A) 1 : 4 (B) 1 : 2 (C) 1 : 1 (D) 2 : 1 (E) 4 : 1

第 194 题

【5505】一质点作简谐振动，其振动方程为 $x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$。在求质点的振动动能时，得出下面 5 个表达式：(1) $\frac{1}{2}m\omega^2A^2\sin^2(\omega t + \varphi_0)$；(2) $\frac{1}{2}m\omega^2A^2\cos^2(\omega t + \varphi_0)$；(3) $\frac{1}{2}kA^2\sin(\omega t + \varphi_0)$；(4) $\frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t + \varphi_0)$；(5) $\frac{2\pi^2}{T^2}mA^2\sin^2(\omega t + \varphi_0)$；其中 m 是质点的质量，k 是弹簧的劲度系数，T 是振动的周期。这些表达式中

(A) (1)，(4) 是对的 (B) (2)，(4) 是对的 (C) (1)，(5) 是对的

(D) (1)，(3)，(5) 是对的 (E) (2)，(5) 是对的

第 195 题

【3008】一长度为 l、劲度系数为 k 的均匀轻弹簧分割成长度分别为 l_1 和 l_2 的两部分，且 $l_1 = nl_2$，n 为整数。则相应的劲度系数 k_1 和 k_2 为

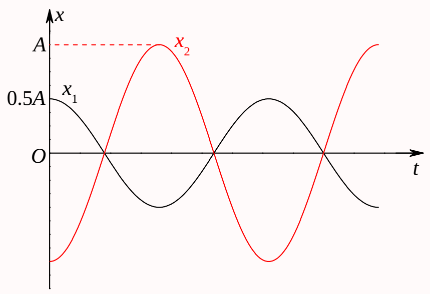
(A) $k_1 = \dfrac{nk}{n+1}$，$k_2 = (n+1)k$　(B) $k_1 = \dfrac{(n+1)k}{n}$，$k_2 = \dfrac{k}{n+1}$

(C) $k_1 = \dfrac{(n+1)k}{n}$，$k_2 = (n+1)k$　(D) $k_1 = \dfrac{nk}{n+1}$，$k_2 = \dfrac{k}{n+1}$

第 196 题

【3562】图中所画的是两个简谐振动的振动曲线。若这两个简谐振动可叠加，则合成的余弦振动的初相为

(A) $\dfrac{3}{2}\pi$　(B) π　(C) $\dfrac{1}{2}\pi$　(D) 0



二、填空题

第 197 题

【3009】一弹簧振子作简谐振动，振幅为 A，周期为 T，其运动方程用余弦函数表示。若 $t=0$ 时，(1) 振子在负的最大位移处，则初相为_____；(2) 振子在平衡位置向正方向运动，则初相为_____；(3) 振子在位移为 $A/2$ 处，且向负方向运动，则初相为_____。

第 198 题

【3390】一质点作简谐振动，速度最大值 $v_m = 5$ cm/s，振幅 $A = 2$ cm。若令速度具有正最大值的那一时刻为 $t = 0$，则振动表达式为_____。

第 199 题

【3557】一质点沿 x 轴作简谐振动，振动范围的中心点为 x 轴的原点。已知周期为 T，振幅为 A。(1) 若 $t=0$ 时质点过 $x=0$ 处且朝 x 轴正方向运动，则振动方程为 $x=$_____。(2) 若 $t=0$ 时质点处于 $x=\dfrac{1}{2}A$ 处且向 x 轴负方向运动，则振动方程为 $x=$_____。

第 200 题

【3816】一质点沿 x 轴以 $x=0$ 为平衡位置作简谐振动，频率为 0.25 Hz。$t=0$ 时，$x=-0.37$ cm 而速度等于零，则振幅是______，振动的数值表达式为______。

第 201 题

【3817】一简谐振动的表达式为 $x=A\cos(3t+\varphi_0)$，已知 $t=0$ 时的初位移为 0.04 m，初速度为 0.09 m/s，则振幅 $A=$______，初相 $\varphi_0=$______。

第 202 题

【3818】两个弹簧振子的周期都是 0.4 s，设开始时第一个振子从平衡位置向负方向运动，经过 0.5 s 后，第二个振子才从正方向的端点开始运动，则这两振动的相位差为______。

第 203 题

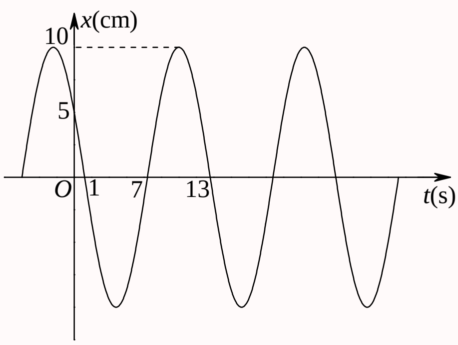
【3819】两质点沿水平 x 轴线作相同频率和相同振幅的简谐振动，平衡位置都在坐标原点。它们总是沿相反方向经过同一个点，其位移 x 的绝对值为振幅的一半，则它们之间的相位差为______。

第 204 题

【3820】将质量为 0.2 kg 的物体，系于劲度系数 $k=19$ N/m 的竖直悬挂的弹簧的下端。假定在弹簧不变形的位置将物体由静止释放，然后物体作简谐振动，则振动频率为______，振幅为______。

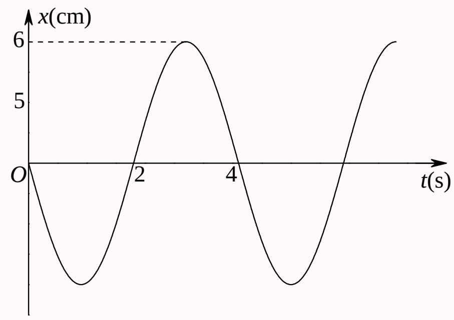
第 205 题

【3033】一简谐振动用余弦函数表示，其振动曲线如图所示，则此简谐振动的三个特征量为 $A=$______；$\omega=$______；$\varphi_0=$______。



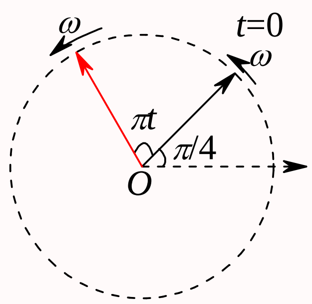
第 206 题

【3041】一简谐振动曲线如图所示，则由图可确定在 $t=2$ s 时刻质点的位移为______，速度为______。



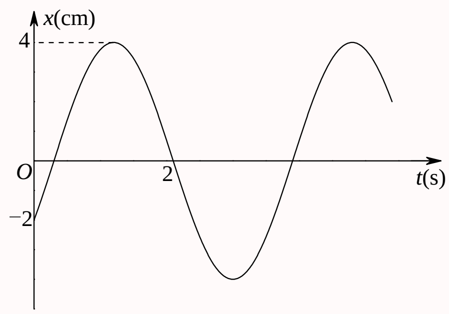
第 207 题

【3046】一简谐振动的旋转矢量图如图所示，振幅矢量长 2 cm，则该简谐振动的初相为______。振动方程为______。



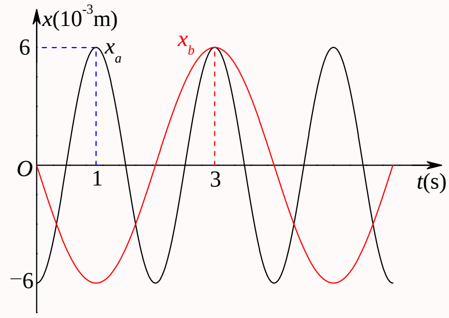
第 208 题

【3398】一质点作简谐振动。其振动曲线如图所示。根据此图，它的周期 $T =$______，用余弦函数描述时初相 $\varphi_0 =$______。



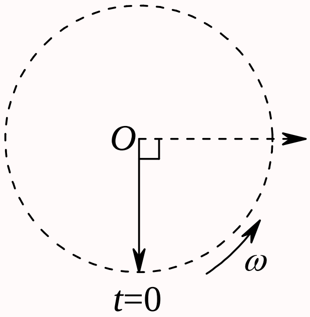
第 209 题

【3399】已知两简谐振动曲线如图所示，则这两个简谐振动方程（余弦形式）分别为______ 和______。



第 210 题

【3567】图中用旋转矢量法表示了一个简谐振动。旋转矢量的长度为 0.04 m，旋转角速度 $\omega = 4\pi$ rad/s。此简谐振动以余弦函数表示的振动方程为 $x =$_____(SI)。



第 211 题

【3029】一物块悬挂在弹簧下方作简谐振动，当这物块的位移等于振幅的一半时，其动能是总能量的_____。(设平衡位置处势能为零)。当这物块在平衡位置时，弹簧的长度比原长长 Δl，这一振动系统的周期为_____。

第 212 题

【3268】一系统作简谐振动，周期为 T，以余弦函数表达振动时，初相为零。在 $0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}T$ 范围内，系统在 $t =$_____ 时刻动能和势能相等。

第 213 题

【3561】质量为 m 物体和一个轻弹簧组成弹簧振子，其固有振动周期为 T。当它作振幅为 A 自由简谐振动时，其振动能量 $E =$_____。

第 214 题

【3821】一弹簧振子系统具有 1.0 J 的振动能量，0.10 m 的振幅和 1.0 m/s 的最大速率，则弹簧的劲度系数为_____，振子的振动频率为_____。

第 215 题

【3401】两个同方向同频率的简谐振动，其振动表达式分别为：$x_1 = 6\times10^{-2}\cos\left(5t+\dfrac{1}{2}\pi\right)$(SI)，$x_2 = 2\times10^{-2}\cos(\pi-5t)$(SI)，它们的合振动的振辐为______，初相为______。

第 216 题

【3839】两个同方向的简谐振动，周期相同，振幅分别为 $A_1 = 0.05$ m 和 $A_2 = 0.07$ m，它们合成为一个振幅为 $A = 0.09$ m 的简谐振动。则这两个分振动的相位差______rad。

第 217 题

【5314】一质点同时参与了两个同方向的简谐振动，它们的振动方程分别为 $x_1 = 0.05\cos\left(\omega t+\dfrac{1}{4}\pi\right)$(SI)，$x_2 = 0.05\cos\left(\omega t+\dfrac{9}{12}\pi\right)$(SI)，其合成运动的运动方程为 $x =$______。

第 218 题

【5315】两个同方向同频率的简谐振动，其合振动的振幅为 20 cm，与第一个简谐振动的相位差为 $\varphi-\varphi_1 = \pi/6$。若第一个简谐振动的振幅为 $10\sqrt{3}$ cm $= 17.3$ cm，则第二个简谐振动的振幅为______cm，第一、二两个简谐振动的相位差 $\varphi_1-\varphi_2$ 为______。

三、计算题

第 219 题

【3017】一质点沿 x 轴作简谐振动，其角频率 $\omega = 10$ rad/s。试分别写出以下两种初始状态下的振动方程：(1) 其初始位移 $x_0 = 7.5$ cm，初始速度 $v_0 = 75.0$ cm/s；(2) 其初始位移 $x_0 = 7.5$ cm，初始速度 $v_0 = -75.0$ cm/s。

第 220 题

【3018】一轻弹簧在 60 N 的拉力下伸长 30 cm。现把质量为 4 kg 的物体悬挂在该弹簧的下端并使之静止，再把物体向下拉 10 cm，然后由静止释放并开始计时。求：(1) 物体的振动方程；(2) 物体在平衡位置上方 5 cm 时弹簧对物体的拉力；(3) 物体从第一次越过平衡位置时刻起到它运动到上方 5 cm 处所需要的最短时间。

第 221 题

【5191】一物体作简谐振动，其速度最大值 $v_m = 3\times10^{-2}$ m/s，其振幅 $A = 2\times10^{-2}$ m。若 $t = 0$ 时，物体位于平衡位置且向 x 轴的负方向运动。求：(1) 振动周期 T；(2) 加速度的最大值 a_m；(3) 振动方程的数值式。

第 222 题

【3391】在一竖直轻弹簧的下端悬挂一小球，弹簧被拉长 $l_0 = 1.2$ cm 而平衡。再经拉动后，该小球在竖直方向作振幅为 $A = 2$ cm 的振动，试证此振动为简谐振动；选小球在正最大位移处开始计时，写出此振动的数值表达式。

第 223 题

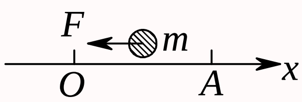
【3835】在竖直悬挂的轻弹簧下端系一质量为 100 g 的物体，当物体处于平衡状态时，再对物体加一拉力使弹簧伸长，然后从静止状态将物体释放。已知物体在 32 s 内完成 48 次振动，振幅为 5 cm。(1) 上述的外加拉力是多大？(2) 当物体在平衡位置以下 1 cm 处时，此振动系统的动能和势能各是多少？

第 224 题

【3836】在一竖直轻弹簧下端悬挂质量 $m = 5$ g 的小球，弹簧伸长 $\Delta l = 1$ cm 而平衡。经推动后，该小球在竖直方向作振幅为 $A = 4$ cm 的振动，求：(1) 小球的振动周期；(2) 振动能量。

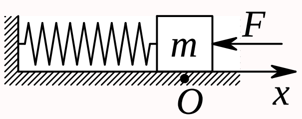
第 225 题

【5506】一物体质量 $m = 2$ kg，受到的作用力为 $F = -8x$(SI)。若该物体偏离坐标原点 O 的最大位移为 $A = 0.10$ m，则物体动能的最大值为多少？



第 226 题

【5511】如图，有一水平弹簧振子，弹簧的劲度系数 $k = 24$ N/m，重物的质量 $m = 6$ kg，重物静止在平衡位置上。设以一水平恒力 $F = 10$ N 向左作用于物体（不计摩擦），使之由平衡位置向左运动了 0.05 m 时撤去力 F。当重物运动到左方最远位置时开始计时，求物体的运动方程。



第四章 机械振动

一、选择题

第 173 题

【3001】把单摆摆球从平衡位置向位移正方向拉开，使摆线与竖直方向成一微小角度 θ，然后由静止放手任其振动，从放手时开始计时。若用余弦函数表示其运动方程，则该单摆振动的初相为

(A) π　　(B) $\pi/2$　　(C) 0　　(D) θ

解析

【答案】C

【解析】简谐振动的特征量，相位。

用余弦函数表示的简谐振动的表达式一般可以写成

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

一般地，对于单摆，离开平衡位置的位移 x 就是摆线与竖直方向的夹角 θ，而振幅 A 就是摆线与竖直方向的最大夹角 θ_0，即单摆的一般表达式可以写成

$$\theta = \theta_0\cos(\omega t + \varphi_0)$$

依题意，当 $t = 0$ 时，$\theta = \theta_0$【这里的 θ_0 就是题目中给出的 θ】，所以通常在 0 到 2π 之间取值的初相 $\varphi_0 = 0$。【一般地，初相的取值范围还可能在 $-\pi$ 到 π 之间】

第 174 题

【3002】两个质点各自作简谐振动，它们的振幅相同、周期相同。第一个质点的振动方程为 $x_1 = A\cos(\omega t + \alpha)$。当第一个质点从相对于其平衡位置的正位移处回到平衡位置时，第二个质点正在最大正位移处。则第二个质点的振动方程为：

(A) $x_2 = A\cos\left(\omega t + \alpha + \frac{1}{2}\pi\right)$　　(B) $x_2 = A\cos\left(\omega t + \alpha - \frac{1}{2}\pi\right)$

(C) $x_2 = A\cos\left(\omega t + \alpha - \frac{3}{2}\pi\right)$　　(D) $x_2 = A\cos\left(\omega t + \alpha + \pi\right)$

解析

【答案】B

【解析】简谐振动的特征量，相位。

依题意，第二个质点的振动相位滞后于第一个质点 $\frac{1}{2}\pi$，所以其振动表达式为

$$x_2 = A\cos\left(\omega t + \alpha - \frac{1}{2}\pi\right)$$

第 175 题

【3007】一质量为 m 的物体挂在劲度系数为 k 的轻弹簧下面，振动角频率为 ω。若把此弹簧分割成二等份，将物体 m 挂在分割后的一根弹簧上，则振动角频率是

(A) 2ω (B) $\sqrt{2}\omega$ (C) $\omega/\sqrt{2}$ (D) $\omega/2$

解析

【答案】B

【解析】简谐振动的特征量，频率。

弹簧做简谐振动的圆频率

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

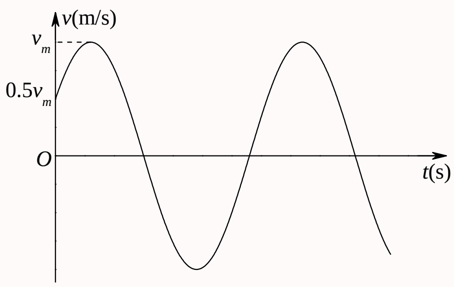
当将弹簧分成两份时，劲度系数 $k' = 2k$，所以圆频率变为

$$\omega' = \sqrt{\frac{k'}{m}} = \sqrt{\frac{2k}{m}} = \sqrt{2}\omega$$

第 176 题

【3396】一质点作简谐振动。其运动速度与时间的曲线如图所示。若质点的振动规律用余弦函数描述，则其初相应为

(A) $\pi/6$ (B) $5\pi/6$ (C) $-5\pi/6$ (D) $-\pi/6$ (E) $-2\pi/3$



解析

【答案】C

【解析】简谐振动的振动曲线和特征量，相位。

用余弦函数表示的简谐振动的表达式一般可以写成

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

所以质点运动的速度为

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -A\omega\sin(\omega t + \varphi_0) = -v_m\sin(\omega t + \varphi_0)$$

质点运动的加速度为

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -A\omega^2\cos(\omega t + \varphi_0) = -a_m\cos(\omega t + \varphi_0)$$

由图可以看出，当 $t = 0$ 时，$v = 0.5v_m$，$a > 0$，即

$$v = -v_m\sin\varphi_0 = 0.5v_m$$
$$\sin\varphi_0 = -0.5$$
$$\varphi_{01} = 2n\pi - \frac{\pi}{6}, \varphi_{02} = (2n+1)\pi + \frac{\pi}{6}, n = 0, \pm1, \pm2, \cdots$$
$$a = -a_m\cos\varphi_0 > 0$$
$$\cos\varphi_0 < 0$$
$$\varphi_0 = \varphi_{02} = (2n+1)\pi + \frac{\pi}{6}, n = 0, \pm1, \pm2, \cdots$$

而一般初位相取值在 $0 \to 2\pi$ 或 $-\pi \to \pi$，所以上式中可以取 $n = -1$ 或 $n = 0$，得

$$\varphi_0 = -\pi + \frac{\pi}{6} = -\frac{5\pi}{6}$$
$$\varphi_0 = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$$

所以答案为题目中给出的选项 (C)。

第 177 题

【3552】一个弹簧振子和一个单摆（只考虑小幅度摆动），在地面上的固有振动周期分别为 T_1 和 T_2。将它们拿到月球上去，相应的周期分别为 T_1' 和 T_2'。则有

(A) $T_1' > T_1$ 且 $T_2' > T_2$
(B) $T_1' < T_1$ 且 $T_2' < T_2$
(C) $T_1' = T_1$ 且 $T_2' = T_2$
(D) $T_1' = T_1$ 且 $T_2' > T_2$

解析

【答案】D

【解析】简谐振动的特征量，频率和周期。

弹簧振子的周期为

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

小角度单摆的周期为

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

地面与月球的区别在于重力加速度 g 的取值不同，月球表面的重力加速度 g' 小于地球表面的重力加速度 g，所以有

$$T_1' = T_1, T_2' > T_2$$

第 178 题

【5178】一质点沿 x 轴作简谐振动，振动方程为 $x = 4\times10^{-2}\cos\left(2\pi t + \frac{1}{3}\pi\right)$(SI)。从 $t = 0$ 时刻起，到质点位置在 $x = -2$ cm 处，且向 x 轴正方向运动的最短时间间隔为

(A) $\frac{1}{8}$ s　(B) $\frac{1}{6}$ s　(C) $\frac{1}{4}$ s　(D) $\frac{1}{3}$ s　(E) $\frac{1}{2}$ s

解析

【答案】E

【解析】旋转矢量法，简谐振动的特征量，频率和周期。

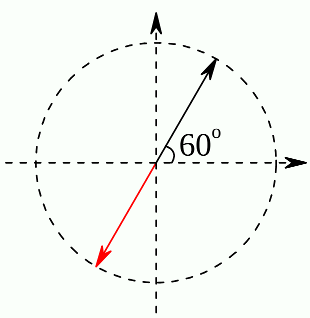
根据简谐振动的表达式

$$x = 4\times10^{-2}\cos\left(2\pi t + \frac{1}{3}\pi\right)$$

可得，简谐振动的圆频率和周期分别为

$$\omega = 2\pi\ \mathrm{rad/s}, T = \frac{2\pi}{\omega} = 1\ \mathrm{s}$$

根据旋转矢量图



可得，质点从初始位置到所求位置的相位差为 π，因此所用的时间为半个周期，即

$$t = \frac{T}{2} = \frac{1}{2}\ \mathrm{s}$$

第 179 题

【5179】一弹簧振子，重物的质量为 m，弹簧的劲度系数为 k，该振子作振幅为 A 的简谐振动。当重物通过平衡位置且向规定的正方向运动时，开始计时。则其振动方程为：

(A) $x=A\cos\left(\sqrt{\dfrac{k}{m}}t+\dfrac{1}{2}\pi\right)$ (B) $x=A\cos\left(\sqrt{\dfrac{k}{m}}t-\dfrac{1}{2}\pi\right)$ (C) $x=A\cos\left(\sqrt{\dfrac{m}{k}}t+\dfrac{1}{2}\pi\right)$

(D) $x=A\cos\left(\sqrt{\dfrac{m}{k}}t-\dfrac{1}{2}\pi\right)$ (E) $x=A\cos\left(\sqrt{\dfrac{k}{m}}t\right)$

解析

【答案】B

【解析】旋转矢量法，简谐振动的特征量，频率和初位相。

简谐振动的一般表达式为

$$x=A\cos(\omega t+\varphi_0)$$

所以质点的速度表达式为

$$v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-A\omega\sin(\omega t+\varphi_0)$$

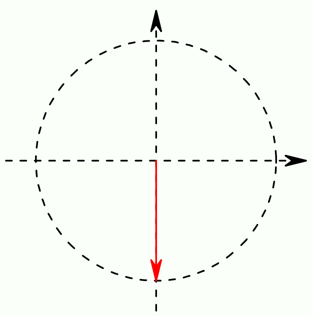
依题意，弹簧振动做简谐振动的圆频率为

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$$

而 $t=0$ 时，$x=0$，$v>0$，所以

$$x=A\cos\varphi_0=0\Rightarrow\varphi_0=\pm\frac{1}{2}\pi$$
$$v=-A\omega\sin\varphi_0>0\Rightarrow\varphi_0=-\frac{1}{2}\pi$$

或者根据旋转矢量图



可得，振动的初位相为

$$\varphi_0=-\frac{1}{2}\pi$$

第 180 题

【5312】一质点在 x 轴上作简谐振动，振辐 $A = 4$ cm，周期 $T = 2$ s，其平衡位置取作坐标原点。若 $t = 0$ 时刻质点第一次通过 $x = -2$ cm 处，且向 x 轴负方向运动，则质点第二次通过 $x = -2$ cm 处的时刻为

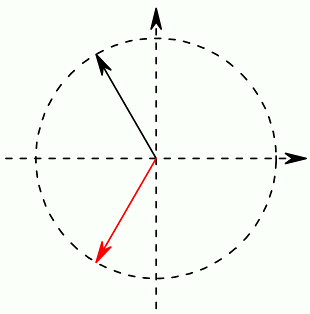
(A) 1 s　(B) (2/3) s　(C) (4/3) s　(D) 2 s

解析

【答案】B

【解析】旋转矢量法。

根据旋转矢量图



可知，相位差为

$$\Delta\varphi = \frac{2}{3}\pi$$

所以所花时间为

$$\Delta t = \frac{\Delta\varphi}{2\pi}T = \frac{\frac{2}{3}\pi}{2\pi}T = \frac{1}{3}T = \frac{2}{3}\ \mathrm{s}$$

第 181 题

【5501】一物体作简谐振动，振动方程为 $x = A\cos\left(\omega t + \frac{1}{4}\pi\right)$。在 $t = T/4$（T 为周期）时刻，物体的加速度为

(A) $-\frac{1}{2}\sqrt{2}A\omega^2$　(B) $\frac{1}{2}\sqrt{2}A\omega^2$　(C) $-\frac{1}{2}\sqrt{3}A\omega^2$　(D) $\frac{1}{2}\sqrt{3}A\omega^2$

解析

【答案】B

【解析】简谐振动的表达式，简谐振动的加速度。

根据简谐振动的表达式

$$x = A\cos\left(\omega t + \frac{1}{4}\pi\right)$$

可得物体的速度和加速度表达式为

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -A\omega \sin\left(\omega t + \frac{1}{4}\pi\right)$$
$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -A\omega^2 \cos\left(\omega t + \frac{1}{4}\pi\right)$$

所以，在 $t = T/4$（T 为周期）时刻，物体的加速度为

$$a = -A\omega^2 \cos\left(\omega \frac{T}{4} + \frac{1}{4}\pi\right) = -A\omega^2 \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{4}\pi\right) = -A\omega^2 \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}A\omega^2$$

第 182 题

【5502】一质点作简谐振动，振动方程为 $x = A\cos(\omega t + \varphi)$。在时间 $t = T/2$（T 为周期）时，质点的速度为

(A) $-A\omega \sin\varphi$　(B) $A\omega \sin\varphi$　(C) $-A\omega \cos\varphi$　(D) $A\omega \cos\varphi$

解析

【答案】B

【解析】简谐振动的表达式，简谐振动的速度。

根据简谐振动的表达式

$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$

可得物体的速度表达式为

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -A\omega \sin(\omega t + \varphi)$$

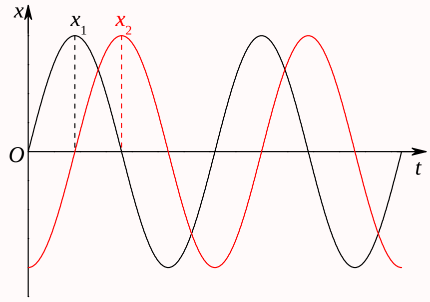
所以，在 $t = T/2$（T 为周期）时刻，物体的加速度为

$$v = -A\omega \sin\left(\omega \frac{T}{2} + \varphi\right) = -A\omega \sin(\pi + \varphi) = A\omega \sin\varphi$$

第 183 题

【3030】两个同周期简谐振动曲线如图所示。x_1 的相位比 x_2 的相位

(A) 落后 $\pi/2$　(B) 超前 $\pi/2$　(C) 落后 π　(D) 超前 π



解析

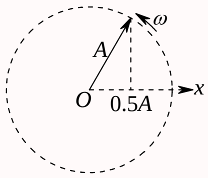
【答案】B

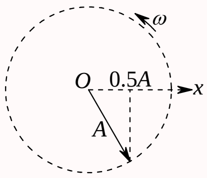
【解析】简谐振动的振动曲线，相位。

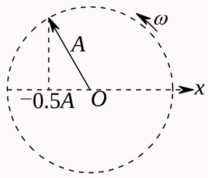
由振动曲线可知，x_1 的振动比 x_2 超前四分之一周期，因此相位超前 $\pi/2$。

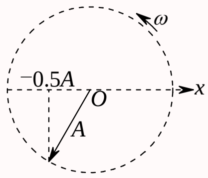
第 184 题

【3042】一个质点作简谐振动，振幅为 A，在起始时刻质点的位移为 $\frac{1}{2}A$，且向 x 轴的正方向运动，代表此简谐振动的旋转矢量图为

(A) 

(B) 

(C) 

(D) 

解析

【答案】B

【解析】旋转矢量图。

第 185 题

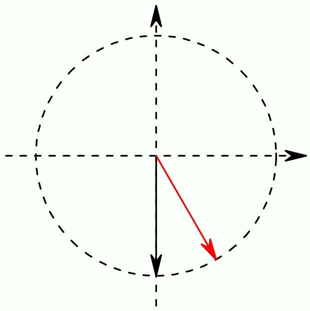
【3254】一质点作简谐振动，周期为 T。质点由平衡位置向 x 轴正方向运动时，由平衡位置到二分之一最大位移这段路程所需要的时间为

(A) $T/4$　　(B) $T/6$　　(C) $T/8$　　(D) $T/12$

解析

【答案】D

【解析】旋转矢量图。



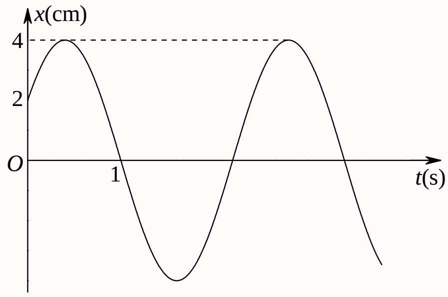
由以上旋转矢量图很容易看出，过程所对应的相位差为 $\Delta\varphi = 30°$，所以所用的时间为

$$\Delta t = \frac{\Delta\varphi}{360°}T = \frac{1}{12}T$$

第 186 题

【3270】一简谐振动曲线如图所示。则振动周期是

(A) 2.62 s (B) 2.40 s (C) 2.20 s (D) 2.00 s



解析

【答案】B

【解析】简谐振动的振动曲线和特征量，旋转矢量图。

简谐振动的一般表达式为

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$
$$v = -A\omega\sin(\omega t + \varphi_0)$$

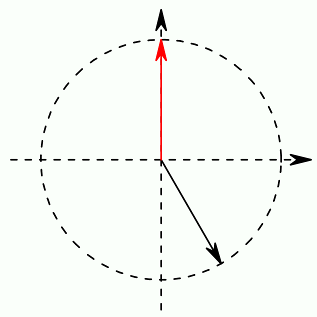
依题意，从图中可以看出来，$A = 4$ cm，当 $t = 0$ 时，$x = 2$ cm，且 $v > 0$；当 $t = 1$ s 时，$x = 0$；所以有

$$2 = 4\cos\varphi_0$$
$$-4\omega\sin\varphi_0 > 0$$
$$0 = 4\cos(\omega + \varphi_0)$$

所以

$$\cos\varphi_0 = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi_0 = \pm\frac{\pi}{3}$$

$$\sin\varphi_0 < 0 \Rightarrow \varphi_0 = -\frac{\pi}{3}$$
$$\omega + \varphi_0 = \omega - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \omega = \frac{5\pi}{6}$$
$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\frac{5\pi}{6}} = \frac{12}{5} = 2.4\ \mathrm{s}$$



另外，由以上旋转矢量图也很容易看出，过程所对应的相位差为 $\Delta\varphi = \dfrac{5\pi}{6}$，而依题意，过程所用的时间为 1 s，所以有

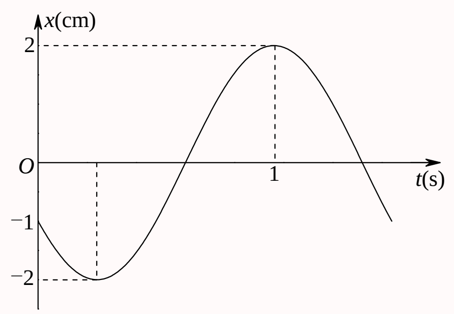
$$\Delta t = \frac{\Delta\varphi}{2\pi}T$$
$$T = \frac{2\pi(\Delta t)}{\Delta\varphi} = \frac{2\pi\times 1}{\frac{5\pi}{6}} = \frac{12}{5} = 2.4\ \mathrm{s}$$

第 187 题

【5186】已知某简谐振动的振动曲线如图所示，位移的单位为厘米，时间单位为秒。则此简谐振动的振动方程为：

(A) $x = 2\cos\left(\dfrac{2}{3}\pi t + \dfrac{2}{3}\pi\right)$ (B) $x = 2\cos\left(\dfrac{2}{3}\pi t - \dfrac{2}{3}\pi\right)$ (C) $x = 2\cos\left(\dfrac{4}{3}\pi t + \dfrac{2}{3}\pi\right)$

(D) $x = 2\cos\left(\dfrac{4}{3}\pi t - \dfrac{2}{3}\pi\right)$ (E) $x = 2\cos\left(\dfrac{4}{3}\pi t - \dfrac{1}{4}\pi\right)$



解析

【答案】C

【解析】简谐振动的振动曲线和特征量，旋转矢量图。

简谐振动的一般表达式为

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$
$$v = -A\omega\sin(\omega t + \varphi_0)$$

依题意，从图中可以看出来，$A = 2$ cm，当 $t = 0$ 时，$x = -1$ cm，且 $v < 0$；当 $t = 1$ s 时，$x = 2$ cm；所以有

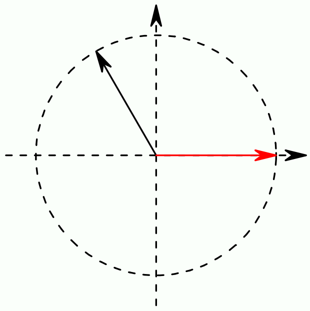
$$-1 = 2\cos\varphi_0$$
$$-2\omega\sin\varphi_0 < 0$$
$$2 = 2\cos(\omega + \varphi_0)$$

所以

$$\cos\varphi_0 = -\frac{1}{2} \Rightarrow \varphi_0 = \pm\frac{2\pi}{3}$$
$$\sin\varphi_0 > 0 \Rightarrow \varphi_0 = \frac{2\pi}{3}$$
$$\omega + \varphi_0 = \omega + \frac{2\pi}{3} = 2\pi \Rightarrow \omega = \frac{4\pi}{3}$$

所以振动表达式为

$$x = 2\cos\left(\frac{4}{3}\pi t + \frac{2}{3}\pi\right)$$



另外，由以上旋转矢量图也很容易看出，初位相 $\varphi_0 = \dfrac{2\pi}{3}$，过程所对应的相位差为 $\Delta\varphi = \dfrac{4\pi}{3}$，而依题意，过程所用的时间为 1 s，所以有

$$\Delta t = \frac{\Delta\varphi}{2\pi}T = \frac{\Delta\varphi}{\omega}$$
$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{\frac{4\pi}{3}}{1} = \frac{4\pi}{3}\ \text{rad/s}$$

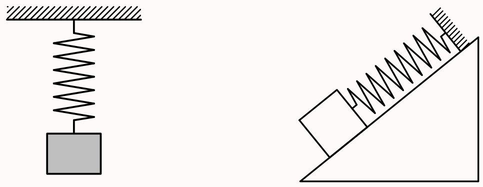
所以振动表达式为

$$x = 2\cos\left(\frac{4}{3}\pi t + \frac{2}{3}\pi\right)$$

第 188 题

【3023】一弹簧振子，当把它水平放置时，它可以作简谐振动。若把它竖直放置或放在固定的光滑斜面上，试判断下面哪种情况是正确的：

(A) 竖直放置可作简谐振动，放在光滑斜面上不能作简谐振动
(B) 竖直放置不能作简谐振动，放在光滑斜面上可作简谐振动
(C) 两种情况都可作简谐振动
(D) 两种情况都不能作简谐振动



解析

【答案】C

【解析】简谐振动的证明。

如果物体所受的合力与其离开平衡位置的距离成正比，且方向相反，那么物体的运动就是简谐振动。对于竖直放置的弹簧振子，其平衡位置就是在它所受合力为零的位置，因此此时弹簧不再是自然伸展状态，而是有一定的伸长量 x_0，这个伸长量满足

$$kx_0 = mg$$

以该位置为坐标原点，竖直向下为 x 轴正方向，则物体的位置就是物体离开平衡位置的距离。设位置为 x 时，则弹簧伸长量为 $x + x_0$，此时物体所受的合力为

$$F = mg - k(x + x_0) = -kx$$

因此，竖直放置的弹簧振子的运动也是简谐振动。

当弹簧振子放在倾角为 θ 的光滑斜面上时，平衡位置仍然是振子所受合力为零的地方，设此时弹簧的伸长量为 x_0，则沿斜面方向，振子的受力为

$$kx_0 = mg\sin\theta$$

同样以此位置为坐标原点，沿斜面向下为 x 轴正方向，则物体的位置就是物体离开平衡位置的距离。设位置为 x 时，则弹簧伸长量为 $x + x_0$，此时物体所受的合力为

$$F = mg\sin\theta - k(x + x_0) = -kx$$

因此，放在光滑斜面上的弹簧振子的运动也是简谐振动。

第 189 题

【3028】一弹簧振子作简谐振动，总能量为 E_1，如果简谐振动振幅增加为原来的两倍，重物的质量增为原来的四倍，则它的总能量 E_2 变为

(A) $E_1/4$　(B) $E_1/2$　(C) $2E_1$　(D) $4E_1$

解析

【答案】D

【解析】简谐振动的能量。

弹簧振子所做简谐振动的表达式为

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

所以振动过程中振子的运动速度为

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -A\omega\sin(\omega t + \varphi_0)$$

所以振子的动能为

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mA^2\omega^2\sin^2(\omega t + \varphi_0)$$

而系统的弹性势能为

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t + \varphi_0)$$

考虑到 $\omega^2 = k/m$，所以系统的总能量为

$$E = E_k + E_p = \frac{1}{2}mA^2\omega^2\sin^2(\omega t + \varphi_0) + \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t + \varphi_0) = \frac{1}{2}kA^2$$

即总能量与振幅的平方成正比，所以当振幅增加为原来的两倍时，总能量增加为原来的四倍！

第 190 题

【3393】当质点以频率 ν 作简谐振动时，它的动能的变化频率为

(A) 4ν　(B) 2ν　(C) ν　(D) $\frac{1}{2}\nu$

解析

【答案】B

【解析】简谐振动的能量。

以弹簧振子为例。

弹簧振子所做简谐振动的表达式为

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

所以振动过程中振子的运动速度为

$$v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-A\omega\sin(\omega t+\varphi_0)$$

所以振子的动能为

$$E_k=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}mA^2\omega^2\sin^2(\omega t+\varphi_0)=\left(\frac{1}{4}mA^2\omega^2\right)[1-\cos 2(\omega t+\varphi_0)]$$

所以振子的动能也是做简谐振动，其变化的圆频率为 2ω，为振动简谐振动圆频率的两倍。而 $\nu=\dfrac{\omega}{2\pi}$，所以频率也是两倍。

第 191 题

【3560】弹簧振子在光滑水平面上作简谐振动时，弹性力在半个周期内所作的功为

(A) kA^2 (B) $\frac{1}{2}kA^2$ (C) $\frac{1}{4}kA^2$ (D) 0

解析

【答案】D

【解析】简谐振动的能量。

以弹簧振子为例。

弹簧振子所做简谐振动的表达式为

$$x=A\cos(\omega t+\varphi_0)$$

所以振动过程中振子的运动速度为

$$v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-A\omega\sin(\omega t+\varphi_0)$$

所以振子的动能为

$$E_k=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}mA^2\omega^2\sin^2(\omega t+\varphi_0)=\left(\frac{1}{4}mA^2\omega^2\right)[1-\cos 2(\omega t+\varphi_0)]$$

而系统的弹性势能为

$$E_p=\frac{1}{2}kx^2=\frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t+\varphi_0)=\left(\frac{1}{4}kA^2\right)[1+\cos 2(\omega t+\varphi_0)]$$

即简谐振动中，动能和势能的变化频率都是振子振动频率的两倍，因此动能和势能变化的周期是振动变化周期的一半，即在振子振动的半个周期内，动能和势能都变化了一个周期，即恢复原来的值，因此弹性力在半个周期内所做的功为零。

第 192 题

【5182】一弹簧振子作简谐振动，当位移为振幅的一半时，其动能为总能量的

(A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (D) $\frac{3}{4}$ (E) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

解析

【答案】D

【解析】简谐振动的能量。

以弹簧振子为例。

弹簧振子所做简谐振动的表达式为

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

所以振动过程中振子的运动速度为

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -A\omega\sin(\omega t + \varphi_0)$$

所以振子的动能为

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mA^2\omega^2\sin^2(\omega t + \varphi_0)$$

而系统的弹性势能为

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t + \varphi_0)$$

考虑到 $\omega^2 = k/m$，所以系统的总能量为

$$E = E_k + E_p = \frac{1}{2}mA^2\omega^2\sin^2(\omega t + \varphi_0) + \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t + \varphi_0) = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}mA^2\omega^2$$

所以，当位移为振幅的一半时，即

$$x = \frac{1}{2}A$$

$$\cos(\omega t + \varphi_0) = \frac{1}{2}$$

$$E_k = \frac{1}{2}mA^2\omega^2\sin^2(\omega t + \varphi_0) = \frac{1}{2}mA^2\omega^2 \times \frac{3}{4} = \frac{3}{4}E$$

第 193 题

【5504】一物体作简谐振动，振动方程为 $x = A\cos\left(\omega t + \frac{1}{2}\pi\right)$。则该物体在 $t = 0$ 时刻的动能与 $t = T/8$（T 为振动周期）时刻的动能之比为：

(A) $1:4$ (B) $1:2$ (C) $1:1$ (D) $2:1$ (E) $4:1$

解析

【答案】D
【解析】简谐振动的能量。
物体做简谐振动的表达式为

$$x = A\cos\left(\omega t + \frac{1}{2}\pi\right)$$

所以其速度为

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -A\omega\sin\left(\omega t + \frac{1}{2}\pi\right)$$

所以动能为

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mA^2\omega^2\sin^2\left(\omega t + \frac{1}{2}\pi\right)$$

$t = 0$ 时刻的动能为

$$E_{k0} = \frac{1}{2}mA^2\omega^2\sin^2\left(\frac{1}{2}\pi\right) = \frac{1}{2}mA^2\omega^2$$

$t = T/8$ 时刻的动能为

$$E_{k1} = \frac{1}{2}mA^2\omega^2\sin^2\left(\omega\times\frac{T}{8} + \frac{1}{2}\pi\right) = \frac{1}{2}mA^2\omega^2\times\frac{1}{2}$$

所以二者之比为

$$\frac{E_{k0}}{E_{k1}} = 2$$

第 194 题

【5505】一质点作简谐振动，其振动方程为 $x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$。在求质点的振动动能时，得出下面 5 个表达式：(1) $\frac{1}{2}m\omega^2A^2\sin^2(\omega t + \varphi_0)$；(2) $\frac{1}{2}m\omega^2A^2\cos^2(\omega t + \varphi_0)$；(3) $\frac{1}{2}kA^2\sin(\omega t + \varphi_0)$；(4) $\frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t + \varphi_0)$；(5) $\frac{2\pi^2}{T^2}mA^2\sin^2(\omega t + \varphi_0)$；其中 m 是质点的质量，k 是弹簧的劲度系数，T 是振动的周期。这些表达式中

(A) (1)，(4) 是对的　(B) (2)，(4) 是对的　(C) (1)，(5) 是对的
(D) (1)，(3)，(5) 是对的　(E) (2)，(5) 是对的

解析

【答案】(1)(3)(5) 都是对的，选项有误
【解析】简谐振动的能量。
简谐振动的表达式为

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

所以质点的运动速度为

$$v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-A\omega\sin(\omega t+\varphi_0)$$

所以质点的动能为

$$E_k=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}mA^2\omega^2\sin^2(\omega t+\varphi_0)$$

考虑到 $\omega^2=k/m$，所以质点的动能还可以写成

$$E_k=\frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega t+\varphi_0)$$

考虑到 $\omega=2\pi/T$，所以质点的动能还可以写成

$$E_k=\frac{1}{2}mA^2\frac{4\pi^2}{T^2}\sin^2(\omega t+\varphi_0)=\frac{2\pi^2}{T^2}mA^2\sin^2(\omega t+\varphi_0)$$

第 195 题

【3008】一长度为 l、劲度系数为 k 的均匀轻弹簧分割成长度分别为 l_1 和 l_2 的两部分，且 $l_1=nl_2$，n 为整数。则相应的劲度系数 k_1 和 k_2 为

(A) $k_1=\dfrac{nk}{n+1}$，$k_2=(n+1)k$ (B) $k_1=\dfrac{(n+1)k}{n}$，$k_2=\dfrac{k}{n+1}$

(C) $k_1=\dfrac{(n+1)k}{n}$，$k_2=(n+1)k$ (D) $k_1=\dfrac{nk}{n+1}$，$k_2=\dfrac{k}{n+1}$

解析

【答案】C

【解析】弹簧的串并联。

两个弹簧串联在一起，两端施加一定的力，二者均发生变形，那么有

$$F=kx=k_1x_1=k_2x_2$$

$$\frac{x_1}{x_2}=\frac{l_1}{l_2}=n\Rightarrow x_1=nx_2$$

$$x=x_1+x_2=(n+1)x_2$$

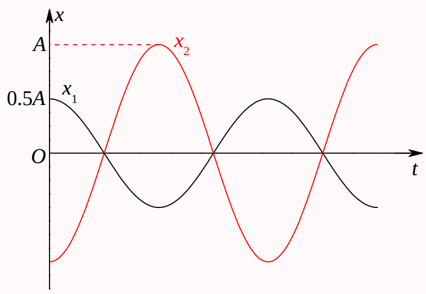
$$\frac{F}{k}=(n+1)\frac{F}{k_2}\Rightarrow k_2=(n+1)k$$

$$k_1=\frac{x_2}{x_1}k_2=\frac{1}{n}k_2=\frac{n+1}{n}k$$

第 196 题

【3562】图中所画的是两个简谐振动的振动曲线。若这两个简谐振动可叠加，则合成的余弦振动的初相为

(A) $\dfrac{3}{2}\pi$ (B) π (C) $\dfrac{1}{2}\pi$ (D) 0



解析

【答案】B

【解析】振动曲线，简谐振动的合成。

由振动曲线可以看出两个振动的表达式分别为

$$x_1 = \frac{1}{2}A\cos(\omega t)$$

$$x_2 = A\cos(\omega t + \pi) = -A\cos(\omega t)$$

所以二者的合振动的表达式为

$$x = x_1 + x_2 = \frac{1}{2}A\cos(\omega t) - A\cos(\omega t) = -\frac{1}{2}A\cos(\omega t) = \frac{1}{2}A\cos(\omega t + \pi)$$

二、填空题

第 197 题

【3009】一弹簧振子作简谐振动，振幅为 A，周期为 T，其运动方程用余弦函数表示。若 $t = 0$ 时，(1) 振子在负的最大位移处，则初相为_____；(2) 振子在平衡位置向正方向运动，则初相为_____；(3) 振子在位移为 $A/2$ 处，且向负方向运动，则初相为_____。

解析

【答案】$\pm\pi$；$-\frac{\pi}{2}$；$\frac{\pi}{3}$

【解析】简谐振动的特征量，相位，旋转矢量法。

用余弦函数表示的简谐振动的表达式为

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

所以振子的速度表达式为

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -A\omega\sin(\omega t + \varphi_0)$$

其中 $\omega = \frac{2\pi}{T}$。因此，在 $t = 0$ 时，振子的位置和速度分别为

$$x_0 = A\cos\varphi_0$$

$$v_0 = -A\omega\sin\varphi_0$$

依题意，(1) $x_0 = -A$，即

$$x_0 = A\cos\varphi_0 = -A$$
$$\cos\varphi_0 = -1$$
$$\varphi_0 = (2n+1)\pi, n = 0, \pm1, \pm2, \cdots$$

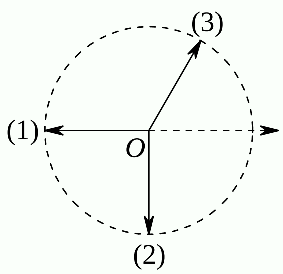
一般初位相在 0 到 2π 或 $-\pi$ 到 π 之间取值，所以这种情况下取 $\varphi_0 = \pi$ 或 $\varphi_0 = -\pi$。
(2) $x = 0$ 且 $v > 0$，则

$$x_0 = A\cos\varphi_0 = 0 \Rightarrow \cos\varphi_0 = 0 \Rightarrow \varphi_0 = \pm\frac{\pi}{2}$$
$$v_0 = -A\omega\sin\varphi_0 > 0 \Rightarrow \sin\varphi_0 < 0 \Rightarrow \varphi_0 = -\frac{\pi}{2}$$

(3) $x = \dfrac{A}{2}$ 且 $v < 0$，则

$$x_0 = A\cos\varphi_0 = \frac{A}{2} \Rightarrow \cos\varphi_0 = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi_0 = \pm\frac{\pi}{3}$$
$$v_0 = -A\omega\sin\varphi_0 < 0 \Rightarrow \sin\varphi_0 > 0 \Rightarrow \varphi_0 = \frac{\pi}{3}$$

本题用旋转矢量法可以很方便地确定出初相，如下图。



第 198 题

【3390】一质点作简谐振动，速度最大值 $v_m = 5$ cm/s，振幅 $A = 2$ cm。若令速度具有正最大值的那一时刻为 $t = 0$，则振动表达式为______。

解析

【答案】$x = 0.02\cos(2.5t - 0.5\pi)$
【解析】简谐振动的特征量。
用余弦函数表示的简谐振动的表达式为

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

质点的速度表达式为

$$v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-A\omega\sin(\omega t+\varphi_0)$$

所以 $v_m=A\omega$，$\omega=v_m/A=2.5\ \mathrm{rad/s}$。依题意，在 $t=0$ 时，$v=v_m$，所以

$$-A\omega\sin\varphi_0=v_m=A\omega$$
$$\sin\varphi_0=-1$$
$$\varphi_0=-\frac{\pi}{2}$$

所以振动表达式为

$$x=0.02\cos(2.5t-0.5\pi)$$

第 199 题

【3557】一质点沿 x 轴作简谐振动，振动范围的中心点为 x 轴的原点。已知周期为 T，振幅为 A。(1) 若 $t=0$ 时质点过 $x=0$ 处且朝 x 轴正方向运动，则振动方程为 $x=$_____。(2) 若 $t=0$ 时质点处于 $x=\frac{1}{2}A$ 处且向 x 轴负方向运动，则振动方程为 $x=$_____。

解析

【答案】$A\cos\left(\frac{2\pi}{T}t-\frac{\pi}{2}\right)$；$A\cos\left(\frac{2\pi}{T}t+\frac{\pi}{3}\right)$
【解析】简谐振动的特征量，相位，旋转矢量法。
用余弦函数表示的简谐振动的表达式为

$$x=A\cos(\omega t+\varphi_0)$$

质点的速度表达式为

$$v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-A\omega\sin(\omega t+\varphi_0)$$

其中 $\omega=\frac{2\pi}{T}$。因此，在 $t=0$ 时，质点的位置和速度分别为

$$x_0=A\cos\varphi_0$$
$$v_0=-A\omega\sin\varphi_0$$

依题意，(1) $x_0=0$，$v_0>0$，即

$$x_0=A\cos\varphi_0=0\Rightarrow\cos\varphi_0=0\Rightarrow\varphi_0=\pm\frac{\pi}{2}$$
$$v_0=-A\omega\sin\varphi_0>0\Rightarrow\sin\varphi_0<0\Rightarrow\varphi_0=-\frac{\pi}{2}$$

所以振动表达式为

$$x=A\cos\left(\frac{2\pi}{T}t-\frac{\pi}{2}\right)$$

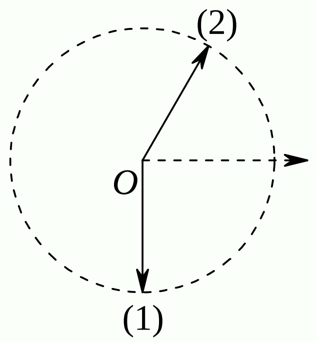
(2) $x=\dfrac{A}{2}$ 且 $v<0$，则

$$x_0=A\cos\varphi_0=\frac{A}{2}\Rightarrow\cos\varphi_0=\frac{1}{2}\Rightarrow\varphi_0=\pm\frac{\pi}{3}$$
$$v_0=-A\omega\sin\varphi_0<0\Rightarrow\sin\varphi_0>0\Rightarrow\varphi_0=\frac{\pi}{3}$$

所以振动表达式为

$$x=A\cos\left(\frac{2\pi}{T}t+\frac{\pi}{3}\right)$$

本题用旋转矢量法可以很方便地确定出初相，如下图。



第 200 题

【3816】一质点沿 x 轴以 $x=0$ 为平衡位置作简谐振动，频率为 0.25 Hz。$t=0$ 时，$x=-0.37$ cm 而速度等于零，则振幅是_____，振动的数值表达式为_____。

解析

【答案】0.37 cm；$x=0.37\cos(0.5\pi t+\pi)$ cm
【解析】简谐振动的特征量。
用余弦函数表示的简谐振动的表达式为

$$x=A\cos(\omega t+\varphi_0)$$

质点的速度表达式为

$$v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-A\omega\sin(\omega t+\varphi_0)$$

其中 $\omega=\dfrac{2\pi}{T}=2\pi\nu=0.5\pi$ rad/s。因此，在 $t=0$ 时，质点的位置和速度分别为

$$x_0=A\cos\varphi_0$$
$$v_0=-A\omega\sin\varphi_0$$

依题意，$x_0=-0.37$ cm，$v_0=0$，即

$$v_0=-A\omega\sin\varphi_0=0\Rightarrow\sin\varphi_0=0\Rightarrow\varphi_{01}=0,\varphi_{02}=\pi$$

$$x_0 = A\cos\varphi_0 = -0.37\ \mathrm{cm} \Rightarrow A = 0.37\ \mathrm{cm}, \cos\varphi_0 = -1 \Rightarrow \varphi_0 = \pi$$

所以振动表达式为

$$x = 0.37\cos(0.5\pi t + \pi)\ \mathrm{cm}$$

第 201 题

【3817】一简谐振动的表达式为 $x = A\cos(3t + \varphi_0)$，已知 $t = 0$ 时的初位移为 0.04 m，初速度为 0.09 m/s，则振幅 $A =$______，初相 $\varphi_0 =$______。

解析

【答案】0.05 m；$-37°$
【解析】简谐振动的特征量。
由简谐振动的表达式

$$x = A\cos(3t + \varphi_0)$$

可得速度表达式为

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -3A\sin(3t + \varphi_0)$$

依题意，$t = 0$ 时，质点的位置和速度分别为

$$x_0 = A\cos\varphi_0 = 0.04$$
$$v_0 = -3A\sin\varphi_0 = 0.09$$

整理得

$$A = 0.05\ \mathrm{m}$$
$$\cos\varphi_0 = 0.08, \sin\varphi_0 = -0.06 \Rightarrow \varphi_0 = -37°$$

第 202 题

【3818】两个弹簧振子的周期都是 0.4 s，设开始时第一个振子从平衡位置向负方向运动，经过 0.5 s 后，第二个振子才从正方向的端点开始运动，则这两振动的相位差为______。

解析

【答案】π
【解析】简谐振动的特征量，相位，相位差。
依题意，第一个振子的初位相为 $\dfrac{1}{2}\pi$，经过 0.5 s，即 1.25 个周期，相位变成 3π，或称为 π，此时第二个振子的相位为零，所以二者的相位差为 π。

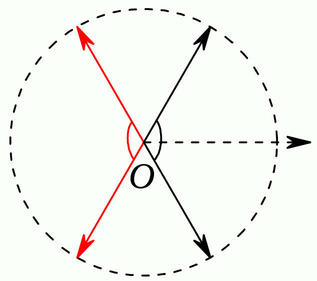
第 203 题

【3819】两质点沿水平 x 轴线作相同频率和相同振幅的简谐振动，平衡位置都在坐标原点。它们总是沿相反方向经过同一个点，其位移 x 的绝对值为振幅的一半，则它们之间的相位差为______。

解析

【答案】$\frac{2}{3}\pi$

【解析】简谐振动的特征量，相位，相位差，旋转矢量法。



由以上旋转矢量图很容易看出，两种情况下二者的相位差都是 $\frac{2}{3}\pi$。

第 204 题

【3820】将质量为 0.2 kg 的物体，系于劲度系数 $k = 19$ N/m 的竖直悬挂的弹簧的下端。假定在弹簧不变形的位置将物体由静止释放，然后物体作简谐振动，则振动频率为______，振幅为______。

解析

【答案】1.55 Hz；0.103 m

【解析】简谐振动的特征量。

弹簧振子做简谐振动的圆频率为

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{19}{0.2}} = \sqrt{95} = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu$$

所以频率为

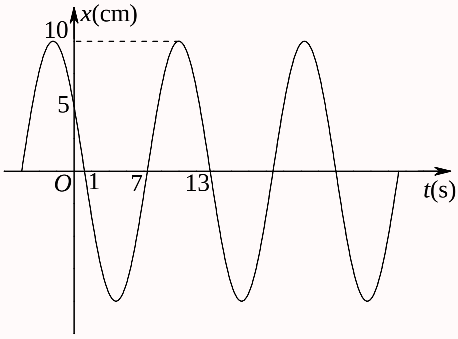
$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{\sqrt{95}}{2\pi} \approx 1.55 \text{ Hz}$$

竖直悬挂的弹簧振子，平衡位置时弹簧的伸长量就是题目中的振幅，因此

$$kA = mg$$
$$A = \frac{mg}{k} = \frac{0.2\times 9.8}{19} \approx 0.103 \text{ m}$$

第 205 题

【3033】一简谐振动用余弦函数表示，其振动曲线如图所示，则此简谐振动的三个特征量为 $A=$_____；$\omega=$_____；$\varphi_0=$_____。

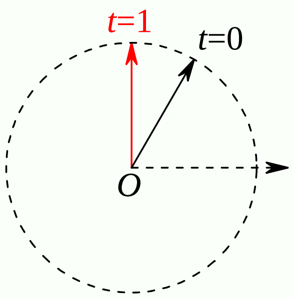


解析

【答案】$A=10$ cm；$\frac{\pi}{6}$ rad/s；$\frac{1}{3}\pi$
【解析】简谐振动的特征量，振动曲线。
从振动曲线可以看出，振幅 $A=10$ cm，周期 $T=31-1=12$ s，$t=0$ 时，$x_0=5=\frac{A}{2}$，$v_0<0$，或者 $t=1$ s 时，$x_1=0$，所以

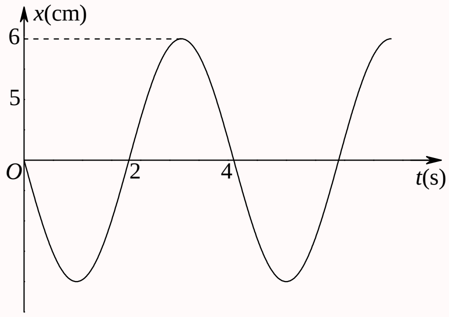
$$\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi}{12}=\frac{\pi}{6}\ \mathrm{rad/s}$$
$$\cos\varphi_0=\frac{1}{2}\Rightarrow\varphi_0=\pm\frac{1}{3}\pi$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{6}+\varphi_0\right)=0\Rightarrow\frac{\pi}{6}+\varphi_0=\pm\frac{1}{2}\pi\Rightarrow\varphi_0=\frac{1}{3}\pi$$

初相还可以通过以下旋转矢量图方便得到



第 206 题

【3041】一简谐振动曲线如图所示，则由图可确定在 $t=2$ s 时刻质点的位移为_____，速度为_____。



解析

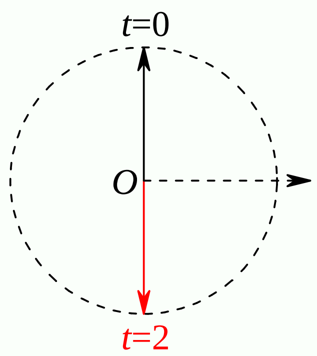
【答案】0；0.03π m/s

【解析】简谐振动的特征量，振动曲线。

从振动曲线可以看出，振幅 $A=6$ cm，周期 $T=4$ s，$t=0$ 时，$x_0=0$，$v_0<0$，或者 $t=2$ s 时，$x_2=0$，$v_2>0$，所以

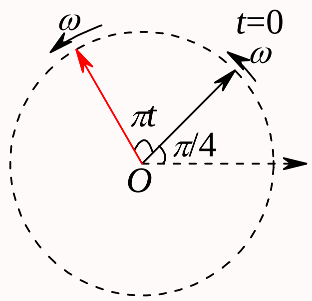
$$\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}\ \mathrm{rad/s}$$
$$\cos\varphi_0=0\Rightarrow\varphi_0=\pm\frac{1}{2}\pi$$
$$v_0=-A\omega\sin\varphi_0<0\Rightarrow\sin\varphi_0=1\Rightarrow\varphi_0=\frac{1}{2}\pi$$
$$v_2=-A\omega\sin\left(\frac{\pi}{2}\times2+\varphi_0\right)=-A\omega\sin\left(\pi+\frac{1}{2}\pi\right)=A\omega=0.06\times\frac{\pi}{2}=0.03\pi\ \mathrm{m/s}$$

初相还可以通过以下旋转矢量图方便得到



第 207 题

【3046】一简谐振动的旋转矢量图如图所示，振幅矢量长 2 cm，则该简谐振动的初相为_____。振动方程为_____。



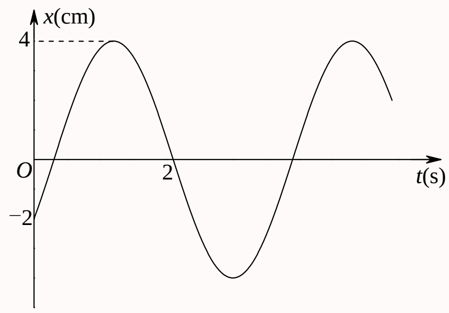
解析

【答案】$\frac{1}{4}\pi$；$x=0.02\cos\left(\pi t+\frac{1}{4}\pi\right)$
【解析】简谐振动的特征量，旋转矢量。
从旋转矢量图及题意可以得到，振幅 $A=2$ cm，圆频率 $\omega=\pi$ s，$\varphi_0=\frac{1}{4}\pi$，所以振动表达式为

$$x=A\cos(\omega t+\varphi_0)=0.02\cos\left(\pi t+\frac{1}{4}\pi\right)$$

第 208 题

【3398】一质点作简谐振动。其振动曲线如图所示。根据此图，它的周期 $T=$______，用余弦函数描述时初相 $\varphi_0=$______。



解析

【答案】$\frac{24}{7}$ s；$-\frac{2}{3}\pi$
【解析】简谐振动的特征量，振动曲线。
从振动曲线可以得到，振幅 $A=4$ cm，$t=0$ 时，$x_0=-2$ cm，$v_0>0$；$t=2$ s 时，$x_2=0$，$v_2<0$；设振动表达式为

$$x=A\cos(\omega t+\varphi_0)$$

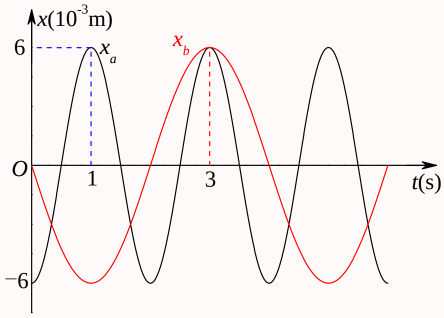
则有

$$x_0=0.04\cos\varphi_0=-0.02\Rightarrow\cos\varphi_0=-0.5\Rightarrow\varphi_0=\pm\frac{2}{3}\pi$$

$$v_0=-0.04\omega\sin\varphi_0>0\Rightarrow\sin\varphi_0<0\Rightarrow\varphi_0=-\frac{2}{3}\pi$$
$$x_2=0.04\cos(2\omega+\varphi_0)=0\Rightarrow\cos(2\omega+\varphi_0)=0\Rightarrow 2\omega+\varphi_0=\frac{1}{2}\pi\Rightarrow\omega=\frac{1}{4}\pi-\frac{\varphi_0}{2}=\frac{1}{4}\pi+\frac{1}{3}\pi=\frac{7}{12}\pi$$
$$T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{\frac{7}{12}\pi}=\frac{24}{7}\text{ s}$$

第 209 题

【3399】已知两简谐振动曲线如图所示，则这两个简谐振动方程（余弦形式）分别为_____ 和_____。



解析

【答案】$x_a=6\times10^{-3}\cos(\pi t-\pi)$；$x_b=6\times10^{-3}\cos\left(\frac{1}{2}\pi t+\frac{1}{2}\pi\right)$

【解析】简谐振动的特征量，振动曲线。

从振动曲线可以得到，对于 x_a，振幅 $A_a=6\times10^{-3}$ m，周期 $T_a=3-1=2$ s，$t=0$ 时，$x_{0a}=-6\times10^{-3}$ m $=-A_a$，设其振动表达式为

$$x_a=A_a\cos(\omega_a t+\varphi_{0a})$$

则有

$$x_{0a}=-A_a=A_a\cos\varphi_{0a}\Rightarrow\cos\varphi_{0a}=-1\Rightarrow\varphi_{0a}=-\pi$$
$$\omega_a=\frac{2\pi}{T_a}=\frac{2\pi}{2}=\pi\text{ rad/s}$$

所以其振动表达式为

$$x_a=6\times10^{-3}\cos(\pi t-\pi)$$

对于 x_b，振幅 $A_b=6\times10^{-3}$ m，周期 $T_b=3/(3/4)=4$ s，$t=0$ 时，$x_{0b}=0$，$v_{0b}<0$，设其振动表达式为

$$x_b=A_b\cos(\omega_b t+\varphi_{0b})$$

则有

$$x_{0b}=0=A_b\cos\varphi_{0b}\Rightarrow\cos\varphi_{0b}=0\Rightarrow\varphi_{0b}=\pm\frac{1}{2}\pi$$

$$v_{0b} = -A_b\omega_b \sin\varphi_{0b} < 0 \Rightarrow \sin\varphi_{0b} > 0 \Rightarrow \varphi_{0b} = \frac{1}{2}\pi$$

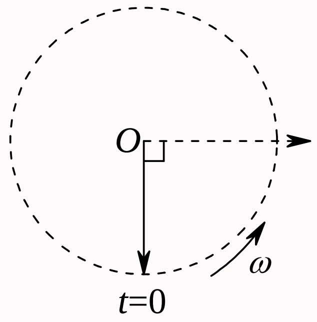
$$\omega_b = \frac{2\pi}{T_b} = \frac{2\pi}{4} = \frac{1}{2}\pi \text{ rad/s}$$

所以其振动表达式为

$$x_b = 6\times 10^{-3}\cos\left(\frac{1}{2}\pi t + \frac{1}{2}\pi\right)$$

第 210 题

【3567】图中用旋转矢量法表示了一个简谐振动。旋转矢量的长度为 0.04 m，旋转角速度 $\omega = 4\pi$ rad/s。此简谐振动以余弦函数表示的振动方程为 $x =$______(SI)。



解析

【答案】$0.04\cos\left(4\pi t - \frac{1}{2}\pi\right)$

【解析】简谐振动的特征量，旋转矢量。

从图中旋转矢量图及题意可以看出，振幅 $A = 0.04$ m，圆频率 $\omega = 4\pi$ rad/s，初位相 $\varphi_0 = -\frac{1}{2}\pi$，所以其振动表达式为

$$x = 0.04\cos\left(4\pi t - \frac{1}{2}\pi\right)$$

第 211 题

【3029】一物块悬挂在弹簧下方作简谐振动，当这物块的位移等于振幅的一半时，其动能是总能量的______。(设平衡位置处势能为零)。当这物块在平衡位置时，弹簧的长度比原长长 Δl，这一振动系统的周期为______。

解析

【答案】$\frac{3}{4}$；$2\pi\sqrt{\frac{\Delta l}{g}}$

【解析】简谐振动的能量，简谐振动的特征量。

设简谐振动的表达式为

$$x = A\cos(\omega t - \varphi_0)$$

则其动能为

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left[-A\omega\sin(\omega t - \varphi_0)\right]^2 = \frac{1}{2}m\omega^2A^2\sin^2(\omega t - \varphi_0)$$

而总能量为

$$\begin{aligned} E = E_k + E_p = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 &= \frac{1}{2}m\omega^2A^2\sin^2(\omega t - \varphi_0) + \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t - \varphi_0) \\ &= \frac{1}{2}m\omega^2A^2 = \frac{1}{2}kA^2 \end{aligned}$$

所以当 $x = A/2$ 时，

$$\cos(\omega t - \varphi_0) = \frac{1}{2}$$
$$\sin^2(\omega t - \varphi_0) = \frac{3}{4}$$
$$E_k = E\sin^2(\omega t - \varphi_0) = \frac{3}{4}E$$

又依题意，有

$$k\Delta l = mg$$
$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{g}{\Delta l}}$$
$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{\Delta l}{g}}$$

第 212 题

【3268】一系统作简谐振动，周期为 T，以余弦函数表达振动时，初相为零。在 $0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}T$ 范围内，系统在 $t =$______ 时刻动能和势能相等。

解析

【答案】$\frac{T}{8}$ 和 $\frac{3T}{8}$
【解析】简谐振动的能量。
设简谐振动的表达式为

$$x = A\cos(\omega t - \varphi_0)$$

则其动能为

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left[-A\omega\sin(\omega t - \varphi_0)\right]^2 = \frac{1}{2}m\omega^2A^2\sin^2(\omega t - \varphi_0)$$

而势能为

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t - \varphi_0)$$

依题意，$\varphi_0 = 0$，考虑到 $\omega^2 = k/m$，当动能与势能相等时，有

$$\frac{1}{2}m\omega^2A^2\sin^2(\omega t - \varphi_0) = \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t - \varphi_0)$$
$$\sin^2(\omega t - \varphi_0) = \cos^2(\omega t - \varphi_0)$$
$$\sin^2(\omega t) = \cos^2(\omega t)$$
$$\sin(\omega t) = \pm\cos(\omega t)$$

在 $0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}T$ 范围内，上式的结果是

$$\omega t_1 = \frac{1}{4}\pi, \omega t_2 = \frac{3}{4}\pi$$
$$t_1 = \frac{\pi}{4\omega} = \frac{\pi}{4\times\frac{2\pi}{T}} = \frac{T}{8}, t_2 = \frac{3\pi}{4\omega} = \frac{3\pi}{4\times\frac{2\pi}{T}} = \frac{3T}{8}$$

第 213 题

【3561】质量为 m 物体和一个轻弹簧组成弹簧振子，其固有振动周期为 T。当它作振幅为 A 自由简谐振动时，其振动能量 $E =$______。

解析

【答案】$\frac{2\pi^2}{T^2}mA^2$
【解析】简谐振动的能量。
设简谐振动的表达式为

$$x = A\cos(\omega t - \varphi_0)$$

则其动能为

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left[-A\omega\sin(\omega t - \varphi_0)\right]^2 = \frac{1}{2}m\omega^2A^2\sin^2(\omega t - \varphi_0)$$

而势能为

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t - \varphi_0)$$

考虑到 $\omega^2 = k/m$，总能量为

$$E = E_k + E_p = \frac{1}{2}m\omega^2A^2 = \frac{1}{2}kA^2$$

依题意，

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$
$$E = \frac{1}{2}m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2A^2 = \frac{2\pi^2}{T^2}mA^2$$

第 214 题

【3821】一弹簧振子系统具有 1.0 J 的振动能量，0.10 m 的振幅和 1.0 m/s 的最大速率，则弹簧的劲度系数为_____，振子的振动频率为_____。

解析

【答案】200 N/m；1.59 Hz

【解析】简谐振动的能量和特征量。

设简谐振动的表达式为

$$x = A\cos(\omega t - \varphi_0)$$

则速度表达式为

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -A\omega\sin(\omega t - \varphi_0)$$

动能为

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2A^2\sin^2(\omega t - \varphi_0)$$

而势能为

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t - \varphi_0)$$

考虑到 $\omega^2 = k/m$，总能量为

$$E = E_k + E_p = \frac{1}{2}m\omega^2A^2 = \frac{1}{2}kA^2$$

依题意，

$$\begin{aligned} A = 0.10\ \mathrm{m}, v_m = A\omega = 1.0\ \mathrm{m/s}, E = 1.0\ \mathrm{J} \\ \omega = \frac{v_m}{A} = \frac{1.0}{0.10} = 10\ \mathrm{rad/s} = 2\pi\nu \\ \nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{10}{2\pi} \approx 1.59\ \mathrm{Hz} \\ k = \frac{2E}{A^2} = \frac{2\times 1.0}{0.10^2} = 200\ \mathrm{N/m} \end{aligned}$$

第 215 题

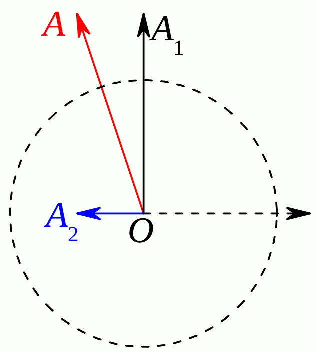
【3401】两个同方向同频率的简谐振动，其振动表达式分别为：$x_1 = 6\times 10^{-2}\cos\left(5t + \frac{1}{2}\pi\right)(\mathrm{SI})$，$x_2 = 2\times 10^{-2}\cos(\pi - 5t)(\mathrm{SI})$，它们的合振动的振辐为_____，初相为_____。

解析

【答案】$2\sqrt{10}\times 10^{-2}$ m；$\frac{1}{2}\pi+\arctan\frac{1}{3}$
【解析】简谐振动的合成，简谐振动的特征量，旋转矢量。
题中第二个简谐振动的表达式可以改写成

$$x_2=2\times 10^{-2}\cos(\pi-5t)=2\times 10^{-2}\cos(5t-\pi)=2\times 10^{-2}\cos(5t+\pi)$$

所以，根据旋转矢量图



很容易知道合振动的振幅为

$$A=\sqrt{A_1^2+A_2^2}=2\sqrt{10}\times 10^{-2}\ \mathrm{m}$$

初相为

$$\varphi_0=\frac{1}{2}\pi+\arctan\frac{1}{3}$$

注：本题原文件提供的答案有问题。

第 216 题

【3839】两个同方向的简谐振动，周期相同，振幅分别为 $A_1=0.05$ m 和 $A_2=0.07$ m，它们合成为一个振幅为 $A=0.09$ m 的简谐振动。则这两个分振动的相位差_____rad。

解析

【答案】1.47
【解析】简谐振动的合成，简谐振动的特征量，旋转矢量。
根据同方向同频率简谐振动合成的合振幅的公式

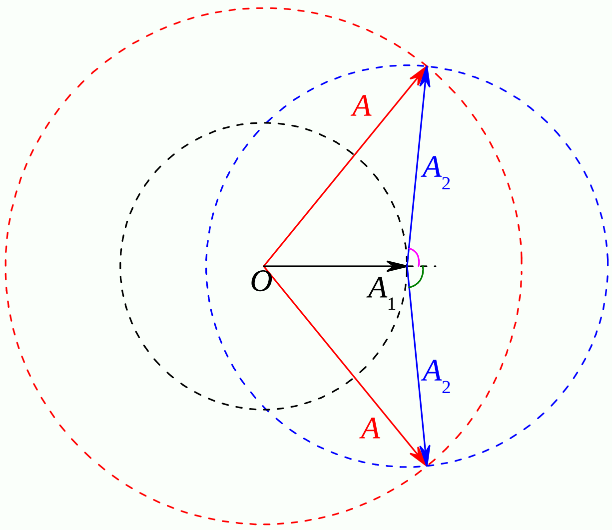
$$A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos(\Delta\varphi)}$$

可得

$$A^2=A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos(\Delta\varphi)$$
$$\cos(\Delta\varphi)=\frac{A^2-A_1^2-A_2^2}{2A_1A_2}$$

$$\Delta\varphi=\arccos\frac{A^2-A_1^2-A_2^2}{2A_1A_2}=\arccos\frac{0.09^2-0.05^2-0.07^2}{2\times0.05\times0.07}=\arccos\frac{1}{10}\approx1.47\ \mathrm{rad}$$

另外，根据以下旋转矢量图



结合三角形余弦定理，也可以求得所求相位差。

第 217 题

【5314】一质点同时参与了两个同方向的简谐振动，它们的振动方程分别为 $x_1=0.05\cos\left(\omega t+\frac{1}{4}\pi\right)$(SI)，$x_2=0.05\cos\left(\omega t+\frac{9}{12}\pi\right)$(SI)，其合成运动的运动方程为 $x=$______。

解析

【答案】$0.0707\cos\left(\omega t+\frac{1}{2}\pi\right)$

【解析】简谐振动的合成，旋转矢量。

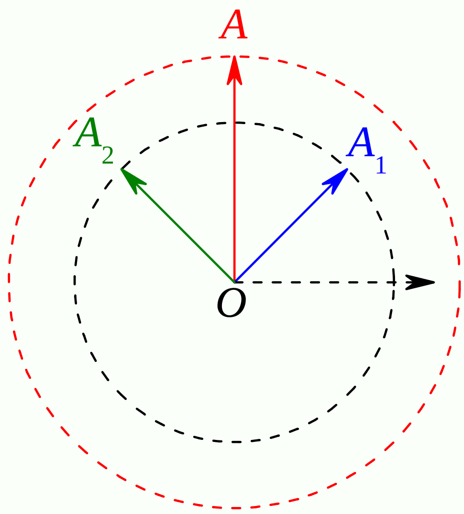
第二个简谐振动的表达式可以改写成

$$x_2=0.05\cos\left(\omega t+\frac{9}{12}\pi\right)=0.05\cos\left(\omega t+\frac{3}{4}\pi\right)$$

根据同方向同频率简谐振动合成的计算公式可得合振动为

$$\begin{aligned}x=x_1+x_2&=0.05\cos\left(\omega t+\frac{1}{4}\pi\right)+0.05\cos\left(\omega t+\frac{3}{4}\pi\right)\\&=2\times0.05\cos\left(\omega t+\frac{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}{2}\pi\right)\cos\left(\frac{\frac{1}{4}-\frac{3}{4}}{2}\pi\right)\\&=0.1\cos\left(\omega t+\frac{1}{2}\pi\right)\cos\left(-\frac{1}{4}\pi\right)\\&=0.0707\cos\left(\omega t+\frac{1}{2}\pi\right)\end{aligned}$$

另外，根据以下旋转矢量图



也可以求得合振动的振幅和初相。

注：本题原文件所提供的答案有误。

第 218 题

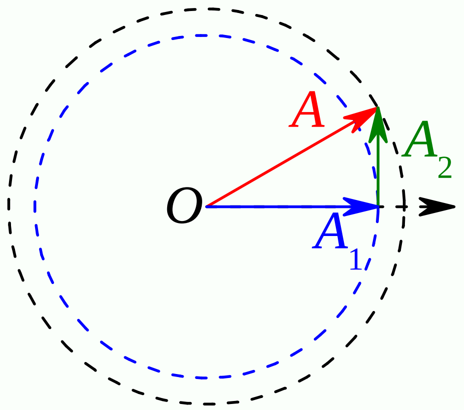
【5315】两个同方向同频率的简谐振动，其合振动的振幅为 20 cm，与第一个简谐振动的相位差为 $\varphi-\varphi_1=\pi/6$。若第一个简谐振动的振幅为 $10\sqrt{3}$ cm $=17.3$ cm，则第二个简谐振动的振幅为______cm，第一、二两个简谐振动的相位差 $\varphi_1-\varphi_2$ 为______。

解析

【答案】10 cm；$-\dfrac{1}{2}\pi$

【解析】简谐振动的合成，旋转矢量。

根据以下旋转矢量图



很容易求得第二个简谐振动的振幅为 $A_2=10$ cm，第一、二两个简谐振动的相位差 $\varphi_1-\varphi_2=-\dfrac{1}{2}\pi$。

三、计算题

第 219 题

【3017】一质点沿 x 轴作简谐振动，其角频率 $\omega = 10$ rad/s。试分别写出以下两种初始状态下的振动方程：(1) 其初始位移 $x_0 = 7.5$ cm，初始速度 $v_0 = 75.0$ cm/s；(2) 其初始位移 $x_0 = 7.5$ cm，初始速度 $v_0 = -75.0$ cm/s。

解析

【解析】简谐振动的特征量。

设简谐振动的表达式为

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

可得速度表达式为

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -A\omega\sin(\omega t + \varphi_0)$$

所以 $t = 0$ 时刻质点的位置和速度分别为

$$x_0 = A\cos\varphi_0$$
$$v_0 = -A\omega\sin\varphi_0$$

依题意，$\omega = 10$ rad/s，

(1) $x_0 = 7.5$ cm，$v_0 = 75.0$ cm/s，即

$$x_0 = A\cos\varphi_0 = 0.075$$
$$v_0 = -A\omega\sin\varphi_0 = 0.75$$

解得

$$A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2} = \sqrt{0.075^2 + 0.075^2} = 0.075\sqrt{2}\ \mathrm{m} \approx 0.106\ \mathrm{m}$$
$$\cos\varphi_0 = \frac{x_0}{A} = \frac{0.075}{0.075\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\sin\varphi_0 = \frac{v_0}{-A\omega} = \frac{0.75}{-0.075\sqrt{2}\times 10} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\varphi_0 = -\frac{1}{4}\pi$$

所以振动的表达式为

$$x = 0.106\cos\left(10t - \frac{1}{4}\pi\right)$$

(2) $x_0 = 7.5$ cm，$v_0 = -75.0$ cm/s，即

$$x_0 = A\cos\varphi_0 = 0.075$$
$$v_0 = -A\omega\sin\varphi_0 = -0.75$$

解得

$$A=\sqrt{x_0^2+\left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2}=\sqrt{0.075^2+0.075^2}=0.075\sqrt{2}\ \mathrm{m}\approx 0.106\ \mathrm{m}$$
$$\cos\varphi_0=\frac{x_0}{A}=\frac{0.075}{0.075\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\sin\varphi_0=\frac{v_0}{-A\omega}=\frac{-0.75}{-0.075\sqrt{2}\times 10}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\varphi_0=\frac{1}{4}\pi$$

所以振动的表达式为

$$x=0.106\cos\left(10t+\frac{1}{4}\pi\right)$$

第 220 题

【3018】一轻弹簧在 60 N 的拉力下伸长 30 cm。现把质量为 4 kg 的物体悬挂在该弹簧的下端并使之静止，再把物体向下拉 10 cm，然后由静止释放并开始计时。求：(1) 物体的振动方程；(2) 物体在平衡位置上方 5 cm 时弹簧对物体的拉力；(3) 物体从第一次越过平衡位置时刻起到它运动到上方 5 cm 处所需要的最短时间。

解析

【解析】简谐振动的特征量。

以平衡位置为坐标原点，竖直向下为 x 轴正方向。

(1) 依题意，由胡克定律 $F=kx$ 得弹簧的劲度系数为

$$k=\frac{F}{x}=\frac{60}{0.3}=200\ \mathrm{N/m}$$

所以弹簧振子做简谐振动的圆频率为

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}=\sqrt{\frac{200}{4}}=\sqrt{50}\ \mathrm{rad/s}$$

$t=0$ 时，$x_0=0.1$ m，$v_0=0$，假定简谐振动的表达式为

$$x=A\cos(\omega t+\varphi_0)$$

则有

$$x_0=A\cos\varphi_0=0.1$$
$$v_0=-A\omega\sin\varphi_0=0$$

解得

$$A=\sqrt{x_0^2+\frac{v_0^2}{\omega^2}}=0.1$$

$$\cos\varphi_0 = 0$$
$$\varphi_0 = 0$$

所以简谐振动的表达式为

$$x = 0.1\cos(\sqrt{50}t)$$

(2) 平衡位置时，物体所受合力为零，所以此时弹簧的伸长量为

$$l_0 = \frac{mg}{k} = \frac{4\times 9.8}{200} = 0.196 \text{ m}$$

所以，在平衡位置上方 5 cm 处，弹簧的伸长量为 $l = 0.146$ m，由胡克定律可得，此时弹簧的拉力为

$$F = kl = 200\times 0.146 = 29.2 \text{ N}$$

(3) 物体第一次越过平衡位置时刻为，相位为 $\omega t = \frac{1}{2}\pi$，$v_0 = 75.0$ cm/s，即

$$t_1 = \frac{\frac{1}{2}\pi}{\omega} = \frac{\pi}{2\sqrt{50}} \text{ s}$$

而当它运动到平衡位置上方 5 cm 处

$$-0.05 = 0.1\cos(\sqrt{50}t)$$
$$\cos(\sqrt{50}t) = -0.5$$
$$\sqrt{50}t = (2n+1)\pi \pm \frac{1}{3}\pi, n = 0, 1, 2, \cdots$$
$$\Delta t = t - t_1 = \frac{(2n+1)\pi \pm \frac{1}{3}\pi - \frac{1}{2}\pi}{\omega}$$

当 $n = 0$ 时，所用时间最短，为

$$\Delta t = \frac{\pi - \frac{1}{3}\pi - \frac{1}{2}\pi}{\omega} = \frac{\pi}{6\sqrt{50}} \approx 0.074 \text{ s}$$

第 221 题

【5191】一物体作简谐振动，其速度最大值 $v_m = 3\times 10^{-2}$ m/s，其振幅 $A = 2\times 10^{-2}$ m。若 $t = 0$ 时，物体位于平衡位置且向 x 轴的负方向运动。求：(1) 振动周期 T；(2) 加速度的最大值 a_m；(3) 振动方程的数值式。

解析

【解析】简谐振动的特征量。

(1) 假定简谐振动的表达式为

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

则有

$$v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-A\omega\sin(\omega t+\varphi_0)$$
$$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-A\omega^2\cos(\omega t+\varphi_0)$$

所以

$$v_m=A\omega$$
$$\omega=\frac{v_m}{A}=\frac{3\times10^{-2}}{2\times10^{-2}}=1.5\ \mathrm{rad/s}$$
$$T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{4}{3}\pi\ \mathrm{s}$$

(2) 加速度的最大值为

$$a_m=A\omega^2=2\times10^{-2}\times1.5^2=4.5\times10^{-2}\ \mathrm{m/s^2}$$

(3) 依题意，$t=0$ 时，$x_0=0$，$v_0<0$，所以

$$x_0=A\cos\varphi_0=0\Rightarrow\cos\varphi_0=0\Rightarrow\varphi_0=\pm\frac{1}{2}\pi$$
$$v_0=-A\omega\sin\varphi_0<0\Rightarrow\sin\varphi_0>0\Rightarrow\varphi_0=\frac{1}{2}\pi$$

所以简谐振动的表达式为

$$x=0.02\cos\left(1.5t+\frac{1}{2}\pi\right)$$

第 222 题

【3391】在一竖直轻弹簧的下端悬挂一小球，弹簧被拉长 $l_0=1.2$ cm 而平衡。再经拉动后，该小球在竖直方向作振幅为 $A=2$ cm 的振动，试证此振动为简谐振动；选小球在正最大位移处开始计时，写出此振动的数值表达式。

解析

【解析】简谐振动的证明，简谐振动的特征量。
以平衡位置为坐标原点，竖直向下为 x 轴正方向，依题意，在平衡位置，弹簧被拉长 $l_0=1.2$ cm，假定弹簧的劲度系数为 k，小球的质量为 m，则有

$$kl_0=mg$$

在小球振动过程中，假定任意时刻，小球的位置为 x，则弹簧的伸长量为 $x+l_0$，此时小球共受到两个力的作用，竖直向下的重力 mg，竖直向上的弹簧拉力 $f=k(x+l_0)$，所以小球所受的合力为

$$F=mg-k(x+l_0)=-kx$$

则小球所受合力与小球离开平衡位置的距离成正比，且指向平衡位置，所以小球的振动是简谐振动。

假定此振动的表达式为

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

依题意，振幅 $A = 2$ cm，圆频率为

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{g}{l_0}} = \sqrt{\frac{9.8}{0.012}} \approx 28.58 \text{ rad/s}$$

$t = 0$ 时，

$$x = A = A\cos\varphi_0 \Rightarrow \varphi_0 = 0$$

所以，振动的表达式为

$$x = 0.02\cos(28.58t)$$

第 223 题

【3835】在竖直悬挂的轻弹簧下端系一质量为 100 g 的物体，当物体处于平衡状态时，再对物体加一拉力使弹簧伸长，然后从静止状态将物体释放。已知物体在 32 s 内完成 48 次振动，振幅为 5 cm。(1) 上述的外加拉力是多大？(2) 当物体在平衡位置以下 1 cm 处时，此振动系统的动能和势能各是多少？

解析

【解析】简谐振动的特征量，简谐振动的能量。
(1) 依题意，物体做简谐振动的频率为

$$\nu = \frac{48}{32} = 1.5 \text{ Hz}$$

所以圆频率为

$$\omega = 2\pi\nu = 3\pi \text{ rad/s}$$

根据弹簧振子的圆频率与弹簧劲度系数之间的关系

$$\omega^2 = \frac{k}{m}$$

可得弹簧的劲度系数为

$$k = m\omega^2 = 0.9\pi^2 \text{ N/m}$$

当施加题目所说的拉力时，物体共受到三个力的作用，竖直向下的重力 mg，竖直向下的拉力 T_1，竖直向上的弹簧弹力 T_2，所以有

$$mg + T_1 = T_2$$
$$T_2 = k(l_0 + A)$$

$$kl_0 = mg$$

所以外加拉力为

$$T_1 = kA = 0.9\pi^2 \times 0.05 = 0.045\pi^2 \text{ N} \approx 0.444 \text{ N}$$

(2) 设物体做简谐振动的表达式为

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

当物体在平衡位置以下 1 cm 处时，

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0) = 0.01$$
$$\cos(\omega t + \varphi_0) = \frac{x}{A} = 0.2$$
$$\sin^2(\omega t + \varphi_0) = 0.96$$
$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -A\omega\sin(\omega t + \varphi_0)$$
$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mA^2\omega^2\sin^2(\omega t + \varphi_0) = 0.96 \times 0.5 \times 0.1 \times 0.05^2 \times (3\pi)^2 \approx 0.0107 \text{ J}$$
$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 = 0.5 \times 0.9\pi^2 \times 0.01^2 \approx 4.44 \times 10^{-4} \text{ J}$$

注意，这里的势能其实包含重力势能和弹性势能，但二者之和刚好可以表示成 $\frac{1}{2}kx^2$，这里的 x 是物体离开平衡位置的距离，并不是弹簧的形变量。而且这里势能的零点选择为平衡位置，即让平衡位置重力势能和弹性势能之和等于零。

第 224 题

【3836】在一竖直轻弹簧下端悬挂质量 $m = 5$ g 的小球，弹簧伸长 $\Delta l = 1$ cm 而平衡。经推动后，该小球在竖直方向作振幅为 $A = 4$ cm 的振动，求：(1) 小球的振动周期；(2) 振动能量。

解析

【解析】简谐振动的特征量，简谐振动的能量。

(1) 依题意，根据胡克定律，平衡时

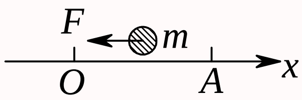
$$k\Delta l = mg$$
$$\frac{k}{m} = \frac{g}{\Delta l}$$
$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{g}{\Delta l}}$$
$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{\Delta l}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{0.01}{9.8}} = \frac{\sqrt{2}}{7}\pi \text{ s}$$

(2) 振动总能量为

$$
\begin{aligned}
E &= E_k + E_p = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}mA^2\omega^2 = \frac{1}{2}kA^2 \\
&= 0.5 \times 0.005 \times 0.04^2 \times \frac{9.8}{0.01} = 3.92 \times 10^{-3}\ \mathrm{J}
\end{aligned}
$$

第 225 题

【5506】一物体质量 $m = 2$ kg，受到的作用力为 $F = -8x(\mathrm{SI})$。若该物体偏离坐标原点 O 的最大位移为 $A = 0.10$ m，则物体动能的最大值为多少？



解析

【解析】简谐振动的特征量，简谐振动的能量。

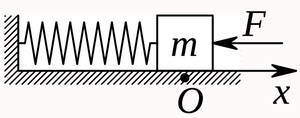
依题意，物体所受到的力与离开平衡位置的距离成正比，且指向平衡位置，所以物体做简谐振动，等效的弹簧劲度系数为 $k = 8$ N/m。

而根据简谐振动能量的特点，当物体在平衡位置时，物体具有最大的动能；当物体在最大位移处，物体具有最大的势能；在振动过程中的任意位移处，动能与势能之和即振动的总能量保持不变，等于前述的最大动能和最大势能，因此

$$
E_{k\,\max} = E_{p\,\max} = \frac{1}{2}mA^2\omega^2 = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2} \times 8 \times 0.1^2 = 0.04\ \mathrm{J}
$$

第 226 题

【5511】如图，有一水平弹簧振子，弹簧的劲度系数 $k = 24$ N/m，重物的质量 $m = 6$ kg，重物静止在平衡位置上。设以一水平恒力 $F = 10$ N 向左作用于物体（不计摩擦），使之由平衡位置向左运动了 0.05 m 时撤去力 F。当重物运动到左方最远位置时开始计时，求物体的运动方程。



解析

【解析】简谐振动的特征量，动能定理，功能原理。

由功能原理可知，外力对弹簧所做的功等于系统机械能的增加，以重物在平衡位置时的势能为势能零点，则外力撤去时，弹簧振子的能量为

$$
\Delta E = E - 0 = W = Fs = 10 \times 0.05 = 0.5\ \mathrm{J}
$$

此能量等于弹簧振子的最大势能，即

$$E = E_{p\,\max} = \frac{1}{2}kA^2$$

$$A = \sqrt{\frac{2E}{k}} = \sqrt{\frac{2\times 0.5}{24}} = \frac{\sqrt{6}}{12} \approx 0.204\ \mathrm{m}$$

而圆频率为

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{24}{6}} = 2\ \mathrm{rad/s}$$

$t=0$ 时，$x_0=-A$，所以 $\varphi_0=\pi$，所以物体做简谐振动的表达式为

$$x = A\cos(\omega t+\varphi_0) = 0.204\cos(2t+\pi)$$