一、填空题

1.

根据理想气体分子模型和统计假设

$$\overline{v_x}=\overline{v_y}=\overline{v_z}=0$$
$$\overline{v_x^2}=\overline{v_y^2}=\overline{v_z^2}=\frac{1}{3}\overline{v^2}$$

而根据方均根速率

$$\sqrt{\overline{v^2}}=\sqrt{\frac{3RT}{M}}=\sqrt{\frac{3kT}{m}}$$

可得

$$\overline{v_x^2}=\frac{1}{3}\overline{v^2}=\frac{1}{3}\times\frac{3kT}{m}=\frac{kT}{m}$$

2.

氦气是刚体单原子分子理想气体，其自由度为 $i_A=3$；氢气是刚性双原子分子理想气体，其自由度为 $i_B=5$，氨气是刚性多原子分子理想气体，其自由度为 $i_C=6$，而理想气体的内能为

$$E=\frac{i}{2}nRT$$

所以当温度变化 ΔT 时，内能变化为

$$\Delta E=\frac{i}{2}nR\Delta T$$

所以，当 $\Delta T=1$ K 时，

$$\Delta E_A=\frac{i_A}{2}n_AR\Delta T=\frac{3}{2}R$$
$$\Delta E_B=\frac{i_B}{2}n_BR\Delta T=\frac{5}{2}R$$
$$\Delta E_C=\frac{i_C}{2}n_CR\Delta T=\frac{6}{2}R=3R$$

3.变小

4. 最大级次为 3

光栅方程

$$d\sin\theta=k\lambda$$
$$k=\frac{d\sin\theta}{\lambda}\leqslant\frac{d}{\lambda}=\frac{2\times10^{-6}}{5.5\times10^{-7}}\approx3.6$$

5.

当入射光以布儒斯特角入射时，反射光是完全偏振光，且此时反射光线与折射光线互相垂直，依题意，此时折射角为 30°，所以布儒斯特角为 $i_0=90°-30°=60°$，而根据布儒斯特定律，有

$$\tan i_0=\frac{n_2}{n_1}=n=\tan(90°-30°)=\sqrt{3}$$

6.

其他光路不变，所以其他的光程也不变，变化的仅仅是薄膜所在部分，未放入薄膜时，该部分光程为 $\delta_1=2h$，放入薄膜后，该部分的光程为 $\delta_2=2nh$，所以光程差的改变量为

$$\Delta\delta=\delta_2-\delta_1=2(n-1)h$$

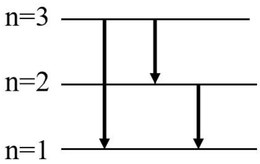
7.

逸出功 $h\nu=h\frac{c}{\lambda_h}=W$ $\quad$ $W=\frac{6.63\times10^{-34}\times3\times10^{8}}{5400\times10^{-10}}=3.68\times10^{-19}J$

$h\nu=h\frac{c}{\lambda}=E_k+W$ $\quad$ $\lambda=\frac{hc}{E_k+W}=\frac{6.63\times10^{-34}\times3\times10^{8}}{1.2\times1.6\times10^{-19}+3.68\times10^{-19}}$

$=3.55\times10^{-7}m=355nm$

8.



3种波长的光

9.

$$\int_0^{a/4}\left|\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{\pi x}{a}\right|^2 dx=\frac{1}{a}\int_0^{a/4}2\sin^2\frac{\pi x}{a}dx$$

$$=\frac{1}{4}-\frac{1}{2\pi}\sin\frac{\pi}{2}=\frac{1}{4}-\frac{1}{2\pi}$$

10.

102.6nm，657.9nm，121.6nm

设被激发氢原子可跃迁到的最高能级为n_i，据分析有

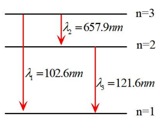
$$E_1+12.6=E_{n_i}=\frac{E_1}{n_i^2}$$

将 $E_1=-13.6eV$ **带入得**

$n_i=3.69$ **取整数** $n_i=3$

由 $\frac{1}{\lambda}=R(\frac{1}{n_l^2}-\frac{1}{n_i^2})$ $R=1.097\times10^7m^{-1}$

由激发态自发跃迁到基态有三种可能：
由上式可得氢原子回到基态过程中可能的三种辐射所对应的谱线长分别为102.6nm，657.9nm，121.6nm



二、推导与证明

11.

证明：一维谐振子的波动方程为 $\frac{d^2\psi}{dx^2}+\frac{2m}{\hbar^2}\left(E-\frac{1}{2}m\omega^2x^2\right)\psi=0$

已知 $\psi=Ae^{-ax^2}$ ，则 $\frac{d^2\psi}{dx^2}=\left(4a^2Ax^2-2aA\right)e^{-ax^2}$

将 $\frac{d^2\psi}{dx^2}=\left(4a^2Ax^2-2aA\right)e^{-ax^2}$ 代入波动方程，注意基态的能量E即零点能E_0，方程整理后有

$$\left(4a^2-\frac{m^2\omega^2}{\hbar^2}\right)x^2+\frac{2m}{\hbar^2}E_0-2a=0$$

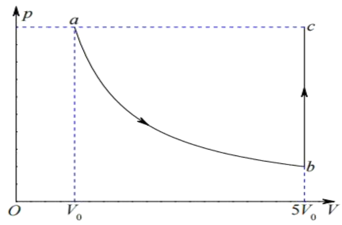
在x取任何值时上式均成立，因此要求

$$\left.\begin{aligned}4a^2-\frac{\omega^2m^2}{\hbar^2}=0\\ \frac{2m}{\hbar^2}E_0-2a=0\end{aligned}\right\} \quad 得 \quad E_0=\frac{1}{2}h\nu$$

三、计算题

12.

依题意，过程的 $p-V$ 图如下图所示：



由理想气体的物态方程

$$pV = nRT$$

可得

$$T_c = \frac{p_c V_c}{nR} = \frac{p_a(5V_a)}{nR} = 5\frac{p_a V_a}{nR} = 5T_a = 5T_0$$

$a \to b$ 过程是等温膨胀过程，内能不变，$\Delta E_{ab} = 0$，系统对外做功

$$W_{ab} = \int_{V_a}^{V_b} p\mathrm{d}V = \int_{V_a}^{V_b} \frac{nRT_a}{V}\mathrm{d}V = nRT_0 \ln 5$$

根据热力学第一定律

$$\Delta E = Q - W$$

该过程系统从外界所吸收的热量为

$$Q_{ab} = \Delta E_{ab} + W_{ab} = nRT_0 \ln 5$$

而 $b \to c$ 过程是等容升温过程，等容，体积不变，做功为零，$W_{bc} = 0$，设气体的摩尔定容热容量为 $C_{V,\mathrm{m}}$，则过程系统所吸收的热量为

$$Q_{bc} = nC_{V,\mathrm{m}}\Delta T = nC_{V,\mathrm{m}}(5T_0 - T_0) = 4nC_{V,\mathrm{m}}T_0$$

依题意，整个过程系统所吸收的热量为

$$Q = Q_{ab} + Q_{bc} = nRT_0 \ln 5 + 4nC_{V,\mathrm{m}}T_0 = nT_0(R\ln 5 + 4C_{V,\mathrm{m}})$$

$$R\ln 5 + 4C_{V,\mathrm{m}} = \frac{Q}{nT_0}$$

$$C_{V,\mathrm{m}} = \frac{Q}{4nT_0} - \frac{R\ln 5}{4} = \frac{8\times 10^4}{4\times 3\times 273} - \frac{8.31\times \ln 5}{4} \approx 21.1\ \mathrm{J\cdot mol^{-1}\cdot K^{-1}}$$

$$\gamma = \frac{C_{p,\mathrm{m}}}{C_{V,\mathrm{m}}} = 1 + \frac{R}{C_{V,\mathrm{m}}} = 1 + \frac{8.31}{21.1} \approx 1.39$$

13.

(1) 单原子分子理想气体的自由度 $i = 3$，所以其内能为

$$E = \frac{i}{2}nRT = \frac{3}{2}nRT$$

所以内能的改变量为

$$\Delta E = \frac{3}{2}nR\Delta T$$

依题意，$n = 1\ \mathrm{mol}$，根据理想气体的物态方程

$$pV = nRT$$

有

$$T_a = \frac{p_a V_a}{R} = \frac{1\times 10^5\times 2\times 10^{-3}}{8.31} \approx 24\ \mathrm{K}$$

$$T_b = \frac{p_b V_b}{R} = 2T_a = 48\ \mathrm{K}$$

$$T_c = \frac{p_c V_c}{R} = 3T_a = 72\ \mathrm{K}$$

$$T_d = \frac{p_d V_d}{R} = 1.5T_a = 36\ \mathrm{K}$$

$$T_aT_c = 3T_a^2 = T_bT_d$$

$a \to b$ 过程，体积不变，做功 $W_{ab}=0$，内能的改变量为

$$\Delta E_{ab}=\frac{3}{2}R\Delta T_{ab}=\frac{3}{2}RT_a=\frac{3}{2}p_aV_a=1.5\times1\times10^5\times2\times10^{-3}=300\ \mathrm{J}$$

根据热力学第一定律

$$\Delta E=Q-W$$

系统吸收的热量 $Q_{ab}=\Delta E_{ab}=300\ \mathrm{J}$。

$b \to c$ 过程，压强不变，做功

$$W_{bc}=p_b(V_c-V_b)=2\times10^5\times1\times10^{-3}=200\ \mathrm{J}$$

内能的改变量为

$$\Delta E_{bc}=\frac{3}{2}R\Delta T_{bc}=\frac{3}{2}RT_a=\frac{3}{2}p_aV_a=300\ \mathrm{J}$$

所以系统吸收的热量 $Q_{bc}=\Delta E_{bc}+W_{bc}=500\ \mathrm{J}$。

$c \to d$ 过程，体积不变，做功 $W_{cd}=0$，内能的改变量为

$$\Delta E_{cd}=\frac{3}{2}R\Delta T_{cd}=\frac{3}{2}R(-1.5)T_a=-\frac{9}{4}p_aV_a=-450\ \mathrm{J}$$

所以系统吸收的热量 $Q_{cd}=\Delta E_{cd}=-450\ \mathrm{J}$，系统放热。

$d \to a$ 过程，压强不变，做功

$$W_{da}=p_d(V_a-V_d)=1\times10^5\times(-1\times10^{-3})=-100\ \mathrm{J}$$

内能的改变量为

$$\Delta E_{da}=\frac{3}{2}R\Delta T_{da}=\frac{3}{2}R(-0.5T_a)=-\frac{3}{4}p_aV_a=-150\ \mathrm{J}$$

所以系统吸收的热量 $Q_{da}=\Delta E_{da}+W_{da}=-250\ \mathrm{J}$，系统放热。

综上，气体循环一次，$a \to b$、$b \to c$ 两个过程吸热，吸收的总热量为 $Q_{ab}+Q_{bc}=800\ \mathrm{J}$。

(2) 气体循环一次对外做的净功

$$W=W_{ab}+W_{bc}+W_{cd}+W_{da}=0+200+0-100=100\ \mathrm{J}$$

当然，根据 $p-V$ 图中，循环过程的闭合曲线所围面积也可以算出同样的结果。

(3) 如前，

$$T_b=\frac{p_bV_b}{R}=2T_a$$
$$T_c=\frac{p_cV_c}{R}=3T_a$$
$$T_d=\frac{p_dV_d}{R}=1.5T_a$$

所以，有

$$T_aT_c=3T_a^2=T_bT_d$$

14.

依题意，任意薄膜厚度 e 处的光程差为

$$\delta=2e+\frac{1}{2}\lambda$$

对于暗纹，有

$$\delta=2e+\frac{1}{2}\lambda=\left(k+\frac{1}{2}\right)\lambda, k=0,1,2,3,\cdots$$
$$2e=k\lambda$$
$$e_k=\frac{k\lambda}{2}\geqslant e_0, k\geqslant\frac{2e_0}{\lambda}$$
$$r_k=\sqrt{R^2-[R-(e_k-e_0)]^2}\approx\sqrt{2R(e_k-e_0)}=\sqrt{R(k\lambda-2e_0)}$$

15.

(1) 单缝衍射中，一级衍射明纹对应三个半波带，所以有

$$\delta = a\sin\theta = 3\frac{\lambda}{2}$$

$$x_1 = f\tan\theta \approx f\sin\theta = f\frac{3\lambda}{2a}$$

$$\Delta x_1 = f\frac{3\Delta\lambda}{2a} = 0.5\times\frac{3\times(760-400)\times10^{-9}}{2\times1.0\times10^{-4}} = 2.7\times10^{-3}\ \mathrm{m} = 2.7\ \mathrm{mm}$$

(2) 光栅衍射中，由光栅方程

$$\delta = d\sin\theta = k\lambda$$

一级主极大，$k=1$，所以

$$\sin\theta = \frac{\lambda}{d}$$

$$x_1 = f\tan\theta \approx f\sin\theta = f\frac{\lambda}{d}$$

$$\Delta x_1 = f\frac{\Delta\lambda}{d} = 0.5\times\frac{(760-400)\times10^{-9}}{1.0\times10^{-4}} = 1.8\times10^{-3}\ \mathrm{m} = 1.8\ \mathrm{mm}$$

16.比值为 1/2

自然光通过偏振片，光强变成一半；线偏振光通过偏振片，出射光强与入射光强满足马吕斯定律

$$I = I_0\cos^2\alpha$$

设入射光中自然光的光强为 I_1，线偏振光的光强为 I_2，则出射光的光强为

$$I = \frac{1}{2}I_1 + I_2\cos^2\alpha$$

$$I_{\min} = \frac{1}{2}I_1$$

$$I_{\max} = \frac{1}{2}I_1 + I_2$$

依题意

$$I_{\max} = 5I_{\min}$$

$$\frac{1}{2}I_1 + I_2 = 5\left(\frac{1}{2}I_1\right)$$

$$I_2 = 2I_1$$

17.

（1）求归一化因子A

$$\because \int_{-\infty}^{\infty}|\psi(x)|^2\,dx = \int_0^{\infty}\left|Axe^{-\lambda x}\right|^2 dx = A^2\frac{2}{(2\lambda)^3} = \frac{2A^2}{(2\lambda)^3} = 1 \qquad A = 2\lambda^{3/2}$$

（2）粒子坐标的概率分布函数

$$\begin{cases} \rho(x) = \psi(x)\cdot\psi^*(x) = |\psi(x)|^2 = 4\lambda^3x^2e^{-2\lambda x} & (x\ge0) \\ \rho(x) = 0 & (x\le0) \end{cases}$$

（3） 在何处找到粒子的概率最大

若求粒子概率最大处，令 $\dfrac{d\rho(x)}{dx} = 0$

即$2xe^{-2\lambda x} - 2\lambda x^2e^{-2\lambda x} = 0$，得 $x = \dfrac{1}{\lambda}$处找到粒子的概率最大。

（4） $$\overline{x}=\int_{-\infty}^{\infty}x\rho(x)\mathrm{d}x=\int_{0}^{\infty}x\cdot 4\lambda^3x^2e^{-2\lambda x}\mathrm{d}x=4\lambda^3\frac{3!}{(2\lambda)^{3+1}}=\frac{3}{2\lambda}$$

$$\overline{x^2}=\int_{-\infty}^{\infty}x^2\rho(x)\mathrm{d}x=\int_{0}^{\infty}x^2\cdot 4\lambda^3x^2e^{-2\lambda x}\mathrm{d}x=4\lambda^3\frac{4!}{(2\lambda)^{4+1}}=\frac{3}{\lambda^2}$$

18.（1）$2n^2=8$ 个 量子态

(2) 按照能量最低原理和泡利不相容原理在每个量子态内填充1个电子, 得磷 (P)的电子排布 $1s^22s^22p^63s^23p^3$。

1s, 2s, 3s 电子轨道角动量为 $\sqrt{l(l+1)}\hbar=\sqrt{0(0+1)}\hbar=0$

2p, 3p 电子轨道角动量为 $\sqrt{l(l+1)}\hbar=\sqrt{1(1+1)}\hbar=\sqrt{2}\hbar$

四、设计与应用

19.两种参考方案：单缝衍射、劈尖干涉

言之成理，根据自己定义的物理量正确推导公式即可。