



“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材配套辅导书

Physics

物理学

(第六版)

习题分析与解答

马文蔚 主编

殷实 沈才康 包刚 编

高等教育出版社

- ★ 以本书主教材第五版为主讲教材的大学物理课程成为首批上线的中国大学资源共享课
- ★ 以本书主教材第四版为主讲教材的大学物理课程被评为国家精品课程
- ★ 本书主教材第四版荣获全国普通高等学校优秀教材二等奖
- ★ 本书主教材第四版荣获中国高校科学技术奖一等奖
- ★ 本书主教材第三版荣获国家教委优秀教材一等奖
- ★ 本书主教材第二版荣获国家教委优秀教材二等奖

ISBN 978-7-04-042333-4



9 787040 423334 >

定价 37.70 元



“十二五”普通高等教育本科国家级



面向 21 世纪课程教材

# 物理学

(第六版)

# 习题分析与解答

马文蔚 主编  
殷实 沈才康 包刚 编

WULIXUE ( DI LIU BAN ) XITI FENXI YU JIEDA

高等教育出版社·北京

## 内容简介

本书是为马文蔚等改编的《物理学》(第六版)编写的习题分析与解答。本书对教材中所有的习题进行了分析解答。在编写中,本书贯彻重分析、简解答的指导思想,力求通过对题目的分析,使学生在解题之前,对相关的物理规律有进一步的认识;通过解题方法和技巧的介绍和运用,拓宽学生的解题思路;通过讨论计算结果来进一步明确物理意义。而对于解题过程,本书则尽可能做到简明扼要。

本书适合选用马文蔚等改编《物理学》(第六版)作为教材的师生作为教学和学习参考书使用,也可供其他高等学校理工科各专业师生和社会读者选择使用。

## 图书在版编目(CIP)数据

物理学(第六版)习题分析与解答 / 马文蔚主编;  
殷实, 沈才康, 包刚编. --北京: 高等教育出版社,  
2015.4

ISBN 978-7-04-042333-4

I. ①物… II. ①马… ②殷… ③沈… ④包… III.  
①物理学-高等学校-题解 IV. ①O4-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 047583 号

策划编辑 缪可可  
插图绘制 黄建英

责任编辑 张海雁  
责任校对 王 雨

封面设计 王 洋  
责任印制 张泽业

版式设计 王艳红

---

出版发行 高等教育出版社  
社 址 北京市西城区德外大街 4 号  
邮政编码 100120  
印 刷 北京丰源印刷厂  
开 本 787mm×960mm 1/16  
印 张 23.5  
字 数 430 千字  
购书热线 010-58581118

---

咨询电话 400-810-0598  
网 址 <http://www.hep.edu.cn>  
<http://www.hep.com.cn>  
网上订购 <http://www.landaco.com>  
<http://www.landaco.com.cn>  
版 次 2015年4月第1版  
印 次 2015年4月第1次印刷  
定 价 37.70 元

---

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换  
版权所有 侵权必究  
物 料 号 42333-00

# 前 言

本书是根据马文蔚等改编的“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材《物理学》(第六版)一书中的习题而作的分析与解答。与上一版相比,本书适当增加了一些习题,并为新增“原子核与粒子物理简介”一章配备了若干习题。所选习题覆盖了教育部高等学校物理学与天文学教学指导委员会编制的《理工科类大学物理课程教学基本要求》(2010年版)中的全部核心内容,并选有拓展内容的习题;所选习题尽可能突出基本训练和联系工程实际。此外,为了帮助学生掌握求解大学物理课程范围内的物理问题的思路和方法,本书继续为力学、电磁学、波动过程、光学、热物理、相对论和量子物理基础等撰写了涉及这些内容的解题思路和方法,以期帮助学生启迪思维,提高运用物理学的基本定律来分析问题和解决问题的能力。

物理学的基本概念和规律是在分析具体物理问题的过程中逐步被建立和掌握的,解题之前必须对所研究的物理问题建立一个清晰的图像,从而明确解题的思路。只有这样,才能在解完习题之后留下一些值得回味的东西,体会到物理问题所蕴涵的奥妙和含义,通过举一反三,提高自己分析问题和解决问题的能力。有鉴于此,重分析,简解答的模式仍为编写本书的指导思想。本书力求在分析中突出物理图像,引导学生以科学探究的态度对待物理习题,初步培养学生“悟物穷理”的精神,通过解题过程体验物理科学的魅力和价值,尝试“做学问”的乐趣。因此对于解题过程,本书则尽可能做到简明扼要,让学生自己去完成具体计算,编者企盼这本书能对学生学习能力的提高和科学素质的培养有所帮助。

本书中物理量的名称和单位遵照1993年中华人民共和国国家技术监督局发布的国家标准《量和单位》中规定的法定计量单位和1996年全国自然科学名词审定委员会公布的《物理学名词》。

本书由马文蔚主编,由殷实、沈才康、包刚、韦娜编写,西北工业大学宋士贤教授审阅了全书并提出了许多详细中肯的修改意见,在此,编者致以诚挚的感谢。

由于编者的水平有限,敬请读者批评指正。

编 者

2014年12月于南京

# 目 录

<b>第一篇 力学</b> .....	1
求解力学问题的基本思路和方法.....	1
第一章 质点运动学.....	5
第二章 牛顿定律 .....	29
第三章 动量守恒定律和能量守恒定律 .....	52
第四章 刚体转动和流体运动 .....	80
<b>第二篇 电磁学</b> .....	108
求解电磁学问题的基本思路和方法.....	108
第五章 静电场.....	111
第六章 静电场中的导体与电介质.....	138
第七章 恒定磁场.....	166
第八章 电磁感应 电磁场.....	188
<b>第三篇 波动过程 光学</b> .....	209
求解波动过程和光学问题的基本思路和方法.....	209
第九章 振动.....	213
第十章 波动.....	241
第十一章 光学.....	263
<b>第四篇 气体动理论 热力学基础</b> .....	289
求解气体动理论和热力学问题的基本思路和方法.....	289
第十二章 气体动理论.....	291
第十三章 热力学基础.....	304
<b>第五篇 近代物理基础</b> .....	327
求解近代物理问题的基本思路和方法.....	327
第十四章 相对论.....	330
第十五章 量子物理.....	343
第十六章 原子核与粒子物理简介.....	361

# 第一篇 力学

## 求解力学问题的基本思路和方法

物理学是一门基础学科,它研究物质运动的各种基本规律.由于不同运动形式具有不同的运动规律,从而要用不同的研究方法处理.力学是研究物体机械运动规律的一门学科,而机械运动有各种运动形态,每一种形态和物体受力情况以及初始状态有密切关系.掌握力的各种效应和运动状态改变之间的一系列规律是求解力学问题的重要基础.但仅仅记住一些公式是远远不够的.求解一个具体物理问题首先应明确研究对象的运动性质;选择符合题意的恰当的模型;透彻认清物体受力和运动过程的特点等等.根据模型、条件和结论之间的逻辑关系,运用科学合理的研究方法,进而选择一个正确简便的解题切入点,在这里思路和方法起着非常重要的作用.

### 1. 正确选择物理模型和认识运动过程

力学中常有质点、质点系、刚体等模型.每种模型都有特定的含义,适用范围和物理规律.采用何种模型既要考虑问题本身的限制,又要注意解决问题的需要.例如,用动能定理来处理物体的运动时,可把物体抽象为质点模型.而用功能原理来处理时,就必须把物体与地球组成一个系统来处理.再如对绕固定轴转动的门或质量和形状不能不计的定滑轮来说,必须把它视为刚体,并用角量和相应规律来进行讨论.在正确选择了物理模型后,还必须对运动过程的性质和特点有充分理解,如物体所受力(矩)是恒定的还是变化的;质点作一般曲线运动,还是作圆周运动等等,以此决定解题时采用的解题方法和数学工具.

## 2. 叠加法

叠加原理是物理学中应用非常广泛的一条重要原理,据此力学中任何复杂运动都可以被看成由几个较为简单运动叠加而成.例如质点作一般平面运动时,通常可以看成是由两个相互垂直的直线运动叠加而成,而对作圆周运动的质点来说,其上的外力可按运动轨迹的切向和法向分解,其中切向力只改变速度的大小,而法向力只改变速度的方向.对刚体平面平行运动来说,可以理解为任一时刻它包含了两个运动的叠加,一是质心的平动,二是绕质心的转动.运动的独立性和叠加性是叠加原理中的两个重要原则,掌握若干基本的简单运动的物理规律,再运用叠加法就可以化“复杂”为“简单”.此外运用叠加法时要注意选择合适的坐标系,选择什么样的坐标系就意味着将运动按相应形式分解.在力学中,对一般平面曲线运动,多采用平面直角坐标系,平面圆周运动多采用自然坐标系,而对刚体绕定轴转动则采用极坐标系等等.

叠加原理在诸如电磁学、振动、波动等其他领域内都有广泛应用,是物理学研究物质运动的一种基本思想和方法,需读者在解题过程中不断体会和领悟.

## 3. 类比法

有些不同性质运动的规律具有某些相似性,理解这种相似性产生的条件和遵从的规律有利于发现和认识物质运动的概括性和统一性.而且还应在学习中善于发现并充分利用这种相似性,以拓宽自己的知识面.例如质点的直线运动和刚体绕定轴转动是两类不同运动,但是运动规律却有许多可类比和相似之处,如

$$v = \frac{dx}{dt} \quad \text{与} \quad \omega = \frac{d\theta}{dt}$$

$$a = \frac{dv}{dt} \quad \text{与} \quad \alpha = \frac{d\omega}{dt}$$

其实它们之间只是用角量替换了相应的线量而已,这就可由比较熟悉的公式联想到不太熟悉的公式.这种类比不仅运动学有,动力学也有,如

$$F = ma \quad \text{与} \quad M = J\alpha$$

$$\int F dt = mv - mv_0 \quad \text{与} \quad \int M dt = J\omega - J\omega_0$$

$$\int F dx = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 \quad \text{与} \quad \int M d\theta = \frac{1}{2}J\omega^2 - \frac{1}{2}J\omega_0^2$$

可以看出两类不同运动中各量的对应关系十分明显,使我们可以把对质点运动的分析方法移植到刚体转动问题的分析中去.当然移植时必须注意两种运动的区别,一个是平动一个是转动,状态变化的原因一个是力而另一个是力矩.此外还有许多可以类比的实例,如万有引力与库仑力、静电场与恒定磁场,电介质的极化与磁介质的磁化等等.只要我们在物理学习中善于归纳类比,就可以沟通不同领域内相似物理问题的研究思想和方法,并由此及彼,触类旁通.



#### 4. 微积分在力学解题中的运用

微积分是大学物理学习中应用很多的一种数学运算,在力学中较为突出,也是初学大学物理课程时遇到的一个困难.要用好微积分这个数学工具,首先应在思想上认识到物体在运动过程中,反映其运动特征的物理量是随时空的变化而变化的.一般来说,它们是时空坐标的函数.运用微积分可求得质点的运动方程和运动状态.这是大学物理和中学物理最显著的区别.例如通过对质点速度函数中的时间  $t$  求一阶导数就可得到质点加速度函数.另外对物理量数学表达式进行合理变形就可得出新的物理含义.如由  $d\mathbf{v}=\mathbf{a}dt$ ,借助积分求和运算可求得在  $t_1-t_2$  时间内质点速度的变化;同样由  $d\mathbf{r}=\mathbf{v}dt$  也可求得质点的运动方程.以质点运动学为例,我们可用微积分把运动学问题归纳如下:

第一类问题:已知运动方程求速度和加速度;

第二类问题:已知质点加速度以及在初始状态时的位矢和速度,可求得质点的运动方程.

在力学中还有很多这样的关系,读者不妨自己归纳整理一下,从而学会自觉运用微积分来处理物理问题,运用时有以下几个问题需要引起大家的关注:

(1) 运用微积分的物理条件.在力学学习中我们会发现,  $\mathbf{v}=\mathbf{v}_0+\mathbf{a}t$  和  $\mathbf{r}=\mathbf{v}_0t+\frac{1}{2}\mathbf{a}t^2$  等描述质点运动规律的公式,只是式  $\int_{v_0}^v d\mathbf{v}=\int_0^t \mathbf{a}dt$  和式  $\int_0^r d\mathbf{r}=\int_0^t (\mathbf{v}_0+\mathbf{a}t) dt$  在加速度  $\mathbf{a}$  为常矢量条件下积分后的结果.

此外,在高中物理中只讨论了一些质点在恒力作用下的力学规律和相关物理问题,而在大学物理中则主要研究在变力和变力矩作用下的力学问题,微积分将成为求解上述问题的主要数学工具.

(2) 如何对矢量函数进行微积分运算.我们知道很多物理量都是矢量,如力学中的  $\mathbf{r}$ 、 $\mathbf{v}$ 、 $\mathbf{a}$ 、 $\mathbf{p}$  等物理量,矢量既有大小又有方向,从数学角度看它们都是“二元函数”,在大学物理学习中,通常结合叠加法进行操作,如对一般平面曲线运动可先将矢量在固定直角坐标系中分解,分别对  $x$ 、 $y$  轴两个固定方向的分量(可视为标量)进行微积分运算,最后再通过叠加法求得矢量的大小和方向;对平面圆周运动,则可按切向和法向分解,对切线方向上描述大小的物理量  $a_t$ 、 $v$ 、 $s$  等进行微积分运算.

(3) 积分运算中的分离变量和变量代换问题.以质点在变力作用下作直线运动为例,如已知变力表达式和初始状态求质点的速率,求解本问题一条路径是:由  $F=ma$  求得  $a$  的表达式,再由式  $d\mathbf{v}=\mathbf{a}dt$  通过积分运算求得  $v$ ,其中如果力为时间  $t$  的显函数,则  $a=a(t)$ ,此时可两边直接积分,即  $\int_{v_0}^v dv=\int_0^t a(t) dt$ ;但如果力是速率  $v$  的显函数,则  $a=a(v)$ ,此时应先作分离变量后再两边积分,即

$\int_{v_0}^v \frac{1}{a(v)} dv = \int_0^t dt$ ; 又如力是位置  $x$  的显函数, 则  $a = a(x)$ , 此时可利用  $v = \frac{dx}{dt}$  得  $dt = \frac{dx}{v}$ , 并取代原式中的  $dt$ , 再分离变量后两边积分, 即  $\int_{v_0}^v v dv = \int_{x_0}^x a(x) dx$ , 用变量

代换的方法可求得  $v(x)$  表达式, 在以上积分中建议采用定积分, 下限为与积分元对应的初始条件, 上限则为待求量.

### 5. 求解力学问题的几条路径

综合力学中的定律, 可归结为三种基本路径, 即

(1) 动力学方法: 如问题涉及加速度, 此法应首选. 运用牛顿定律、转动定律以及运动学规律, 可求得几乎所有的基本力学量, 求解对象广泛, 但由于涉及较多的过程细节, 对变力(矩)问题, 还将用到微积分运算, 故计算量较大. 因而只要问题不涉及加速度, 则应首先考虑以下路径.

(2) (角)动量方法: 如问题不涉及加速度, 但涉及时间, 此法可首选.

(3) 能量方法: 如问题既不涉及加速度, 又不涉及时间, 则应首先考虑用动能定理或功能原理处理问题.

当然对复杂问题, 几种方法应同时考虑. 此外, 三个守恒定律(动量守恒、能量守恒、角动量守恒定律)能否成立往往是求解力学问题首先应考虑的问题. 总之应学会从不同角度分析与探讨问题.

以上只是原则上给出求解力学问题一些基本思想与方法, 其实求解具体力学问题并无固定模式, 有时全靠“悟性”. 但这种“悟性”产生于对物理基本规律的深入理解与物理学方法掌握之中, 要学会在解题过程中不断总结与思考, 从而使自己分析问题的能力不断增强.

# 第一章 质点运动学

**1-1** 质点作曲线运动,在时刻  $t$  质点的位矢为  $r$ ,速度为  $v$ ,速率为  $v$ , $t$  至  $(t+\Delta t)$  时间内的位移为  $\Delta r$ ,路程为  $\Delta s$ ,位矢大小的变化量为  $\Delta r$  (或称  $|\Delta r|$ ),平均速度为  $\bar{v}$ ,平均速率为  $\bar{v}$ .

(1) 根据上述情况,则必有( )

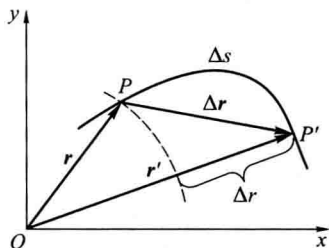
- (A)  $|\Delta r| = \Delta s = \Delta r$
- (B)  $|\Delta r| \neq \Delta s \neq \Delta r$ ,当  $\Delta t \rightarrow 0$  时有  $|\mathrm{d}r| = \mathrm{d}s \neq \mathrm{d}r$
- (C)  $|\Delta r| \neq \Delta r \neq \Delta s$ ,当  $\Delta t \rightarrow 0$  时有  $|\mathrm{d}r| = \mathrm{d}r \neq \mathrm{d}s$
- (D)  $|\Delta r| \neq \Delta s \neq \Delta r$ ,当  $\Delta t \rightarrow 0$  时有  $|\mathrm{d}r| = \mathrm{d}r = \mathrm{d}s$

(2) 根据上述情况,则必有( )

- (A)  $|\boldsymbol{v}| = v, |\bar{\boldsymbol{v}}| = \bar{v}$
- (B)  $|\boldsymbol{v}| \neq v, |\bar{\boldsymbol{v}}| \neq \bar{v}$
- (C)  $|\boldsymbol{v}| = v, |\bar{\boldsymbol{v}}| \neq \bar{v}$
- (D)  $|\boldsymbol{v}| \neq v, |\bar{\boldsymbol{v}}| = \bar{v}$

**分析与解** (1) 质点在  $t$  至  $(t+\Delta t)$  时间内沿曲线从  $P$  点运动到  $P'$  点,各量

关系如图所示,其中路程  $\Delta s = \widehat{PP'}$ ,位移大小  $|\Delta r| = PP'$ ,而  $\Delta r = |\boldsymbol{r}'| - |\boldsymbol{r}|$  表示质点位矢大小的变化量,三个量的物理含义不同,在曲线运动中大小也不相等(注:在直线运动中有相等的可能).但当  $\Delta t \rightarrow 0$  时, $P'$  点无限趋近  $P$  点,则有  $|\mathrm{d}r| = \mathrm{d}s$ ,但却不等于  $\mathrm{d}r$ . 故选(B).



题 1-1 图

(2) 由于  $|\Delta r| \neq \Delta s$ ,故  $\left| \frac{\Delta r}{\Delta t} \right| \neq \frac{\Delta s}{\Delta t}$ ,即  $|\bar{\boldsymbol{v}}| \neq \bar{v}$ .

但由于  $|\mathrm{d}r| = \mathrm{d}s$ ,故  $\left| \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} \right| = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$ ,即  $|\boldsymbol{v}| = v$ . 由此可见,应选(C).

**1-2** 一运动质点在某瞬时位于位矢  $\boldsymbol{r}(x, y)$  的端点处,对其速度的大小有四种意见,即

- (1)  $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$ ;
- (2)  $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$ ;
- (3)  $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$ ;
- (4)  $\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2}$ .

下述判断正确的是( )

- (A) 只有(1)(2)正确
- (B) 只有(2)正确
- (C) 只有(2)(3)正确
- (D) 只有(3)(4)正确

**分析与解**  $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$  表示质点到坐标原点的距离随时间的变化率,在极坐标系中

叫径向速率. 通常用符号  $v_r$  表示, 这是速度矢量在位矢方向上的一个分量;  $\frac{dr}{dt}$  表示速度矢量; 在自然坐标系中速度大小可用公式  $v = \frac{ds}{dt}$  计算, 在直角坐标系中则

可由公式  $v = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$  求解. 故选(D).

**1-3** 质点作曲线运动,  $r$  表示位置矢量,  $v$  表示速度,  $a$  表示加速度,  $s$  表示路程,  $a_t$  表示切向加速度. 对下列表达式, 即

$$(1) \frac{dv}{dt} = a; \quad (2) \frac{dr}{dt} = v; \quad (3) \frac{ds}{dt} = v; \quad (4) \left| \frac{dv}{dt} \right| = a_t.$$

下述判断正确的是( )

- (A) 只有(1)、(4)是对的      (B) 只有(2)、(4)是对的  
(C) 只有(2)是对的      (D) 只有(3)是对的

**分析与解**  $\frac{dv}{dt}$  表示切向加速度  $a_t$ , 它表示速度大小随时间的变化率, 是加速度矢量沿速度方向的一个分量, 起改变速度大小的作用;  $\frac{dr}{dt}$  在极坐标系中表示径向速率  $v_r$  (如题 1-2 所述);  $\frac{ds}{dt}$  在自然坐标系中表示质点的速率  $v$ ; 而  $\left| \frac{dv}{dt} \right|$  表示加速度的大小而不是切向加速度  $a_t$ . 因此只有(3)式表达是正确的. 故选(D).

**1-4** 一个质点在作圆周运动时, 则有( )

- (A) 切向加速度一定改变, 法向加速度也改变  
(B) 切向加速度可能不变, 法向加速度一定改变  
(C) 切向加速度可能不变, 法向加速度不变  
(D) 切向加速度一定改变, 法向加速度不变

**分析与解** 加速度的切向分量  $a_t$  起改变速度大小的作用, 而法向分量  $a_n$  起改变速度方向的作用. 质点作圆周运动时, 由于速度方向不断改变, 相应法向加速度的方向也在不断改变, 因而法向加速度是一定改变的. 至于  $a_t$  是否改变, 则要视质点的速率情况而定. 质点作匀速率圆周运动时,  $a_t$  恒为零; 质点作匀变速率圆周运动时,  $a_t$  为一不为零的常量, 当  $a_t$  改变时, 质点则作一般的变速率圆周运动. 由此可见, 应选(B).

**1-5** 如图所示, 湖中有一小船, 有人用绳绕过岸上一定高度处的定滑轮, 拉湖中的船向岸边运动. 设该人以匀速率  $v_0$  收绳, 绳不伸长且湖水静止, 小船的速率为  $v$ , 则小船作( )

- (A) 匀加速运动,  $v = \frac{v_0}{\cos \theta}$

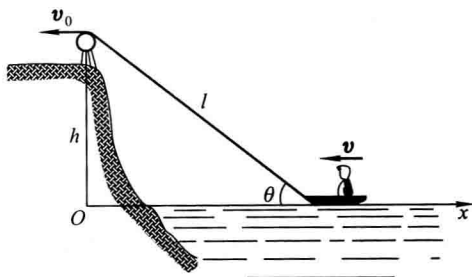
(B) 匀减速运动,  $v = v_0 \cos \theta$

(C) 变加速运动,  $v = \frac{v_0}{\cos \theta}$

(D) 变减速运动,  $v = v_0 \cos \theta$

(E) 匀速直线运动,  $v = v_0$

**分析与解** 本题关键是先求得小船速度表达式, 进而判断运动性质. 为此建立如图所示坐标系, 设定滑轮距水面高度为  $h$ ,  $t$  时刻定滑轮



题 1-5 图

距小船的绳长为  $l$ , 则小船的运动方程为  $x = \sqrt{l^2 - h^2}$ , 其中绳长  $l$  随时间  $t$  而变

化. 小船速度  $v = \frac{dx}{dt} = \frac{l \frac{dl}{dt}}{\sqrt{l^2 - h^2}}$ , 式中  $\frac{dl}{dt}$  表示绳长  $l$  随时间的变化率, 其大小即为  $v_0$ ,

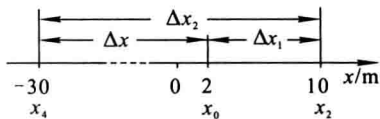
代入整理后为  $v = \frac{v_0}{\sqrt{l^2 - h^2} / l} = \frac{v_0}{\cos \theta}$ , 方向沿  $x$  轴负向. 由速度表达式, 可判断小船作变加速运动. 故选 (C).

**讨论** 有人会将绳子速率  $v_0$  按  $x, y$  两个方向分解, 则小船速度  $v = v_0 \cos \theta$ , 这样做对吗?

**1-6** 已知质点沿  $x$  轴作直线运动, 其运动方程为  $x = 2 + 6t^2 - 2t^3$ , 式中  $x$  的单位为  $m, t$  的单位为  $s$ . 求: (1) 质点在运动开始后  $4.0 s$  内的位移的大小; (2) 质点在该时间内所通过的路程; (3)  $t = 4.0 s$  时质点的速度和加速度.

**分析** 位移和路程是两个完全不同的概念. 只有当质点作直线运动且运动方向不改变时, 位移的大小才会与路程相等. 质点在  $t$  时间内的位移  $\Delta x$  的大小可直接由运动方程得到:  $\Delta x = x_t - x_0$ , 而在求路程时, 就必须注意到质点在运动过程中可能改变运动方向, 此时, 位移的大小和路程就不同了.

为此, 需根据  $\frac{dx}{dt} = 0$  来确定其运动方向改变的



题 1-6 图

时刻  $t_p$ , 求出  $0 \sim t_p$  和  $t_p \sim t$  内的位移大小  $\Delta x_1$ 、 $\Delta x_2$ , 则  $t$  时间内的路程  $s = |\Delta x_1| + |\Delta x_2|$ , 如图

所示. 至于  $t = 4.0 s$  时质点速度和加速度可用  $\frac{dx}{dt}$  和  $\frac{d^2x}{dt^2}$  两式计算.

**解** (1) 质点在  $4.0 s$  内位移的大小

$$\Delta x = x_4 - x_0 = -32 \text{ m}$$

(2) 由

$$\frac{dx}{dt} = 0$$

得知质点的换向时刻为

$$t_p = 2 \text{ s} \quad (t=0 \text{ 不合题意})$$

则

$$\Delta x_1 = x_2 - x_0 = 8.0 \text{ m}$$

$$\Delta x_2 = x_4 - x_2 = -40 \text{ m}$$

所以,质点在该 4.0 s 时间间隔内的路程为

$$s = |\Delta x_1| + |\Delta x_2| = 48 \text{ m}$$

(3)  $t=4.0 \text{ s}$  时

$$v = \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=4.0 \text{ s}} = -48 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$a = \left. \frac{d^2x}{dt^2} \right|_{t=4.0 \text{ s}} = -36 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

**1-7** 一质点沿  $x$  轴方向作直线运动,其速度与时间的关系如图(a)所示. 设  $t=0$  时,  $x=0$ . 试根据已知的  $v-t$  图,画出  $a-t$  图以及  $x-t$  图.

**分析** 根据加速度的定义可知,在直线运动中  $v-t$  曲线的斜率为加速度的大小(图中  $AB$ 、 $CD$  段斜率为定值,即匀变速直线运动;而线段  $BC$  的斜率为 0,加速度为零,即匀速直线运动). 加速度为恒量,在  $a-t$  图上是平行于  $t$  轴的直线,由  $v-t$  图中求出各段的斜率,即可作出  $a-t$  图线. 又由速度的定义可知,  $x-t$  曲线的斜率为速度的大小. 因此,匀速直线运动所对应的  $x-t$  图应是一直线,而匀变速直线运动所对应的  $x-t$  图为  $t$  的二次曲线. 根据各段时间内的运动方程  $x=x(t)$ , 求出不同时刻  $t$  的位置  $x$ , 采用描数据点的方法,可作出  $x-t$  图.

**解** 将曲线分为  $AB$ 、 $BC$ 、 $CD$  三个过程,它们对应的加速度值分别为

$$a_{AB} = \frac{v_B - v_A}{t_B - t_A} = 20 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \quad (\text{匀加速直线运动})$$

$$a_{BC} = 0 \quad (\text{匀速直线运动})$$

$$a_{CD} = \frac{v_D - v_C}{t_D - t_C} = -10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \quad (\text{匀减速直线运动})$$

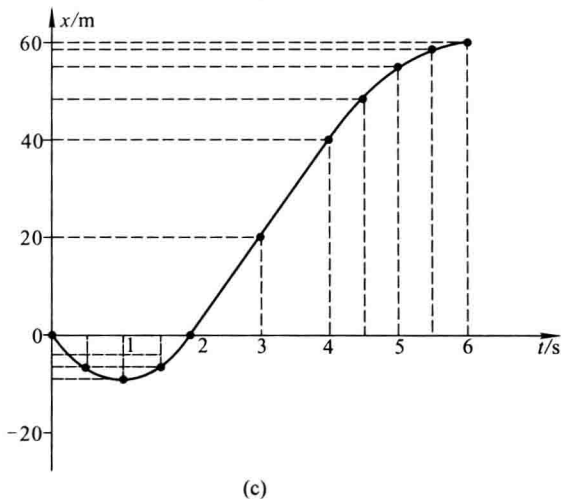
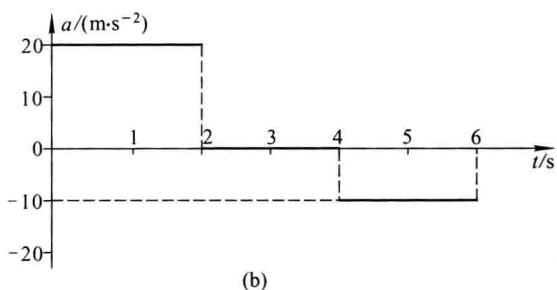
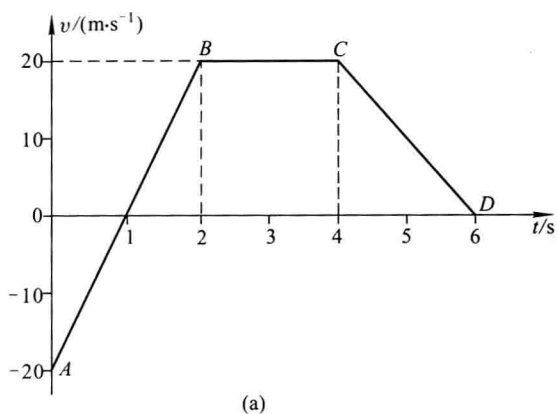
根据上述结果即可作出质点的  $a-t$  图[图(b)].

在匀变速直线运动中,有

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

由此,可计算在 0~2 s 和 4~6 s 时间间隔内各时刻的位置分别为

$t/\text{s}$	0	0.5	1	1.5	2	4	4.5	5	5.5	6
$x/\text{m}$	0	-7.5	-10	-7.5	0	40	48.8	55	58.8	60



题 1-7 图

用描数据点的作图方法,由表中数据可作  $0 \sim 2$  s 和  $4 \sim 6$  s 时间内的  $x-t$  图. 在  $2 \sim 4$  s 时间内,质点是作  $v = 20 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  的匀速直线运动,其  $x-t$  图是斜率  $k = 20$  的一段直线[图(c)].

1-8 已知质点的运动方程为  $\boldsymbol{r} = 2t\boldsymbol{i} + (2-t^2)\boldsymbol{j}$ , 式中  $r$  的单位为 m,  $t$  的单位为 s. 求:

- (1) 质点的轨迹;
- (2)  $t=0$  及  $t=2$  s 时, 质点的位矢;
- (3) 由  $t=0$  到  $t=2$  s 内质点的位移  $\Delta\boldsymbol{r}$  和径向增量  $\Delta r$ ;
- \* (4) 2 s 内质点所走过的路程  $s$ .

**分析** 质点的轨迹方程为  $y=f(x)$ , 可由运动方程的两个分量式  $x(t)$  和  $y(t)$  中消去  $t$  即可得到. 对于  $\boldsymbol{r}$ 、 $\Delta\boldsymbol{r}$ 、 $\Delta r$ 、 $\Delta s$  来说, 物理含义不同, 可根据其定义计算. 其中对  $s$  的求解用到积分方法, 先在轨迹上任取一段微元  $ds$ , 则  $ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$ , 最后用  $s = \int ds$  积分求  $s$ .

**解** (1) 由  $x(t)$  和  $y(t)$  中消去  $t$  后得质点轨迹方程为

$$y = 2 - \frac{1}{4}x^2$$

这是一个抛物线方程, 轨迹如图(a)所示.

(2) 将  $t=0$  s 和  $t=2$  s 分别代入运动方程, 可得相应位矢分别为

$$\boldsymbol{r}_0 = 2\boldsymbol{j}, \quad \boldsymbol{r}_2 = 4\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j}$$

图(a)中的  $P$ 、 $Q$  两点, 即为  $t=0$  s 和  $t=2$  s 时质点所在位置.

(3) 由位移表达式, 得

$$\Delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_0 = (x_2 - x_0)\boldsymbol{i} + (y_2 - y_0)\boldsymbol{j} = 4\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j}$$

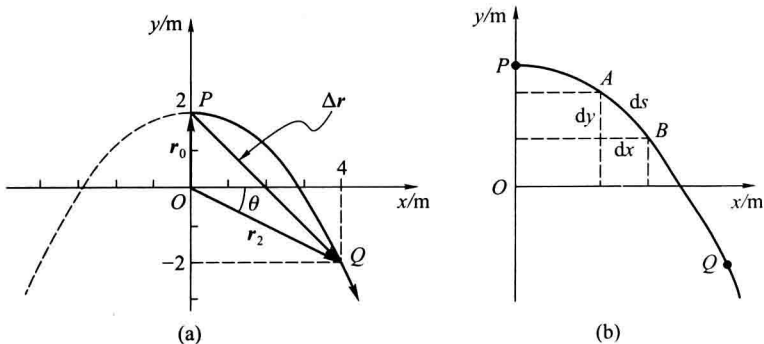
其中位移大小为

$$|\Delta\boldsymbol{r}| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = 5.66 \text{ m}$$

而径向增量为

$$\Delta r = \Delta|\boldsymbol{r}| = |\boldsymbol{r}_2| - |\boldsymbol{r}_0| = \sqrt{x_2^2 + y_2^2} - \sqrt{x_0^2 + y_0^2} = 2.47 \text{ m}$$

\* (4) 如图(b)所示, 所求  $\Delta s$  即为图中  $\widehat{PQ}$  段长度, 先在其间任意处取  $AB$  微元  $ds$ ,



题 1-8 图



则  $ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$ , 由轨道方程可得  $dy = -\frac{1}{2}x dx$ , 代入  $ds$ , 则 2 s 内的路程为

$$s = \int_p^0 ds = \int_0^4 \frac{1}{2} \sqrt{4+x^2} dx = 5.91 \text{ (m)}$$

**1-9** 质点的运动方程为

$$x = -10t + 30t^2$$

$$y = 15t - 20t^2$$

式中  $x, y$  的单位为 m,  $t$  的单位为 s.

试求: (1) 初速度的大小和方向; (2) 加速度的大小和方向.

**分析** 由运动方程的分量式可分别求出速度、加速度的分量, 再由运动合成算出速度和加速度的大小和方向.

**解** (1) 速度的分量式为

$$v_x = \frac{dx}{dt} = -10 + 60t,$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = 15 - 40t$$

当  $t=0$  时,  $v_{0x} = -10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ ,  $v_{0y} = 15 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ , 则初速度大小为

$$v_0 = \sqrt{v_{0x}^2 + v_{0y}^2} = 18.0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

设  $v_0$  与  $x$  轴的夹角为  $\alpha$ , 则

$$\tan \alpha = \frac{v_{0y}}{v_{0x}} = -\frac{3}{2}$$

$$\alpha = 123^\circ 41'$$

(2) 加速度的分量式为

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = 60 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}, \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} = -40 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

则加速度的大小为

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = 72.1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

设  $a$  与  $x$  轴的夹角为  $\beta$ , 则

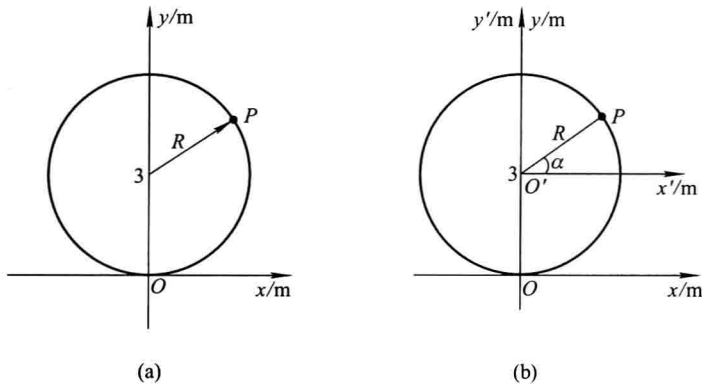
$$\tan \beta = \frac{a_y}{a_x} = -\frac{2}{3}$$

$$\beta = -33^\circ 41' \text{ (或 } 326^\circ 19')$$

**1-10** 一质点  $P$  沿半径  $R=3.0 \text{ m}$  的圆周作匀速率运动, 运动一周所需时间为  $20.0 \text{ s}$ , 设  $t=0$  时, 质点位于  $O$  点. 按图(a)中所示  $Oxy$  坐标系, 求: (1) 质点  $P$  在任意时刻的位矢; (2) 5 s 时的速度和加速度.

**分析** 该题属于运动学的第一类问题, 即已知运动方程  $r=r(t)$  求质点运动的一

切信息(如位置矢量、位移、速度、加速度). 在确定运动方程时,若取以点(0,3)为原点的 $O'x'y'$ 坐标系,并采用参数方程 $x'=x'(t)$ 和 $y'=y'(t)$ 来表示圆周运动是比较方便的. 然后,运用坐标变换 $x=x_0+x'$ 和 $y=y_0+y'$ ,将所得参数方程转换至 $Oxy$ 坐标系中,即得 $Oxy$ 坐标系中质点 $P$ 在任意时刻的位矢. 采用对运动方程求导的方法可得速度和加速度.



题 1-10 图

解 (1) 如图(b)所示,在 $O'x'y'$ 坐标系中,因 $\alpha = \frac{2\pi}{T}t$ ,则质点 $P$ 的参数方程为

$$x' = R \sin \frac{2\pi}{T}t, \quad y' = -R \cos \frac{2\pi}{T}t$$

坐标变换后,在 $Oxy$ 坐标系中有

$$x = x' = R \sin \frac{2\pi}{T}t, \quad y = y' + y_0 = -R \cos \frac{2\pi}{T}t + R$$

则质点 $P$ 的位矢方程为

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= R \sin \frac{2\pi}{T}t \mathbf{i} + (-R \cos \frac{2\pi}{T}t + R) \mathbf{j} \\ &= 3 \sin (0.1\pi t) \mathbf{i} + 3 [1 - \cos (0.1\pi t)] \mathbf{j} \end{aligned}$$

(2) 5 s 时的速度和加速度分别为

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = R \frac{2\pi}{T} \cos \frac{2\pi}{T}t \mathbf{i} + R \frac{2\pi}{T} \sin \frac{2\pi}{T}t \mathbf{j} = (0.3\pi \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}) \mathbf{j}$$

$$\mathbf{a} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -R \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \sin \frac{2\pi}{T}t \mathbf{i} + R \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \cos \frac{2\pi}{T}t \mathbf{j} = (-0.03\pi^2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}) \mathbf{i}$$

**1-11** 一气球以匀速率 $v_0$ 从地面向上. 由于风的影响,它获得了一个水平速度 $v_x = by$ ( $b$ 为常量, $y$ 为上升高度). 以气球出发点为坐标系原点,向上为 $y$ 轴正向,水平沿风向为 $x$ 轴正向. 求:(1) 气球的运动方程;(2) 气球的轨迹方程.

分析 由题意知  $y = v_0 t$ , 但如何由题给出的  $v_x$  求  $x(t)$  是求解的关键. 此时可由题意和  $v_x$  的定义式作如下处理: 由  $v_x = \frac{dx}{dt} = by = bv_0 t$ , 对  $\frac{dx}{dt} = bv_0 t$  作分离变量后积分即可求得  $x(t)$ .

解 (1) 由分析知  $y = v_0 t$  (1)

$$v_x = by = bv_0 t = \frac{dx}{dt} \quad (2)$$

对式(2)作分离变量 即

$$dx = bv_0 t dt$$

两边积分

$$\int_0^x dx = \int_0^t bv_0 t dt$$

得

$$x = \frac{1}{2} bv_0 t^2 \quad (3)$$

则气球运动方程为

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} bv_0 t^2 \\ y = v_0 t \end{cases}$$

也可写成矢量式

$$\mathbf{r} = \frac{1}{2} bv_0 t^2 \mathbf{i} + v_0 t \mathbf{j}$$

(2) 由式(1)和(3)消去  $t$ , 得气球轨迹方程:

$$x = \frac{b}{2v_0} y^2$$

显然气球的空间轨迹为一抛物线.

**1-12** 一升降机以加速度  $1.22 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$  上升, 当上升速度为  $2.44 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  时, 有一螺丝自升降机的天花板上松脱, 天花板与升降机的底面相距  $2.74 \text{ m}$ . 计算: (1) 螺丝从天花板落到底面所需要的时间; (2) 螺丝相对升降机外固定柱子的下降距离.

分析 在升降机与螺丝之间有相对运动的情况下, 一种处理方法是取地面为参考系, 分别讨论升降机竖直向上的匀加速度运动和初速不为零的螺丝的自由落体运动, 列出这两种运动在同一坐标系中的运动方程  $y_1 = y_1(t)$  和  $y_2 = y_2(t)$ , 并考虑它们相遇, 即位矢相同这一条件, 问题即可解; 另一种方法是取升降机(或螺丝)为参考系, 这时, 螺丝(或升降机)相对它作匀加速运动, 但是, 此加速度应该是相对加速度. 升降机的厢的高度就是螺丝(或升降机)运动的路程.

解 1 (1) 以地面为参考系, 取如图所示的坐标系, 升降机与螺丝的运动方程分别为

$$y_1 = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

$$y_2 = h + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

当螺丝落至底面时,有  $y_1 = y_2$ , 即

$$v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 = h + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g+a}} = 0.705 \text{ s}$$

(2) 螺丝相对升降机外固定柱子下降的距离为

$$d = h - y_2 = -v_0 t + \frac{1}{2} g t^2 = 0.716 \text{ m}$$

**解 2** (1) 以升降机为参考系,此时,螺丝相对它的加速度大小  $a' = g + a$ ,螺丝落至底面时,有

$$0 = h - \frac{1}{2} (g+a) t^2$$

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g+a}} = 0.705 \text{ s}$$

(2) 由于升降机在  $t$  时间内上升的高度为

$$h' = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

则

$$d = h - h' = 0.716 \text{ m}$$

**1-13** 设一列动车有 9 节长度相等的车厢,动车匀加速地从站台处驶出,一观察者站在第一节车厢的最前端,他测到第一节车厢驶过他的时间是 4.0 s. 问第 9 节车厢驶过他时用时多少?

**分析与解** 设动车每节车厢(含车头)长度均为  $l_0$ ,第一节车厢驶过观察者用时  $t_0 = 4 \text{ s}$ .

第一节车厢尾端驶过时有

$$l_0 = \frac{1}{2} a t_0^2 \quad (1)$$

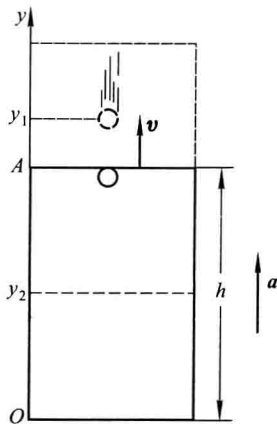
第八节车厢尾端驶过时有

$$8l_0 = \frac{1}{2} a t_8^2 \quad (2)$$

第九节车厢尾端驶过时有

$$9l_0 = \frac{1}{2} a t_9^2 \quad (3)$$

由式(1)和(2)得



题 1-12 图

$$t_8 = \sqrt{8}t_0$$

由式(1)和(3)得

$$t_9 = 3t_0$$

则第九节车厢本身驶过观察者用时

$$\Delta t = t_9 - t_8 = (3 - \sqrt{8})t_0 = 0.69 \text{ s}$$

本题还有其他解法,如利用初速为零的匀加速直线的特殊规律:通过第一个  $s$ , 第 2 个  $s$ ……第  $n$  个  $s$  所用时间之比为  $t_1 : t_{II} : \dots : t_n = 1 : (\sqrt{2} - 1) : (\sqrt{3} - \sqrt{2}) : \dots : (\sqrt{n} - \sqrt{n-1})$ .

**1-14** 地面上垂直竖立一高 20.0 m 的旗杆,已知正午时分太阳在旗杆的正上方,求在下午 2:00 时,杆顶在地面上影子速度的大小.在何时刻杆影将伸展至 20.0 m?

**分析** 为求杆顶在地面上影子速度的大小,必须建立影长与时间的函数关系,即影子端点的位矢方程.根据几何关系,影长可通过太阳光线对地转动的角速度求得.由于运动的相对性,太阳光线对地转动的角速度也就是地球自转的角速度.这样,影子端点的位矢方程和速度均可求得.

**解** 设太阳光线对地转动的角速度为  $\omega$ ,从正午时分开始计时,则杆的影长为  $s = h \tan \omega t$ ,下午 2:00 时,杆顶在地面上影子的速度大小为

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{h\omega}{\cos^2 \omega t} = 1.94 \times 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

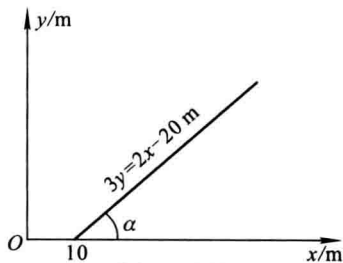
当杆长等于影长时,即  $s = h$ ,则

$$t = \frac{1}{\omega} \arctan \frac{s}{h} = \frac{\pi}{4\omega} = 3 \times 60 \times 60 \text{ s}$$

即为下午 3:00.

**1-15** 一质点具有恒定加速度  $\mathbf{a} = (6\mathbf{i} + 4\mathbf{j}) \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ .在  $t = 0$  时,其速度为零,位置矢量  $\mathbf{r}_0 = (10 \text{ m})\mathbf{i}$ .求:(1)在任意时刻的速度和位置矢量;(2)质点在  $Oxy$  平面上的轨迹方程,并画出轨迹的示意图.

**分析** 与上两题不同处在于质点作平面曲线运动,根据叠加原理,求解时需根据加速度的两个分量  $a_x$  和  $a_y$  分别积分,从而得到运动方程  $\mathbf{r}$  的两个分量式  $x(t)$  和  $y(t)$ .由于本题中质点



题 1-15 图

加速度为常矢量,故两次积分后所得运动方程为固定形式,即  $x = x_0 + v_{0x}t + \frac{1}{2}a_x t^2$

和  $y = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}a_y t^2$ ,两个分运动均为匀变速直线运动.读者不妨自己验证一下.

解 由加速度定义式,根据初始条件 $t_0=0$ 时 $v_0=0$ ,积分可得

$$\int_0^v d\mathbf{v} = \int_0^t \mathbf{a} dt = \int_0^t (6i+4j) dt$$

$$\mathbf{v} = 6ti+4tj$$

又由 $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$ 及初始条件 $t=0$ 时, $\mathbf{r}_0 = (10 \text{ m})\mathbf{i}$ ,积分可得

$$\int_{r_0}^r d\mathbf{r} = \int_0^t \mathbf{v} dt = \int_0^t (6ti+4tj) dt$$

$$\mathbf{r} = (10+3t^2)\mathbf{i}+2t^2\mathbf{j}$$

由上述结果可得质点运动方程的分量式,即

$$x = 10+3t^2$$

$$y = 2t^2$$

消去参量 $t$ ,可得运动的轨迹方程

$$3y = 2x - 20 \text{ m}$$

这是一个直线方程. 直线斜率 $k = \frac{dy}{dx} = \tan \alpha = \frac{2}{3}$ , $\alpha = 33^\circ 41'$ . 轨迹如图所示.

**1-16** 质点沿直线运动,加速度 $a = 4-t^2$ ,式中 $a$ 的单位为 $\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$ , $t$ 的单位为 $\text{s}$ . 如果当 $t = 3 \text{ s}$ 时, $x = 9 \text{ m}$ , $v = 2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ ,求质点的运动方程.

分析 本题属于运动学第二类问题,即已知加速度求速度和运动方程,必须在给定条件下用积分方法解决. 由 $a = \frac{dv}{dt}$ 和 $v = \frac{dx}{dt}$ 可得 $dv = a dt$ 和 $dx = v dt$ . 如 $a = a(t)$ 或 $v = v(t)$ ,则可两边直接积分. 如果 $a$ 或 $v$ 不是时间 $t$ 的显函数,则应经过诸如分离变量或变量代换等数学操作后再做积分.

解 由分析知,应有

$$\int_{v_0}^v dv = \int_0^t a dt$$

得

$$v = 4t - \frac{1}{3}t^3 + v_0 \quad (1)$$

由

$$\int_{x_0}^x dx = \int_0^t v dt$$

得

$$x = 2t^2 - \frac{1}{12}t^4 + v_0 t + x_0 \quad (2)$$

将 $t = 3 \text{ s}$ 时, $x = 9 \text{ m}$ , $v = 2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ 代入式(1)、(2)得 $v_0 = -1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ , $x_0 = 0.75 \text{ m}$ . 于是可得质点运动方程为

$$x = 2t^2 - \frac{1}{12}t^4 - t + 0.75$$

**1-17** 一石子从空中由静止下落,由于空气阻力,石子并非作自由落体运动,现已知加速度  $a = A - Bv$ , 式中  $A, B$  为常量. 试求石子的速度和运动方程.

**分析** 本题亦属于运动学第二类问题,与上题不同之处在于加速度是速度  $v$  的函数,因此,需将式  $dv = a(v) dt$  分离变量为  $\frac{dv}{a(v)} = dt$  后再两边积分.

**解** 选取石子下落方向为  $y$  轴正向,下落起点为坐标原点.

(1) 由题意知

$$a = \frac{dv}{dt} = A - Bv \quad (1)$$

用分离变量法把式(1)改写为

$$\frac{dv}{A - Bv} = dt \quad (2)$$

将式(2)两边积分并考虑初始条件,有

$$\int_0^v \frac{dv}{A - Bv} = \int_0^t dt$$

得石子速度

$$v = \frac{A}{B}(1 - e^{-Bt})$$

由此可知当  $t \rightarrow \infty$  时,  $v \rightarrow \frac{A}{B}$  为一常量,通常称为极限速度或收尾速度.

(2) 再由  $v = \frac{dy}{dt} = \frac{A}{B}(1 - e^{-Bt})$  并考虑初始条件有

$$\int_0^y dy = \int_0^t \frac{A}{B}(1 - e^{-Bt}) dt$$

得石子运动方程

$$y = \frac{A}{B}t + \frac{A}{B^2}(e^{-Bt} - 1)$$

**1-18** 一质点沿  $x$  轴运动,其加速度  $a$  与位置坐标  $x$  的关系为  $a = 2 + 6x^2$ , 式中  $a$  的单位为  $m \cdot s^{-2}$ ,  $x$  的单位为  $m$ . 如果质点在原点处的速度为零,试求其在任意位置处的速度.

**分析** 已知加速度求速度,属于运动学第二类问题,用到积分运算. 但本题与前面几题不同之处为:加速度为位置的函数,即  $a = \frac{dv}{dt} = 2 + 6x^2$ , 此微分方程涉及三个变量(即  $v, x, t$ ),不能直接求解. 此时应先作变量变换,即  $a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} =$

$\frac{v dv}{dx} = 2 + 6x^2$ , 此式只涉及  $v$  与  $x$  两个变量,然后再作分离变量后两边积分求解. 变

量变换和分离变量是积分中常用方法,应尽快掌握.

**解** 设质点在  $x$  处的速度为  $v$ ,由定义式作变量变换:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = 2+6x^2$$

分离变量后两边积分:

$$\int_0^v v dv = \int_0^x (2+6x^2) dx$$

得

$$v = 2(x+x^3)^{1/2}$$

**1-19** 如图(a)所示,一小型迫击炮架设在一斜坡的底端  $O$  处,已知斜坡倾角为  $\alpha$ ,炮身与斜坡的夹角为  $\beta$ ,炮弹的出口速度为  $v_0$ ,忽略空气阻力.求:(1) 炮弹落地点  $P$  与点  $O$  的距离  $OP$ ; (2) 欲使炮弹能垂直击中坡面.证明  $\alpha$  和  $\beta$  必须满足  $\tan \beta = \frac{1}{2 \tan \alpha}$ ,并与  $v_0$  无关.

**分析** 这是一个斜上抛运动,看似简单,但针对题目所问,如不能灵活运用叠加原理,建立一个恰当的坐标系,将运动分解的话,求解起来并不容易.现建立如图(a)所示坐标系,则炮弹在  $x$  和  $y$  两个方向的分运动均为匀减速直线运动,其初速度分别为  $v_0 \cos \beta$  和  $v_0 \sin \beta$ ,其加速度分别为  $g \sin \alpha$  和  $g \cos \alpha$ .在此坐标系中炮弹落地时,应有  $y=0$ ,则  $x=OP$ .如欲使炮弹垂直击中坡面,则应满足  $v_x=0$ ,直接列出有关运动方程和速度方程,即可求解.由于本题中加速度  $g$  为常矢量.故第一问也可由运动方程的矢量式计算,即  $\mathbf{r} = \mathbf{v}_0 t + \frac{1}{2} \mathbf{g} t^2$ ,作出炮弹落地时的矢量图[如图(b)所示],由图中所示几何关系也可求得  $\vec{OP}$ (即图中的  $\mathbf{r}$  矢量).

(1) **解 1** 由分析知,炮弹在图(a)所示坐标系中两个分运动方程为

$$x = v_0 t \cos \beta - \frac{1}{2} g t^2 \sin \alpha \quad (1)$$

$$y = v_0 t \sin \beta - \frac{1}{2} g t^2 \cos \alpha \quad (2)$$

令  $y=0$  求得时间  $t$  后再代入式(1)得

$$\begin{aligned} OP = x &= \frac{2v_0^2 \sin \beta}{g \cos^2 \alpha} (\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta) \\ &= \frac{2v_0^2 \sin \beta}{g \cos^2 \alpha} \cos(\alpha + \beta) \end{aligned}$$

**解 2** 作出炮弹的运动矢量图,如图(b)所示,并利用正弦定理,有

$$\frac{|\mathbf{r}|}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha - \beta\right)} = \frac{v_0 t}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)} = \frac{\frac{1}{2} g t^2}{\sin \beta}$$



从中消去  $t$  后也可得到同样结果.

(2) 由分析知,如炮弹垂直击中坡面应满足  $y=0$  和  $v_x=0$ , 则

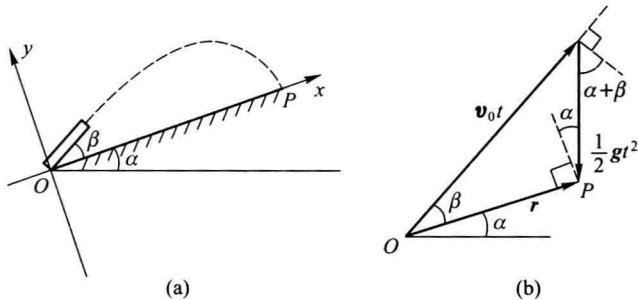
$$v_x = v_0 \cos \beta - gt \sin \alpha = 0 \quad (3)$$

由(2)、(3)两式消去  $t$  后得

$$\tan \beta = \frac{1}{2 \tan \alpha}$$

由此可知. 只要角  $\alpha$  和  $\beta$  满足上式, 炮弹就能垂直击中坡面, 而与  $v_0$  的大小无关.

讨论 如将炮弹的运动按水平和竖直两个方向分解, 求解本题将会比较困难, 有兴趣读者不妨自己体验一下.



题 1-19 图

**1-20** 一足球运动员在正对球门前 25.0 m 处以  $20.0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  的初速率罚任意球, 已知球门高为 3.44 m. 若要在垂直于球门的竖直平面内将足球直接踢进球门, 问他应在与地面成什么角度的范围内踢出足球? (足球可视为质点.)

**分析** 被踢出后的足球, 在空中作斜抛运动, 其轨迹方程可由质点在竖直平面内的运动方程得到. 由于水平距离  $x$  已知, 球门高度又限定了在  $y$  方向的范围, 故只需将  $x, y$  值代入即可求出.

**解** 取图示坐标系  $Oxy$ , 由运动方程

$$x = vt \cos \theta, \quad y = vt \sin \theta - \frac{1}{2} gt^2$$

消去  $t$  得轨迹方程

$$y = x \tan \theta - \frac{g}{2v^2} (1 + \tan^2 \theta) x^2$$

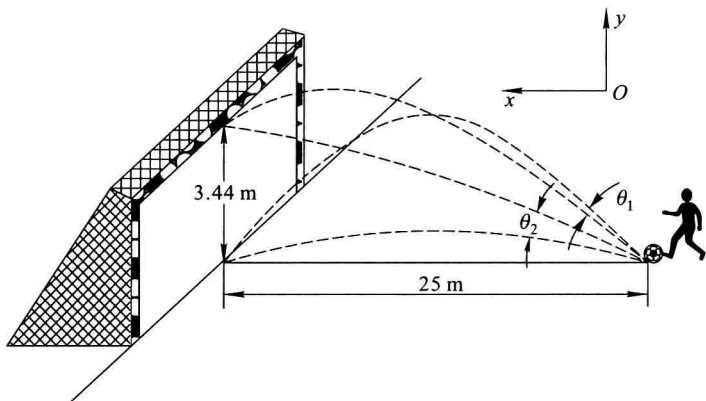
以  $x = 25.0 \text{ m}$ ,  $v = 20.0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  及  $3.44 \text{ m} \geq y \geq 0$  代入后, 可解得

$$71.11^\circ \geq \theta_1 \geq 69.92^\circ$$

$$27.92^\circ \geq \theta_2 \geq 18.89^\circ$$

如何理解上述角度的范围? 在初速一定的条件下, 球击中球门底线或球门上线

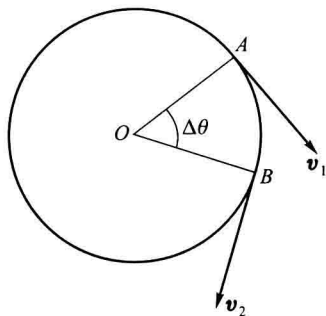
都将对应有两个不同的投射倾角(如图所示). 如果以  $\theta > 71.11^\circ$  或  $\theta < 18.89^\circ$  踢出足球, 都将因射程不足而不能直接射入球门; 由于球门高度的限制,  $\theta$  角也并非能取  $71.11^\circ$  与  $18.89^\circ$  之间的任何值. 当倾角取值为  $27.92^\circ < \theta < 69.92^\circ$  时, 踢出的足球将越过门缘而离去, 这时球也不能射入球门. 因此可取的角度范围只能是解中的结果.



题 1-20 图

**1-21** 如图(a)所示, 一质点在半径为  $R$  的圆周上以恒定的速率运动, 质点由位置  $A$  运动到位置  $B$ ,  $OA$  和  $OB$  所对的圆心角为  $\Delta\theta$ . (1) 试证位置  $A$  和  $B$  之间的平均加速度为  $\bar{a} = \sqrt{2(1-\cos \Delta\theta)} v^2 / (R\Delta\theta)$ ; (2) 当  $\Delta\theta$  分别等于  $90^\circ$ 、 $30^\circ$ 、 $10^\circ$  和  $1^\circ$  时, 平均加速度各为多少? 并对结果加以讨论.

**分析** 瞬时加速度和平均加速度的物理含义不同, 它们分别表示为  $\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}$  和  $\bar{\mathbf{a}} = \frac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta t}$ . 在匀速率圆周运动中, 它们的大小分别为  $a_n = \frac{v^2}{R}$ ,  $\bar{a} =$



(a)

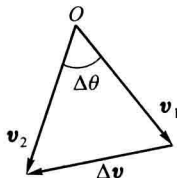
$\frac{|\Delta\mathbf{v}|}{\Delta t}$ , 式中  $|\Delta\mathbf{v}|$  可由图(b)中的几何关系得到,

而  $\Delta t$  可由转过的角度  $\Delta\theta$  求出.

由计算结果能清楚地看到两者之间的关系, 即瞬时加速度是平均加速度在  $\Delta t \rightarrow 0$  时的极限值.

**解** (1) 由图(b)可看到  $\Delta\mathbf{v} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$ , 故

$$\begin{aligned} |\Delta\mathbf{v}| &= \sqrt{v_1^2 + v_2^2 - 2v_1v_2 \cos \Delta\theta} \\ &= v\sqrt{2(1-\cos \Delta\theta)} \end{aligned}$$



(b)

题 1-21 图

而

$$\Delta t = \frac{\Delta s}{v} = \frac{R\Delta\theta}{v}$$

所以

$$\bar{a} = \frac{|\Delta v|}{\Delta t} = \sqrt{2(1-\cos \Delta\theta)} \frac{v^2}{R\Delta\theta}$$

(2) 将  $\Delta\theta = 90^\circ, 30^\circ, 10^\circ, 1^\circ$  分别代入上式, 得

$$\bar{a}_1 \approx 0.9003 \frac{v^2}{R}, \quad \bar{a}_2 \approx 0.9886 \frac{v^2}{R}$$

$$\bar{a}_3 \approx 0.9987 \frac{v^2}{R}, \quad \bar{a}_4 \approx 1.000 \frac{v^2}{R}$$

以上结果表明, 当  $\Delta\theta \rightarrow 0$  时, 匀速率圆周运动的平均加速度趋近于一极限值, 该值即为法向加速度  $\frac{v^2}{R}$ .

**1-22** 质点在  $Oxy$  平面内运动, 其运动方程为  $\mathbf{r} = 2.0t\mathbf{i} + (19.0 - 2.0t^2)\mathbf{j}$ , 式中  $r$  的单位为  $m$ ,  $t$  的单位为  $s$ . 求: (1) 质点的轨迹方程; (2) 在  $t_1 = 1.0 s$  到  $t_2 = 2.0 s$  时间内的平均速度; (3)  $t_1 = 1.0 s$  时的速度及切向和法向加速度; (4)  $t = 1.0 s$  时质点所在处轨道的曲率半径  $\rho$ .

**分析** 根据运动方程可直接写出其分量式  $x = x(t)$  和  $y = y(t)$ , 从中消去参量  $t$ , 即得质点的轨迹方程. 平均速度是反映质点在一段时间内位置的变化率, 即  $\bar{\mathbf{v}} = \Delta\mathbf{r}/\Delta t$ , 它与时间间隔  $\Delta t$  的大小有关, 当  $\Delta t \rightarrow 0$  时, 平均速度的极限即瞬时速度  $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$ . 切向和法向加速度是指在自然坐标下的分矢量  $\mathbf{a}_t$  和  $\mathbf{a}_n$ , 前者只反映质点在切线方向速度大小的变化率, 即  $\mathbf{a}_t = \frac{dv}{dt}\mathbf{e}_t$ , 后者只反映质点速度方向的变化, 它可由总加速度  $\mathbf{a}$  和  $\mathbf{a}_t$  得到. 在求得  $t_1$  时刻质点的速度和法向加速度的大小后, 可由公式  $a_n = \frac{v^2}{\rho}$  求  $\rho$ .

**解** (1) 由参量方程

$$x = 2.0t, \quad y = 19.0 - 2.0t^2$$

消去  $t$  得质点的轨迹方程

$$y = 19.0 - 0.50x^2$$

(2) 在  $t_1 = 1.00 s$  到  $t_2 = 2.0 s$  时间内的平均速度为

$$\bar{\mathbf{v}} = \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{t_2 - t_1} = 2.0\mathbf{i} - 6.0\mathbf{j}$$

(3) 质点在任意时刻的速度和加速度分别为

$$\mathbf{v}(t) = v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j} = \frac{dx}{dt} \mathbf{i} + \frac{dy}{dt} \mathbf{j} = 2.0 \mathbf{i} - 4.0 t \mathbf{j}$$

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d^2 x}{dt^2} \mathbf{i} + \frac{d^2 y}{dt^2} \mathbf{j} = (-4.0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}) \mathbf{j}$$

则  $t_1 = 1.00 \text{ s}$  时的速度为

$$\mathbf{v}(t) |_{t=1.0 \text{ s}} = 2.0 \mathbf{i} - 4.0 \mathbf{j}$$

切向和法向加速度分别为

$$\mathbf{a}_t |_{t=1.0 \text{ s}} = \frac{dv}{dt} \mathbf{e}_t = \frac{d}{dt} (\sqrt{v_x^2 + v_y^2}) \mathbf{e}_t = (3.58 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}) \mathbf{e}_t$$

$$\mathbf{a}_n = \sqrt{a^2 - a_t^2} \mathbf{e}_n = (1.79 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}) \mathbf{e}_n$$

(4)  $t = 1.0 \text{ s}$  质点的速度大小为

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 4.47 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

则

$$\rho = \frac{v^2}{a_n} = 11.17 \text{ m}$$

**1-23** 飞机以  $100 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  的速度沿水平直线飞行, 在离地面高为  $100 \text{ m}$  时, 驾驶员要把物品空投到前方某一地面目标处, 问: (1) 此时目标在飞机下方多远? (2) 投放物品时, 驾驶员看目标的视线和水平线成何角度? (3) 物品投出  $2.0 \text{ s}$  后, 它的法向加速度和切向加速度各为多少?

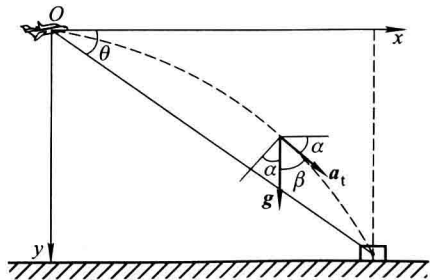
**分析** 物品空投后作平抛运动. 忽略空气阻力的条件下, 由运动独立性原理知, 物品在空中沿水平方向作匀速直线运动, 在竖直方向作自由落体运动. 到达地面目标时, 两个方向上运动时间是相同的. 因此, 分别列出其运动方程, 运用时间相等的条件, 即可求解.

此外, 平抛物体在运动过程中只存在竖直向下的重力加速度. 为求特定时刻  $t$  时物体的切向加速度和法向加速度, 只需求出该时刻它们与重力加速度之间的夹角  $\alpha$  或  $\beta$ . 由图可知, 在特定时刻  $t$ , 物体的切向加速度和水平线之间的夹角  $\alpha$ , 可由此时刻的两速度分量  $v_x$ 、 $v_y$  求出, 这样, 也就可将重力加速度  $\mathbf{g}$  的切向和法向分量求得.

**解** (1) 取如图所示的坐标系, 物品下落时在水平和竖直方向的运动方程分别为

$$x = vt, \quad y = \frac{1}{2} g t^2$$

飞机水平飞行速度  $v = 100 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ , 飞机离地面的高度  $y = 100 \text{ m}$ , 由上述两式可得目标在飞机正下方前的距离



题 1-23 图

$$x = v \sqrt{\frac{2y}{g}} = 452 \text{ m}$$

(2) 视线和水平线的夹角为

$$\theta = \arctan \frac{y}{x} = 12.5^\circ$$

(3) 在任意时刻物品的速度与水平轴的夹角为

$$\alpha = \arctan \frac{v_y}{v_x} = \arctan \frac{gt}{v}$$

取自然坐标,物品在抛出 2 s 时,重力加速度的切向分量与法向分量分别为

$$a_t = g \sin \alpha = g \sin \left( \arctan \frac{gt}{v} \right) = 1.88 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

$$a_n = g \cos \alpha = g \cos \left( \arctan \frac{gt}{v} \right) = 9.62 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

**1-24** 一质点沿半径为  $R$  的圆周按规律  $s = v_0 t - \frac{1}{2} b t^2$  运动,  $v_0$ 、 $b$  都是常量.

(1) 求  $t$  时刻质点的总加速度; (2)  $t$  为何值时总加速度在数值上等于  $b$ ?

(3) 当加速度达到  $b$  时,质点已沿圆周运行了多少圈?

**分析** 在自然坐标中,  $s$  表示圆周上从某一点开始的曲线坐标. 由给定的运动方程  $s = s(t)$ , 对时间  $t$  求一阶、二阶导数, 即是沿曲线运动的速度  $v$  和加速度的切向分量  $a_t$ , 而加速度的法向分量为  $a_n = v^2/R$ . 这样, 总加速度为  $\boldsymbol{a} = a_t \boldsymbol{e}_t + a_n \boldsymbol{e}_n$ . 由于质点实际上作匀变速运动, 故可由公式  $v^2 - v_0^2 = 2a_t s$  求第三问中所涉及的路程  $s$ . 再因圆周长为  $2\pi R$ , 质点所转过的圈数自然可求得.

**解** (1) 质点作圆周运动的速率为

$$v = \frac{ds}{dt} = v_0 - bt$$

其加速度的切向分量和法向分量分别为

$$a_t = \frac{d^2 s}{dt^2} = -b, \quad a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{(v_0 - bt)^2}{R}$$

故加速度的大小为

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_t^2} = \frac{\sqrt{R^2 b^2 + (v_0 - bt)^4}}{R}$$

其方向与切线之间的夹角为

$$\theta = \arctan \frac{a_n}{a_t} = \arctan \left[ -\frac{(v_0 - bt)^2}{Rb} \right]$$

(2) 要使  $|\boldsymbol{a}| = b$ , 由  $\frac{1}{R} \sqrt{R^2 b^2 + (v_0 - bt)^4} = b$  可得

$$t = \frac{v_0}{b}$$

(3) 从  $t=0$  开始到  $t=v_0/b$  时, 质点经过的路程为

$$s = \frac{v_0^2}{2b}$$

因此质点运行的圈数为

$$n = \frac{s}{2\pi R} = \frac{v_0^2}{4\pi bR}$$

**1-25** 一半径为 0.50 m 的飞轮在启动时的短时间内, 其角速度与时间的二次方成正比. 在  $t=2.0$  s 时测得轮缘一点的速度值为  $4.0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ . 求: (1) 该轮在  $t'=0.5$  s 的角速度, 轮缘一点的切向加速度和总加速度; (2) 该点在 2.0 s 内所转过的角度.

**分析** 首先应该确定角速度的函数关系  $\omega = kt^2$ . 依据角量与线量的关系由特定时刻的速度值可得相应的角速度, 从而求出式中的比例系数  $k$ ,  $\omega = \omega(t)$  确定后, 注意到运动的角量描述与线量描述的相应关系, 由运动学中两类问题求解的方法 (微分法和积分法), 即可得到特定时刻的角加速度、切向加速度和角位移.

**解** 因  $\omega R = v$ , 由题意  $\omega \propto t^2$  得比例系数

$$k = \frac{\omega}{t^2} = \frac{v}{Rt^2} = 2 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-3}$$

所以

$$\omega = \omega(t) = 2t^2$$

则  $t'=0.5$  s 时的角速度、角加速度和切向加速度分别为

$$\omega = 2t'^2 = 0.5 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = 4t' = 2.0 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-2}$$

$$a_t = \alpha R = 1.0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

总加速度为

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \mathbf{a}_t + \mathbf{a}_n = \alpha R \mathbf{e}_t + \omega^2 R \mathbf{e}_n \\ a &= \sqrt{(\alpha R)^2 + (\omega^2 R)^2} = 1.01 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \end{aligned}$$

在 2.0 s 内该点所转过的角度为

$$\theta - \theta_0 = \int_0^2 \omega dt = \int_0^2 2t^2 dt = \left. \frac{2}{3} t^3 \right|_0^2 = 5.33 \text{ (rad)}$$

**1-26** 一质点在半径为 0.10 m 的圆周上运动, 其角位置为  $\theta = 2 + 4t^3$ , 式中  $\theta$  的单位为 rad,  $t$  的单位为 s. (1) 求在  $t=2.0$  s 时质点的法向加速度和切向加速度; (2) 当切向加速度的大小恰等于总加速度大小的一半时,  $\theta$  值为多少? (3)  $t$

为多少时,法向加速度和切向加速度的值相等?

分析 掌握角量与线量、角位移方程与位矢方程的对应关系,应用运动学求解的方法即可得到.

解 (1) 由于  $\theta = 2 + 4t^3$ , 则角速度  $\omega = \frac{d\theta}{dt} = 12t^2$ . 在  $t = 2$  s 时, 法向加速度和切向加速度的数值分别为

$$a_n|_{t=2\text{ s}} = r\omega^2 = 2.30 \times 10^2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

$$a_t|_{t=2\text{ s}} = r \frac{d\omega}{dt} = 4.80 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

(2) 当  $a_t = a_n/2 = \frac{1}{2}\sqrt{a_n^2 + a_t^2}$  时, 有  $3a_t^2 = a_n^2$ , 即

$$3(24rt)^2 = r^2(12t^2)^4$$

得

$$t^3 = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

此时刻的角位置为

$$\theta = 2 + 4t^3 = 3.15 \text{ (rad)}$$

(3) 要使  $a_n = a_t$ , 则有

$$r(12t^2)^2 = 24rt$$

$$t = 0.55 \text{ s}$$

**1-27** 在半径为  $R$  的圆周上运动的质点, 其速率与时间关系为  $v = ct^2$ , 式中  $c$  为常量. 求: (1) 从  $t = 0$  时刻到  $t$  时刻质点走过的路程  $s(t)$ ; (2) 在  $t$  时刻质点的切向加速度  $a_t$  和法向加速度  $a_n$ .

分析 对圆周运动一般多采用自然坐标系, 在此坐标系中切向加速度, 速率和路程之间有类似直线运动中加速度, 速度和位移之间的规律, 如  $a_t = \frac{dv}{dt}$ ,  $dv = a_t dt$ ,  $v = \frac{ds}{dt}$ ,  $ds = v dt$ . 用求导方法可求第一类问题, 用积分方法求第二类问题. 本

题中  $v = \frac{ds}{dt} = ct^2$ , 作分离变量后积分可求得路程  $s$ .

解 (1) 由分析知

$$v = \frac{ds}{dt} = ct^2$$

分离变量后两边积分

$$\int_0^t ds = \int_0^t ct^2 dt$$

得

$$s = \frac{1}{3}ct^3$$

(2) 由相关定义,得

$$a_t = \frac{dv}{dt} = 2ct$$

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{c^2 t^4}{R}$$

**1-28** 一直立的雨伞,张开后其边缘圆周的半径为  $R$ ,离地面的高度为  $h$ ,  
(1) 当伞绕伞柄以匀角速  $\omega$  旋转时,求证水滴沿边缘飞出后落在地面上半径为  $r = R\sqrt{1+2h\omega^2/g}$  的圆周上;(2) 读者能否由此定性构想一种草坪上或农田灌溉用的旋转式洒水器的方案?

**分析** 选定伞边缘  $O$  处的雨滴为研究对象,当伞以角速度  $\omega$  旋转时,雨滴将以速度  $v$  沿切线方向飞出,并作平抛运动. 建立如图(a)所示坐标系,列出雨滴的运动方程并考虑图中所示几何关系,即可求证. 由此可以想象如果让水从一个旋转的有很多小孔的喷头中飞出,从不同小孔中飞出的水滴将会落在半径不同的圆周上,为保证均匀喷洒对喷头上小孔的分布还要给予精心的考虑.

**解** (1) 如图(a)所示坐标系中,雨滴落地的运动方程为

$$x = vt = R\omega t \quad (1)$$

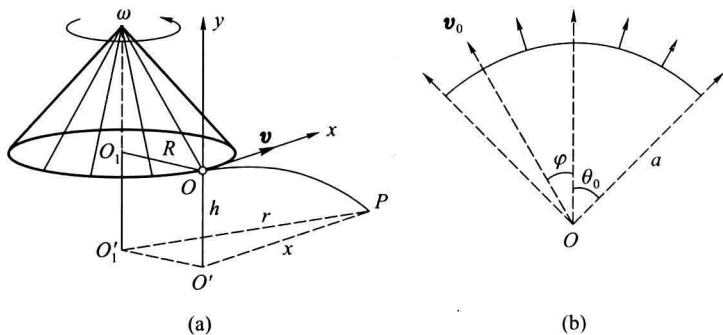
$$y = \frac{1}{2}gt^2 = h \quad (2)$$

由式(1)、(2)可得

$$x^2 = \frac{2R^2\omega^2 h}{g}$$

由图(a)所示几何关系得雨滴落地处圆周的半径为

$$r = \sqrt{x^2 + R^2} = R\sqrt{1 + \frac{2h}{g}\omega^2}$$



题 1-28 图

(2) 常用草坪喷水器采用如图(b)所示的球面喷头( $\theta_0 = 45^\circ$ )其上有大量小孔. 喷头旋转时,水滴以初速度  $v_0$  从各个小孔中喷出,并作斜上抛运动,通常喷头



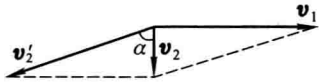
表面基本上与草坪处在同一水平面上. 则以  $\varphi$  角喷射的水柱射程为

$$R = \frac{v_0^2 \sin 2\varphi}{g}$$

为使喷头周围的草坪能被均匀喷洒, 喷头上的小孔数不但很多, 而且还不能均匀分布, 这是喷头设计中的一个关键问题.

**1-29** 一无风的下雨天, 一列火车以  $v_1 = 20.0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  的速度匀速前进, 在车内的旅客看见玻璃窗外的雨滴和竖直线成  $75^\circ$  角下降. 求雨滴下落的速度  $v_2$ . (设下降的雨滴作匀速运动.)

**分析** 这是一个相对运动的问题. 设雨滴为研究对象, 地面为静止参考系  $S$ , 火车为动参考系  $S'$ .  $v_1$  为  $S'$  相对  $S$  的速度,  $v_2$  为雨滴相对  $S$  的速度, 利用相对运动速度的关系即可解.



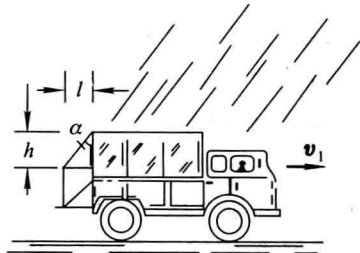
题 1-29 图

**解** 以地面为参考系, 火车相对地面运动的速度为  $v_1$ , 雨滴相对地面竖直下落的速度为  $v_2$ , 旅客看到雨滴下落的速度  $v_2'$  为相对速度, 它们之间的关系为  $v_2 = v_2' + v_1$  (如图所示), 于是可得

$$v_2 = \frac{v_1}{\tan 75^\circ} = 5.36 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

**1-30** 如图(a)所示, 一汽车在雨中沿直线行驶, 其速率为  $v_1$ , 下落雨滴的速度方向偏于竖直方向之前  $\theta$  角, 速率为  $v_2$ , 若车后有一长方形物体, 问车速  $v_1$  为多大时, 此物体正好不会被雨水淋湿?

**分析** 这也是一个相对运动的问题. 可视雨点为研究对象, 地面为静参考系  $S$ , 汽车为动参考系  $S'$ . 如图(a)所示, 要使物体不被淋湿, 在车上观察雨点下落的方向 (即雨点相对于汽车的运动速度  $v_2'$  的方向) 应满足  $\alpha \geq \arctan \frac{l}{h}$ . 再由相对速度的矢量关系  $v_2' = v_2 - v_1$ , 即可求出所需车速  $v_1$ .



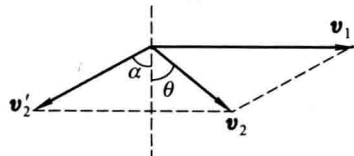
(a)

**解** 由  $v_2' = v_2 - v_1$  [图(b)], 有

$$\alpha = \arctan \frac{v_1 - v_2 \sin \theta}{v_2 \cos \theta}$$

而要使  $\alpha \geq \arctan \frac{l}{h}$ , 则

$$\frac{v_1 - v_2 \sin \theta}{v_2 \cos \theta} \geq \frac{l}{h}$$



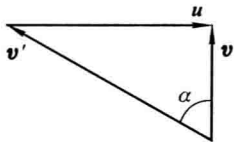
(b)

题 1-30 图

$$v_1 \geq v_2 \left( \frac{l \cos \theta}{h} + \sin \theta \right)$$

**1-31** 一人能在静水中以  $1.10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  的速度划船前进. 今欲横渡一宽为  $1.00 \times 10^3 \text{ m}$ 、水流速度为  $0.55 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  的大河, (1) 他若要从出发点横渡该河而到达正对岸的一点, 那么应如何确定划行方向? 到达正对岸需多少时间? (2) 如果希望用最短的时间过河, 应如何确定划行方向? 船到达对岸的位置在什么地方?

**分析** 船到达对岸所需时间是由船相对于岸的速度  $v$  决定的. 由于水流速度  $u$  的存在,  $v$  与船在静水中划行的速度  $v'$  之间有  $v = u + v'$  (如图所示). 若要使船到达正对岸, 则必须使  $v$  沿正对岸方向; 在划速一定的条件下, 若要用最短时间过河, 则必须使  $v$  有极大值.



题 1-31 图

**解** (1) 由  $v = u + v'$  可知  $\alpha = \arcsin \frac{u}{v'}$ , 则船到达正对岸所需时间为

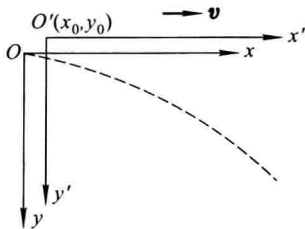
$$t = \frac{d}{v} = \frac{d}{v' \cos \alpha} = 1.05 \times 10^3 \text{ s}$$

(2) 由于  $v = v' \cos \alpha$ , 在划速  $v'$  一定的条件下, 只有当  $\alpha = 0$  时,  $v$  最大 (即  $v = v'$ ), 此时, 船过河时间  $t' = d/v'$ , 船到达距正对岸为  $l$  的下游处, 且有

$$l = ut' = u \frac{d}{v'} = 5.0 \times 10^2 \text{ m}$$

**1-32** 一质点相对观察者  $O$  运动, 在任意时刻  $t$ , 其位置为  $x = vt, y = gt^2/2$ , 质点运动的轨迹为抛物线. 若另一观察者  $O'$  以速率  $v$  沿  $x$  轴正向相对于  $O$  运动. 试问质点相对  $O'$  的轨迹和加速度如何?

**分析** 该问题涉及运动的相对性. 如图所示, 如何将已知质点相对于观察者  $O$  的运动转换到相对于观察者  $O'$  的运动中去, 其实质就是进行坐标变换, 将系  $O$  中一质点  $(x, y)$  变换至系  $O'$  中的点  $(x', y')$ . 由于观察者  $O'$  相对于观察者  $O$  作匀速运动, 因此, 该坐标变换是线性的.



题 1-32 图

**解** 取  $Oxy$  和  $O'x'y'$  分别为观察者  $O$  和观察者  $O'$  所在的坐标系, 且使  $Ox$  和  $O'x'$  两轴平行. 在  $t=0$  时, 两坐标系原点重合. 由坐标变换得

$$x' = x - vt = vt - vt = 0$$

$$y' = y = \frac{1}{2}gt^2$$

加速度为

$$a = a_{y'} = \frac{d^2 y'}{dt^2} = g$$

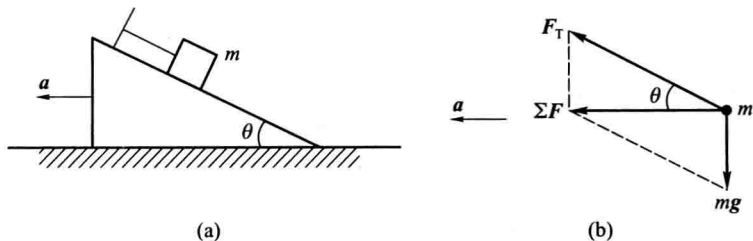
由此可见,质点相对于系  $O'$  是在  $y$  方向作匀变速直线运动. 质点在两坐标系中加速度相同,这也正是伽利略变换的必然结果.

## 第二章 牛顿定律

**2-1** 如图(a)所示,质量为  $m$  的物体用平行于斜面的细线连接并置于光滑的斜面上,若斜面向左方作加速运动,当物体刚脱离斜面时,它的加速度的大小为( )

- (A)  $g \sin \theta$     (B)  $g \cos \theta$     (C)  $g \tan \theta$     (D)  $g \cot \theta$

**分析与解** 当物体离开斜面瞬间,斜面对物体的支持力消失为零,物体在绳子拉力  $F_T$  (其方向仍可认为平行于斜面) 和重力作用下产生平行水平面向左的加速度  $a$ ,如图(b)所示,由其可解得合外力为  $mg \cot \theta$ ,故选(D). 求解的关键是正确分析物体刚离开斜面瞬间的物体受力情况和状态特征.



题 2-1 图

**2-2** 用水平力  $F_N$  把一个物体压着靠在粗糙的竖直墙面上保持静止. 当  $F_N$  逐渐增大时,物体所受的静摩擦力  $F_f$  的大小( )

- (A) 不为零,但保持不变  
(B) 随  $F_N$  成正比地增大  
(C) 开始随  $F_N$  增大,达到某一最大值后,就保持不变  
(D) 无法确定

**分析与解** 与滑动摩擦力不同的是,静摩擦力可在零与最大值  $\mu F_N$  范围内取值. 当  $F_N$  增加时,静摩擦力可取的最大值成正比增加,但具体大小则取决于被作用物体的运动状态. 由题意知,物体一直保持静止状态,故静摩擦力与重力大小相等,方向相反,并保持不变,故选(A).

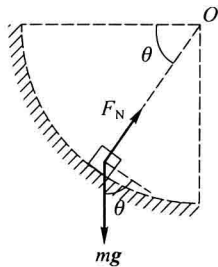
**2-3** 一段路面水平的公路,转弯处轨道半径为  $R$ ,汽车轮胎与路面间的摩擦因数为  $\mu$ ,要使汽车不至于发生侧向打滑,汽车在该处的行驶速率( )

- (A) 不得小于  $\sqrt{\mu g R}$       (B) 必须等于  $\sqrt{\mu g R}$   
(C) 不得大于  $\sqrt{\mu g R}$       (D) 还应由汽车的质量  $m$  决定

**分析与解** 由题意知,汽车应在水平面内作圆周运动,为保证汽车转弯时不侧向打滑,所需向心力只能由路面与轮胎间的静摩擦力提供,能够提供的最大向心力应为  $\mu F_N$ . 由此可算得汽车转弯的最大速率应为  $v = \sqrt{\mu R g}$ . 因此只要汽车转弯时的实际速率不大于此值,均能保证不侧向打滑. 应选 (C).

**2-4** 一物体沿固定圆弧形光滑轨道由静止下滑,在下滑过程中,则( )

- (A) 它的加速度方向永远指向圆心,其速率保持不变  
(B) 它受到的轨道的作用力的大小不断增加  
(C) 它受到的合外力大小变化,方向永远指向圆心  
(D) 它受到的合外力大小不变,其速率不断增加



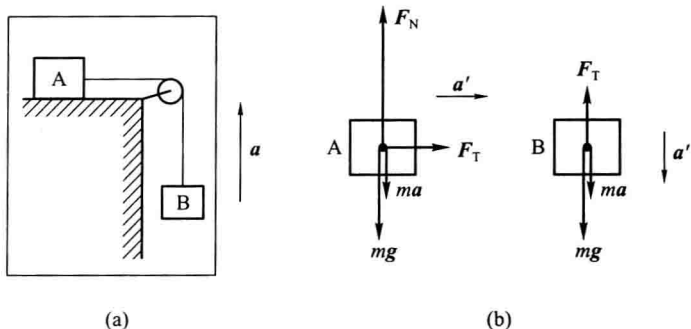
题 2-4 图

**分析与解** 由图可知,物体在下滑过程中受到大小和方向不变的重力以及时刻指向圆轨道中心的轨道支持力  $F_N$  作用,其合外力方向并非指向圆心,其大小和方向均与物体所在位置有关. 重力的切向分量 ( $mg \cos \theta$ ) 使物体的速率将会不断增加(由机械能守恒亦可判断),则物体作圆周运动的向心力(又称法向力)将不断增大,由轨道法向方向上的动力学方程  $F_N - mg \sin \theta = m \frac{v^2}{R}$  可判断,随  $\theta$  角的不断增大过程,轨道支持力  $F_N$  也将不断增大,由此可见应选 (B).

**2-5** 图(a)示系统置于以  $a = \frac{1}{4}g$  的加速度上升的升降机内,A、B 两物体质量相同均为  $m$ ,A 所在的桌面是水平的,绳子和定滑轮质量均不计,若忽略滑轮轴上和桌面上的摩擦,并不计空气阻力,则绳中张力为( )

- (A)  $\frac{5}{8}mg$       (B)  $\frac{1}{2}mg$       (C)  $mg$       (D)  $2mg$

**分析与解** 本题可考虑对 A、B 两物体加上惯性力后,以电梯这个非惯性参考系进行求解. 此时 A、B 两物体受力情况如图(b)所示,图中  $a'$  为 A、B 两物体相对电梯的加速度,  $ma$  为惯性力. 对 A、B 两物体应用牛顿第二定律,可解得  $F_T = \frac{5}{8}mg$ . 故选 (A).

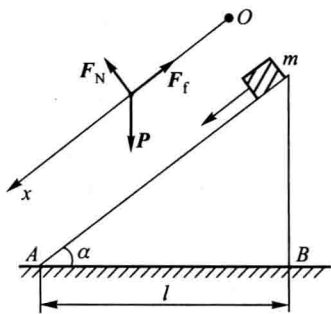


题 2-5 图

**讨论** 对于习题 2-5 这种类型的物理问题,往往从非惯性参考系(本题为电梯)观察到的运动图像较为明确,但由于牛顿定律只适用于惯性参考系,故从非惯性参考系求解力学问题时,必须对物体加上一个虚拟的惯性力.如以地面为惯性参考系求解,则两物体的加速度  $a_A$  和  $a_B$  均应对地而言,本题中  $a_A$  和  $a_B$  的大小与方向均不相同.其中  $a_A$  应斜向上.对  $a_A$ 、 $a_B$ 、 $a$  和  $a'$  之间还要用到相对运动规律,求解过程较繁.有兴趣的读者不妨自己尝试一下.

**2-6** 图示为一斜面,倾角为  $\alpha$ ,底边  $AB$  长为  $l=2.1\text{ m}$ ,质量为  $m$  的物体从斜面顶端由静止开始向下滑动,斜面的摩擦因数为  $\mu=0.14$ .试问,当  $\alpha$  为何值时,物体在斜面上下滑的时间最短?其数值为多少?

**分析** 动力学问题一般分为两类:(1) 已知物体受力求其运动情况;(2) 已知物体的运动情况来分析其所受的力.当然,在一个具体题目中,这两类问题并无截然的界限,且都是以加速度作为中介,把动力学方程和运动学规律联系起来.本题关键在列出动力学和运动学方程后,解出倾角与时间的函数关系  $\alpha=f(t)$ ,然后运用对  $t$  求极值的方法即可得出数值来.



题 2-6 图

**解** 取沿斜面向下为坐标轴  $Ox$  正向,原点  $O$  位于斜面顶点,则由牛顿第二定律有

$$mgsin\alpha - mg\mu\cos\alpha = ma \quad (1)$$

又物体在斜面上作匀变速直线运动,故有

$$\frac{l}{\cos\alpha} = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)t^2$$

$$t = \sqrt{\frac{2l}{g \cos \alpha (\sin \alpha - \mu \cos \alpha)}} \quad (2)$$

为使下滑的时间最短,可令  $\frac{dt}{d\alpha} = 0$ , 由式(2)有

$$-\sin \alpha (\sin \alpha - \mu \cos \alpha) + \cos \alpha (\cos \alpha + \mu \sin \alpha) = 0$$

则可得

$$\tan 2\alpha = -\frac{1}{\mu}, \quad \alpha = 49^\circ$$

$$t_{\min} = \sqrt{\frac{2l}{g \cos \alpha (\sin \alpha - \mu \cos \alpha)}} = 0.99 \text{ s}$$

**2-7** 工地上有一吊车,将甲、乙两块混凝土预制板吊起送至高空. 甲块质量为  $m_1 = 2.00 \times 10^2 \text{ kg}$ , 乙块质量为  $m_2 = 1.00 \times 10^2 \text{ kg}$ . 设吊车、框架和钢丝绳的质量不计. 试求下述两种情况下,钢丝绳所受的张力以及乙块对甲块的作用力:(1) 两物块以  $10.0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$  的加速度上升;(2) 两物块以  $1.0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$  的加速度上升. 从本题的结果,你能体会到起吊重物时必须缓慢加速的道理吗?

**分析** 预制板、吊车框架、钢丝绳等可视为一组物体. 处理动力学问题通常采用“隔离体”的方法,分析物体所受的各种作用力,在所选定的惯性系中列出它们各自的动力学方程. 根据连接体中物体的多少可列出相应数目的方程式. 结合各物体之间的相互作用和联系,可解决物体的运动或相互作用力.

**解** 按题意,可分别取吊车(含甲、乙)和乙作为隔离体,画示力图,并取竖直向上为  $Oy$  轴正方向(如图所示). 当框架以加速度  $a$  上升时,有

$$F_T - (m_1 + m_2)g = (m_1 + m_2)a \quad (1)$$

$$F_{N2} - m_2g = m_2a \quad (2)$$

解上述方程,得

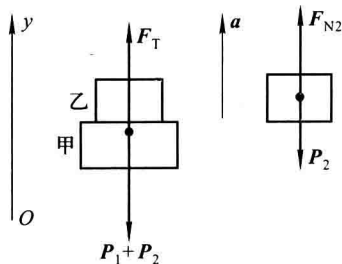
$$F_T = (m_1 + m_2)(g + a) \quad (3)$$

$$F_{N2} = m_2(g + a) \quad (4)$$

(1) 当整个装置以加速度  $a = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$  上升时,由式(3)可得绳所受张力的值为

$$F_T = 5.94 \times 10^3 \text{ N}$$

乙对甲的作用力为



题 2-7 图

$$F'_{N2} = -F_{N2} = -m_2(g+a) = -1.98 \times 10^3 \text{ N}$$

(2) 当整个装置以加速度  $a = 1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$  上升时, 得绳张力的值为

$$F_T = 3.24 \times 10^3 \text{ N}$$

此时, 乙对甲的作用力则为

$$F'_{N2} = -1.08 \times 10^3 \text{ N}$$

由上述计算可见, 在起吊相同重量的物体时, 由于起吊加速度不同, 绳中所受张力也不同, 加速度大, 绳中张力也大. 因此, 起吊重物时必须缓慢加速, 以确保起吊过程的安全.

**2-8** 如图(a)所示, 已知两物体 A、B 的质量均为  $m = 3.0 \text{ kg}$ , 物体 A 以加速度  $a = 1.0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$  运动, 求物体 B 与桌面间的摩擦力. (滑轮与连接绳的质量不计.)

**分析** 该题为连接体问题, 同样可用隔离体法求解. 分析时应注意到绳中张力大小处处相等是有条件的, 即必须在绳的质量和伸长可忽略、滑轮与绳之间的摩擦不计的前提下成立. 同时也要注意张力方向是不同的.

**解** 分别对物体和滑轮作受力分析 [图(b)]. 由牛顿定律分别对物体 A、B 及滑轮列动力学方程, 有

$$m_A g - F_T = m_A a \quad (1)$$

$$F'_{T1} - F_f = m_B a' \quad (2)$$

$$F'_T - 2F_{T1} = 0 \quad (3)$$

考虑到  $m_A = m_B = m$ ,  $F_T = F'_T$ ,  $F_{T1} = F'_{T1}$ ,  $a' = 2a$ , 可联立解得物体与桌面的摩擦力

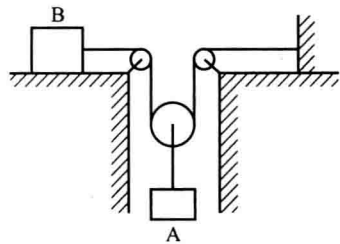
$$F_f = \frac{mg - (m+4m)a}{2} = 7.2 \text{ N}$$

**讨论** 动力学问题的一般解题步骤可分为: (1) 分析题意, 确定研究对象, 分析受力,

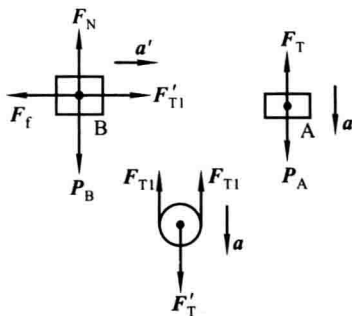
选定坐标; (2) 根据物理的定理和定律列出原始方程组; (3) 解方程组, 得出文字结果; (4) 核对量纲, 再代入数据, 计算出结果来.

**2-9** 质量为  $m'$  的长平板 A 以速度  $v'$  在光滑平面上作直线运动, 现将质量为  $m$  的木块 B 轻轻平稳地放在长平板上, 板与木块之间的滑动摩擦因数为  $\mu$ , 求木块在长平板上滑行多远才能与板取得共同速度?

**分析** 当木块 B 平稳地轻轻放至运动着的平板 A 上时, 木块的初速度可视



(a)

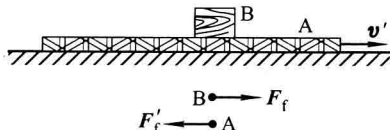


(b)

题 2-8 图

为零,由于它与平板之间速度的差异而存在滑动摩擦力,该力将改变它们的运动状态.根据牛顿定律可得到它们各自相对地面的加速度.换以平板为参考系来分析,此时,木块以初速度 $-v'$ (与平板运动速率大小相等、方向相反)作匀减速运动,其加速度为相对加速度,按运动学公式即可解得.

该题也可应用第三章所讲述的系统的动能定理来解.将平板与木块作为系统,该系统的动能由平板原有的动能变为木块和平板一起运动的动能,而它们的共同速度可根据动量定理求得.又因为系统内只有摩擦力做功,根据系统的动能定理,摩擦力的功应等于系统动能的增量.木块相对平板移动的距离即可求出.



题 2-9 图

**解 1** 以地面为参考系,在摩擦力  $F_f = \mu mg$  的作用下,根据牛顿定律分别对木块、平板列出动力学方程

$$F_f = \mu mg = ma_1$$

$$F'_f = -F_f = m'a_2$$

$a_1$  和  $a_2$  分别是木块和木板相对地面参考系的加速度.若以木板为参考系,木块相对平板的加速度  $a = a_1 + a_2$ ,木块相对平板以初速度  $-v'$  作匀减速运动直至最终停止.由运动学规律有

$$-v'^2 = 2as$$

由上述各式可得木块相对于平板所移动的距离为

$$s = \frac{m'v'^2}{2\mu g(m'+m)}$$

**解 2** 以木块和平板为系统,它们之间一对摩擦力做的总功为

$$W = F_f(s+l) - F'_f l = \mu mgs$$

式中  $l$  为平板相对地面移动的距离.

由于系统在水平方向上不受外力,当木块放至平板上时,根据动量守恒定律,有

$$m'v' = (m'+m)v''$$

由系统的动能定理,有

$$\mu mgs = \frac{1}{2}m'v'^2 - \frac{1}{2}(m'+m)v''^2$$

由上述各式可得

$$s = \frac{m'v'^2}{2\mu g(m'+m)}$$

**2-10** 如图(a)所示,在一只半径为  $R$  的半球形碗内,有一个质量为  $m$  的



小钢球,当小球以角速度  $\omega$  在水平面内沿碗内壁作匀速圆周运动时,它距碗底有多高?

**分析** 维持钢球在水平面内作匀角速度转动时,必须使钢球受到一与向心加速度相对应的力(向心力),而该力是由碗内壁对球的支持力  $F_N$  的分力来提供的,由于支持力  $F_N$  始终垂直于碗内壁,所以支持力的大小和方向是随  $\omega$  而变的.取图示  $Oxy$  坐标,列出动力学方程,即可求解钢球距碗底的高度.

**解** 取钢球为隔离体,其受力分析如图(b)所示.在图示坐标中列动力学方程

$$F_N \sin \theta = ma_n = mR\omega^2 \sin \theta \quad (1)$$

$$F_N \cos \theta = mg \quad (2)$$

且有 
$$\cos \theta = \frac{(R-h)}{R} \quad (3)$$

由上述各式可解得钢球距碗底的高度为

$$h = R - \frac{g}{\omega^2}$$

可见,  $h$  随  $\omega$  的变化而变化.

**2-11** 一汽车以  $100 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$  的速度在水平公路上行驶时,其刹车长度为  $20 \text{ m}$ .如果该车在坡度为  $12^\circ$  的平直公路上行驶,问该车上坡和下坡时其刹车长度又各为多少呢?

**分析** 一般情况下汽车制动后四轮停止转动,汽车在道路上滑行.车轮与道路间的滑动摩擦力使汽车作匀减速直线运动,从开始制动到汽车停止运动,车轮在路面上滑行距离称为刹车长度.本题首先应根据水平道路上的刹车长度  $s$  求摩擦因数  $\mu$ .在实际情况中影响摩擦力的因素很多,情况也较复杂,故由理论公式求得的  $\mu$  值一般会较大(实验表明橡胶与固体间的  $\mu$  值可达 4).求解时要注意上坡和下坡两种情况中汽车重力对刹车的影响.

**解** 由题意得

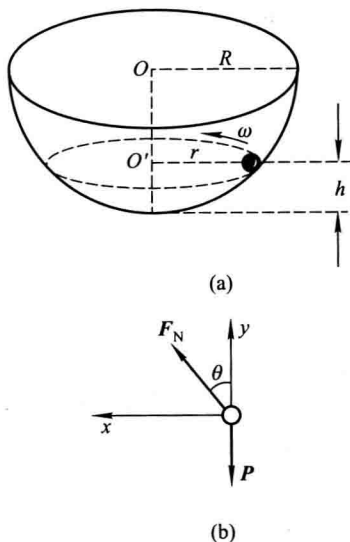
$$-\mu mg = ma \quad (1)$$

$$0 - v_0^2 = 2as \quad (2)$$

由式(1)和(2)得

$$\mu = \frac{v_0^2}{2gs} = 1.97$$

上坡时有



题 2-10 图

$$-mg\sin 12^\circ - \mu mg\cos 12^\circ = ma_1 \quad (3)$$

$$0 - v_0^2 = 2a_1 s_1 \quad (4)$$

由式(3)和(4)得

$$s_1 = -\frac{v_0^2}{2a_1} = \frac{v_0^2}{2(g\sin 12^\circ + \mu g\cos 12^\circ)} = 18.44 \text{ m}$$

下坡时有

$$mg\sin 12^\circ - \mu mg\cos 12^\circ = ma_2 \quad (5)$$

$$0 - v_0^2 = 2a_2 s_2 \quad (6)$$

由式(5)和(6)得

$$s_2 = -\frac{v_0^2}{2a_2} = \frac{v_0^2}{2(\mu g\cos 12^\circ - g\sin 12^\circ)} = 22.90 \text{ m}$$

由上可知  $s_2 > s_1$ , 因此下坡时更要注意行车安全.

**2-12** 火车转弯时需要较大的向心力, 如果两条铁轨都在同一水平面内(内轨、外轨等高), 这个向心力只能由外轨提供, 也就是说外轨会受到车轮对它很大的向外侧压力, 这是很危险的. 因此, 对应于火车的速率及转弯处的曲率半径, 必须使外轨适当地高出内轨, 称为外轨超高. 现有一质量为  $m$  的火车, 以速率  $v$  沿半径为  $R$  的圆弧轨道转弯, 已知路面倾角为  $\theta$ , 试求: (1) 在此条件下, 火车速率  $v_0$  为多大时, 才能使车轮对铁轨内外轨的侧压力均为零? (2) 如果火车的速率  $v \neq v_0$ , 则车轮对铁轨的侧压力为多少?

**分析** 如题所述, 外轨超高的目的欲使火车转弯的所需向心力仅由轨道支持力的水平分量  $F_N \sin \theta$  提供(式中  $\theta$  角为路面倾角). 从而不会对内外轨产生挤压. 与其对应的是火车转弯时必须以规定的速率  $v_0$  行驶. 当火车行驶速率  $v \neq v_0$  时, 则会产生两种情况: 如图所示, 如  $v > v_0$  时, 外轨将会对车轮产生斜向内的侧压力  $F_1$ , 以补偿原向心力的不足, 如  $v < v_0$  时, 则内轨对车轮产生斜向外的侧压力  $F_2$ , 以抵消多余的向心力, 无论哪种情况火车都将对外轨或内轨产生挤压. 由此可知, 铁路部门为什么会在每个铁轨的转弯处规定时速, 从而确保行车安全.

**解** (1) 以火车为研究对象, 建立如图所示坐标系. 据分析, 由牛顿定律有

$$F_N \sin \theta = m \frac{v^2}{R} \quad (1)$$

$$F_N \cos \theta - mg = 0 \quad (2)$$

解(1)、(2)两式可得火车转弯时规定速率为

$$v_0 = \sqrt{gR \tan \theta}$$

(2) 当  $v > v_0$  时, 根据分析有

$$F_N \sin \theta + F_1 \cos \theta = m \frac{v^2}{R} \quad (3)$$

$$F_N \cos \theta - F_1 \sin \theta - mg = 0 \quad (4)$$

解(3)、(4)两式,可得外轨侧压力为

$$F_1 = m \left( \frac{v^2}{R} \cos \theta - g \sin \theta \right)$$

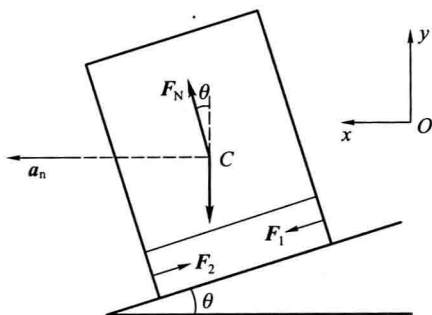
当  $v < v_0$  时,根据分析有

$$F_N \sin \theta - F_2 \cos \theta = m \frac{v^2}{R} \quad (5)$$

$$F_N \cos \theta + F_2 \sin \theta - mg = 0 \quad (6)$$

解(5)、(6)两式,可得内轨侧压力为

$$F_2 = m \left( g \sin \theta - \frac{v^2}{R} \cos \theta \right)$$



题 2-12 图

**2-13** 已知地球和月球的中心距离约为  $3.84 \times 10^5$  km,而月球的质量约为地球质量的  $1/81$ .试问航天器在从地球飞往月球的过程中,在距地球多远处航天员不能测到重力?

**分析** 重力来源于万有引力.由题意知,飞船处于地球和月球之间连线上某一位置,如此位置处地球和月球对航天员的万有引力大小相等,则航天员的重力为零.

**解** 设地球与月球间的距离  $d = 3.84 \times 10^5$  km,在距地球  $r$  处航天员不能测到重力.由分析知

$$-G \frac{m_E m}{r^2} = -G \frac{\frac{m_E}{81} m}{(d-r)^2}$$

整理后,有

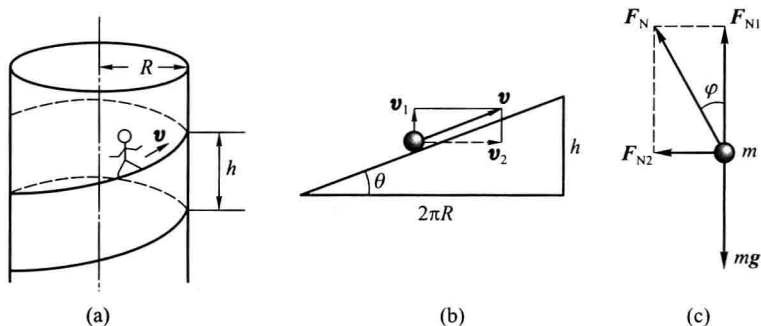
$$80r^2 - 162dr + 81d^2 = 0$$

解此方程,得

$$r = 3.46 \times 10^5 \text{ km (另一解不合题意)}$$

**2-14** 一杂技演员在圆筒形建筑物内表演飞车走壁.设演员和摩托车的总质量为  $m$ ,圆筒半径为  $R$ ,演员骑摩托车在直壁上以速率  $v$  作匀速圆周螺旋运动,每绕一周上升距离为  $h$ ,如图(a)所示.求壁对演员和摩托车的作用力.

**分析** 杂技演员(连同摩托车)的运动可以看成是一个水平面内的匀速率圆周运动和一个竖直向上匀速直线运动的叠加.其旋转一周所形成的旋线轨迹展开后,相当于如图(b)所示的斜面.把演员的运动速度分解为图示的  $v_1$  和  $v_2$  两个分量,显然  $v_1$  是竖直向上作匀速直线运动的分速度,而  $v_2$  则是绕圆筒壁作水平圆周运动的分速度,其中向心力由筒壁对演员的支持力  $F_N$  的水平分量  $F_{N2}$  提供,而竖直分量  $F_{N1}$  则与重力相平衡.如图(c)所示,其中  $\varphi$  角为摩托车与筒壁所夹角.运用牛顿定律即可求得筒壁支持力的大小和方向



题 2-14 图

解 设杂技演员连同摩托车整体为研究对象,据(b)、(c)两图应有

$$F_{N1} - mg = 0 \quad (1)$$

$$F_{N2} = m \frac{v_2^2}{R} \quad (2)$$

$$v_2 = v \cos \theta = v \frac{2\pi R}{\sqrt{(2\pi R)^2 + h^2}} \quad (3)$$

$$F_N = \sqrt{F_{N1}^2 + F_{N2}^2} \quad (4)$$

以式(3)代入式(2),得

$$F_{N2} = \frac{m}{R} \frac{4\pi^2 R^2 v^2}{4\pi^2 R^2 + h^2} = \frac{4\pi^2 R m v^2}{4\pi^2 R^2 + h^2} \quad (5)$$

将式(1)和式(5)代入式(4),可求出圆筒壁对杂技演员的作用力(即支承力)大小为

$$F_N = \sqrt{F_{N1}^2 + F_{N2}^2} = m \sqrt{g^2 + \left( \frac{4\pi^2 R v^2}{4\pi^2 R^2 + h^2} \right)^2}$$

与壁的夹角  $\varphi$  为

$$\varphi = \arctan \frac{F_{N2}}{F_{N1}} = \arctan \frac{4\pi^2 R v^2}{(4\pi^2 R^2 + h^2)g}$$

讨论 表演飞车走壁时,演员必须控制好运动速度,行车路线以及摩托车的方位,以确保三者之间满足解题用到的各个力学规律.

**2-15** 一质点沿  $x$  轴运动,其所受的力如图所示. 设  $t=0$  时,  $v_0 = 5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ ,  $x_0 = 2 \text{ m}$ . 质点质量  $m = 1 \text{ kg}$ . 试求该质点 7 s 末的速度和位置坐标.

分析 首先应由题图求得两个时间段的  $F(t)$  函数,进而求得相应的加速度函数,运用积分方法求解题目所问,积分时应注意积分上下限的取值应与两时间段相应的时刻相对应.

解 由题图得

$$F(t) = \begin{cases} 2t, & 0 < t < 5 \text{ s} \\ 35 - 5t, & 5 \text{ s} < t < 7 \text{ s} \end{cases}$$

由牛顿定律可得两时间段质点的加速度分别为

$$a = 2t, \quad 0 < t < 5 \text{ s}$$

$$a = 35 - 5t, \quad 5 \text{ s} < t < 7 \text{ s}$$

对  $0 < t < 5 \text{ s}$  时间段, 由  $a = \frac{dv}{dt}$  得

$$\int_{v_0}^v dv = \int_0^t a dt$$

积分后得

$$v = 5 + t^2$$

再由  $v = \frac{dx}{dt}$  得

$$\int_{x_0}^x dx = \int_0^t v dt$$

积分后得

$$x = 2 + 5t + \frac{1}{3}t^3$$

将  $t = 5 \text{ s}$  代入, 得  $v_5 = 30 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  和  $x_5 = 68.7 \text{ m}$ .

对  $5 \text{ s} < t < 7 \text{ s}$  时间段, 用同样方法有

$$\int_{v_5}^v dv = \int_{5 \text{ s}}^t a_2 dt$$

得

$$v = 35t - 2.5t^2 - 82.5$$

再由  $\int_{x_5}^x dx = \int_{5 \text{ s}}^t v dt$  得

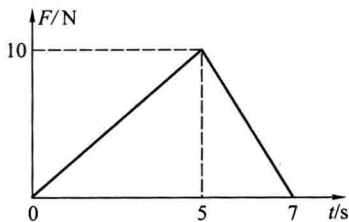
$$x = 17.5t^2 - 0.83t^3 - 82.5t + 147.87$$

将  $t = 7 \text{ s}$  代入分别得  $v_7 = 40 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  和  $x_7 = 142 \text{ m}$ .

**2-16** 一质量为  $10 \text{ kg}$  的质点在力  $F$  的作用下沿  $x$  轴作直线运动, 已知  $F = 120t + 40$ , 式中  $F$  的单位为  $\text{N}$ ,  $t$  的单位的  $\text{s}$ . 在  $t = 0$  时, 质点位于  $x = 5.0 \text{ m}$  处, 其速度  $v_0 = 6.0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ . 求质点在任意时刻的速度和位置.

**分析** 这是在变力作用下的动力学问题. 由于力是时间的函数, 而加速度  $a = dv/dt$ , 这时, 动力学方程就成为速度对时间的一阶微分方程, 解此微分方程可得质点的速度  $v(t)$ ; 由速度的定义  $v = dx/dt$ , 用积分的方法可求出质点的位置.

**解** 因加速度  $a = dv/dt$ , 在直线运动中, 根据牛顿运动定律有



题 2-15 图

$$120t+40 = m \frac{dv}{dt}$$

依据质点运动的初始条件,即  $t_0=0$  时  $v_0=6.0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ ,运用分离变量法对上式积分,得

$$\int_{v_0}^v dv = \int_0^t (12.0t+4.0) dt$$

$$v = 6.0 + 4.0t + 6.0t^2$$

又因  $v=dx/dt$ ,并由质点运动的初始条件: $t_0=0$  时  $x_0=5.0 \text{ m}$ ,对上式分离变量后积分,有

$$\int_{x_0}^x dx = \int_0^t (6.0+4.0t+6.0t^2) dt$$

$$x = 5.0 + 6.0t + 2.0t^2 + 2.0t^3$$

**2-17** 轻型飞机连同驾驶员总质量为  $1.0 \times 10^3 \text{ kg}$ . 飞机以  $55.0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  的速率在水平跑道上着陆后,驾驶员开始制动,若阻力与时间成正比,比例系数  $\alpha=5.0 \times 10^2 \text{ N} \cdot \text{s}^{-1}$ ,空气对飞机升力不计,求:(1)  $10 \text{ s}$  后飞机的速率;(2) 飞机着陆后  $10 \text{ s}$  内滑行的距离.

**分析** 飞机连同驾驶员在水平跑道上运动可视为质点作直线运动. 其水平方向所受制动力  $F$  为变力,且是时间的函数. 在求速率和距离时,可根据动力学方程和运动学规律,采用分离变量法求解.

**解** 以地面飞机滑行方向为坐标正方向,由牛顿运动定律及初始条件,有

$$F = ma = m \frac{dv}{dt} = -\alpha t$$

$$\int_{v_0}^v dv = \int_0^t \frac{-\alpha t}{m} dt$$

得

$$v = v_0 - \frac{\alpha}{2m} t^2$$

因此,飞机着陆  $10 \text{ s}$  后的速率为

$$v = 30.0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

又

$$\int_{x_0}^x dx = \int_0^t \left( v_0 - \frac{\alpha}{2m} t^2 \right) dt$$

故飞机着陆后  $10 \text{ s}$  内所滑行的距离为

$$s = x - x_0 = v_0 t - \frac{\alpha}{6m} t^3 = 467 \text{ m}$$

**2-18** 质量为  $m$  的跳水运动员,从  $10.0 \text{ m}$  高台上由静止跳下落入水中. 高台与水面距离为  $h$ . 把跳水运动员视为质点,并略去空气阻力. 运动员入水后竖直下沉,水对其阻力为  $bv^2$ ,其中  $b$  为一常量. 若以水面上一点为坐标原点  $O$ ,竖直向下为  $Oy$  轴,求:(1) 运动员在水中的速率  $v$  与  $y$  的函数关系;(2) 若

$b/m=0.40 \text{ m}^{-1}$ ,跳水运动员在水中下沉多少距离才能使其速率  $v$  减少到落水速率  $v_0$  的  $1/10$ ? (假定跳水运动员在水中的浮力与所受的重力大小恰好相等。)

**分析** 该题可以分为两个过程,入水前是自由落体运动,入水后,物体受重力  $P$ 、浮力  $F$  和水的阻力  $F_f$  的作用,其合力是一变力,因此,物体作变加速运动。虽然物体的受力分析比较简单,但是,由于变力是速度的函数(在有些问题中变力是时间、位置的函数),对这类问题列出动力学方程并不复杂,但要从它计算出物体运动的位置和速度就比较困难了。通常需要采用积分的方法去解所列出的微分方程。这也成了解题过程中的难点。在解方程的过程中,特别需要注意到积分变量的统一和初始条件的确定。

**解** (1) 运动员入水前可视为自由落体运动,故入水时的速度为

$$v_0 = \sqrt{2gh}$$

运动员入水后,由牛顿定律得

$$P - F_f - F = ma$$

由题意  $P = F$ 、 $F_f = bv^2$ , 而  $a = dv/dt = v(dv/dy)$ , 代入上式后得

$$-bv^2 = mv(dv/dy)$$

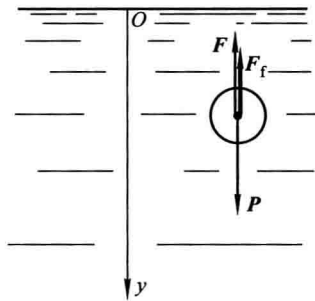
考虑到初始条件  $y_0 = 0$  时,  $v_0 = \sqrt{2gh}$ , 对上式分离变量后积分,有

$$\int_0^y \left(-\frac{b}{m}\right) dy = \int_{v_0}^v \frac{dv}{v}$$

$$v = v_0 e^{-by/m} = \sqrt{2gh} e^{-by/m}$$

(2) 将已知条件  $\frac{b}{m} = 0.4 \text{ m}^{-1}$ ,  $v = 0.1v_0$  代入上式, 则得

$$y = -\frac{m}{b} \ln \frac{v}{v_0} = 5.76 \text{ m}$$

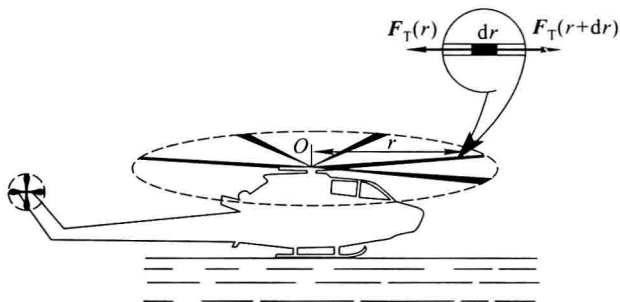


题 2-18 图

**2-19** 直升机的螺旋桨由两个对称的叶片组成,每一叶片的质量  $m = 136 \text{ kg}$ ,长  $l = 3.66 \text{ m}$ . 求当它的转速  $n = 320 \text{ r} \cdot \text{min}^{-1}$  时,两个叶片根部的张力。(设叶片是宽度一定、厚度均匀的薄片。)

**分析** 螺旋桨旋转时,叶片上各点的加速度不同,在其各部分两侧的张力也不同;由于叶片的质量是连续分布的,在求叶片根部的张力时,可选取叶片上一小段,分析其受力,列出动力学方程,然后采用积分的方法求解。

**解** 设叶片根部为原点  $O$ ,沿叶片背离原点  $O$  的方向为正向,距原点  $O$  为  $r$  处的长为  $dr$  一小段叶片,其两侧对它的拉力分别为  $F_T(r)$  与  $F_T(r+dr)$ . 叶片转动时,该小段叶片作圆周运动,由牛顿定律有



题 2-19 图

$$dF_T = F_T(r) - F_T(r+dr) = \frac{m}{l} \omega^2 r dr$$

由于  $r=l$  时外侧  $F_T=0$ , 所以有

$$\int_{F_T(r)}^0 dF_T = \int_r^l \frac{m\omega^2}{l} r dr$$

$$F_T(r) = -\frac{m\omega^2}{2l} (l^2 - r^2) = -\frac{2\pi^2 mn^2}{l} (l^2 - r^2)$$

上式中取  $r=0$ , 即得叶片根部的张力

$$F_{T0} = -2.79 \times 10^5 \text{ N}$$

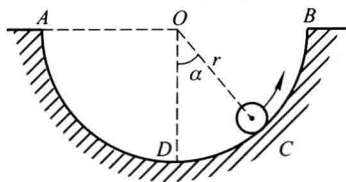
负号表示张力方向与坐标轴正方向相反。

**2-20** 一质量为  $m$  的小球最初位于如图 (a) 所示的 A 点, 然后沿半径为  $r$  的光滑圆轨道 ADCB 下滑. 试求小球到达点 C 时的角速度和对圆轨道的作用力。

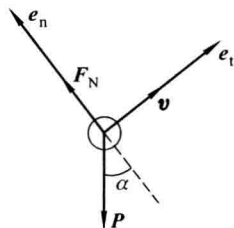
**分析** 该题可由牛顿第二定律求解. 在取自然坐标的情况下, 沿圆弧方向的加速度就是切向加速度  $a_t$ , 与其相对应的外力  $F_t$  是重力的切向分量  $mg \sin \alpha$ , 而与法向加速度  $a_n$  相对应的外力是支持力  $F_N$  和重力的法向分量  $mg \cos \alpha$ . 由此, 可分别列出切向和法向的动力学方程  $F_t = m dv/dt$  和  $F_n = ma_n$ . 由于小球在滑动过程中加速度不是恒定的, 因此, 需应用积分求解, 为使运算简便, 可转换积分变量。

\* 该题也能应用以小球、圆弧与地球为系统的机械能守恒定律求解小球的速度和角速度, 方法比较简便. 但它不能直接给出小球与圆弧表面之间的作用力。

**解** 小球在运动过程中受到重力  $P$  和圆轨道对它的支持力  $F_N$ . 取图 (b) 所示的自然坐



(a)



(b)

题 2-20 图



标系,由牛顿定律得

$$F_t = -mg \sin \alpha = m \frac{dv}{dt} \quad (1)$$

$$F_n = F_N - mg \cos \alpha = \frac{mv^2}{R} \quad (2)$$

由  $v = \frac{ds}{dt} = r \frac{d\alpha}{dt}$ , 得  $dt = \frac{r d\alpha}{v}$ , 代入式(1), 并根据小球从点 A 运动到点 C 的始末条件, 进行积分, 有

$$\int_0^v v dv = \int_{90^\circ}^{\alpha} (-rg \sin \alpha) d\alpha$$

得

$$v = \sqrt{2rg \cos \alpha}$$

则小球在点 C 的角速度为

$$\omega = \frac{v}{r} = \sqrt{(2g \cos \alpha) / r}$$

由式(2)得

$$F_N = \frac{mv^2}{r} + mg \cos \alpha = 3mg \cos \alpha$$

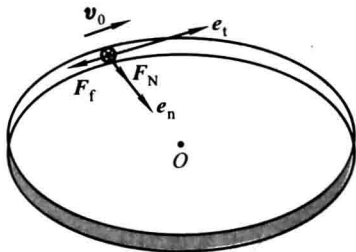
由此可得小球对圆轨道的作用力为

$$F'_N = -F_N = -3mg \cos \alpha$$

负号表示  $F'_N$  与  $e_n$  反向。

**2-21** 光滑的水平桌面上放置一半径为  $R$  的固定圆环, 物体紧贴环的内侧作圆周运动, 其摩擦因数为  $\mu$ , 开始时物体的速率为  $v_0$ , 求: (1)  $t$  时刻物体的速率; (2) 当物体速率从  $v_0$  减少到  $\frac{1}{2}v_0$  时, 物体所经历的时间及经过的路程。

**分析** 运动学与动力学之间的联系是以加速度为桥梁的, 因而, 可先分析动力学问题。物体在作圆周运动的过程中, 促使其运动状态发生变化的是圆环内侧对物体的支持力  $F_N$  和环与物体之间的摩擦力  $F_t$ , 而摩擦力大小与正压力  $F'_N$  成正比, 且  $F_N$  与  $F'_N$  又是作用力与反作用力, 这样, 就可通过它们把切向和法向两个加速度联系起来, 从而可用运动学的积分关系式求解速率和路程。



题 2-21 图

**解** (1) 设物体质量为  $m$ , 取图中所示的自然坐标, 按牛顿定律, 有

$$F_N = ma_n = \frac{mv^2}{R}$$

$$F_t = -ma_t = -m \frac{dv}{dt}$$

由分析中可知, 摩擦力的大小  $F_f = \mu F_N$ , 由上述各式可得

$$\mu \frac{v^2}{R} = -\frac{dv}{dt}$$

取初始条件  $t=0$  时  $v=v_0$ , 并对上式进行积分, 有

$$\int_0^t dt = -\frac{R}{\mu} \int_{v_0}^v \frac{dv}{v^2}$$

$$v = \frac{Rv_0}{R+v_0\mu t}$$

(2) 当物体的速率从  $v_0$  减少到  $\frac{1}{2}v_0$  时, 由上式可得所需的时间为

$$t' = \frac{R}{\mu v_0}$$

物体在这段时间内所经过的路程为

$$s = \int_0^{t'} v dt = \int_0^{t'} \frac{Rv_0}{R+v_0\mu t} dt$$

$$s = \frac{R}{\mu} \ln 2$$

**2-22** 质量为  $45.0 \text{ kg}$  的物体, 由地面以初速  $60.0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  竖直向上发射, 物体受到空气的阻力为  $F_f = kv$ , 且  $k = 0.03 \text{ N}/(\text{m} \cdot \text{s}^{-1})$ . (1) 求物体发射到最大高度所需的时间; (2) 最大高度为多少?

**分析** 物体在发射过程中, 同时受到重力和空气阻力的作用, 其合力是速率  $v$  的一次函数, 动力学方程是速率的一阶微分方程, 求解时, 只需采用分离变量的数学方法即可. 但是, 在求解高度时, 则必须将时间变量通过速度定义式转换为位置变量后求解, 并注意到物体上升至最大高度时, 速率应为零.

**解** (1) 物体在空中受重力  $mg$  和空气阻力  $F_f = kv$  作用而减速. 由牛顿定律得

$$-mg - kv = m \frac{dv}{dt} \quad (1)$$

根据始末条件对上式积分, 有

$$\int_0^t dt = -m \int_{v_0}^0 \frac{dv}{mg + kv}$$

$$t = \frac{m}{k} \ln \left( 1 + \frac{kv_0}{mg} \right) \approx 6.11 \text{ s}$$

(2) 利用  $\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dy} \frac{dy}{dt} = v \frac{dv}{dy}$  的关系代入式(1), 可得

$$-mg - kv = mv \frac{dv}{dy}$$

分离变量后积分

$$\int_0^y dy = \int_{v_0}^0 \frac{mvdv}{mg+kv}$$

故

$$y = -\frac{m}{k} \left[ \frac{mg}{k} \ln \left( 1 + \frac{kv_0}{mg} \right) - v_0 \right] \approx 183 \text{ m}$$

**讨论** 如不考虑空气阻力,则物体向上作匀减速运动.由公式  $t = \frac{v_0}{g}$  和  $y = \frac{v_0^2}{2g}$  分别算得  $t \approx 6.12 \text{ s}$  和  $y \approx 184 \text{ m}$ ,均比实际值略大一些.

**2-23** 已知一质量为  $m$  的质点在  $x$  轴上运动,质点只受到指向原点的引力的作用,引力大小与质点离原点的距离  $x$  的二次方成反比,即  $F = -k/x^2$ ,  $k$  是比例常量.设质点在  $x=A$  时的速度为零,求质点在  $x=A/4$  处的速度的大小.

**分析** 由于引力为位置  $x$  的函数,故运用牛顿定律解题时要善于运用变量变换 (本题  $a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = \frac{v dv}{dx}$ ) 和分离变量等常用技巧,积分时要善于用定积分方法,积分上下限为初始条件和待求量.

**解** 由牛顿定律有

$$F = m \frac{dv}{dt} = -\frac{k}{x^2}$$

作变量变换

$$m \frac{dv}{dt} = \frac{mvdv}{dx} = -\frac{k}{x^2}$$

分离变量后两边积分

$$-\int_A^{A/4} k \frac{dx}{x^2} = \int_0^v mvdv$$

得

$$v = \sqrt{\frac{6k}{mA}}$$

本题也可由动能定理求解.即

$$W = \int F dx = \int_A^{A/4} \left( -\frac{k}{x^2} \right) dx = \frac{1}{2}mv^2 - 0$$

相比之下此法更直接和较为简便.

**2-24** 一物体自地球表面以速率  $v_0$  竖直上抛.假定空气对物体阻力的值为  $F_r = kmv^2$ ,其中  $m$  为物体的质量,  $k$  为常量.试求:(1) 该物体能上升的高度;(2) 物体返回地面时速度的值.(设重力加速度为常量.)

**分析** 由于空气对物体的阻力始终与物体运动的方向相反,因此,物体在上抛过程中所受重力  $P$  和阻力  $F_r$  的方向相同;而下落过程中,所受重力  $P$  和阻力  $F_r$  的方向则相反.又因阻力是变力,在解动力学方程时,需用积分的方法.

**解** 分别对物体上抛、下落时作受力分析,以地面为原点,竖直向上为  $y$  轴正向(如图所示).

(1) 物体在上抛过程中,根据牛顿定律有

$$-mg - kmv^2 = m \frac{dv}{dt} = m \frac{v dv}{dy}$$

依据初始条件对上式积分,有

$$\int_0^y dy = - \int_{v_0}^v \frac{v dv}{g + kv^2}$$

$$y = -\frac{1}{2k} \ln \left( \frac{g + kv^2}{g + kv_0^2} \right)$$

物体到达最高处时,  $v=0$ , 故有

$$h = y_{\max} = \frac{1}{2k} \ln \left( \frac{g + kv_0^2}{g} \right)$$

(2) 物体下落过程中,有

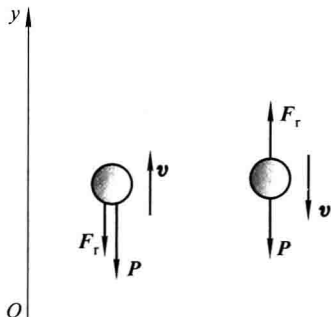
$$-mg + kmv^2 = m \frac{v dv}{dy}$$

对上式积分,有

$$\int_h^0 dy = - \int_0^v \frac{v dv}{g - kv^2}$$

则

$$v = v_0 \left( 1 + \frac{kv_0^2}{g} \right)^{-1/2}$$



题 2-24 图

**2-25** 质量为  $m$  的摩托车,在恒定的牵引力  $F$  的作用下工作,它所受的阻力与其速率的二次方成正比,它能达到的最大速率是  $v_m$ . 试计算从静止加速到  $v_m/2$  所需的时间以及所走过的路程.

**分析** 该题依然是运用动力学方程求解变力作用下的速度和位置的问题,求解方法与前两题相似,只是在解题过程中必须设法求出阻力系数  $k$ . 由于阻力  $F_r = kv^2$ , 且  $F_r$  又与恒力  $F$  的方向相反;故当阻力随速度增加至与恒力大小时,加速度为零,此时速度达到最大. 因此,根据速度最大值可求出阻力系数来. 但在求摩托车所走路程时,需对变量作变换.

**解** 设摩托车沿  $x$  轴正方向运动,在牵引力  $F$  和阻力  $F_r$  同时作用下,由牛顿定律有

$$F - kv^2 = m \frac{dv}{dt} \quad (1)$$

当加速度  $a = dv/dt = 0$  时,摩托车的速率最大,因此可得

$$k = F/v_m^2 \quad (2)$$

由式(1)和式(2)可得

$$F\left(1-\frac{v^2}{v_m^2}\right) = m \frac{dv}{dt} \quad (3)$$

根据始末条件对式(3)积分,有

$$\int_0^t dt = \frac{m}{F} \int_0^{\frac{1}{2}v_m} \left(1-\frac{v^2}{v_m^2}\right)^{-1} dv$$

则 
$$t = \frac{mv_m}{2F} \ln 3$$

又因式(3)中  $m \frac{dv}{dt} = \frac{mvdv}{dx}$ ,再利用始末条件对式(3)积分,有

$$\int_0^x dx = \frac{m}{F} \int_0^{\frac{1}{2}v_m} v \left(1-\frac{v^2}{v_m^2}\right)^{-1} dv$$

则 
$$x = \frac{mv_m^2}{2F} \ln \frac{4}{3} \approx 0.144 \frac{mv_m^2}{F}$$

**2-26** 飞机降落时,以  $v_0$  的水平速度着落后自由滑行,滑行期间飞机受到的空气阻力  $F_1 = -k_1 v^2$ ,升力  $F_2 = k_2 v^2$ ,其中  $v$  为飞机的滑行速度,两个系数之比  $k_1/k_2$  称为飞机的升阻比.实验表明,物体在流体中运动时,所受阻力与速度的关系与多种因素有关,如速度大小、流体性质、物体形状等.在速度较小或流体密度较小时有  $F \propto v$ ,而在速度较大或流体密度较大时有  $F \propto v^2$ ,需要精确计算时则应由实验测定.本题中由于飞机速率较大,故取  $F \propto v^2$  作为计算依据.设飞机与跑道间的滑动摩擦因数为  $\mu$ ,试求飞机从触地到静止所滑行的距离.以上计算实际上已成为飞机跑道长度设计的依据之一.

**分析** 如图所示,飞机触地后滑行期间受到 5 个力作用,其中  $F_1$  为空气阻力,  $F_2$  为空气升力,  $F_3$  为跑道作用于飞机的摩擦力,很显然飞机是在合外力为变力的情况下作减速运动,列出牛顿第二定律方程后,用运动学第二类问题的相关规律解题.由于作用于飞机的合外力为速度  $v$  的函数,所求的又是飞机滑行距离  $x$ ,因此比较简便方法是直接对牛顿第二定律方程中的积分变量  $dt$  进行代换,将  $dt$  用  $\frac{dx}{v}$  代替,得到一个有关  $v$  和  $x$  的微分方程,分离变量后再作积分.

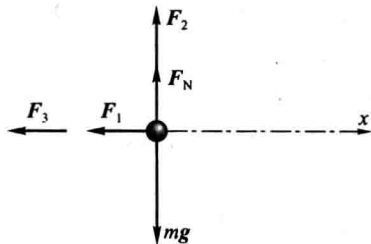
**解** 取飞机滑行方向为  $x$  的正方向,着陆点为坐标原点,如图所示,根据牛顿第二定律有

$$-\mu F_N - k_1 v^2 = m \frac{dv}{dt} \quad (1)$$

$$F_N + k_2 v^2 - mg = 0 \quad (2)$$

将式(2)代入式(1),并整理得

$$-\mu mg - (k_1 - \mu k_2) v^2 = m \frac{dv}{dt} = mv \frac{dv}{dx}$$



题 2-26 图

分离变量并积分,有

$$\int_{v_0}^0 \frac{mvdv}{\mu mg + (k_1 - \mu k_2)v^2} = - \int_0^x dx$$

得飞机滑行距离

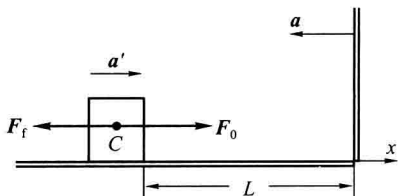
$$x = \frac{m}{2(k_1 - \mu k_2)} \ln \left[ \frac{\mu mg + (k_1 - \mu k_2)v_0^2}{\mu mg} \right] \quad (3)$$

考虑飞机着陆瞬间有  $F_N = 0$  和  $v = v_0$ , 应有  $k_2 v_0^2 = mg$ , 将其代入式(3), 可得飞机滑行距离  $x$  的另一表达式

$$x = \frac{k_2 v_0^2}{2g(k_1 - \mu k_2)} \ln \left( \frac{k_1}{\mu k_2} \right)$$

**讨论** 如飞机着陆速度  $v_0 = 144 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ ,  $\mu = 0.1$ , 升阻比  $\frac{k_1}{k_2} = 5$ , 可算得飞机的滑行距离  $x = 560 \text{ m}$ , 设计飞机跑道长度时应参照上述计算结果。

**2-27** 在卡车车厢底板上放一木箱, 该木箱距车厢前沿挡板的距离  $L = 2.0 \text{ m}$ , 已知刹车时卡车的加速度  $a = 7.0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ , 设刹车一开始木箱就开始滑动。求该木箱撞上挡板时相对卡车的速率。设木箱与底板间滑动摩擦因数  $\mu = 0.50$ 。



题 2-27 图

**分析** 如同习题 2-5 分析中指出的那样, 可对木箱加上惯性力  $F_0$  后, 以车厢为参考系进行求解, 如图所示, 此时木箱在水平方向受到惯性力和摩擦力作用, 图中  $a'$  为木箱相对车厢的加速度。

**解** 由牛顿第二定律和相关运动学规律有

$$F_0 - F_f = ma - \mu mg = ma' \quad (1)$$

$$v'^2 = 2a'L \quad (2)$$

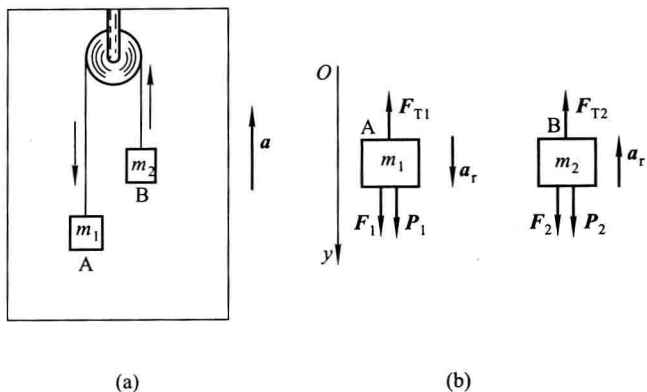
联立解(1)、(2)两式并代入题给数据, 得木箱撞上车厢挡板时的速度为

$$v' = \sqrt{2(a - \mu g)L} = 2.9 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

**2-28** 如图(a)所示, 电梯相对地面以加速度  $a$  竖直向上运动。电梯中有一滑轮固定在电梯顶部, 滑轮两侧用轻绳悬挂着质量分别为  $m_1$  和  $m_2$  的物体 A 和 B。设滑轮的质量和滑轮与绳索间的摩擦均略去不计。已知  $m_1 > m_2$ , 如以加速运动的电梯为参考系, 求物体相对地面的加速度和绳的张力。

**分析** 如以加速运动的电梯为参考系, 则为非惯性系。在非惯性系中应用牛顿定律时必须引入惯性力。在通常受力分析的基础上, 加以惯性力后, 即可列出牛顿运动方程来。

**解** 取如图(b)所示的坐标, 以电梯为参考系, 分别对物体 A、B 作受力分



题 2-28 图

析,其中  $F_1 = m_1 a$ ,  $F_2 = m_2 a$  分别为作用在物体 A、B 上的惯性力. 设  $a_r$  为物体相对电梯的加速度, 根据牛顿定律有

$$m_1 g + m_1 a - F_{T1} = m_1 a_r \quad (1)$$

$$m_2 g + m_2 a - F_{T2} = -m_2 a_r \quad (2)$$

$$F_{T1} = F_{T2} \quad (3)$$

由上述各式可得

$$a_r = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} (g + a)$$

$$F_{T1} = F_{T2} = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} (g + a)$$

由相对加速度的矢量关系, 可得物体 A、B 对地面的加速度值为

$$a_1 = a_r - a = \frac{(m_1 - m_2)g - 2m_2 a}{m_1 + m_2}$$

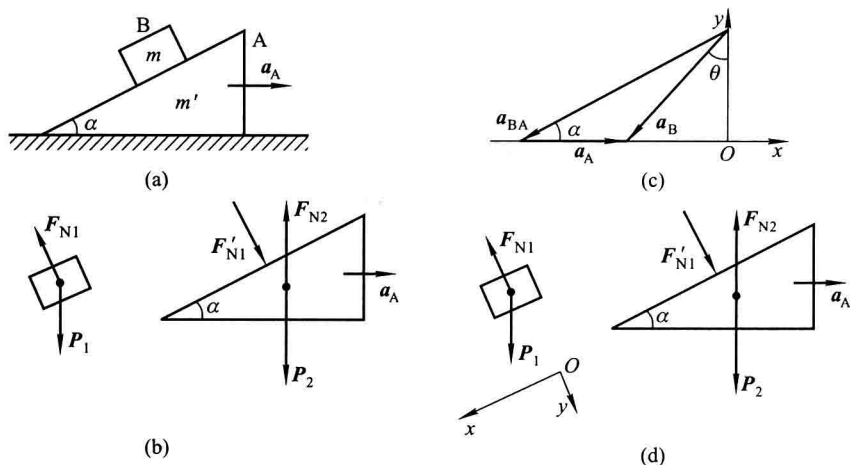
$$a_2 = -(a_r + a) = -\frac{2m_1 a + (m_1 - m_2)g}{m_1 + m_2}$$

$a_2$  的方向向上,  $a_1$  的方向由  $a_r$  和  $a$  的大小决定. 当  $a_r < a$ , 即  $m_1 g - m_2 g - 2m_2 a > 0$  时,  $a_1$  的方向向下; 反之,  $a_1$  的方向向上.

**2-29** 如图(a)所示, 在光滑水平面上, 放一质量为  $m'$  的三棱柱 A, 它的斜面的倾角为  $\alpha$ . 现把一质量为  $m$  的滑块 B 放在三棱柱的光滑斜面上. 试求: (1) 三棱柱相对于地面的加速度; (2) 滑块相对于地面的加速度; (3) 滑块与三棱柱之间的正压力.

**分析** 这类问题可应用牛顿定律并采用隔离体法求解. 在解题的过程中必须注意:

(1) 参考系的选择. 由于牛顿定律只适用于惯性系, 可选择地面为参考系



题 2-29 图

(惯性系). 因地面和斜面都是光滑的, 当滑块在斜面上下滑时, 三棱柱受到滑块对它的作用, 也将沿地面作加速度为  $a_A$  的运动, 这时, 滑块沿斜面的加速度  $a_{BA}$ , 不再是它相对于地面的加速度  $a_B$  了. 必须注意到它们之间应满足相对加速度的矢量关系, 即  $a_B = a_A + a_{BA}$ .

若以斜面为参考系(非惯性系), 用它求解这类含有相对运动的力学问题是较为方便的. 但在非惯性系中, 若仍要应用牛顿定律, 则必须增添一惯性力  $F$ , 且有  $F = ma_A$ .

(2) 坐标系的选择. 常取平面直角坐标, 并使其中一坐标轴方向与运动方向一致, 这样, 可使解题简化.

(3) 在分析滑块与三棱柱之间的正压力时, 要考虑运动状态的影响, 切勿简单地把它视为滑块重力在垂直于斜面方向的分力  $mg \cos \alpha$ , 事实上只有当  $a_A = 0$  时, 正压力才等于  $mg \cos \alpha$ .

**解 1** 取地面为参考系, 以滑块 B 和三棱柱 A 为研究对象, 分别作示力图, 如图(b)所示. B 受重力  $P_1$ 、A 施加的支持力  $F_{N1}$ ; A 受重力  $P_2$ 、B 施加的压力  $F'_{N1}$ 、地面支持力  $F_{N2}$ . A 的运动方向为  $Ox$  轴的正向,  $Oy$  轴的正向垂直地面向上. 设  $a_A$  为 A 对地的加速度,  $a_B$  为 B 对的地加速度. 由牛顿定律得

$$F'_{N1} \sin \alpha = m' a_A \quad (1)$$

$$-F_{N1} \sin \alpha = m a_{Bx} \quad (2)$$

$$F_{N1} \cos \alpha - mg = m a_{By} \quad (3)$$

$$F_{N1} = F'_{N1} \quad (4)$$

设 B 相对 A 的加速度为  $a_{BA}$ , 则由题意  $a_B$ 、 $a_{BA}$ 、 $a_A$  三者的矢量关系如图(c)所示. 据此可得



$$a_{Bx} = a_A - a_{BA} \cos \alpha \quad (5)$$

$$a_{By} = -a_{BA} \sin \alpha \quad (6)$$

解上述方程组可得三棱柱对地面的加速度为

$$a_A = \frac{mg \sin \alpha \cos \alpha}{m' + m \sin^2 \alpha}$$

滑块相对地面的加速度  $a_B$  在  $x, y$  轴上的分量分别为

$$a_{Bx} = -\frac{m' g \sin \alpha \cos \alpha}{m' + m \sin^2 \alpha}$$

$$a_{By} = -\frac{(m' + m) g \sin^2 \alpha}{m' + m \sin^2 \alpha}$$

则滑块相对地面的加速度  $a_B$  的大小为

$$a_B = \sqrt{a_{Bx}^2 + a_{By}^2} = g \sin \alpha \frac{\sqrt{m'^2 + (2m'm + m^2) \sin^2 \alpha}}{m' + m \sin^2 \alpha}$$

其方向与  $y$  轴负向的夹角为

$$\theta = \arctan \frac{a_{Bx}}{a_{By}} = \arctan \frac{m' \cot \alpha}{m' + m}$$

A 与 B 之间的正压力为

$$F_{N1} = \frac{m' mg \cos \alpha}{m' + m \sin^2 \alpha}$$

**解 2** 若以 A 为参考系,  $Ox$  轴沿斜面方向 [图(d)]. 在非惯性系中运用牛顿定律, 则滑块 B 的动力学方程分别为

$$mg \sin \alpha + ma_A \cos \alpha = ma_{BA} \quad (1)$$

$$mg \cos \alpha - F_{N1} - ma_A \sin \alpha = 0 \quad (2)$$

又因

$$F'_{N1} \sin \alpha - m' a_A = 0 \quad (3)$$

$$F_{N1} = F'_{N1} \quad (4)$$

由以上各式可解得

$$a_A = \frac{mg \sin \alpha \cos \alpha}{m' + m \sin^2 \alpha}$$

$$a_{BA} = \frac{(m' + m) g \sin \alpha}{m' + m \sin^2 \alpha}$$

由  $a_B, a_{BA}, a_A$  三者的矢量关系可得

$$a_B = g \sin \alpha \frac{\sqrt{m'^2 + (2m'm + m^2) \sin^2 \alpha}}{m' + m \sin^2 \alpha}$$

以  $a_A$  代入式(3)可得

$$F_{N1} = \frac{m' mg \cos \alpha}{m' + m \sin^2 \alpha}$$

### 第三章 动量守恒定律和能量守恒定律

**3-1** 对质点系有以下几种说法:

- (1) 质点系总动量的改变与内力无关;
- (2) 质点系总动能的改变与内力无关;
- (3) 质点系机械能的改变与保守内力无关.

下列对上述说法判断正确的是( )

- (A) 只有(1)是正确的
- (B) (1)、(2)是正确的
- (C) (1)、(3)是正确的
- (D) (2)、(3)是正确的

**分析与解** 在质点系中内力总是成对出现的,它们是作用力与反作用力.由于一对内力的冲量恒为零,故内力不会改变质点系的总动量.但由于相互有作用力的两个质点的位移大小以及位移与力的夹角一般不同,故一对内力所做功之和不一定为零,应作具体分析,如一对弹性内力的功的代数和一般为零,一对摩擦内力的功代数和一般不为零,对于保守内力来说,所做功能使质点系动能与势能相互转化,因此保守内力即使有可能改变质点系的动能,但也不可能改变质点组的机械能.综上所述(1)、(3)说法是正确的.故选(C).

**3-2** 有两个倾角不同、高度相同、质量一样的斜面放在光滑的水平面上,斜面是光滑的,有两个一样的物块分别从这两个斜面的顶点由静止开始滑下,则( )

- (A) 物块到达斜面底端时的动量相等
- (B) 物块到达斜面底端时动能相等
- (C) 物块和斜面(以及地球)组成的系统,机械能不守恒
- (D) 物块和斜面组成的系统水平方向上动量守恒

**分析与解** 对题述系统来说,由题意知并无外力和非保守内力做功,故系统机械能守恒.物体在下滑过程中,一方面通过重力做功将势能转化为动能,另一方面通过物体与斜面之间的弹性内力做功将一部分能量转化为斜面的动能,其大小取决于其中一个内力所做功.由于斜面倾角不同,故物体沿不同倾角斜面滑至底端时动能大小不等.动量自然也就不等(动量方向也不同).故(A)、(B)、(C)三种说法均不正确.至于说法(D)正确,是因为该系统动量虽不守恒(下滑前系统动量为零,下滑后物体与斜面动量的矢量和不可能为零.由此可知,此时向上的地面支持力并不等于物体与斜面向下的重力),但在水平方向上并无外力,故系统在水平方向上分动量守恒.

**3-3** 对功的概念有以下几种说法:

- (1) 保守力做正功时,系统内相应的势能增加;  
 (2) 质点运动经一闭合路径,保守力对质点做的功为零;  
 (3) 作用力和反作用力大小相等、方向相反,所以两者所做功的代数和必为零.

下列上述说法中判断正确的是( )

- (A) (1)、(2)是正确的 (B) (2)、(3)是正确的  
 (C) 只有(2)是正确的 (D) 只有(3)是正确的

**分析与解** 保守力做正功时,系统内相应势能应该减少.由于保守力做功与路径无关,而只与始末位置有关,如质点环绕一周过程中,保守力在一段过程中做正功,在另一段过程中必然做负功,两者之和必为零.至于一对作用力与反作用力分别作用于两个质点所做功之和未必为零(详见习题 3-2 分析),由此可见只有说法(2)正确,故选(C).

**3-4** 如图所示,质量分别为  $m_1$  和  $m_2$  的物体 A 和 B,置于光滑桌面上, A 和 B 之间连有一轻弹簧.另有质量为  $m_1$  和  $m_2$  的物体 C 和 D 分别置于物体 A 与 B 之上,且物体 A 和 C、B 和 D 之间的摩擦因数均不为零.首先用外力沿水平方向相向推压 A 和 B,使弹簧被压缩,然后撤掉外力,则在 A 和 B 弹开的过程中,对 A、B、C、D 以及弹簧组成的系统,有( )



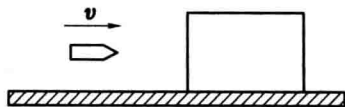
题 3-4 图

- (A) 动量守恒,机械能守恒 (B) 动量不守恒,机械能守恒  
 (C) 动量不守恒,机械能不守恒 (D) 动量守恒,机械能不一定守恒

**分析与解** 由题意知,作用在题述系统上的合外力为零,故系统动量守恒,但机械能未必守恒,这取决于在 A、B 弹开过程中 C 与 A 或 D 与 B 之间有无相对滑动,如有则必然会因摩擦内力做功,而使一部分机械能转化为热能,故选(D).

**3-5** 如图所示,子弹射入放在水平光滑地面上静止的木块后而穿出.以地面为参考系,下列说法中正确的说法是( )

- (A) 子弹减少的动能转化为木块的动能  
 (B) 子弹-木块系统的机械能守恒  
 (C) 子弹动能的减少等于子弹克服木块阻



题 3-5 图

力所做的功

- (D) 子弹克服木块阻力所做的功等于这一过程中产生的热

**分析与解** 子弹-木块系统在子弹射入过程中,作用于系统的合外力为零,故系统动量守恒,但机械能并不守恒.这是因为子弹与木块作用的一对内力所做功的代数和不为零(这是因为子弹对地位移大于木块对地位移所致),子弹动能

的减少等于子弹克服阻力所做功,子弹减少的动能中,一部分通过其反作用力对木块做正功而转移为木块的动能,另一部分则转化为热能(大小就等于这一对内力所做功的代数和).综上所述,只有说法(C)的表述是完全正确的.

**3-6** 一架以  $3.0 \times 10^2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  的速率水平飞行的飞机,与一只身长为  $0.20 \text{ m}$ 、质量为  $0.50 \text{ kg}$  的飞鸟相碰.设碰撞后飞鸟的尸体与飞机具有同样的速度,而原来飞鸟对于地面的速率甚小,可以忽略不计.试估计飞鸟对飞机的冲击力(碰撞时间可用飞鸟身长除以飞机速率来估算).根据本题的计算结果,你对于高速运动的物体(如飞机、汽车)与通常情况下不足以引起危害的物体(如飞鸟、小石子)相碰后会产生什么后果的问题有些什么体会?

**分析** 由于鸟与飞机之间的作用是一短暂时间内急剧变化的变力,直接应用牛顿定律解决受力问题是不可能的.如果考虑力的时间累积效果,运用动量定理来分析,就可避免作用过程中的细节情况.在求鸟对飞机的冲力(常指在短暂时间内的平均力)时,由于飞机的状态(指动量)变化不知道,使计算也难以进行;这时,可将问题转化为讨论鸟的状态变化来分析其受力情况,并根据鸟与飞机作用的相互性(作用与反作用),问题就很简单了.

**解** 以飞鸟为研究对象,取飞机运动方向为  $x$  轴正向.由动量定理得

$$\overline{F'} \Delta t = mv - 0$$

式中  $\overline{F'}$  为飞机对鸟的平均冲力,而身长为  $20 \text{ cm}$  的飞鸟与飞机碰撞时间约为  $\Delta t = l/v$ ,以此代入上式可得

$$\overline{F'} = \frac{mv^2}{l} = 2.25 \times 10^5 \text{ N}$$

鸟对飞机的平均冲力为

$$\overline{F} = -\overline{F'} = -2.25 \times 10^5 \text{ N}$$

式中负号表示飞机受到的冲力与其飞行方向相反.从计算结果可知,  $2.25 \times 10^5 \text{ N}$  的冲力大致相当于一个  $22 \text{ t}$  的物体所受的重力,可见,此冲力是相当大的.若飞鸟与发动机叶片相碰,足以使发动机损坏,造成飞行事故.

**3-7** 质量为  $m$  的物体,由水平面上点  $O$  以初速为  $v_0$  抛出,  $v_0$  与水平面成仰角  $\alpha$ .若不计空气阻力,求:(1) 物体从发射点  $O$  到最高点的过程中,重力的冲量;(2) 物体从发射点到落回至同一水平面的过程中,重力的冲量.

**分析** 重力是恒力,因此,求其在一段时间内的冲量时,只需求出时间间隔即可.由抛体运动规律可知,物体到达最高点的时间  $\Delta t_1 = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}$ ,物体从出发到落回至同一水平面所需的时间是到达最高点时间的两倍.这样,按冲量的定义即可求得结果.

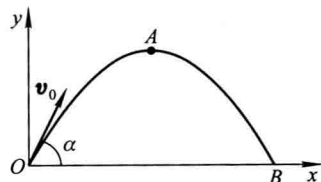
另一种解的方法是根据过程的初、末动量,由动量定理求出.

**解 1** 物体从出发到达最高点所需的时间为

$$\Delta t_1 = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}$$

则物体落回地面的时间为

$$\Delta t_2 = 2\Delta t_1 = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}$$



题 3-7 图

于是,在相应的过程中重力的冲量分别为

$$I_1 = \int_{\Delta t_1} \mathbf{F} dt = -mg\Delta t_1 \mathbf{j} = -mv_0 \sin \alpha \mathbf{j}$$

$$I_2 = \int_{\Delta t_2} \mathbf{F} dt = -mg\Delta t_2 \mathbf{j} = -2mv_0 \sin \alpha \mathbf{j}$$

**解 2** 根据动量定理,物体由发射点  $O$  运动到点  $A$ 、 $B$  的过程中,重力的冲量分别为

$$I_1 = mv_{Ay} \mathbf{j} - mv_{0y} \mathbf{j} = -mv_0 \sin \alpha \mathbf{j}$$

$$I_2 = mv_{By} \mathbf{j} - mv_{0y} \mathbf{j} = -2mv_0 \sin \alpha \mathbf{j}$$

**3-8**  $F_x = 30 + 4t$  (式中  $F_x$  的单位为  $\text{N}$ ,  $t$  的单位为  $\text{s}$ ) 的合外力作用在质量  $m = 10 \text{ kg}$  的物体上,试求:(1) 在开始  $2 \text{ s}$  内此力的冲量;(2) 若冲量  $I = 300 \text{ N} \cdot \text{s}$ ,此力作用的时间;(3) 若物体的初速度  $v_1 = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ ,方向与  $F_x$  相同,在  $t = 6.86 \text{ s}$  时,此物体的速度  $v_2$ .

**分析** 本题可由冲量的定义式  $I = \int_{t_1}^{t_2} F dt$ ,求变力的冲量,继而根据动量定理求物体的速度  $v_2$ .

**解** (1) 由分析知

$$I = \int_0^2 (30 + 4t) dt = 30t + 2t^2 \Big|_0^2 = 68 (\text{N} \cdot \text{s})$$

(2) 由  $I = 300 = 30t + 2t^2$ ,解此方程可得

$$t = 6.86 \text{ s} \quad (\text{另一解不合题意已舍去})$$

(3) 由动量定理,有

$$I = mv_2 - mv_1$$

由(2)可知  $t = 6.86 \text{ s}$  时  $I = 300 \text{ N} \cdot \text{s}$ ,将  $I$ 、 $m$  及  $v_1$  代入可得

$$v_2 = \frac{I + mv_1}{m} = 40 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

**3-9** 洗车时,喷水管中的水以恒定速率  $v_0 = 20 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  从喷口喷出,喷出的水射在汽车的表面上后,速率降为零.设单位时间从喷口喷出水的质量为  $\frac{dm}{dt} =$

$1.5 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$ , 求喷射出的水施加在车身上的作用力  $F$  的大小.

**分析** 设在  $dt$  时间内有  $dm$  质量的水冲击到汽车表面. 对  $dm$  质量的水运用动量定理可求得汽车表面对水的作用力  $F'$ . 其反作用力即为水对汽车表面的作用力  $F$ .

**解** 由分析对  $dm$  的水运用动量定理, 有

$$F' dt = v_0 dm$$

即

$$F' = v_0 \frac{dm}{dt} = 30 \text{ N}$$

则水对汽车表面的作用力  $F = 30 \text{ N}$ .

**3-10** 高空作业时系安全带是非常必要的. 假如一质量为  $51.0 \text{ kg}$  的人, 在操作时不慎从高空竖直跌落下来, 由于安全带的保护, 最终使他被悬挂起来. 已知此时人离原处的距离为  $2.0 \text{ m}$ , 安全带弹性缓冲作用时间为  $0.50 \text{ s}$ . 求安全带对人的平均冲力.

**分析** 从人受力的情况来看, 可分两个阶段: 在开始下落的过程中, 只受重力作用, 人体可看成是作自由落体运动; 在安全带保护的缓冲过程中, 则人体同时受重力和安全带冲力的作用, 其合力是一变力, 且作用时间很短. 为求安全带的冲力, 可以从缓冲时间内, 人体运动状态(动量)的改变来分析, 即运用动量定理来讨论.

事实上, 动量定理也可应用于整个过程. 但是, 这时必须分清重力和安全带冲力作用的时间是不同的; 而在过程的初态和末态, 人体的速度均为零. 这样, 运用动量定理仍可得到相同的结果.

**解 1** 以人为研究对象, 按分析中的两个阶段进行讨论. 在自由落体运动过程中, 人跌落至  $2 \text{ m}$  处时的速度为

$$v_1 = \sqrt{2gh} \quad (1)$$

在缓冲过程中, 人受重力和安全带冲力的作用, 根据动量定理, 有

$$(\mathbf{F} + \mathbf{P}) \Delta t = m\mathbf{v}_2 - m\mathbf{v}_1 \quad (2)$$

由式(1)、(2)可得安全带对人的平均冲力大小为

$$\bar{F} = mg + \frac{\Delta(mv)}{\Delta t} = mg + \frac{m\sqrt{2gh}}{\Delta t} = 1.14 \times 10^3 \text{ N}$$

**解 2** 从整个过程来讨论. 根据动量定理有

$$\bar{F} = \frac{mg}{\Delta t} \sqrt{2h/g} + mg = 1.14 \times 10^3 \text{ N}$$

**3-11** 质量为  $m$  的小球, 在力  $F = -kx$  作用下运动, 已知  $x = A \cos \omega t$ , 其中  $k$ 、 $\omega$ 、 $A$  均为正常量, 求在  $t=0$  到  $t = \frac{\pi}{2\omega}$  时间内小球动量的增量.

**分析** 由冲量定义求得力  $F$  的冲量后, 根据动量原理, 即为动量增量, 注意

用式  $\int_{t_1}^{t_2} F dt$  积分前, 应先将式中  $x$  用  $x = A \cos \omega t$  代之, 方能积分.

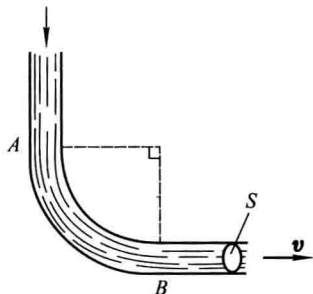
解 力  $F$  的冲量为

$$I = \int_{t_1}^{t_2} F dt = \int_{t_1}^{t_2} -kx dt = - \int_0^{\pi/2\omega} kA \cos \omega t dt = - \frac{kA}{\omega}$$

即 
$$\Delta(mv) = I = - \frac{kA}{\omega}$$

**3-12** 如图所示, 在水平地面上, 有一横截面  $S = 0.20 \text{ m}^2$  的直角弯管, 管中有流速为  $v = 3.0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  的水通过, 求弯管所受力的大小和方向.

**分析** 对于弯曲部分  $AB$  段内的水而言, 由于流速一定, 在时间  $\Delta t$  内, 从其一端流入的水量等于从另一端流出的水量. 因此, 对这部分水来说, 在时间  $\Delta t$  内动量的增量也就是流入与流出水的动量的增量  $\Delta p = \Delta m (\mathbf{v}_B - \mathbf{v}_A)$ ; 此动量的变化是管壁在  $\Delta t$  时间内对其作用冲量  $I$  的结果. 依据动量定理可求得该段水受到管壁的冲力  $F$ ; 由牛顿第三定律, 自然就得到水流对管壁的作用力  $F' = -F$ .



题 3-12 图

**解** 在  $\Delta t$  时间内, 从管一端流入 (或流出) 水的质量为  $\Delta m = \rho v S \Delta t$ , 弯曲部分  $AB$  的水的动量的增量则为

$$\Delta p = \Delta m (\mathbf{v}_B - \mathbf{v}_A) = \rho v S \Delta t (\mathbf{v}_B - \mathbf{v}_A)$$

依据动量定理  $I = \Delta p$ , 得到管壁对这部分水的平均冲力

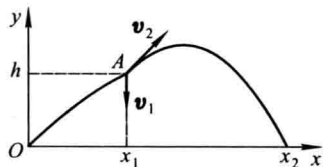
$$\bar{F} = \frac{I}{\Delta t} = \rho S v (\mathbf{v}_B - \mathbf{v}_A)$$

从而可得水流对管壁作用力的大小为

$$\bar{F}' = -\bar{F} = -\sqrt{2} \rho S v^2 = -2.5 \times 10^3 \text{ N}$$

作用力的方向则沿直角平分线指向弯管外侧.

**3-13** 一作斜抛运动的物体, 在最高点炸裂为质量相等的两块, 最高点距离地面为  $19.6 \text{ m}$ . 爆炸  $1.00 \text{ s}$  后, 第一块落到爆炸点正下方的地面上, 此处距抛出点的水平距离为  $1.00 \times 10^2 \text{ m}$ . 问第二块落在距抛出点多远的地面上? (设空气的阻力不计.)



题 3-13 图

**分析** 根据抛体运动规律, 物体在最高点处的位置坐标和速度是易求的. 因此, 若能求出第二块碎片抛出的速度, 按抛体运动的规律就可求得落地的位置. 为此, 分析物体在最高点处爆炸的过程, 由于爆炸力属内力, 且远大于重力, 因此, 重力的冲量可忽略,

物体爆炸过程中应满足动量守恒. 由于炸裂后第一块碎片抛出的速度可由落体运动求出, 由动量守恒定律可得炸裂后第二块碎片抛出的速度, 进一步求出落地位置.

**解** 取如图示坐标, 根据抛体运动的规律, 爆炸前, 物体在最高点  $A$  的速度的水平分量为

$$v_{0x} = \frac{x_1}{t_0} = x_1 \sqrt{\frac{g}{2h}} \quad (1)$$

物体爆炸后, 第一块碎片竖直落下的运动方程为

$$y_1 = h - v_1 t - \frac{1}{2} g t^2$$

当该碎片落地时, 有  $y_1 = 0, t = t_1$ , 则由上式得爆炸后第一块碎片抛出的速度

$$v_1 = \frac{h - \frac{1}{2} g t_1^2}{t_1} \quad (2)$$

又根据动量守恒定律, 在最高点处有

$$m v_{0x} = \frac{1}{2} m v_{2x} \quad (3)$$

$$0 = -\frac{1}{2} m v_1 + \frac{1}{2} m v_{2y} \quad (4)$$

联立解式(1)、(2)、(3)和(4), 可得爆炸后第二块碎片抛出时的速度分量分别为

$$v_{2x} = 2v_{0x} = 2x_1 \sqrt{\frac{g}{2h}} = 100 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$v_{2y} = v_1 = \frac{h - \frac{1}{2} g t_1^2}{t_1} = 14.7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

爆炸后, 第二块碎片作斜抛运动, 其运动方程为

$$x_2 = x_1 + v_{2x} t_2 \quad (5)$$

$$y_2 = h + v_{2y} t_2 - \frac{1}{2} g t_2^2 \quad (6)$$

落地时,  $y_2 = 0$ , 由式(5)、(6)可解得第二块碎片落地点的水平位置

$$x_2 = 500 \text{ m}$$

**3-14** 一棒球投手将  $0.14 \text{ kg}$  的棒球沿水平方向以  $50 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  的速率将棒球投向击球手, 击球手用棒击球, 使球沿与水平线成  $30^\circ$  斜向上飞出, 速率为  $80 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ . 设棒与球接触时间为  $0.02 \text{ s}$ . 求棒作用在球上的平均力.

**分析** 本题运用动量定理求解时, 因作用时间很短, 棒球重力可略去不计.



动量定理的两种形式(分量式和矢量式)为求解此类问题提供两种方法,但运用分量式首先要建立恰当坐标系.先求分量再求总量.用矢量式一定作出满足题意的正确矢量图,由图中所示几何关系求解.

**解 1** 建立如图(a)所示坐标系,由动量定理的分量式有

$$\bar{F}_x \Delta t = mv_2 \cos 30^\circ - (-mv_1)$$

$$\bar{F}_y \Delta t = mv_2 \sin 30^\circ - 0$$

由上两式,得

$$\bar{F}_x = 835 \text{ N}, \quad \bar{F}_y = 280 \text{ N}$$

则

$$\bar{F} = \sqrt{\bar{F}_x^2 + \bar{F}_y^2} = 881 \text{ N}$$

**解 2** 由动量定理矢量式,有

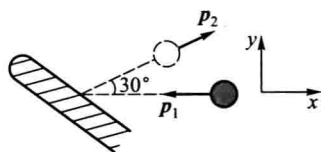
$$\mathbf{I} = \bar{\mathbf{F}} \Delta t = \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1$$

相应矢量关系如图(b)所示.

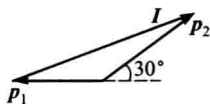
由图知

$$\begin{aligned} \bar{F} \Delta t &= \sqrt{p_1^2 + p_2^2 - 2p_1 p_2 \cos 150^\circ} \\ &= m \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + 2v_1 v_2 \cos 30^\circ} = 881 \text{ N} \end{aligned}$$

两种方法各有特点.



(a)



(b)

题 3-14 图

**3-15** A、B 两船在平静的湖面上平行逆向航行,当两船擦肩相遇时,两船各自向对方平稳地传递 50 kg 的重物,结果是 A 船停了下来,而 B 船以  $3.4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  的速度继续向前驶去. A、B 两船原有质量分别为  $0.5 \times 10^3 \text{ kg}$  和  $1.0 \times 10^3 \text{ kg}$ ,求在传递重物前两船的速度.(忽略水对船的阻力.)

**分析** 由于两船横向传递的速度可略去不计,则对搬出重物后的船 A 与从船 B 搬入的重物所组成的系统 I 来讲,在水平方向上无外力作用,因此,它们相互作用的过程中应满足动量守恒;同样,对搬出重物后的船 B 与从船 A 搬入的重物所组成的系统 II 亦是这样.由此,分别列出系统 I、II 的动量守恒方程即可解出结果.

**解** 设 A、B 两船原有的速度分别以  $v_A$ 、 $v_B$  表示,传递重物后船的速度分别以  $v'_A$ 、 $v'_B$  表示,被搬运重物的质量以  $m$  表示.分别对上述系统 I、II 应用动量守恒定律,则有

$$(m_A - m)v_A + mv_B = m_A v'_A \quad (1)$$

$$(m_B - m)v_B + mv_A = m_B v'_B \quad (2)$$

由题意知  $v'_A = 0$ ,  $v'_B = 3.4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ ,代入数据后,可解得

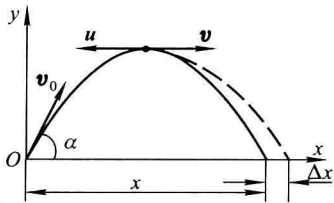
$$v_A = \frac{-m_B m v'_B}{(m_B - m)(m_A - m) - m^2} = -0.40 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$v_B = \frac{(m_A - m)m_B v'_B}{(m_A - m)(m_B - m) - m^2} = 3.6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

也可以选择不同的系统,例如,把 A、B 两船(包括传递的物体在内)视为系统,同样能满足动量守恒,也可列出相对应的方程求解.

**3-16** 质量为  $m'$  的人手里拿着一个质量为  $m$  的物体,此人用与水平面成  $\alpha$  角的速率  $v_0$  向前跳去.当他达到最高点时,他将物体以相对于人为  $u$  的水平速率向后抛出.问:由于人抛出物体,他跳跃的距离增加了多少?(假设人可视为质点.)

**分析** 人跳跃距离的增加是由于他在最高点处向后抛出物体所致.在抛物的过程中,人与物之间相互作用力的冲量,使他们各自的动量发生了变化.如果把人与物视为一系统,因水平方向不受外力作用,故外力的冲量为零,系统在该方向上动量守恒.但在应用动量守恒定律时,必须注意系统是相对地面(惯性系)而言的,因此,在处理人与物的速度时,要根据相对运动的关系来确定.至于,人因跳跃而增加的距离,可根据人在水平方向速率的增量  $\Delta v$  来计算.



题 3-16 图

**解** 取如图所示坐标.把人与物视为一系统,当人跳跃到最高点处,在向左抛物的过程中,满足动量守恒,故有

$$(m+m')v_0 \cos \alpha = m'v + m(v-u)$$

式中  $v$  为人抛物后相对地面的水平速率,  $v-u$  为抛出物对地面的水平速率.得

$$v = v_0 \cos \alpha + \frac{m}{m'+m}u$$

人的水平速率的增量为

$$\Delta v = v - v_0 \cos \alpha = \frac{m}{m'+m}u$$

而人从最高点到地面的运动时间为

$$t = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}$$

所以,人跳跃后增加的距离

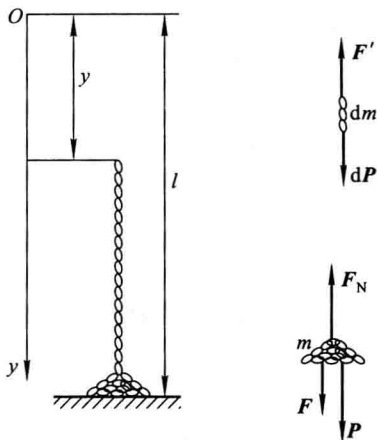
$$\Delta x = \Delta v t = \frac{m v_0 \sin \alpha}{(m'+m)g}u$$

**\* 3-17** 一质量均匀柔软的绳竖直地悬挂着,绳的下端刚好触到水平桌面上.如果把绳的上端放开,绳将落在桌面上.试证明:在绳下落过程中的任意时刻,作用于桌面上的压力等于已落到桌面上绳的重量的三倍.

**分析** 由于桌面所受的压力难以直接求出,因此,可转化为求其反作用力,即桌面给绳的托力.但是,应注意此托力除了支持已落在桌面上的绳外,还有对  $dt$  时间内下落绳的冲力,此力必须运用动量定理来求.

**解** 取如图所示坐标,开始时绳的上端位于原点,  $Oy$  轴的正向竖直向下.绳的总长为  $l$ ,以  $t$  时刻,已落到桌面上长为  $y$ 、质量为  $m'$  的绳为研究对象.这段绳受重力  $P$ 、桌面的托力  $F_N$  和下落绳子对它的冲力  $F$  (如图所示)的作用.由力的平衡条件有

$$\frac{m}{l}yg + F - F_N = 0 \quad (1)$$



题 3-17 图

为求冲力  $F$ ,可取  $dt$  时间内落至桌面的线元  $dy$  为研究对象.线元的质量  $dm = \frac{m}{l}dy$ ,它受到重力  $dP$  和冲力  $F$  的反作用力  $F'$ 的作用,由于  $F' \gg dP$ ,故由动量定理得

$$F' dt = 0 - \frac{m}{l}v dy \quad (2)$$

而 
$$F = -F' \quad (3)$$

由上述三式可得任意时刻桌面受到的压力大小为

$$F'_N = | -F_N | = \frac{m}{l}yg + \frac{m}{l}v^2 = 3 \frac{m}{l}yg = 3m'g$$

**\* 3-18** 设在地球表面附近,一初质量为  $5.00 \times 10^5 \text{ kg}$  的火箭,从尾部喷出气体的速率为  $2.00 \times 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ . (1) 试问:每秒需喷出多少气体,才能使火箭最初向上的加速度大小为  $4.90 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ . (2) 若火箭的质量比为 6.00,求该火箭的最后速率.

**分析** 这是一个系统内质量转移的问题.为了讨论火箭的运动规律,仍需建立其在重力场中的动力学方程.为此,以  $t$  时刻质量为  $m$  的火箭为研究对象,它在  $t \sim t + \Delta t$  的时间内,将分离成火箭主体(包括尚剩的燃料)和排出的燃料两部分.根据它们的总动量的增量  $\Sigma d\mathbf{p}_i$  和系统所受的外力——重力(阻力不计),由动量定理可得到  $-mg = u dm'/dt + m dv/dt$  (推导从略,见教材),即火箭主体的动力学方程.由于在  $dt$  时间内排出燃料的质量  $dm'$  很小,式中  $m$  也就可以视为此刻火箭主体的质量,而燃料的排出率  $dm'/dt$  也就是火箭质量的变化率  $-dm/dt$ .这样,上述方程也可写成  $u \frac{dm}{dt} - mg = ma$ .在特定加速度  $a_0$  的条件下,根据初始时刻火箭的质量  $m_0$ ,就可求出燃料的排出率  $dm/dt$ .在火箭的质量比(即  $t$

时刻火箭的质量  $m$  与火箭的初始质量  $m_0$  之比) 已知的条件下, 可算出火箭所经历的时间, 则火箭运动的速率可通过对其动力学方程积分后解得.

**解** (1) 以火箭发射处为原点, 竖直向上为正方向. 该火箭在重力场中的动力学方程为

$$u \frac{dm}{dt} - mg = ma \quad (1)$$

因火箭的初始质量为  $m_0 = 5.00 \times 10^5 \text{ kg}$ , 要使火箭获得最初的加速度  $a_0 = 4.90 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ , 则燃气的排出率为

$$\frac{dm}{dt} = \frac{m_0(g+a_0)}{u} = 3.68 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$$

(2) 为求火箭的最后速率, 可将式(1)改写成

$$u \frac{dm}{dt} - mg = m \frac{dv}{dt}$$

分离变量后积分, 有

$$\int_{v_0}^v dv = u \int_{m_0}^m \frac{dm}{m} - \int_0^t g dt$$

火箭速率随时间的变化规律为

$$v = v_0 - u \ln \frac{m}{m_0} - gt \quad (2)$$

因火箭的质量比为 6.00, 故经历时间  $t$  后, 其质量为

$$m = m_0 - \frac{dm}{dt} t = \frac{1}{6} m_0$$

得

$$t = \frac{5m_0}{6dm/dt} \quad (3)$$

将式(3)代入式(2), 依据初始条件, 可得火箭的最后速率为

$$v' = u \ln \frac{m_0}{m} - gt = u \ln \frac{m_0}{m} - \frac{5m_0 g}{6dm/dt} = 2.47 \times 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

**3-19** 质量为  $m$  的质点在外力  $F$  的作用下沿  $Ox$  轴运动, 已知  $t=0$  时质点位于原点, 且初始速度为零. 设外力  $F$  随距离线性地减小, 且  $x=0$  时,  $F=F_0$ ; 当  $x=L$  时,  $F=0$ . 试求质点从  $x=0$  处运动到  $x=L$  处的过程中力  $F$  对质点所做功和质点在  $x=L$  处的速率.

**分析** 由题意知质点是在变力作用下运动, 因此要先找到力  $F$  与位置  $x$  的关系, 由题给条件知  $F = F_0 - \frac{F_0}{L}x$ . 则该力做的功可用式  $\int_0^L F dx$  计算, 然后由动能定理求质点速率.

解 由分析知  $F = F_0 - \frac{F_0}{L}x$ , 则在  $x=0$  到  $x=L$  过程中做功

$$W = \int_0^L \left( F_0 - \frac{F_0}{L}x \right) dx = \frac{F_0 L}{2}$$

由动能定理有

$$W = \frac{1}{2}mv^2 - 0$$

得  $x=L$  处的质点速率为

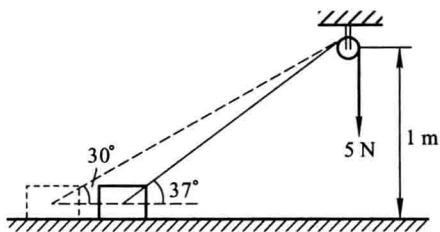
$$v = \sqrt{\frac{F_0 L}{m}}$$

此处也可用牛顿定律求质点速率, 即

$$F_0 - \frac{F_0}{L}x = m \frac{dv}{dt} = mv \frac{dv}{dx}$$

分离变量后, 两边积分也可得同样结果。

**3-20** 如图所示, 一绳索跨过无摩擦的滑轮, 系在质量为  $1.00 \text{ kg}$  的物体上, 起初物体静止在无摩擦的水平面上. 若用  $5.00 \text{ N}$  的恒力作用在绳索的另一端, 使物体向右作加速运动, 当系在物体上的绳索从与水平面成  $30^\circ$  角变为  $37^\circ$  角时, 力对物体所做的功为多少? 已知滑轮与水平面之间的距离为  $d = 1.00 \text{ m}$ .



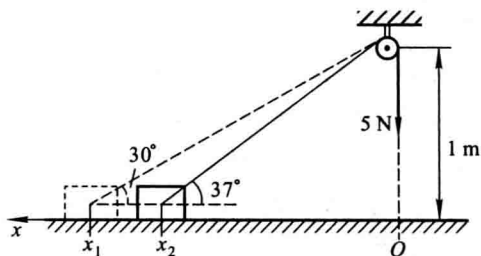
(a)

**分析** 该题中虽施以“恒力”, 但是, 作用在物体上的力的方向在不断变化. 需按功的矢量定义式  $W = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$

来求解.

**解** 取图示坐标, 绳索拉力对物体所做的功为

$$\begin{aligned} W &= \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} = \int F \cos \theta dx \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \frac{Fx}{\sqrt{d^2 + x^2}} dx = 1.69 \text{ J} \end{aligned}$$



(b)

题 3-20 图

**3-21** 质量为  $m = 5.6 \text{ g}$  的子弹, 以  $v_0 = 501 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  的速率水平地射入一静止在水平面上的质量为  $m' = 2 \text{ kg}$  的木

块内,子弹射入木块后,它们向前移动了  $s = 50 \text{ cm}$  而停止,求:

- (1) 木块与水平面间的摩擦因数.
- (2) 木块对子弹所做的功  $W_1$ .
- (3) 子弹对木块所做的功  $W_2$ .
- (4)  $W_1$  与  $W_2$  的大小是否相等? 为什么?

**分析** 本题由动量和能量关系入手求解较为简便,一是子弹射入木块过程满足动量守恒,二是用动能定理求功.求得的  $W_1$  与  $W_2$  大小不等,对此可从多个方面去理解.

**解** (1) 设子弹射入木块内,子弹与木块一起运动的初速率为  $v$ ,则由动量守恒

$$mv_0 = (m' + m)v \quad (1)$$

根据动能定理 
$$F_f \cdot s = \frac{1}{2}(m + m')v^2 \quad (2)$$

$$F_f = \mu(m + m')g \quad (3)$$

式(1)、(2)、(3)联立解出

$$\mu = 0.196, \quad v = 1.4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$(2) \quad W_1 = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = -703 \text{ J}$$

$$(3) \quad W_2 = \frac{1}{2}m'v^2 = 1.96 \text{ J}$$

(4)  $W_1$ 、 $W_2$  大小不等,这是因为虽然木块与子弹之间的相互作用力等值反向,但两者的位移大小不等.

**讨论** 本题中子弹与木块存在一对作用力与反作用力,对系统而言称为一对内力.而一对内力所做功之和可能为零,也可能不为零.子弹射入木块过程中相互作用力为一对非保守内力,所做功之和一般不为零.从子弹射入木块到子弹与木块具有共同速度过程中,由于子弹与木块存在相对运动,子弹对地位移大于木块对地位移.故  $|W_1| > W_2$ ,木块对子弹做负功,使子弹动能减少,减少的动能一部分通过子弹对木块做正功,转移给木块成为木块动能,而另一部分动能( $W_1 + W_2$ )转化为系统的内能.故非弹性碰撞中机械能不守恒.

**3-22** 一物体在介质中按规律  $x = ct^3$  作直线运动,  $c$  为一常量.设介质对物体的阻力正比于速度的二次方.试求物体由  $x_0 = 0$  运动到  $x = l$  时,阻力所做的功.(已知阻力系数为  $k$ .)

**分析** 本题是一维变力做功问题,仍需按功的定义式  $W = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x}$  来求解.关键在于寻找力函数  $F = F(x)$ .根据运动学关系,可将已知力与速度的函数关系

$F(v) = kv^2$  变换到  $F(t)$ , 进一步按  $x = ct^3$  的关系把  $F(t)$  转换为  $F(x)$ , 这样, 就可按功的定义式求解.

解 由运动学方程  $x = ct^3$ , 可得物体的速度

$$v = \frac{dx}{dt} = 3ct^2$$

按题意及上述关系, 物体所受阻力的大小为

$$F = kv^2 = 9kc^2t^4 = 9kc^{2/3}x^{4/3}$$

则阻力的功为

$$W = \int_0^l \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} = \int_0^l F \cos 180^\circ dx = - \int_0^l 9kc^{2/3}x^{4/3} dx = -\frac{27}{7}kc^{2/3}l^{7/3}$$

**3-23** 一人从 10.0 m 深的井中提水, 起始桶中装有 10.0 kg 的水, 由于水桶漏水, 每升高 1.00 m 要漏去 0.20 kg 的水. 水桶被匀速地从井中提到井口, 人所做的功.

分析 由于水桶在匀速上提过程中, 拉力必须始终与水桶重力相平衡. 水桶重力因漏水而随提升高度而变, 因此, 拉力做功实为变力做功. 由于拉力做功也就是克服重力的功, 因此, 只要能写出重力随高度变化的关系, 拉力做功即可求出.

解 水桶在匀速上提过程中,  $a = 0$ , 拉力与水桶重力平衡, 有

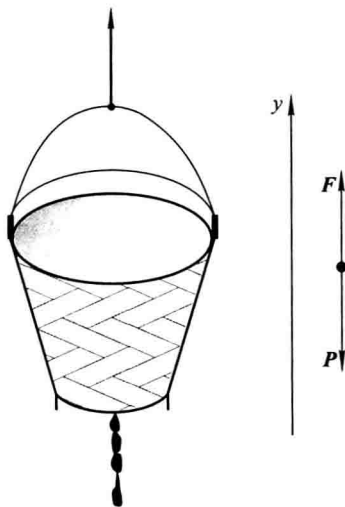
$$F + P = 0$$

在图示所取坐标下, 水桶重力随位置的变化关系为

$$P = mg - \alpha y$$

其中  $\alpha = 0.2 \text{ kg/m}$ , 人对水桶的拉力的功为

$$W = \int_0^{10} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{y} = \int_0^{10} (mg - \alpha y) dy = 882 \text{ J}$$



题 3-23 图

**3-24** 一质量为 0.20 kg 的球, 系在长为 2.00 m 的细绳上, 细绳的另一端系在天花板上. 把小球移至使细绳与竖直方向成  $30^\circ$  角的位置, 然后从静止放开. 求: (1) 在绳索从  $30^\circ$  角到  $0^\circ$  角的过程中, 重力和张力所做的功; (2) 物体在最低位置时的动能和速率; (3) 在最低位置时的张力.

分析 (1) 在计算功时, 首先应明确是什么力做功. 小球摆动过程中同时受到重力和张力作用. 重力是保守力, 根据小球下落的距离, 它的功很易求得; 至于

张力虽是一变力,但是,它的方向始终与小球运动方向垂直,根据功的矢量式  $W = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ , 即能得出结果来.(2) 在计算功的基础上,由动能定理直接能求出动能和速率.(3) 在求最低点的张力时,可根据小球作圆周运动时的向心加速度由重力和张力提供来确定.

**解** (1) 如图所示,重力对小球所做的功只与始末位置有关,即

$$W_p = P\Delta h = mgl(1 - \cos \theta) = 0.53 \text{ J}$$

在小球摆动过程中,张力  $F_T$  的方向总是与运动方向垂直,所以,张力的功为

$$W_T = \int \mathbf{F}_T \cdot d\mathbf{s} = 0$$

(2) 根据动能定理,小球摆动过程中,其动能的增量是由于重力对它做功的结果.初始时动能为零,因而,在最低位置时的动能为

$$E_k = W_p = 0.53 \text{ J}$$

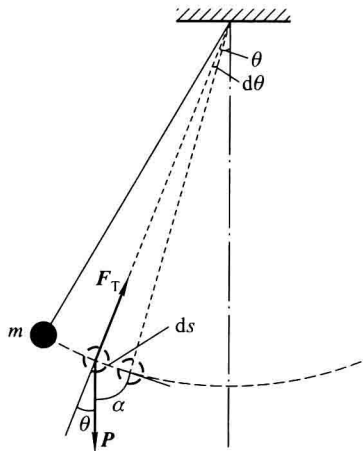
小球在最低位置的速率为

$$v = \sqrt{\frac{2E_k}{m}} = \sqrt{\frac{2W_p}{m}} = 2.30 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

(3) 当小球在最低位置时,由牛顿定律可得

$$F_T - P = \frac{mv^2}{l}$$

$$F_T = mg + \frac{mv^2}{l} = 2.49 \text{ N}$$



题 3-24 图

**3-25** 一质量为  $m$  的质点,系在细绳的一端,绳的另一端固定在平面上.此质点在粗糙水平面上作半径为  $r$  的圆周运动.设质点的最初速率是  $v_0$ .当它运动一周时,其速率为  $v_0/2$ .求:(1) 摩擦力做的功;(2) 动摩擦因数;(3) 在静止以前质点运动了多少圈?

**分析** 质点在运动过程中速度的减缓,意味着其动能减少;而减少的这部分动能则消耗在运动中克服摩擦力做功上.由此,可依据动能定理列式解之.

**解** (1) 摩擦力做功为

$$W = E_k - E_{k0} = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = -\frac{3}{8}mv_0^2 \quad (1)$$



(2) 由于摩擦力是一恒力,且  $F_f = \mu mg$ ,故有

$$W = F_f s \cos 180^\circ = -2\pi r \mu mg \quad (2)$$

由式(1)、(2)可得动摩擦因数为

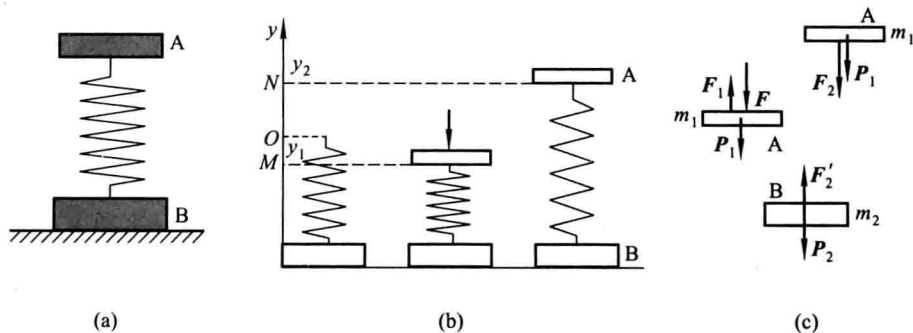
$$\mu = \frac{3v_0^2}{16\pi rg}$$

(3) 由于一周中损失的动能为  $\frac{3}{8}mv_0^2$ ,则在静止前可运行的圈数为

$$n = \left| \frac{E_{k0}}{W} \right| = \frac{4}{3} \text{圈}$$

**3-26** 如图(a)所示, A 和 B 两块板用一轻弹簧连接起来,它们的质量分别为  $m_1$  和  $m_2$ . 问在 A 板上需加多大的压力,方可使力停止作用后,恰能使 A 在跳起来时 B 稍被提起.(设弹簧的劲度系数为  $k$ .)

**分析** 运用守恒定律求解是解决力学问题最简捷的途径之一.因为它与过程的细节无关,也常常与特定力的细节无关.“守恒”则意味着在条件满足的前提下,过程中任何时刻守恒量不变.在具体应用时,必须恰当地选取研究对象(系统),注意守恒定律成立的条件.该题可用机械能守恒定律来解决.选取两块板、弹簧和地球为系统,该系统在外界所施压力撤除后(取作状态 1),直到 B 板刚被提起(取作状态 2),在这一过程中,系统不受外力作用,而内力中又只有保守力(重力和弹力)做功,支持力不做功,因此,满足机械能守恒的条件.只需取状态 1 和状态 2,运用机械能守恒定律列出方程,并结合这两种状态下受力的平衡,便可将所需压力求出.



题 3-26 图

**解** 选取如图(b)所示坐标,取原点  $O$  处为重力势能和弹性势能零点.作各状态下物体的受力图如图(c)所示.对 A 板而言,当施以外力  $F$  时,根据受力平

衡有

$$F_1 = P_1 + F \quad (1)$$

当外力撤除后,按分析中所选的系统,由机械能守恒定律可得

$$\frac{1}{2}ky_1^2 - m_1gy_1 = \frac{1}{2}ky_2^2 + m_1gy_2$$

式中  $y_1, y_2$  为  $M, N$  两点对原点  $O$  的位移. 因为  $F_1 = ky_1, F_2 = ky_2$  及  $P_1 = m_1g$ , 上式可写为

$$F_1 - F_2 = 2P_1 \quad (2)$$

由式(1)、(2)可得

$$F = P_1 + F_2 \quad (3)$$

当  $A$  板跳到  $N$  点时,  $B$  板刚被提起, 此时弹性力  $F'_2 = P_2$ , 且  $F_2 = F'_2$ . 由式(3)可得

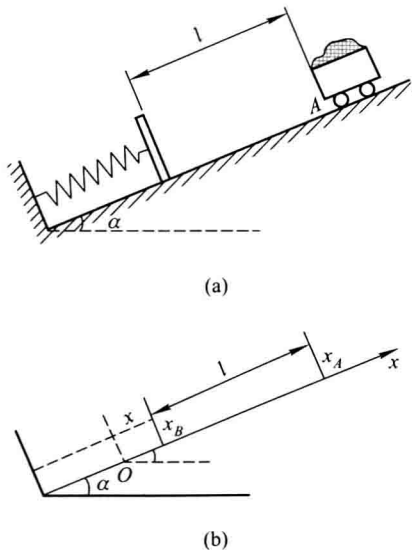
$$F = P_1 + P_2 = (m_1 + m_2)g$$

应注意, 势能的零点位置是可以任意选取的. 为计算方便起见, 通常取弹簧原长时的弹性势能为零点, 也同时为重力势能的零点.

**3-27** 如图(a)所示, 有一自动卸货矿车, 满载时的质量为  $m'$ , 从与水平面成倾角  $\alpha = 30.0^\circ$  的斜面上的点  $A$  由静止下滑. 设斜面对车的阻力为车重的 0.25 倍, 矿车下滑距离  $l$  时, 矿车与缓冲弹簧一道沿斜面运动. 当矿车使弹簧产生最大压缩形变时, 矿车自动卸货, 然后矿车借助弹簧的弹性力作用, 使之返回原位置  $A$  再装货. 试问要完成这一过程, 空载时与满载时车的质量之比应为多大?

**分析** 矿车在下滑和返回的全过程中受到重力、弹力、阻力和支持力作用. 若取矿车、地球和弹簧为系统, 支持力不做功, 重力、弹力为保守力, 而阻力为非保守力. 矿车在下滑和上行两过程中, 存在非保守力做功, 系统不满足机械能守恒的条件, 因此, 可应用功能原理去求解. 在确定重力势能、弹性势能时, 应注意势能零点的选取, 常常选取弹簧原长时的位置为重力势能、弹性势能共同的零点, 这样做对解题比较方便.

**解** 取沿斜面向上为  $x$  轴正方向. 弹簧被压缩到最大形变时弹簧上端为坐标原点  $O$ . 矿车在下滑和上行的全过程中, 按题意, 摩擦力所做的功为



题 3-27 图

$$W_f = (0.25mg + 0.25m'g)(l+x) \quad (1)$$

式中  $m'$  和  $m$  分别为矿车满载和空载时的质量,  $x$  为弹簧最大被压缩量.

根据功能原理, 在矿车运动的全过程中, 摩擦力所做的功应等于系统机械能增量的负值, 故有

$$W_f = -\Delta E = -(\Delta E_p + \Delta E_k)$$

由于矿车返回原位时速度为零, 故  $\Delta E_k = 0$ ; 而  $\Delta E_p = (m-m')g(l+x)\sin\alpha$ , 故有

$$W_f = -(m-m')g(l+x)\sin\alpha \quad (2)$$

由式(1)、(2)可解得

$$\frac{m}{m'} = \frac{1}{3}$$

**3-28** 用铁锤把钉子敲入墙面木板. 设木板对钉子的阻力与钉子进入木板的深度成正比. 若第一次敲击, 能把钉子钉入木板  $1.00 \times 10^{-2}$  m. 第二次敲击时, 保持第一次敲击钉子的速度, 那么第二次能把钉子钉入多深?

**分析** 由于两次锤击的条件相同, 锤击后钉子获得的速度也相同, 所具有的初动能也相同. 钉子钉入木板是将钉子的动能用于克服阻力做功, 由功能原理可知钉子两次所做的功相等. 由于阻力与进入木板的深度成正比, 按变力的功的定义得两次功的表达式, 并由功相等的关系即可求解.

**解** 因阻力与深度成正比, 则有  $F = kx$  ( $k$  为阻力系数). 现令  $x_0 = 1.00 \times 10^{-2}$  m, 第二次钉入的深度为  $\Delta x$ , 由于钉子两次所做功相等, 可得

$$\int_0^{x_0} kx dx = \int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} kx dx$$

$$\Delta x = 0.41 \times 10^{-2} \text{ m}$$

**3-29** 一质量为  $m$  的地球卫星, 沿半径为  $3R_E$  的圆轨道运动,  $R_E$  为地球的半径. 已知地球的质量为  $m_E$ , 求: (1) 卫星的动能; (2) 卫星的引力势能; (3) 卫星的机械能.

**分析** 根据势能和动能的定义, 只需知道卫星的所在位置和绕地球运动的速率, 其势能和动能即可算出. 由于卫星在地球引力作用下作圆周运动, 由此可算得卫星绕地球运动的速率和动能. 由于卫星的引力势能是属于系统(卫星和地球)的, 要确定特定位置的势能时, 必须规定势能的零点, 通常取卫星与地球相距无限远时的势能为零. 这样, 卫星在特定位置的势能也就能确定了. 至于卫星的机械能则是动能和势能的总和.

**解** (1) 卫星与地球之间的万有引力提供卫星作圆周运动的向心力, 由牛顿定律可得

$$G \frac{m_E m}{(3R_E)^2} = m \frac{v^2}{3R_E}$$

则

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = G \frac{m_E m}{6R_E}$$

(2) 取卫星与地球相距无限远( $r \rightarrow \infty$ )时的势能为零,则处在轨道上的卫星所具有的势能为

$$E_p = -G \frac{m_E m}{3R_E}$$

(3) 卫星的机械能为

$$E = E_k + E_p = G \frac{m_E m}{6R_E} - G \frac{m_E m}{3R_E} = -G \frac{m_E m}{6R_E}$$

**3-30** 如图(a)所示,天文观测台有一半径为  $R$  的半球形屋面,有一冰块从光滑屋面的最高点由静止沿屋面滑下,若摩擦力略去不计,求此冰块离开屋面的位置以及在该位置的速度.

**分析** 取冰块、屋面和地球为系统,由于屋面对冰块的支持力  $F_N$  始终与冰块运动的方向垂直,故支持力不做功;而重力  $P$  又是保守内力,所以,系统的机械能守恒.但是,仅有一个机械能守恒方程不能解出速度和位置两个物理量;因此,还需设法根据冰块在脱离屋面时支持力为零这一条件,由牛顿定律列出冰块沿径向的动力学方程.求解上述两方程即可得出结果.

**解** 由系统的机械能守恒,有

$$mgR = \frac{1}{2}mv^2 + mgR\cos\theta \quad (1)$$

根据牛顿定律,冰块沿径向的动力学方程为

$$mg\cos\theta - F_N = \frac{mv^2}{R} \quad (2)$$

冰块脱离球面时,支持力  $F_N = 0$ ,由式(1)、(2)可得冰块的角位置

$$\theta = \arccos \frac{2}{3} = 48.2^\circ$$

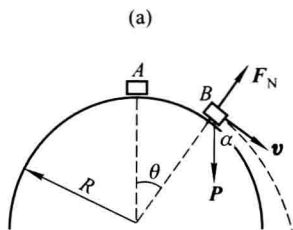
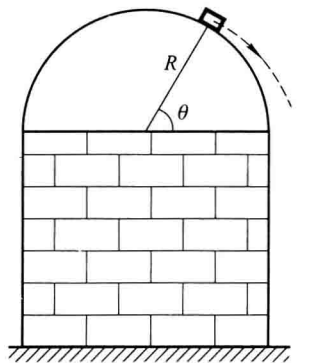
冰块此时的速率为

$$v = \sqrt{gR\cos\theta} = \sqrt{\frac{2Rg}{3}}$$

$v$  的方向与重力  $P$  方向的夹角为

$$\alpha = 90^\circ - \theta = 41.8^\circ$$

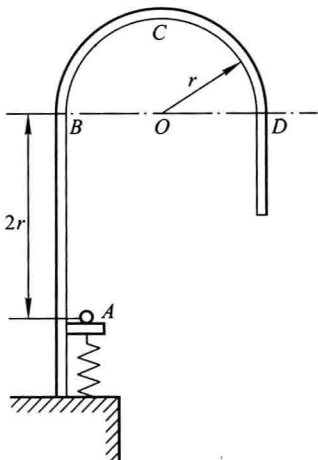
**3-31** 如图所示,把质量  $m = 0.20 \text{ kg}$  的小球放在位置  $A$  时,使弹簧被压缩



题 3-30 图

$\Delta l = 7.5 \times 10^{-2} \text{ m}$ . 然后在弹簧弹性力的作用下, 小球从位置  $A$  由静止被释放, 小球沿轨道  $ABCD$  运动. 小球与轨道间的摩擦不计. 已知  $\widehat{BCD}$  为半径  $r = 0.15 \text{ m}$  的半圆弧,  $AB$  相距为  $2r$ . 求弹簧劲度系数的最小值.

**分析** 若取小球、弹簧和地球为系统, 小球在被释放后的运动过程中, 只有重力和弹力这两个保守内力做功, 轨道对球的支持力不做功, 因此, 在运动的过程中, 系统的机械能守恒. 运用守恒定律解题时, 关键在于选好系统的初态和终态. 为获取本题所求的结果, 初态选在压缩弹簧刚被释放时刻, 这样, 可使弹簧的劲度系数与初态相联系; 而终态则取在小球刚好能通过半圆弧时的最高点  $C$  处, 因为这时小球的速率正处于一种临界状态, 若大于、等于此速率时, 小球定能沿轨道继续向前运动; 小于此速率时, 小球将脱离轨道抛出. 该速率则可根据重力提供圆弧运动中所需的向心力, 由牛顿定律求出. 这样, 再由系统的机械能守恒定律即可解出该弹簧劲度系数的最小值.



题 3-31 图

**解** 小球要刚好通过最高点  $C$  时, 轨道对小球支持力  $F_N = 0$ , 因此, 有

$$mg = \frac{mv_c^2}{r} \quad (1)$$

取小球开始时所在位置  $A$  为重力势能的零点, 由系统的机械能守恒定律, 有

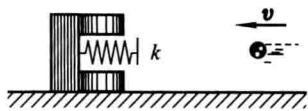
$$\frac{1}{2}k(\Delta l)^2 = mg(3r) + \frac{1}{2}mv_c^2 \quad (2)$$

由式(1)、(2)可得

$$k = \frac{7mgr}{(\Delta l)^2} = 366 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$$

**3-32** 如图所示, 质量为  $m$ 、速度为  $v$  的钢球, 射向质量为  $m'$  的靶. 靶中心有一小孔, 内有劲度系数为  $k$  的弹簧, 此靶最初处于静止状态, 但可在水平面上作无摩擦滑动. 求子弹射入靶内弹簧后, 弹簧的最大压缩距离.

**分析** 这也是一种碰撞问题. 碰撞的全过程是指小球刚与弹簧接触直至弹簧被压缩到最大, 小球与靶刚好到达共同速度为止, 在这过程中, 小球和靶组成的系统在水平方向不受外力作用, 外力的冲量为零, 因此, 在此方向动量守恒. 但是, 仅靠动量守恒定律还不能求出结果



题 3-32 图

来.又考虑到无外力对系统做功,系统无非保守内力做功,故系统的机械能也守恒.应用上述两个守恒定律,并考虑到球与靶具有相同速度时,弹簧被压缩量最大这一条件,即可求解.应用守恒定律求解,可免除碰撞中的许多细节问题.

**解** 设弹簧的最大压缩量为  $x_0$ . 小球与靶共同运动的速度为  $v_1$ . 由动量守恒定律,有

$$mv = (m+m')v_1 \quad (1)$$

又由机械能守恒定律,有

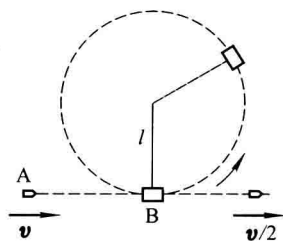
$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}(m+m')v_1^2 + \frac{1}{2}kx_0^2 \quad (2)$$

由式(1)、(2)可得

$$x_0 = \sqrt{\frac{mm'}{k(m+m')}}v$$

**3-33** 质量为  $m$  的子弹 A, 穿过如图所示的摆锤 B 后, 速率由  $v$  减少到  $v/2$ . 已知摆锤的质量为  $m'$ , 摆线长度为  $l$ , 如果摆锤能在竖直平面内完成一个完整的圆周运动, 子弹速度的最小值应为多少?

**分析** 该题可分两个过程分析. 首先是子弹穿越摆锤的过程. 就子弹与摆锤所组成的系统而言, 由于穿越过程的时间很短, 重力和摆线的张力在水平方向的冲量远小于冲击力的冲量, 因此, 可认为系统在水平方向不受外力的冲量作用, 系统在该方向上满足动量守恒. 摆锤在碰撞中获得了一定的速度, 因而具有一定的动能, 为使摆锤能在竖直平面内作圆周运动, 必须使摆锤在最高点处有确定的速率, 该速率可由其本身的重力提供圆周运动所需的向心力来确定; 与此同时, 摆锤在作圆周运动过程中, 摆锤与地球组成的系统满足机械能守恒定律, 根据两守恒定律即可解出结果.



题 3-33 图

**解** 由水平方向的动量守恒定律, 有

$$mv = m \frac{v}{2} + m'v' \quad (1)$$

为使摆锤恰好能在竖直平面内作圆周运动, 在最高点时, 摆线中的张力应为  $F_T = 0$ , 则

$$m'g = \frac{m'v_h'^2}{l} \quad (2)$$

式中  $v_h'$  为摆锤在圆周最高点的运动速率.

又摆锤在竖直平面内作圆周运动的过程中,满足机械能守恒定律,故有

$$\frac{1}{2}m'v'^2 = 2m'gl + \frac{1}{2}m'v_h'^2 \quad (3)$$

解上述三个方程,可得子弹所需速率的最小值为

$$v = \frac{2m'}{m}\sqrt{5gl}$$

**3-34** 一个电子和一个原来静止的氢原子发生对心弹性碰撞,试问电子的动能中传递给氢原子的能量的百分数。(已知氢原子质量约为电子质量的 1 840 倍.)

**分析** 对于粒子的对心弹性碰撞问题,同样可利用系统(电子和氢原子)在碰撞过程中所遵循的动量守恒和机械能守恒来解决.本题所求电子传递给氢原子的能量的百分数,即氢原子动能与电子动能之比  $E_H/E_e$ . 根据动能的定义,有  $E_H/E_e = m'v_H^2/mv_e^2$ , 而氢原子与电子的质量比  $m'/m$  是已知的,它们的速率比可应用上述两守恒定律求得,  $E_H/E_e$  即可求出.

**解** 以  $E_H$  表示氢原子被碰撞后的动能,  $E_e$  表示电子的初动能,则

$$\frac{E_H}{E_e} = \frac{\frac{1}{2}m'v_H^2}{\frac{1}{2}mv_e^2} = \frac{m'}{m}\left(\frac{v_H}{v_e}\right)^2 \quad (1)$$

由于粒子作对心弹性碰撞,在碰撞过程中系统同时满足动量守恒和机械能守恒定律,故有

$$mv_e = m'v_H + mv_e' \quad (2)$$

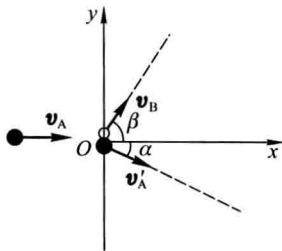
$$\frac{1}{2}mv_e^2 = \frac{1}{2}m'v_H^2 + \frac{1}{2}mv_e'^2 \quad (3)$$

由题意知  $m'/m = 1\ 840$ , 解上述三式可得

$$\frac{E_H}{E_e} = \frac{m'}{m}\left(\frac{v_H}{v_e}\right)^2 = 1\ 840\left(\frac{2m}{m'+m}\right)^2 \approx 2.2 \times 10^{-3}$$

**3-35** 质量为  $7.2 \times 10^{-23}$  kg, 速率为  $6.0 \times 10^7$  m · s<sup>-1</sup> 的粒子 A, 与另一个质量为其一半而静止的粒子 B 发生二维完全弹性碰撞, 碰撞后粒子 A 的速率为  $5.0 \times 10^7$  m · s<sup>-1</sup>. 求: (1) 粒子 B 的速率及相对粒子 A 原来速度方向的偏转角; (2) 粒子 A 的偏转角.

**分析** 这是粒子系统的二维弹性碰撞问题. 这类问题通常采用守恒定律来解决. 因为粒子系统在碰撞的平面内不受外力作用, 同时, 碰撞又是完全弹性的,



题 3-35 图

故系统同时满足动量守恒和机械能守恒.由两守恒定律方程即可解得结果.

**解** 取如图所示的坐标,由于粒子系统属于斜碰,在碰撞平面内根据系统动量守恒定律可取两个分量式,有

$$mv_A = \frac{m}{2}v_B \cos \beta + mv'_A \cos \alpha \quad (1)$$

$$0 = \frac{m}{2}v_B \sin \beta - mv'_A \sin \alpha \quad (2)$$

又由机械能守恒定律,有

$$\frac{1}{2}mv_A^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{m}{2}\right)v_B^2 + \frac{1}{2}mv_A'^2 \quad (3)$$

解式(1)、(2)、(3)可得碰撞后 B 粒子的速率为

$$v_B = \sqrt{2(v_A^2 - v_A'^2)} = 4.69 \times 10^7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

各粒子相对原粒子方向的偏角分别为

$$\alpha = \arccos \frac{v_A^2 + 3v_A'^2}{4v_A v_A'} = 22^\circ 20', \quad \beta = \arccos \frac{3v_B}{4v_A} = 54^\circ 6'$$

**3-36** 一辆小车质量为  $m_A = 300 \text{ kg}$ , 另一辆小车质量为  $m_B = 400 \text{ kg}$ , 如果两辆车都以  $14 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  的速率向一个十字路口开去, 不幸, 它们互相碰撞缠到了一起, 并在  $\theta$  角的方向上驶了出去, 如图(a)所示. 求: (1) 碰撞后缠在一起的两辆车速度的大小和方向; (2) 碰撞中损耗的能量.

**分析** 本题中两车碰撞为完全非弹性碰撞, 能量损失最大. 与动量定理运用一样. 既有坐标法(动量守恒分量式), 也有几何法(动量守恒矢量式), 前者要建立恰当坐标系, 后者要做出正确的矢量图.

**解 1** (1) 建立如图(a)所示坐标系, 由动量守恒有

$$m_A v_0 = (m_A + m_B) v_x$$

$$m_B v_0 = (m_A + m_B) v_y$$

由两式可得

$$v_x = 6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}, \quad v_y = 8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

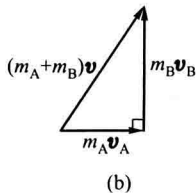
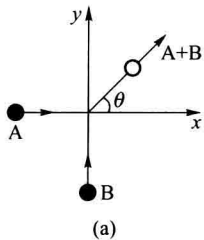
则

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\theta = \arctan \frac{v_y}{v_x} = 53.1^\circ$$

(2) 损耗的能量为

$$\Delta E = \frac{1}{2}(m_A + m_B)v^2 - \frac{1}{2}m_A v_0^2 - \frac{1}{2}m_B v_0^2$$



题 3-36 图



$$= -3.36 \times 10^4 \text{ J}$$

“-”号表示减少,这部分能量转化为汽车内能.

**解 2** (1) 由动量守恒矢量式,有

$$(m_A + m_B) \boldsymbol{v} = m_A \boldsymbol{v}_A + m_B \boldsymbol{v}_B$$

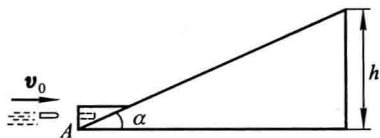
相关矢量关系如图(b)所示,由图知

$$[(m_A + m_B)v]^2 = (m_A v_0)^2 + (m_B v_0)^2$$

$$\text{则} \quad v = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}, \quad \theta = \arctan \frac{m_B v_0}{m_A v_0} = 53.1^\circ$$

(2) 同解 1.

**3-37** 如图所示,一质量为  $m'$  的物块放置在斜面的最底端  $A$  处,斜面固定在地面上,倾角为  $\alpha$ ,高度为  $h$ ,物块与斜面的滑动摩擦因数为  $\mu$ .今有一质量为  $m$  的子弹以  $v_0$  速度沿水平方向射入物块并留在其中,且使物块沿斜面向上滑动,求物块滑出顶端时的速度大小.



题 3-37 图

**分析** 该题可分两个阶段来讨论,首先是子弹和物块的撞击过程,然后是物块(包含子弹)沿斜面向上的滑动过程.在撞击过程中,对物块和子弹组成的系统而言,由于撞击前后的总动量明显是不同的,因此,撞击过程中动量

不守恒.应该注意,不是任何碰撞过程中动量都是守恒的.但是,若取沿斜面的方向,因撞击力(属于内力)远大于子弹的重力  $\boldsymbol{P}_1$  和物块的重力  $\boldsymbol{P}_2$  在斜面的方向上的分力以及物块所受的摩擦力  $\boldsymbol{F}_f$ ,在该方向上动量守恒,由此可得到物块被撞击后的速度.在物块沿斜面上滑的过程中,为解题方便,可重新选择系统(即取子弹、物块和地球为系统),此系统不受外力作用,而非保守内力中仅摩擦力做功,根据系统的功能原理,可解得最终的结果.

**解** 在子弹与物块的撞击过程中,在沿斜面的方向上,根据分动量守恒有

$$m v_0 \cos \alpha = (m' + m) v_1 \quad (1)$$

在物块上滑的过程中,若令物块刚滑出斜面顶端时的速度为  $v_2$ ,并取  $A$  点的重力势能为零.由系统的功能原理可得

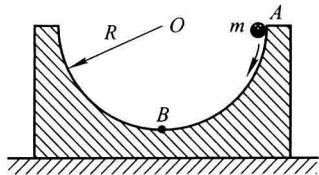
$$\begin{aligned} & -\mu(m+m')g \cos \alpha \frac{h}{\sin \alpha} \\ &= \frac{1}{2}(m+m')v_2^2 + (m+m')gh - \frac{1}{2}(m+m')v_1^2 \end{aligned} \quad (2)$$

由式(1)、(2)可得

$$v_2 = \sqrt{\left(\frac{m}{m'+m}v_0 \cos \alpha\right)^2 - 2gh(\mu \cot \alpha + 1)}$$

**3-38** 如图所示,一个质量为  $m$  的小球,从内壁为半球形的容器边缘点  $A$  滑下.设容器质量为  $m'$ ,半径为  $R$ ,内壁光滑,并放置在摩擦可以忽略的水平桌面上.开始时小球和容器都处于静止状态.当小球沿内壁滑到容器底部的点  $B$  时,受到向上的支持力为多大?

**分析** 由于桌面无摩擦,容器可以在水平桌面上滑动,当小球沿容器内壁下滑时,容器在桌面上也要发生移动.将小球与容器视为系统,该系统在运动过程中沿水平桌面方向不受外力作用,系统在该方向上的动量守恒;若将小球、容器与地球视为系统,因系统无外力作用,而内力中重力是保守力,而支持力不做功,系统的机械能守恒.由两个守恒定律可解得小球和容器在惯性系中的速度.由于相对运动的存在,小球相对容器运动的轨迹是圆,而相对桌面运动的轨迹就不再是圆了,因此,在运用曲线运动中的法向动力学方程求解小球受力时,必须注意参考系的选择.若取容器为参考系(非惯性系),小球在此参考系中的



题 3-38 图

的轨迹仍是容器圆弧,其法向加速度可由此刻的速度(相对于容器速度)求得.在分析小球受力时,除重力和支持力外,还必须计及它所受的惯性力.小球位于容器的底部这一特殊位置时,容器的加速度为零,惯性力也为零.这样,由法向动力学方程求解小球所受的支持力就很容易了.若仍取地面为参考系(惯性系),虽然无需考虑惯性力,但是因小球的轨迹方程比较复杂,其曲率半径及法向加速度难以确定,使求解较为困难.

**解** 根据水平方向动量守恒定律以及小球在下滑过程中机械能守恒定律可分别得

$$mv_m - m'v_{m'} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{1}{2}mv_m^2 + \frac{1}{2}m'v_{m'}^2 = mgR \quad (2)$$

式中  $v_m$ 、 $v_{m'}$  分别表示小球、容器相对桌面的速度.由式(1)、(2)可得小球到达容器底部时小球、容器的速度大小分别为

$$v_m = \sqrt{\frac{2m'gR}{m'+m}}$$

$$v_{m'} = \frac{m}{m'}\sqrt{\frac{2m'gR}{m'+m}}$$

由于小球相对地面运动的轨迹比较复杂,为此,可改为以容器为参考系(非惯性

系).在容器底部时,小球相对容器的运动速度为

$$v'_m = v_m - (-v_{m'}) = v_m + v_{m'} = \sqrt{\left(\frac{m'+m}{m'}\right) 2gR} \quad (3)$$

在容器底部,小球所受惯性力为零,其法向运动方程为

$$F_N - mg = m \frac{v_m'^2}{R} \quad (4)$$

由式(3)、(4)可得小球此时所受到的支持力为

$$F_N = mg \left( 3 + \frac{2m}{m'} \right)$$

**3-39** 打桩机锤的质量为  $m = 10 \text{ t}$ , 将质量为  $m' = 24 \text{ t}$ 、横截面为  $S = 0.25 \text{ m}^2$  (正方形截面)、长达  $l = 38.5 \text{ m}$  的钢筋混凝土桩打入地层, 单位侧面积上受泥土的阻力为  $K = 2.65 \times 10^4 \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}$ . 问: (1) 桩依靠自重能下沉多深? (2) 在桩稳定后, 将锤提升至离桩顶面  $1 \text{ m}$  处让其自由下落击桩, 假定锤与桩发生完全非弹性碰撞, 第一锤能使桩下沉多少? (3) 若桩已下沉  $35 \text{ m}$  时, 锤再一次下落, 此时锤与桩碰撞已不是完全非弹性碰撞了, 锤在击桩后反弹起  $0.05 \text{ m}$ , 这种情况下, 桩又下沉多少?

**分析** (1) 桩依靠自重下沉是利用重力势能的减少来克服摩擦力做功, 可根据功能原理求解. (2) 打桩过程可分为三个阶段. ① 锤自由下落的过程. 在此过程中, 锤与地球系统的势能转化为锤的动能, 满足机械能守恒定律. ② 碰撞的过程. 在这过程中, 由于撞击力远大于重力和泥土的阻力, 锤与桩这一系统满足动量守恒定律. 由于碰撞是完全非弹性的, 碰撞后桩和锤以共同速度运动. ③ 桩下沉的过程. 在这过程中, 桩和锤的动能和系统的势能将用于克服摩擦力做功, 可应用系统的功能原理. 根据以上分析列出相应方程式即可解. (3) 仍为打桩过程. 所不同的是, 在此过程中, 碰撞是非弹性的, 因此, 桩获得的速度还需根据锤反弹的高度求出. 桩下沉时, 仍是以桩的动能和势能减少来克服摩擦力做功的.

**解** (1) 在锤击桩之前, 由于桩的自重而下沉, 这时, 取桩和地球为系统, 根据系统的功能原理, 有

$$m'gh_1 = \int_0^{h_1} 4\sqrt{S}hKdh \quad (1)$$

桩下沉的距离为

$$h_1 = \frac{m'g}{2\sqrt{S}K} = 8.88 \text{ m}$$

(2) 锤从  $1 \text{ m}$  高处落下, 其末速率为  $v_0 = \sqrt{2gh}$ . 由于锤与桩碰撞是完全非弹性的, 锤与桩碰撞后将有共同的速率, 按动量守恒定律, 有

$$mv_0 = (m' + m)v \quad (2)$$

随后桩下沉的过程中,根据系统的功能原理,有

$$\int_{h_1}^{h_1+h_2} -4\sqrt{S}Kh dh = -\frac{1}{2}(m'+m)v^2 - (m'+m)gh_2 \quad (3)$$

由式(2)、(3)可解得桩下沉的距离为

$$h_2 = 0.2 \text{ m}$$

(3) 当桩已下沉 35 m 时,再一次锤桩,由于此时的碰撞是一般非弹性的,锤碰撞后的速率可由上抛运动规律得  $v_1 = \sqrt{2gh'}$ ,再根据动量守恒定律,有

$$mv_0 = -m\sqrt{2gh'} + m'v' \quad (4)$$

随后,桩在下沉过程中,再一次应用系统的功能原理,得

$$\int_0^{h_3} -4K\sqrt{S}(35 \text{ m} + h) dh = -m'gh_3 - \frac{1}{2}m'v'^2 \quad (5)$$

由式(4)、(5)可得桩再一次下沉的距离为

$$h_3 = 0.033 \text{ m}$$

**\* 3-40** 一系统由质量为 3.0 kg、2.0 kg 和 5.0 kg 的三个质点组成,它们在  $Oxy$  平面内运动,其中第一个质点的速度为  $(6.0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1})\mathbf{j}$ ,第二个质点以与  $x$  轴成  $-30^\circ$  角、大小为  $8.0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  的速度运动.如果地面上的观察者测出系统的质心是静止的,那么第三个质点的速度是多少?

**分析** 因质点系的质心是静止的,质心的速度为零,即  $\mathbf{v}_c = \frac{d\mathbf{r}_c}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\sum m_i \mathbf{x}_i}{\sum m_i} \right) =$

0,故有  $\frac{d}{dt} \sum m_i \mathbf{x}_i = \sum m_i \mathbf{v}_i = 0$ ,这是一矢量方程.将质点系中各质点的质量和速度分量代入其分量方程式,即可解得第三质点的速度.

**解** 在质点运动的平面内取满足题意的直角坐标系.按  $\sum m_i \mathbf{v}_i = 0$  的分量式,有

$$m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x} + m_3 v_{3x} = 0$$

$$m_1 v_{1y} + m_2 v_{2y} + m_3 v_{3y} = 0$$

其中  $v_{2x} = v_2 \cos \theta$ ,  $v_{2y} = v_2 \sin \theta$ ,  $\theta = -30^\circ$ ,代入后得

$$v_{3x} = -\frac{m_2}{m_3} v_{2x} = -2.8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}, \quad v_{3y} = \frac{m_1 v_{1y} + m_2 v_{2y}}{m_3} = -2.0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

则  $\mathbf{v}_3 = -(2.8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1})\mathbf{i} - (2.0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1})\mathbf{j}$

**\* 3-41** 如图所示,质量分别为  $m_1 = 10.0 \text{ kg}$  和  $m_2 = 6.0 \text{ kg}$  的 A、B 两小球,用质量可略去不计的刚性细杆连接,开始时它们静止在  $Oxy$  平面上,在受到图示的外力  $\mathbf{F}_1 = (8.0 \text{ N})\mathbf{i}$  和  $\mathbf{F}_2 = (6.0 \text{ N})\mathbf{j}$  作用下运动.试求:(1) 它们质心的坐标与时

间的函数关系；(2)系统总动量与时间的函数关系。

分析 两质点被刚性杆连接构成一整体,其质心坐标可按质心位矢式求出。虽然两力分别作用在杆端不同质点上,但对整体而言,可应用质心运动定律和运动学规律来求解。

解 (1) 选如图所示坐标,则  $t=0$  时,系统质心的坐标为

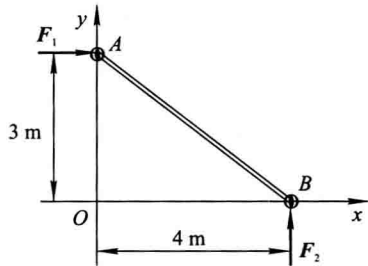
$$x_{c0} = \frac{m_2}{m_1+m_2} x_{20} = 1.5 \text{ m}$$

$$y_{c0} = \frac{m_1}{m_1+m_2} y_{10} = 1.9 \text{ m}$$

对小球与杆整体应用质心运动定律,得

$$F_x = F_1 = (m_1+m_2) \frac{dv_x}{dt} \quad (1)$$

$$F_y = F_2 = (m_1+m_2) \frac{dv_y}{dt} \quad (2)$$



题 3-41 图

根据初始条件  $t=0$  时,  $v=0$ , 分别对式(1)、式(2)积分可得质心速度的分量与时间的函数关系式,有

$$\int_0^t F_1 dt = \int_0^{v_x} (m_1+m_2) dv_x, \quad v_x = \frac{F_1}{m_1+m_2} t \quad (3)$$

$$\int_0^t F_2 dt = \int_0^{v_y} (m_1+m_2) dv_y, \quad v_y = \frac{F_2}{m_1+m_2} t \quad (4)$$

根据初始条件  $t=0$  时,  $x=x_{c0}$ ,  $y=y_{c0}$ , 对式(3)、式(4)再一次积分可得质心坐标与时间的函数关系式,有

$$\int_{x_{c0}}^{x_c} dx_c = \int_0^t \left( \frac{F_1}{m_1+m_2} t \right) dt$$

$$x_c = x_{c0} + \frac{F_1}{2(m_1+m_2)} t^2 = 1.5 + 0.25t^2 \text{ (SI 单位)}$$

及

$$\int_{y_{c0}}^{y_c} dy_c = \int_0^t \left( \frac{F_2}{m_1+m_2} t \right) dt$$

$$y_c = y_{c0} + \frac{F_2}{2(m_1+m_2)} t^2 = 1.9 + 0.19t^2 \text{ (SI 单位)}$$

(2) 利用动量定理并考虑到系统的初始状态为静止,可得系统总动量与时间的函数关系

$$\boldsymbol{p} = \Delta \boldsymbol{p} = \int_0^t (\boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2) dt = (8.0t)\boldsymbol{i} + (6.0t)\boldsymbol{j} \text{ (SI 单位)}$$

## 第四章 刚体转动和流体运动

**4-1** 有两个力作用在一个有固定转轴的刚体上：

- (1) 这两个力都平行于轴作用时,它们对轴的合力矩一定是零;
- (2) 这两个力都垂直于轴作用时,它们对轴的合力矩可能是零;
- (3) 当这两个力的合力为零时,它们对轴的合力矩也一定是零;
- (4) 当这两个力对轴的合力矩为零时,它们的合力也一定是零.

对上述说法,下述判断正确的是( )

- (A) 只有(1)是正确的
- (B) (1)、(2)正确,(3)、(4)错误
- (C) (1)、(2)、(3)都正确,(4)错误
- (D) (1)、(2)、(3)、(4)都正确

**分析与解** 力对轴之力矩通常有三种情况:其中两种情况下力矩为零:一是力的作用线通过转轴,二是力平行于转轴(例如门的重力并不能使门转动).不满足上述情况下的作用力(含题述作用力垂直于转轴的情况)对轴之矩不为零,但同时有两个力作用时,只要满足两力矩大小相等,方向相反,两力矩对同一轴的合外力矩也可以为零,由以上规则可知(1)(2)说法是正确的.对于(3)(4)两种说法,如作用于刚体上的两个力为共点力,当合力为零时,它们对同一轴的合外力矩也一定为零,反之亦然.但如这两个力为非共点力,则以上结论不成立,故(3)(4)说法不完全正确.综上所述,应选(B).

**4-2** 关于力矩有以下几种说法：

- (1) 对某个定轴转动刚体而言,内力矩不会改变刚体的角加速度;
- (2) 一对作用力和反作用力对同一轴的力矩之和必为零;
- (3) 质量相等,形状和大小不同的两个刚体,在相同力矩的作用下,它们的运动状态一定相同.

对上述说法,下述判断正确的是( )

- (A) 只有(2)是正确的
- (B) (1)、(2)是正确的
- (C) (2)、(3)是正确的
- (D) (1)、(2)、(3)都是正确的

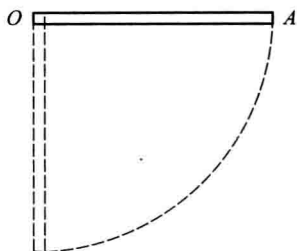
**分析与解** 刚体中相邻质元之间的一对内力属于作用力与反作用力,且作用点相同,故对同一轴的力矩之和必为零,因此可推知刚体中所有内力矩之和为零,因而不会影响刚体的角加速度或角动量等,故(1)(2)说法正确.对说法(3)来说,题述情况中两个刚体对同一轴的转动惯量因形状、大小不同有可能不同,因而在相同力矩作用下,产生的角加速度不一定相同,因而运动状态未必相同,由此可见应选(B).

**4-3** 均匀细棒  $OA$  可绕通过其一端  $O$  而与棒垂直的水平固定光滑轴转动,

如图所示.今使棒从水平位置由静止开始自由下落,在棒摆到竖直位置的过程中,下述说法正确的是( )

- (A) 角速度从小到大,角加速度不变
- (B) 角速度从小到大,角加速度从小到大
- (C) 角速度从小到大,角加速度从大到小
- (D) 角速度不变,角加速度为零

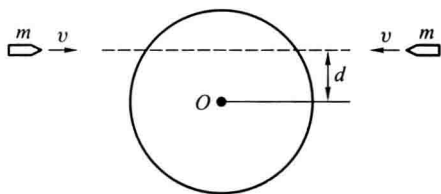
**分析与解** 如图所示,在棒下落过程中,重力对轴之矩是变化的,其大小与棒和水平面的夹角有关.当棒处于水平位置,重力矩最大,当棒处于竖直位置时,重力矩为零.因此在棒在下落过程中重力矩由大到小,由转动定律知,棒的角加速亦由大到小,而棒的角速度却由小到大(由机械能守恒亦可判断角速度变化情况),应选(C).



题 4-3 图

**4-4** 一圆盘绕通过盘心且垂直于盘面的水平轴转动,轴承间摩擦不计.如图所示射来两个质量相同、速度大小相同、方向相反并在一条直线上的子弹,它们同时射入圆盘并且留在盘内,在子弹射入后的瞬间,对于圆盘和子弹系统的角动量  $L$  以及圆盘的角速度  $\omega$  则有( )

- (A)  $L$  不变,  $\omega$  增大
- (B) 两者均不变
- (C)  $L$  不变,  $\omega$  减小
- (D) 两者均不确定



题 4-4 图

**分析与解** 对于圆盘-子弹系统来说,并无外力矩作用,故系统对轴  $O$  的角动量守恒,故  $L$  不变,此时应有下式成立,即

$$mvd - mvd + J_0\omega_0 = J\omega$$

式中  $mvd$  为子弹对点  $O$  的角动量,  $\omega_0$  为圆盘初始角速度,  $J$  为子弹留在盘中后系统对轴  $O$  的转动惯量,  $J_0$  为子弹射入前盘对轴  $O$  的转动惯量. 由于  $J > J_0$ , 则  $\omega < \omega_0$ . 故选(C).

**4-5** 假设卫星环绕地球中心作椭圆运动,则在运动过程中,卫星对地球中心的( )

- (A) 角动量守恒,动能守恒
- (B) 角动量守恒,机械能守恒
- (C) 角动量不守恒,机械能守恒
- (D) 角动量不守恒,动量也不守恒

(E) 角动量守恒, 动量也守恒

**分析与解** 由于卫星一直受到万有引力作用, 故其动量不可能守恒, 但由于万有引力一直指向地球中心, 则万有引力对地球中心的力矩为零, 故卫星对地球中心的角动量守恒, 即  $\mathbf{r} \times m\mathbf{v} = \text{常量}$ , 式中  $\mathbf{r}$  为地球中心指向卫星的位矢. 当卫星处于椭圆轨道上不同位置时, 由于  $|\mathbf{r}|$  不同, 由角动量守恒知卫星速率不同, 其中当卫星处于近地点时速率最大, 处于远地点时速率最小, 故卫星动能并不守恒, 但由万有引力为保守力, 则卫星的机械能守恒, 即卫星动能与万有引力势能之和维持不变, 由此可见, 应选 (B).

**4-6** 一汽车发动机曲轴的转速在 12 s 内由  $1.2 \times 10^3 \text{ r} \cdot \text{min}^{-1}$  均匀地增加到  $2.7 \times 10^3 \text{ r} \cdot \text{min}^{-1}$ . (1) 求曲轴转动的角加速度; (2) 在此时间内, 曲轴转了多少圈?

**分析** 这是刚体的运动学问题. 刚体定轴转动的运动学规律与质点的运动学规律有类似的关系, 本题为匀变速转动.

**解** (1) 由于角速度  $\omega = 2\pi n$  ( $n$  为单位时间内的转数), 根据角加速度的定义  $\alpha = \frac{d\omega}{dt}$ , 在匀变速转动中角加速度为

$$\alpha = \frac{\omega - \omega_0}{t} = \frac{2\pi(n - n_0)}{t} = 13.1 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-2}$$

(2) 发动机曲轴转过的角度为

$$\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2 = \frac{\omega + \omega_0}{2} t = \pi(n + n_0)t$$

在 12 s 内曲轴转过的圈数为

$$N = \frac{\theta}{2\pi} = \frac{n + n_0}{2} t = 390 \text{ 圈}$$

**4-7** 某种电动机启动后转动角速度随时间变化的关系为  $\omega = \omega_0(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$ , 式中  $\omega_0 = 9.0 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ ,  $\tau = 2.0 \text{ s}$ . 求: (1)  $t = 6.0 \text{ s}$  时的转速; (2) 角加速度随时间变化的规律; (3) 启动后 6.0 s 内转过的圈数.

**分析** 与质点运动学相似, 刚体定轴转动的运动学问题也可分为两类: (1) 由转动的运动方程, 通过求导得到角速度、角加速度; (2) 在确定的初始条件下, 由角速度、角加速度通过积分得到转动的运动方程. 本题由  $\omega = \omega(t)$  出发, 分别通过求导和积分得到电动机的角加速度和 6.0 s 内转过的圈数.

**解** (1) 根据题意中转速随时间的变化关系, 将  $t = 6.0 \text{ s}$  代入, 即得

$$\omega = \omega_0(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) = 0.95\omega_0 = 8.6 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

(2) 角速度随时间变化的规律为

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{\omega_0}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} = 4.5e^{-\frac{t}{\tau}} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-2}$$



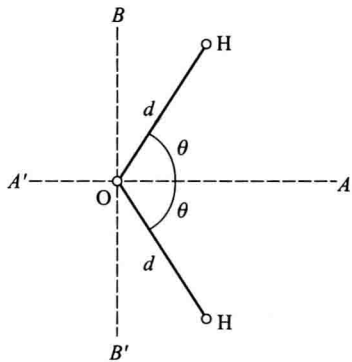
(3)  $t=6.0\text{ s}$  时转过的角度为

$$\theta = \int_0^{6.0\text{ s}} \omega dt = \int_0^{6.0\text{ s}} \omega_0(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) dt = 36.9\text{ rad}$$

则  $t=6.0\text{ s}$  时电动机转过的圈数为

$$N = \theta/2\pi = 5.87\text{ (圈)}$$

**4-8** 水分子的形状如图所示. 从光谱分析知水分子对  $AA'$  轴的转动惯量  $J_{AA'} = 1.93 \times 10^{-47}\text{ kg} \cdot \text{m}^2$ , 对  $BB'$  轴转动惯量  $J_{BB'} = 1.14 \times 10^{-47}\text{ kg} \cdot \text{m}^2$ . 试由此数据和各原子质量求出氢和氧原子间的距离  $d$  和夹角  $\theta$ . 假设各原子都可视为质点.



题 4-8 图

**分析** 如将原子视为质点, 则水分子中的氧原子对  $AA'$  轴和  $BB'$  轴的转动惯量均为零, 因此计算水分子对两个轴的转动惯量时, 只需考虑氢原子即可.

**解** 由图可得

$$J_{AA'} = 2m_{\text{H}}d^2 \sin^2 \theta$$

$$J_{BB'} = 2m_{\text{H}}d^2 \cos^2 \theta$$

此二式相加, 可得

$$J_{AA'} + J_{BB'} = 2m_{\text{H}}d^2$$

则

$$d = \sqrt{\frac{J_{AA'} + J_{BB'}}{2m_{\text{H}}}} = 9.59 \times 10^{-11}\text{ m}$$

由二式相比, 可得

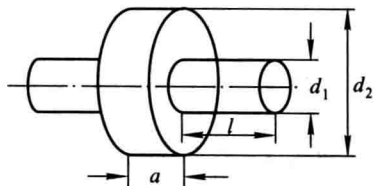
$$J_{AA'}/J_{BB'} = \tan^2 \theta$$

则

$$\theta = \arctan \sqrt{\frac{J_{AA'}}{J_{BB'}}} = \arctan \sqrt{\frac{1.93}{1.14}} = 52.3^\circ$$

**4-9** 一飞轮由一直径为  $30\text{ cm}$ , 厚度为  $2.0\text{ cm}$  的圆盘和两个直径都为  $10\text{ cm}$ , 长为  $8.0\text{ cm}$  的共轴圆柱体组成, 设飞轮的密度为  $7.8 \times 10^3\text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ , 求飞轮对轴的转动惯量.

**分析** 如图所示, 根据转动惯量的可叠加性, 飞轮对轴的转动惯量可视为圆盘与两圆柱体对同轴的转动惯量之和; 而匀质圆盘、圆柱体对轴的转动惯量的计算可查书中公式, 或根据转动惯量的定义, 用简单的积分计算得到.



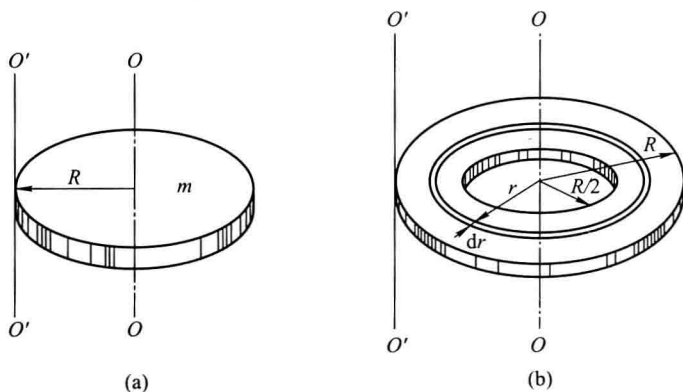
题 4-9 图

**解** 根据转动惯量的叠加性,由匀质圆盘、圆柱体对轴的转动惯量公式可得

$$\begin{aligned} J &= J_1 + J_2 = 2 \times \frac{1}{2} m_1 \left( \frac{d_1}{2} \right)^2 + \frac{1}{2} m_2 \left( \frac{d_2}{2} \right)^2 \\ &= \frac{1}{16} \pi \rho \left( l d_1^4 + \frac{1}{2} a d_2^4 \right) = 0.136 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \end{aligned}$$

**4-10** 如图(a)所示,圆盘的质量为 $m$ ,半径为 $R$ .求:(1)以 $O$ 为中心,将半径为 $R/2$ 的部分挖去,剩余部分对 $OO$ 轴的转动惯量;(2)剩余部分对 $O'O'$ 轴(即通过圆盘边缘且平行于盘中心轴)的转动惯量.

**分析** 由于转动惯量的可加性,求解第一问可有两种方法:一是由定义式 $J = \int r^2 dm$ 计算,式中 $dm$ 可取半径为 $r$ 、宽度为 $dr$ 窄圆环;二是用补偿法可将剩余部分的转动惯量看成是原大圆盘和挖去的小圆盘对同一轴的转动惯量的差值.至于第二问需用到平行轴定理.



题 4-10 图

**解** 挖去后的圆盘如图(b)所示.

(1) **解 1** 由分析知

$$\begin{aligned} J_0 &= \int r^2 dm = \int_{R/2}^R r^2 \frac{m}{\pi R^2} \cdot 2\pi r dr \\ &= \frac{2m}{R^2} \int_{R/2}^R r^3 dr = \frac{15}{32} mR^2 \end{aligned}$$

**解 2** 整个圆盘对 $OO$ 轴转动惯量为 $J_1 = \frac{1}{2} mR^2$ ,挖去的小圆盘对 $OO$ 轴转动惯量 $J_2 = \frac{1}{2} \left[ \frac{m}{\pi R^2} \pi \left( \frac{R}{2} \right)^2 \right] \left( \frac{R}{2} \right)^2 = \frac{1}{32} mR^2$ ,由分析知,剩余部分对 $OO$ 轴的转动惯量为

$$J_0 = J_1 - J_2 = \frac{15}{32}mR^2$$

(2) 由平行轴定理, 剩余部分对  $O'O'$  轴的转动惯量为

$$J_{O'} = \frac{15}{32}mR^2 + \left[ m - \frac{m}{\pi R^2} \cdot \pi \left( \frac{R}{2} \right)^2 \right] R^2 = \frac{39}{32}mR^2$$

**4-11** 一燃气轮机在试车时, 燃气作用在涡轮上的力矩为  $2.03 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{m}$ , 涡轮的转动惯量为  $25.0 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ . 当轮的转速由  $2.80 \times 10^3 \text{ r} \cdot \text{min}^{-1}$  增大到  $1.12 \times 10^4 \text{ r} \cdot \text{min}^{-1}$  时, 所经历的时间  $t$  为多少?

**分析** 由于作用在飞轮上的力矩是恒力矩, 因此, 根据转动定律可知, 飞轮的角加速度是一恒量; 又由匀变速转动中角加速度与时间的关系, 可解出飞轮所经历的时间. 该题还可应用角动量定理直接求解.

**解 1** 在匀变速转动中, 角加速度  $\alpha = \frac{\omega - \omega_0}{t}$ , 由转动定律  $M = J\alpha$ , 可得飞轮所经历的时间

$$t = \frac{\omega - \omega_0}{M} J = \frac{2\pi J}{M} (n - n_0) = 10.8 \text{ s}$$

**解 2** 飞轮在恒外力矩作用下, 根据角动量定理, 有

$$\int_0^t M dt = J(\omega - \omega_0)$$

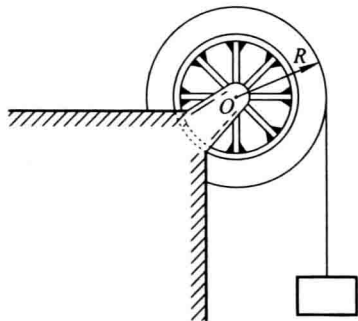
则

$$t = \frac{\omega - \omega_0}{M} J = \frac{2\pi J}{M} (n - n_0) = 10.8 \text{ s}$$

**4-12** 用落体观察法测定飞轮的转动惯量, 是将半径为  $R$  的飞轮支承在  $O$  点上, 然后在绕过飞轮的绳子的一端挂一质量为  $m$  的重物, 令重物以初速度为零开始下落, 带动飞轮转动, 如图所示. 记下重物下落的距离和时间, 就可算出飞轮的转动惯量. 试写出它的计算式. (假设轴承间无摩擦.)

**分析** 在运动过程中, 飞轮和重物的运动形式是不同的. 飞轮作定轴转动, 而重物是作落体运动, 它们之间有着内在的联系. 由于绳子不可伸长, 并且质量可以忽略. 这样, 飞轮的转动惯量, 就可根据转动定律和牛顿定律联合来确定, 其中重物的加速度, 可通过它下落时的匀加速运动规律来确定.

该题也可用功能关系来处理. 将飞轮、重物和地球视为系统, 绳子张力作用于飞轮、重物的功之和为零, 系统的机械能守恒. 利用匀加速运动的路程、速度和加速度关系, 以



题 4-12 图

及线速度和角速度的关系,代入机械能守恒方程中即可解得.

**解 1** 设绳子的拉力为  $F_T$ ,对飞轮而言,根据转动定律,有

$$F_T R = J\alpha \quad (1)$$

而对重物而言,由牛顿定律,有

$$mg - F_T = ma \quad (2)$$

由于绳子不可伸长,因此,有

$$a = R\alpha \quad (3)$$

重物作匀加速下落,则有

$$h = \frac{1}{2}at^2 \quad (4)$$

由上述各式可解得飞轮的转动惯量为

$$J = mR^2 \left( \frac{gt^2}{2h} - 1 \right)$$

**解 2** 根据系统的机械能守恒定律,有

$$-mgh + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\omega^2 = 0 \quad (1')$$

而线速度和角速度的关系为

$$v = R\omega \quad (2')$$

又根据重物作匀加速运动时,有

$$v = at \quad (3')$$

$$v^2 = 2ah \quad (4')$$

由上述各式可得

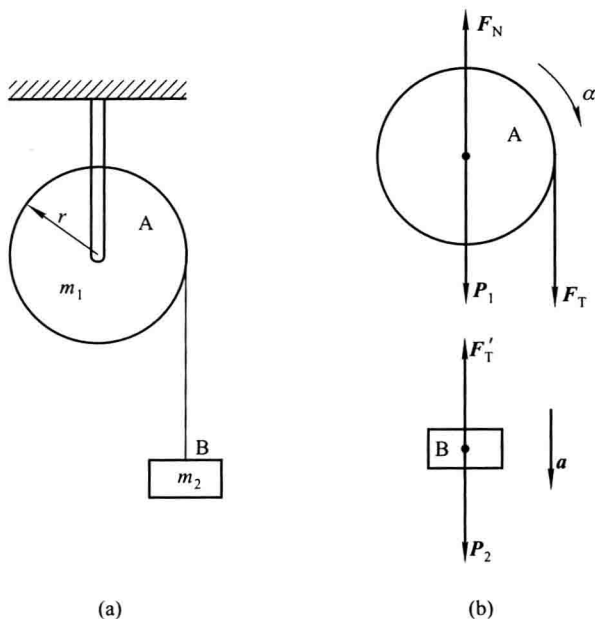
$$J = mR^2 \left( \frac{gt^2}{2h} - 1 \right)$$

若轴承处存在摩擦,上述测量转动惯量的方法仍可采用.这时,只需通过用两个不同质量的重物作两次测量即可消除摩擦力矩带来的影响.

**4-13** 如图(a)所示,质量  $m_1 = 16 \text{ kg}$  的实心圆柱体 A,其半径为  $r = 15 \text{ cm}$ ,可以绕其固定水平轴转动,阻力忽略不计.一条轻的柔绳绕在圆柱体上,其另一端系一个质量  $m_2 = 8.0 \text{ kg}$  的物体 B,求:(1) 物体 B 由静止开始下降  $1.0 \text{ s}$  后的距离;(2) 绳的张力.

**分析** 该系统的运动包含圆柱体的转动和悬挂物的下落运动(平动).两种不同的运动形式应依据不同的动力学方程去求解,但是,两物体的运动由柔绳相联系,它们运动量之间的联系可由角量与线量的关系得到.

**解** (1) 分别作两物体的受力分析,如图(b)所示.对实心圆柱体而言,由转动定律得



题 4-13 图

$$F_T r = J\alpha = \frac{1}{2}m_1 r^2 \alpha \quad (1)$$

对悬挂物体而言,依据牛顿定律,有

$$P_2 - F'_T = m_2 g - F'_T = m_2 a \quad (2)$$

且  $F_T = F'_T$ . 又由角量与线量之间的关系,得

$$a = r\alpha \quad (3)$$

解上述方程组,可得物体下落的加速度

$$a = \frac{2m_2 g}{m_1 + 2m_2}$$

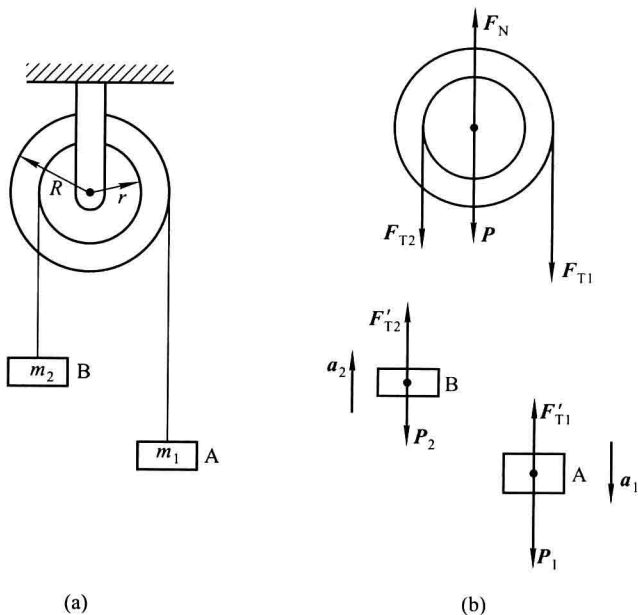
在  $t = 1.0 \text{ s}$  时, B 下落的距离为

$$s = \frac{1}{2}at^2 = \frac{m_2 g t^2}{m_1 + 2m_2} = 2.45 \text{ m}$$

(2) 由式(2)可得绳中的张力为

$$F_T = m_2(g - a) = \frac{m_1 m_2}{m_1 + 2m_2} g = 39.2 \text{ N}$$

**4-14** 质量为  $m_1$  和  $m_2$  的两物体 A、B 分别悬挂在如图(a)所示的组合轮两端. 设两轮的半径分别为  $R$  和  $r$ , 两轮的转动惯量分别为  $J_1$  和  $J_2$ , 轮与轴承间、绳索与轮间的摩擦力均略去不计, 绳的质量也略去不计. 试求两物体的加速度和绳的张力.



题 4-14 图

**分析** 由于组合轮是一整体,它的转动惯量是两轮转动惯量之和,它所受的力矩是两绳索张力矩的矢量和(注意两力矩的方向不同).对平动的物体和转动的组合轮分别列出动力学方程,结合角加速度和线加速度之间的关系即可解得.

**解** 分别对两物体及组合轮作受力分析,如图(b)所示.根据质点的牛顿定律和刚体的转动定律,有

$$P_1 - F'_{T1} = m_1 g - F'_{T1} = m_1 a_1 \quad (1)$$

$$F'_{T2} - P_2 = F'_{T2} - m_2 g = m_2 a_2 \quad (2)$$

$$(F_{T1} R - F_{T2} r) = (J_1 + J_2) \alpha \quad (3)$$

$$F'_{T1} = F_{T1}, \quad F'_{T2} = F_{T2} \quad (4)$$

由角加速度和线加速度之间的关系,有

$$a_1 = R\alpha \quad (5)$$

$$a_2 = r\alpha \quad (6)$$

解上述方程组,可得

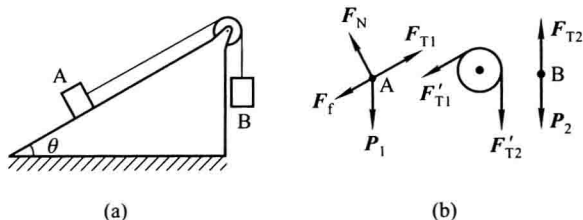
$$a_1 = \frac{m_1 R - m_2 r}{J_1 + J_2 + m_1 R^2 + m_2 r^2} g R$$

$$a_2 = \frac{m_1 R - m_2 r}{J_1 + J_2 + m_1 R^2 + m_2 r^2} g r$$

$$F_{T1} = \frac{J_1 + J_2 + m_2 r^2 + m_2 R r}{J_1 + J_2 + m_1 R^2 + m_2 r^2} m_1 g$$

$$F_{T2} = \frac{J_1 + J_2 + m_1 R^2 + m_1 Rr}{J_1 + J_2 + m_1 R^2 + m_2 r^2} m_2 g$$

**4-15** 如图(a)所示装置,定滑轮的半径为  $r$ ,绕转轴的转动惯量为  $J$ ,滑轮两边分别悬挂质量为  $m_1$  和  $m_2$  的物体 A、B. A 置于倾角为  $\theta$  的斜面上,它和斜面间的摩擦因数为  $\mu$ ,若 B 向下作加速运动,求:(1) 其下落的加速度大小;(2) 滑轮两边绳子的张力.(设绳的质量及伸长均不计,绳与滑轮间无滑动,滑轮轴光滑.)



题 4-15 图

**分析** 这是连接体的动力学问题,对于这类问题仍采用隔离体的方法,从受力分析着手,然后列出各物体在不同运动形式下的动力学方程.物体 A 和 B 可视为质点,则运用牛顿定律.由于绳与滑轮间无滑动,滑轮两边绳中的张力是不同的,滑轮在力矩作用下产生定轴转动,因此,对滑轮必须运用刚体的定轴转动定律.列出动力学方程,并考虑到角量与线量之间的关系,即能解出结果来.

**解** 作 A、B 和滑轮的受力分析,如图(b)所示.其中 A 是在张力  $F_{T1}$ 、重力  $P_1$ 、支持力  $F_N$  和摩擦力  $F_f$  的作用下运动,根据牛顿定律,沿斜面方向有

$$F_{T1} - m_1 g \sin \theta - \mu m_1 g \cos \theta = m_1 a_1 \quad (1)$$

而 B 则是在张力  $F_{T2}$  和重力  $P_2$  的作用下运动,有

$$m_2 g - F_{T2} = m_2 a_2 \quad (2)$$

由于绳子不能伸长、绳与轮之间无滑动,则有

$$a_1 = a_2 = r\alpha \quad (3)$$

对滑轮而言,根据定轴转动定律有

$$F'_{T2} r - F'_{T1} r = J\alpha \quad (4)$$

且有

$$F_{T1} = F'_{T1}, \quad F_{T2} = F'_{T2} \quad (5)$$

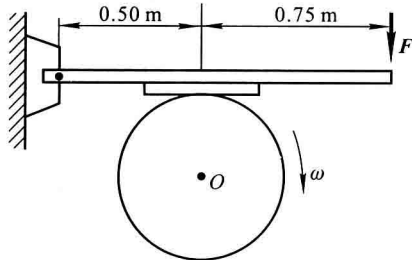
解上述各方程可得

$$a_1 = a_2 = \frac{m_2 g - m_1 g \sin \theta - \mu m_1 g \cos \theta}{m_1 + m_2 + J/r^2}$$

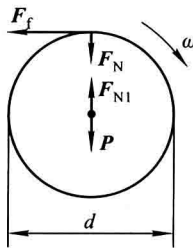
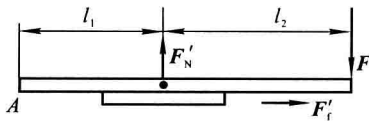
$$F_{T1} = \frac{m_1 m_2 g (1 + \sin \theta + \mu \cos \theta) + (\sin \theta + \mu \cos \theta) m_1 g J/r^2}{m_1 + m_2 + J/r^2}$$

$$F_{T2} = \frac{m_1 m_2 g (1 + \sin \theta + \mu \cos \theta) + m_2 g J / r^2}{m_1 + m_2 + J / r^2}$$

**4-16** 如图(a)所示,飞轮的质量为 60 kg,直径为 0.50 m,转速为  $1.0 \times 10^3 \text{ r} \cdot \text{min}^{-1}$ .现用闸瓦制动使其在 5.0 s 内停止转动,求制动力  $F$ .设闸瓦与飞轮之间的摩擦因数  $\mu = 0.40$ ,飞轮的质量全分布在轮缘上.



(a)



(b)

题 4-16 图

**分析** 飞轮的制动是闸瓦对它的摩擦力矩作用的结果,因此,由飞轮的转动规律可确定制动时所需的摩擦力矩.但是,摩擦力矩的产生与大小,是由闸瓦与飞轮之间的正压力  $F_N$  决定的,而此力又是由制动力  $F$  通过杠杆作用来实现的.所以,制动力可以通过杠杆的力矩平衡来求出.

**解** 飞轮和闸杆的受力分析,如图(b)所示.根据闸杆的力矩平衡,有

$$F(l_1 + l_2) - F'_N l_1 = 0$$

而  $F_N = F'_N$ ,则闸瓦作用于轮的摩擦力矩为



$$M = F_t \frac{d}{2} = \frac{1}{2} F_N \mu d = \frac{l_1 + l_2}{2l_1} F \mu d \quad (1)$$

摩擦力矩是恒力矩, 飞轮作匀角加速转动, 由转动的运动规律, 有

$$\alpha = \left| \frac{\omega - \omega_0}{t} \right| = \frac{\omega_0}{t} = \frac{2\pi n}{t} \quad (2)$$

因飞轮的质量集中于轮缘, 它绕轴的转动惯量  $J = md^2/4$ , 根据转动定律  $M = J\alpha$ , 由式(1)、(2)可得制动力

$$F = \frac{\pi n m d l_1}{\mu (l_1 + l_2) t} = 3.14 \times 10^2 \text{ N}$$

**4-17** 一半径为  $R$ 、质量为  $m$  的匀质圆盘, 以角速度  $\omega$  绕其中心轴转动, 现将它平放在一水平板上, 盘与板表面的摩擦因数为  $\mu$ . (1) 求圆盘所受的摩擦力矩; (2) 问经多少时间后, 圆盘才能停止转动?

**分析** 转动圆盘在平板上能逐渐停止下来是由于平板对其摩擦力矩作用的结果. 由于圆盘各部分所受的摩擦力的力臂不同, 总的摩擦力矩应是各部分摩擦力矩的积分. 为此, 可考虑将圆盘分割成许多同心圆环, 取半径为  $r$ 、宽为  $dr$  的圆环为面元, 环所受摩擦力  $dF_t = 2\pi r \mu mg dr / \pi R^2$ , 其方向均与环的半径垂直, 因此, 该圆环的摩擦力矩  $dM = r \times dF_t$ , 其方向沿转动轴, 则圆盘所受的总摩擦力矩  $M = \int dM$ . 这样, 总的摩擦力矩的计算就可通过积分来完成. 由于摩擦力矩是恒力矩, 则由角动量定理  $M\Delta t = \Delta(J\omega)$ , 可求得圆盘停止前所经历的时间  $\Delta t$ . 当然也可由转动定律求解.

**解** (1) 由分析可知, 圆盘上半径为  $r$ 、宽度为  $dr$  的同心圆环所受的摩擦力矩为

$$dM = r \times dF_t = -(2r^2 \mu mg dr / R^2) k$$

式中  $k$  为轴向的单位矢量. 圆盘所受的总摩擦力矩大小为

$$M = \int dM = \int_0^R \frac{2r^2 \mu mg}{R^2} dr = \frac{2}{3} \mu mg R$$

(2) 由于摩擦力矩是一恒力矩, 圆盘的转动惯量  $J = mR^2/2$ . 由角动量定理  $M\Delta t = \Delta(J\omega)$ , 可得圆盘停止的时间为

$$\Delta t = \frac{J\omega}{M} = \frac{3\omega R}{4\mu g}$$

**4-18** 如图所示, 一通风机的转动部分以初角速度  $\omega_0$  绕其轴转动, 空气的阻力矩与角速度成正比, 比例系数  $c$  为一常量. 若转动部分对其轴的转动惯量为  $J$ , 问: (1) 经过多少时间后其转动角速度减少为初角速度的一半? (2) 在此时间内共转过多少圈?

**分析** 由于空气的阻力矩与角速度成正比,由转动定律可知,在变力矩作用下,通风机叶片的转动是变角加速转动,因此,在讨论转动的运动学关系时,必须从角加速度和角速度的定义出发,通过积分的方法去解.

**解** (1) 通风机叶片所受的阻力矩为  $M = -c\omega$ , 由转动定律  $M = J\alpha$ , 可得叶片的角加速度为

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = -\frac{c\omega}{J} \quad (1)$$

根据初始条件对式(1)积分,有

$$\int_{\omega_0}^{\omega} \frac{d\omega}{\omega} = \int_0^t -\frac{c}{J} dt$$

由于  $c$  和  $J$  均为常量,得

$$\omega = \omega_0 e^{-\frac{c}{J}t} \quad (2)$$

当角速度由  $\omega_0 \rightarrow \frac{1}{2}\omega_0$  时,转动所需的时间为

$$t = \frac{J}{c} \ln 2$$

(2) 根据初始条件对式(2)积分,有

$$\int_0^{\theta} d\theta = \int_0^t \omega_0 e^{-\frac{c}{J}t} dt$$

即

$$\theta = \frac{J\omega_0}{2c}$$

在时间  $t$  内所转过的圈数为

$$N = \frac{\theta}{2\pi} = \frac{J\omega_0}{4\pi c}$$

**4-19** 如果质点在  $\mathbf{r} = (-3.5\mathbf{i} + 1.4\mathbf{j}) \text{ m}$  的位置时的速度为  $\mathbf{v} = (-2.5\mathbf{i} - 6.3\mathbf{j}) \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ , 求此质点对坐标原点的角动量. 已知质点的质量为  $4.1 \text{ kg}$ .

**分析** 本题可按角动量矢量的定义式直接计算. 如矢量  $\mathbf{r}$  和  $\mathbf{v}$  分别用坐标法表达, 两矢量叉乘时可按乘法分配律展开. 其间注意以下规律:  $\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \times \mathbf{j} = 0$ ,  $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$ ,  $\mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k}$ .

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_O &= \mathbf{r} \times \mathbf{p} = m(\mathbf{x}\mathbf{i} + \mathbf{y}\mathbf{j}) \times (\mathbf{v}_x\mathbf{i} + \mathbf{v}_y\mathbf{j}) \\ &= m(x\mathbf{v}_y\mathbf{i} \times \mathbf{j} + \mathbf{y}\mathbf{v}_x\mathbf{j} \times \mathbf{i}) \\ &= m(x\mathbf{v}_y - \mathbf{y}\mathbf{v}_x)\mathbf{k} \end{aligned}$$

由题给条件将  $m$  和各分量值代入, 得

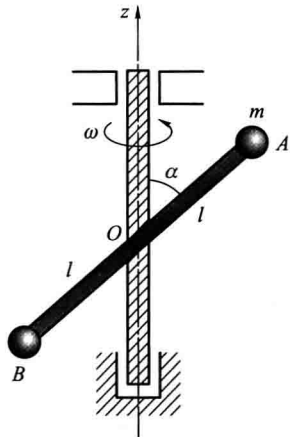
$$\mathbf{L}_O = 105\mathbf{k} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$$



题 4-18 图

结果表明:角动量矢量沿  $z$  轴正向,按右手螺旋定则,质点在  $Oxy$  平面作逆时针运动(从上往下俯视).

**4-20** 如图所示,一长为  $2l$  的细棒  $AB$ ,其质量不计,它的两端牢固地连接着质量各为  $m$  的小球,棒的中点  $O$  焊接在竖直轴  $z$  上,并且棒与  $z$  轴成  $\alpha$  角.若棒在外力作用下绕  $z$  轴(正向为竖直向上)以角直速度  $\omega = \omega_0(1 - e^{-t})$  转动,其中  $\omega_0$  为常量,求:(1) 棒与两球构成的系统在时刻  $t$  对  $z$  轴的角动量;(2) 在  $t=0$  时刻系统所受外力对  $z$  轴的合外力矩.



题 4-20 图

**分析** 由于棒的质量不计,该系统对  $z$  轴的角动量即为两小球对  $z$  轴的角动量之和,首先可求出系统对  $z$  轴的转动惯量(若考虑棒的质量,其转动惯量为多少,读者可自己想一想),系统所受合外力矩既可以运用角动量定理,也可用转动定律来求解.相比之下,前者对本题更直接.

**解** (1) 两小球对  $z$  轴的转动惯量为  $J = 2mr^2 = 2m(l\sin\alpha)^2$ ,则系统对  $z$  轴的角动量为

$$L = J\omega = 2ml^2\omega_0(1 - e^{-t})\sin^2\alpha$$

此处也可先求出每个小球对  $z$  轴的角动量后再求和.

(2) 由角动量定理得

$$\begin{aligned} M &= \frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt} [2ml^2\omega_0(1 - e^{-t})\sin^2\alpha] \\ &= 2ml^2\omega_0\sin^2\alpha e^{-t} \end{aligned}$$

$t=0$  时,合外力矩为

$$M = 2ml^2\omega_0\sin^2\alpha$$

此处也可先求解系统绕  $z$  轴的角加速度表达式,即  $\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \omega_0 e^{-t}$ ,再由  $M = J\alpha$  求得  $M$ .

**4-21** 一质量为  $m'$ 、半径为  $R$  的均匀圆盘,绕通过其中心且与盘面垂直的水平轴以角速度  $\omega$  转动,若在某时刻,一质量为  $m$  的小碎块从盘边缘裂开,且恰好沿竖直方向上抛,问它可能达到的高度是多少? 破裂后圆盘的角动量为多大?

**分析** 盘边缘裂开时,小碎块以原有的切向速度作上抛运动,由质点运动学规律可求得上抛的最大高度.此外,在碎块与盘分离的过程中,满足角动量守恒条件,由角动量守恒定律可计算破裂后盘的角动量.

解 (1) 碎块抛出时的初速度为

$$v_0 = \omega R$$

由于碎块作竖直上抛运动,它所能到达的高度为

$$h = \frac{v_0^2}{2g} = \frac{\omega^2 R^2}{2g}$$

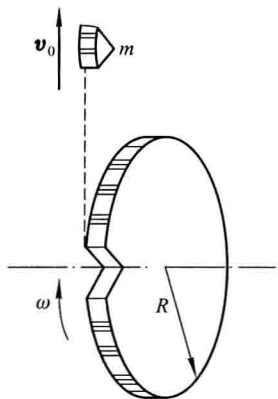
(2) 圆盘在裂开的过程中,其角动量守恒,故有

$$L = L_0 - L'$$

式中  $L_0 = \frac{1}{2} m' R^2 \omega$  为圆盘未碎时的角动量;  $L' = m R^2 \omega$

为碎块被视为质点时,碎块对轴的角动量;  $L$  为破裂后盘的角动量. 则

$$L = \left( \frac{1}{2} m' - m \right) R^2 \omega$$



题 4-21 图

4-22 在光滑的水平面上有一木杆,其质量  $m_1 = 1.0 \text{ kg}$ ,长  $l = 40 \text{ cm}$ ,可绕通过其中点并与之垂直的轴转动.一质量为  $m_2 = 10 \text{ g}$  的子弹,以  $v = 2.0 \times 10^2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  的速度射入杆端,其方向与杆及轴正交.若子弹陷入杆中,试求所得到的角速度.

分析 子弹与杆相互作用的瞬间,可将子弹视为绕轴的转动.这样,子弹射入杆前的角速度可表示为  $\omega$ ,子弹陷入杆后,它们将一起以角速度  $\omega'$  转动.若将子弹和杆视为系统,因系统不受外力矩作用,故系统的角动量守恒.由角动量守恒定律可解得杆的角速度.

解 根据角动量守恒定律

$$J_2 \omega = (J_1 + J_2) \omega'$$

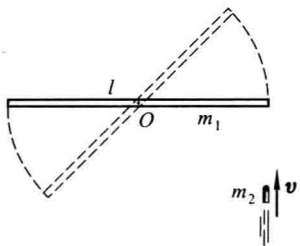
式中  $J_2 = m_2 (l/2)^2$  为子弹绕轴的转动惯量,  $J_2 \omega$  为子弹

在陷入杆前的角动量,  $\omega = 2v/l$  为子弹在此刻绕轴的角速度,  $J_1 = m_1 l^2/12$  为杆绕轴的转动惯量.可得杆的角速度为

$$\omega' = \frac{J_2 \omega}{J_1 + J_2} = \frac{6 m_2 v}{(m_1 + 3 m_2) l} = 29.1 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

4-23 半径分别为  $r_1$ 、 $r_2$  的两个薄伞形轮,它们各自对通过盘心且垂直盘面转轴的转动惯量为  $J_1$  和  $J_2$ .开始时轮 I 以角速度  $\omega_0$  转动,问与轮 II 成正交啮合后(如图所示),两轮的角速度分别为多大?

分析 两伞形轮在啮合过程中存在着相互作用力,这对力分别作用在两轮上,并各自产生不同方向的力矩,对转动的轮 I 而言是阻力矩,而对原静止的轮 II 则是启动力矩.由于相互作用的时间很短,虽然作用力的位置知道,但作用力大小无法得知,因此,力矩是未知的.但是,其作用的效果可从轮的转动状态的变



题 4-22 图

化来分析.对两轮分别应用角动量定理,并考虑到啮合后它们有相同的线速度,这样,啮合后它们各自的角速度就能求出.

**解** 设相互作用力为  $F$ ,在啮合的短时间  $\Delta t$  内,根据角动量定理,对轮 I、轮 II 分别有

$$-Fr_1\Delta t = J_1(\omega_1 - \omega_0) \quad (1)$$

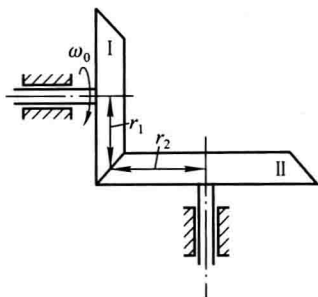
$$Fr_2\Delta t = J_2\omega_2 \quad (2)$$

两轮啮合后应有相同的线速度,故有

$$r_1\omega_1 = r_2\omega_2 \quad (3)$$

由上述各式可解得啮合后两轮的角速度分别为

$$\omega_1 = \frac{J_1\omega_0 r_2^2}{J_1 r_2^2 + J_2 r_1^2}, \quad \omega_2 = \frac{J_1\omega_0 r_1 r_2}{J_1 r_2^2 + J_2 r_1^2}$$



题 4-23 图

**4-24** 一质量为  $20.0 \text{ kg}$  的小孩,站在一半径为  $3.00 \text{ m}$ 、转动惯量为  $450 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$  的静止水平转台边缘上,此转台可绕通过转台中心的竖直轴转动,转台与轴间的摩擦不计.如果此小孩相对转台以  $1.00 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  的速率沿转台边缘行走,问转台的角速率有多大?

**分析** 小孩与转台作为一定轴转动系统,人与转台之间的相互作用力为内力,沿竖直轴方向不受外力矩作用,故系统的角动量守恒.在应用角动量守恒时,必须注意人和转台的角速度  $\omega$ 、 $\omega_0$  都是相对于地面而言的,而人相对于转台的角速度  $\omega_1$  应满足相对角速度的关系式  $\omega = \omega_0 + \omega_1$ .

**解** 由相对角速度的关系,人相对地面的角速度为

$$\omega = \omega_0 + \omega_1 = \omega_0 + \frac{v}{R} \quad (1)$$

由于系统初始是静止的,根据系统的角动量守恒定律,有

$$J_0\omega_0 + J_1(\omega_0 + \omega_1) = 0 \quad (2)$$

式中  $J_0$ 、 $J_1 = mR^2$  分别为转台、人对转台中心轴的转动惯量.由式(1)、(2)可得转台的角速度为

$$\omega_0 = -\frac{mR^2}{J_0 + mR^2} \frac{v}{R} = -9.52 \times 10^{-2} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

式中负号表示转台转动的方向与人对地面的转动方向相反.

**4-25** 一转台绕其中心的竖直轴以角速度  $\omega_0 = \pi \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$  转动,转台对转轴的转动惯量为  $J_0 = 4.0 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ .今有砂粒以  $Q = 2t$  ( $Q$  的单位为  $\text{g} \cdot \text{s}^{-1}$ ,  $t$  的单位为  $\text{s}$ ) 的流量竖直落至转台,并黏附于台面形成一圆环,若环的半径为  $r = 0.10 \text{ m}$ ,求砂粒下落  $t = 10 \text{ s}$  时,转台的角速度.

**分析** 对转动系统而言,随着砂粒的下落,系统的转动惯量发生了改变.但是,砂粒下落对转台不产生力矩的作用,因此,系统在转动过程中的角动量是守恒的.

在时间  $t$  内落至台面的砂粒的质量,可由其流量求出,从而可算出它所引起的附加的转动惯量.这样,转台在不同时刻的角速度就可由角动量守恒定律求出.

**解** 在时间  $0 \sim 10$  s 内落至台面的砂粒的质量为

$$m = \int_0^{10\text{ s}} Q dt = 0.10 \text{ kg}$$

根据系统的角动量守恒定律,有

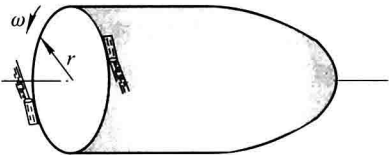
$$J_0 \omega_0 = (J_0 + mr^2) \omega$$

则  $t = 10$  s 时,转台的角速度为

$$\omega = \frac{J_0 \omega_0}{J_0 + mr^2} = 0.8\pi \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

**4-26** 为使运行中的飞船停止绕其中心轴转动,可在飞船的侧面对称地安装两个切向控制喷管(如图所示),利用喷管高速喷射气体来制止旋转.若飞船绕其中心轴的转动惯量  $J = 2.0 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ , 旋转的角速度  $\omega = 0.2 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ , 喷口与轴线之间的距离  $r = 1.5 \text{ m}$ ; 喷气以恒定的流量  $Q = 1.0 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$  和速率  $u = 50 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  从喷口喷出,问为使该飞船停止旋转,喷气应喷射多长时间?

**分析** 将飞船与喷出的气体作为研究系统,在喷气过程中,系统不受外力矩作用,其角动量守恒.在列出方程时应注意:(1) 由于喷气质量远小于飞船质量,喷气前、后系统的角动量近似为飞船的角动量  $J\omega$ ; (2) 喷气过程中气流速率  $u$  远大于飞船侧面的线速度  $\omega r$ , 因此,整个喷气过程中,气流相对于空间的速率仍可近似看作是  $u$ , 这样,排出气体的总角动量  $L = \int_m (u + \omega r) r dm \approx mu r$ . 经上述处理后,可使问题大大简化.



题 4-26 图

**解** 取飞船和喷出的气体为系统,根据角动量守恒定律,有

$$J\omega - mur = 0 \quad (1)$$

因喷气的流量恒定,故有

$$m = 2Qt \quad (2)$$

由式(1)、(2)可得喷气的喷射时间为

$$t = \frac{J\omega}{2Qur} = 2.67 \text{ s}$$

**4-27** 一位滑冰者伸开双臂以  $1.0 \text{ r} \cdot \text{s}^{-1}$  绕身体中心轴转动,此时她的转动惯量为  $1.44 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ . 为了增加转速,她收起了双臂,转动惯量变为  $0.48 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ . 求:(1) 她收起双臂后的转速;(2) 她收起双臂前后绕身体中心轴转动的转动动能.

**分析** 角动量守恒亦可适用于变形体,只要物体在变形过程中始终满足对

转轴的力矩之和  $M_z = 0$ . 故在体育运动中有大量应用. 运动员在绕其身体中心轴转动过程中, 通过改变身体形状 (即改变身体对中心轴的转动惯量), 从而改变绕中心轴的旋转角速度.

解 (1) 由角动量守恒, 有

$$J_1 \omega_1 = J_2 \omega_2$$

则

$$\omega_2 = \frac{J_1}{J_2} \omega_1 = 3 \times 2\pi \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

(2) 变形前

$$E_{k_1} = \frac{1}{2} J_1 \omega_1^2 = 28.4 \text{ J}$$

变形后

$$E_{k_2} = \frac{1}{2} J_2 \omega_2^2 = 85.2 \text{ J}$$

变形过程中由于运动员的内力做正功, 故有  $E_{k_2} > E_{k_1}$ .

**4-28** 一质量为  $m'$ 、半径为  $R$  的转台, 以角速度  $\omega_a$  转动, 转轴的摩擦略去不计, (1) 有一质量为  $m$  的蜘蛛竖直地落在转台边缘上, 此时转台的角速度  $\omega_b$  为多少? (2) 若蜘蛛随后慢慢地爬向转台中心, 当它离转台中心的距离为  $r$  时, 转台的角速度  $\omega_c$  为多少? 设蜘蛛下落前距离转台很近.

分析 对蜘蛛和转台所组成的转动系统而言, 在蜘蛛下落至转台面以及慢慢向中心爬移过程中, 均未受到外力矩的作用, 故系统的角动量守恒. 应该注意的是, 蜘蛛爬行过程中, 其转动惯量是在不断改变的. 由系统的角动量守恒定律即可求解.

解 (1) 蜘蛛垂直下落至转台边缘时, 由系统的角动量守恒定律, 有

$$J_0 \omega_a = (J_0 + J_1) \omega_b$$

式中  $J_0 = \frac{1}{2} m' R^2$  为转台对其中心轴的转动惯量,  $J_1 = m R^2$  为蜘蛛刚落至台面边缘时, 它对轴的转动惯量. 于是可得

$$\omega_b = \frac{J_0}{J_0 + J_1} \omega_a = \frac{m'}{m' + 2m} \omega_a$$

(2) 在蜘蛛向中心轴处慢慢爬行的过程中, 其转动惯量将随半径  $r$  的改变而改变, 即  $J_2 = m r^2$ . 在此过程中, 由系统角动量守恒, 有

$$J_0 \omega_a = (J_0 + J_2) \omega_c$$

则

$$\omega_c = \frac{J_0}{J_0 + J_2} \omega_a = \frac{m' R^2}{m' R^2 + 2m r^2} \omega_a$$

**4-29** 一质量为  $1.12 \text{ kg}$ 、长为  $1.0 \text{ m}$  的均匀细棒, 支点在棒的上端点, 开始时棒自由悬挂. 当以  $100 \text{ N}$  的力打击它的下端点, 打击时间为  $0.02 \text{ s}$  时, 若打击前棒是静止的, 求: (1) 打击时其角动量的变化; (2) 棒的最大偏转角.

分析 该题属于常见的刚体转动问题, 可分为两个过程来讨论: (1) 瞬间的

打击过程.在瞬间外力的打击下,棒受到外力矩的角冲量,根据角动量定理,棒的角动量将发生变化,则获得一定的角速度.(2) 棒的转动过程.由于棒和地球所组成的系统,除重力(保守内力)外无其他外力做功,因此系统的机械能守恒,根据机械能守恒定律,可求得棒的偏转角度.

解 (1) 由刚体的角动量定理得

$$\Delta L = J\omega_0 = \int M dt = Fl\Delta t = 2.0 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1} \quad (1)$$

(2) 取棒和地球为一系统,并选  $O$  处为重力势能零点.在转动过程中,系统的机械能守恒,即

$$\frac{1}{2}J\omega_0^2 = \frac{1}{2}mgl(1 - \cos \theta) \quad (2)$$

由式(1)、(2)可得棒的偏转角度为

$$\theta = \arccos\left(1 - \frac{3F^2\Delta t^2}{m^2gl}\right) = 88^\circ 38'$$

**4-30** 我国1970年4月24日发射的第一颗人造卫星,其近地点为  $4.39 \times 10^5 \text{ m}$ ,远地点为  $2.38 \times 10^6 \text{ m}$ .试计算卫星在近地点和远地点的速率.(设地球半径为  $6.38 \times 10^6 \text{ m}$ .)

分析 当人造卫星在绕地球的椭圆轨道上运行时,只受到有心力——万有引力的作用.因此,卫星在运行过程中角动量是守恒的,同时该力对地球和卫星组成的系统而言,又是属于保守内力,因此,系统又满足机械能守恒定律.根据上述两条守恒定律可求出卫星在近地点和远地点时的速率.

解 由于卫星在近地点和远地点处的速度方向与椭圆径矢垂直,因此,由角动量守恒定律有

$$mv_1r_1 = mv_2r_2 \quad (1)$$

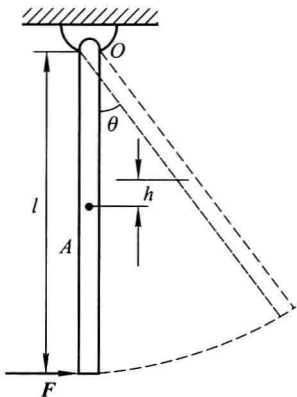
又因卫星与地球系统的机械能守恒,故有

$$\frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{Gmm_E}{r_1} = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{Gmm_E}{r_2} \quad (2)$$

式中  $G$  为引力常量,  $m_E$  和  $m$  分别为地球和卫星的质量,  $r_1$  和  $r_2$  是卫星在近地点和远地点时离地球中心的距离.由式(1)、(2)可解得卫星在近地点和远地点的速率分别为

$$v_1 = \sqrt{\frac{2Gm_E r_2}{r_1(r_1+r_2)}} = 8.11 \times 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$v_2 = \frac{r_1}{r_2}v_1 = 6.31 \times 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$



题 4-29 图



**4-31** 地球对自转轴的转动惯量为  $0.33m_E R^2$ , 其中  $m_E$  为地球的质量,  $R$  为地球的半径. (1) 求地球自转时的动能; (2) 由于潮汐的作用, 地球自转的速度逐渐减小, 1 年内自转周期增加  $3.5 \times 10^{-5}$  s, 求潮汐对地球的平均力矩.

**分析** 由于地球自转一周的时间为 24 小时, 由  $\omega = 2\pi/T$  可确定地球的自转角速度和地球自转时的转动动能  $E_k = \frac{1}{2}J\omega^2$ . 随着自转周期的增加, 相应自转的角速度将减小, 因而转动动能也将减少. 通过对上述两式微分的方法, 可得到动能的减少量  $\Delta E_k$  与周期的变化  $\Delta T$  的关系. 根据动能定理可知, 地球转动动能的减少是潮汐力矩做功的结果, 因此, 由  $W = \overline{M}\Delta\theta = \Delta E_k$ , 即可求出潮汐的平均力矩.

**解** (1) 地球的质量  $m_E = 5.98 \times 10^{24}$  kg, 半径  $R = 6.37 \times 10^6$  m, 所以, 地球自转的动能

$$E_k = \frac{1}{2}J\omega^2 = 2\pi^2 \times 0.33m_E R^2 / T^2 = 2.12 \times 10^{29} \text{ J}$$

(2) 对式  $\omega = \frac{2\pi}{T}$  两边微分, 可得

$$d\omega = -\frac{2\pi}{T^2}dT$$

当周期变化一定量时, 有

$$\Delta\omega = -\frac{2\pi}{T^2}\Delta T = -\frac{\omega^2}{2\pi}\Delta T \quad (1)$$

由于地球自转减慢而引起动能的减少量为

$$\Delta E_k = J\omega\Delta\omega = -\frac{\omega^3}{2\pi}J\Delta T = -\frac{\omega}{\pi}E_k\Delta T \quad (2)$$

又根据动能定理

$$W = \overline{M}\Delta\theta = \Delta E_k \quad (3)$$

由式(2)、(3)可得潮汐的摩擦力矩为

$$|\overline{M}| = \frac{E_k\omega\Delta T}{2\pi^2 n} = 7.47 \times 10^{16} \text{ N} \cdot \text{m}$$

式中  $n$  为 1 年中的天数 ( $n = 365$ ),  $\Delta T$  为 1 天中周期的增加量.

**4-32** 如图所示, 一质量为  $m$  的小球由一绳索系着, 以角速度  $\omega_0$  在无摩擦的水平面上, 作半径为  $r_0$  的圆周运动. 如果在绳的另一端作用一竖直向下的拉力, 使小球作半径为  $r_0/2$  的圆周运动. 试求: (1) 小球新的角速度; (2) 拉力所做的功.

**分析** 沿轴向的拉力对小球不产生力矩, 因此, 小球在水平面上转动的过程中不受外力矩作用, 其角动量应保持不变. 但是, 外力改变了小球圆周运动的半径, 也改变了小球的转动惯量, 从而改变了小球的角速度. 至于拉力所做的功, 可

根据动能定理由小球动能的变化得到.

解 (1) 根据分析, 小球在转动的过程中, 角动量保持守恒, 故有

$$J_0 \omega_0 = J_1 \omega_1$$

式中  $J_0$  和  $J_1$  分别是小球在半径为  $r_0$  和  $\frac{1}{2}r_0$  时对轴的

转动惯量, 即  $J_0 = mr_0^2$  和  $J_1 = \frac{1}{4}mr_0^2$ , 则

$$\omega_1 = \frac{J_0}{J_1} \omega_0 = 4\omega_0$$

(2) 随着小球转动角速度的增加, 其转动动能也增加, 这正是拉力做功的结果. 由转动的动能定理可得拉力的功为

$$W = \frac{1}{2} J_1 \omega_1^2 - \frac{1}{2} J_0 \omega_0^2 = \frac{3}{2} m r_0^2 \omega_0^2$$

**4-33** 质量为 0.50 kg, 长为 0.40 m 的均匀细棒, 可绕垂直于棒的一端水平轴转动. 如将此棒放在水平位置, 然后任其落下, 求: (1) 当棒转过  $60^\circ$  时的角加速度和角速度; (2) 下落到竖直位置时的动能; (3) 下落到竖直位置时的角速度.

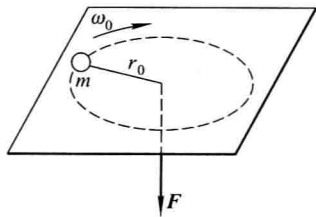
分析 转动定律  $M = J\alpha$  是一瞬时关系式, 为求棒在不同位置的角加速度, 只需确定棒所在位置的力矩就可求得. 由于重力矩  $M(\theta) = mg \frac{l}{2} \cos \theta$  是变力矩, 角加速度也是变化的, 因此, 在求角速度时, 就必须根据角加速度用积分的方法来求 (也可根据转动中的动能定理, 通过计算变力矩的功来求). 至于棒下落到竖直位置时的动能和角速度, 可采用系统的机械能守恒定律来解, 这是因为棒与地球所组成的系统中, 只有重力做功 (转轴处的支持力不做功), 因此, 系统的机械能守恒.

解 (1) 棒绕端点的转动惯量  $J = \frac{1}{3}ml^2$ , 由转动定律  $M = J\alpha$  可得棒在  $\theta$  位置时的角加速度为

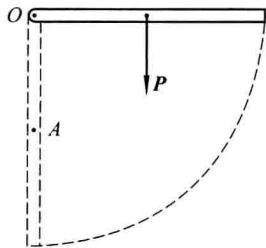
$$\alpha = \frac{M(\theta)}{J} = \frac{3g \cos \theta}{2l} \quad (1)$$

当  $\theta = 60^\circ$  时, 棒转动的角加速度为

$$\alpha = 18.4 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-2}$$



题 4-32 图



题 4-33 图

由于  $\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{\omega d\omega}{d\theta}$ , 根据初始条件对式(1)积分, 有

$$\int_0^{\omega} \omega d\omega = \int_0^{60^\circ} \alpha d\theta$$

则角速度为

$$\omega = \sqrt{\frac{3g \sin \theta}{l}} \Big|_0^{60^\circ} = 7.98 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

(2) 根据机械能守恒, 棒下落至竖直位置时的动能为

$$E_k = \frac{1}{2} mgl = 0.98 \text{ J}$$

(3) 由于该动能也就是转动动能, 即  $E_k = \frac{1}{2} J\omega^2$ , 所以, 棒落至竖直位置时的

角速度为

$$\omega' = \sqrt{\frac{2E_k}{J}} = \sqrt{\frac{3g}{l}} = 8.57 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

**4-34** 如图所示, A 与 B 两飞轮的轴杆可由摩擦啮合器使之连接. A 轮的转动惯量  $J_1 = 10.0 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ , 开始时 B 轮静止, A 轮以  $n_1 = 600 \text{ r} \cdot \text{min}^{-1}$  的转速转动, 然后使 A 与 B 连接, 因而 B 轮得到加速而 A 轮减速, 直到两轮的转速都等于  $n = 200 \text{ r} \cdot \text{min}^{-1}$  为止. 求: (1) B 轮的转动惯量; (2) 在啮合过程中损失的机械能.

**分析** 两飞轮在轴方向啮合时, 轴向力不产生转动力矩, 两飞轮系统的角动量守恒, 由此可求得 B 轮的转动惯量. 根据两飞轮在啮合前后转动动能的变化, 即可得到啮合过程中机械能的损失.

**解** (1) 取两飞轮为系统, 根据系统的角动量守恒, 有

$$J_1 \omega_1 = (J_1 + J_2) \omega_2$$

则 B 轮的转动惯量为

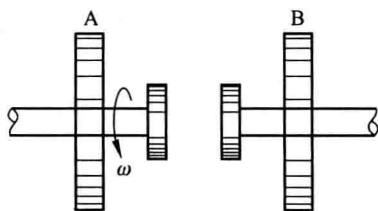
$$J_2 = \frac{\omega_1 - \omega_2}{\omega_2} J_1 = \frac{n_1 - n_2}{n_2} J_1 = 20.0 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

(2) 系统在啮合过程中机械能的变化为

$$\Delta E = \frac{1}{2} (J_1 + J_2) \omega_2^2 - \frac{1}{2} J_1 \omega_1^2 = -1.32 \times 10^4 \text{ J}$$

式中负号表示啮合过程中机械能减少.

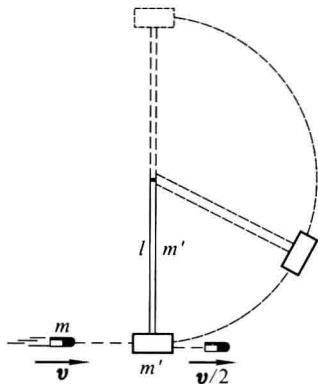
**4-35** 在题3-33的冲击摆问题中, 若以质量为  $m'$  的均匀细棒代替柔绳, 子



题 4-34 图

弹速度的最小值应是多少?

**分析** 该题与习题 3-33 的不同之处在于:(1) 子弹与摆锤的相互作用过程不再满足动量守恒,而应属于角动量守恒,这是因为细棒和摆锤是一整体,子弹与摆锤相互作用时,轴对杆有水平方向的分力作用,因此,对子弹与摆组成的系统而言,不能满足动量守恒的条件.但是,轴对杆的作用力和杆所受的重力对转轴都不产生力矩,系统角动量守恒的条件却能满足.(2) 摆在转动过程中,就地球与摆组成的系统而言,满足机械能守恒定律.摆锤恰能通过最高点所需的速度,可直接应用机械能守恒定律去解.摆是刚体,摆锤与轴心之间的距离不可能发生改变.摆锤开始转动时的动能必须大于或等于转至最高点处所增加的势能.



题 4-35 图

**解** 取子弹与摆为系统,根据系统的角动量守恒,有

$$J_1 \frac{v}{l} = J_1 \left( \frac{v}{2l} \right) + (J_2 + J_3) \omega_0 \quad (1)$$

式中  $J_1 = ml^2$ 、 $J_2 = m'l^2$  和  $J_3 = \frac{1}{3}m'l^2$  分别为子弹、摆锤和杆对轴的转动惯量.

根据摆在转动过程中机械能守恒,有

$$\frac{1}{2}(J_2 + J_3)\omega_0^2 + \frac{1}{2}m'gl = m'g(2l) + m'g\left(\frac{3}{2}l\right) \quad (2)$$

由式(1)、(2)可得子弹速度的最小值为

$$v = \frac{4m'}{m}\sqrt{2gl}$$

**4-36** 质量为  $m_0$  的门,其宽为  $L$ .若有质量  $m$  的小球,以速度  $v$  垂直于门平面撞到门的边缘上.设碰撞是完全弹性的,试求碰撞后门和小球的运动速度(门的转动惯量为  $J = \frac{1}{3}m_0L^2$ ).

**分析** 由于门的转轴处因约束始终有轴力存在,在门未受打击时轴力与门的重力平衡.当门受小球碰撞时,转轴处会产生新的水平轴力分量,因而球与门这一系统不可能满足动量守恒,但却满足对转轴的角动量守恒.这是因为轴力就作用在轴上,对轴无力矩,而球与门的重力均平行于转轴、对转轴亦无力矩.故系统对转轴的角动量守恒(可见在自然界中,角动量守恒比动量守恒更易实现).由于为弹性碰撞,本题还满足动能守恒.

解 设碰撞后小球的速度和门的角速度分别为  $v'$  和  $\omega$ , 由两个守恒可有

$$mvL = mv'L + \left(\frac{1}{3}m_0L^2\right)\omega \quad (1)$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv'^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}m_0L^2\right)\omega^2 \quad (2)$$

由式(1)得 
$$v - v' = \frac{1}{3} \frac{m_0}{m} L\omega \quad (3)$$

由式(2)得 
$$v^2 - v'^2 = \frac{1}{3} \frac{m_0}{m} (L\omega)^2 \quad (4)$$

由式(3)和(4)得 
$$v + v' = L\omega \quad (5)$$

由式(3)和(5)得 
$$\omega = \frac{6m}{3m+m_0} \frac{v}{L}$$

$$v' = \frac{3m-m_0}{3m+m_0}v$$

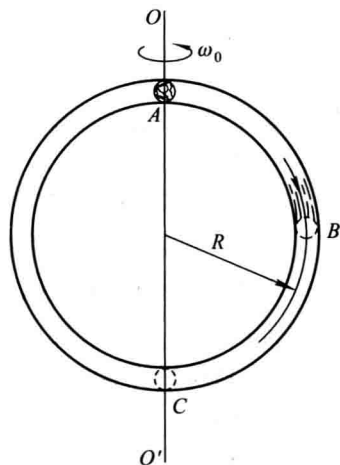
小球通常较小, 满足  $3m < m_0$ , 故  $v' < 0$ , 说明撞后小球被反向弹回. 但若球的质量较大, 还可能出现以下两种情况:

如  $3m = m_0, v' = 0$ , 球撞后瞬间静止, 然后下落.

如  $3m > m_0, v' > 0$ , 球撞后继续向前运动.

**4-37** 如图所示, 有一空心圆环可绕竖直轴  $OO'$  自由转动, 转动惯量为  $J_0$ , 环的半径为  $R$ , 初始的角速度为  $\omega_0$ . 今有一质量为  $m$  的小球静止在环内点  $A$ , 由于微小扰动使小球向下滑动. 问小球到达点  $B$ 、 $C$  时, 环的角速度与小球相对于环的速度各为多少? (假设环内壁光滑.)

**分析** 虽然小球在环中作圆周运动, 但由于环的转动, 使球的运动规律复杂化了. 由于应用守恒定律是解决力学问题最直接而又简便的方法, 故以环和小球组成的转动系统来分析. 在小球下滑的过程中, 重力是系统仅有的外力, 由于它与转轴平行, 不产生外力矩, 因此, 该系统对轴的角动量守恒. 若以小球位于点  $A$ 、 $B$  处为初、末两状态, 由角动量守恒定律可解得小球在点  $B$  时环的角速度  $\omega_B$ . 在进一步求解小球在点  $B$  处相对环的速度  $v_B$  时, 如果仍取上述系统, 则因重力 (属外力) 对系统要做功而使系统的机械能不守恒; 若改取小球与地球为系统, 也因环对小球的作用力在转动过程中做功, 而使系统的机械能守恒仍不能成立;



题 4-37 图

只有取环、小球与地球为系统时,系统才不受外力作用,而重力为保守内力,环与球的相互作用力虽不属保守内力,但这一对力所做功的总和为零,因此系统的机械能守恒.根据两守恒定律可解所需的结果.但必须注意:在计算系统的动能时,既有环的转动动能,又有小球对地的动能(它可视为小球随环一起转动的转动动能 $\frac{1}{2}mr^2\omega_B^2$ 与小球相对于环运动的动能 $\frac{1}{2}mv_B^2$ 之和).

解 以环和小球为转动系统,由系统的角动量守恒有

$$J_0\omega_0 = (J_0 + mR^2)\omega_B \quad (1)$$

取环、小球与地球为系统时,由系统的机械能守恒可得

$$\frac{1}{2}J_0\omega_0^2 + mgR = \frac{1}{2}(J_0 + mR^2)\omega_B^2 + \frac{1}{2}mv_B^2 \quad (2)$$

由式(1)、(2)可解得小球在点  $B$  时,环的角速度与小球相对于环的线速度分别为

$$\omega_B = \frac{J_0\omega_0}{J_0 + mR^2}$$

$$v_B = \sqrt{2gR + \frac{J_0\omega_0^2 R^2}{J_0 + mR^2}}$$

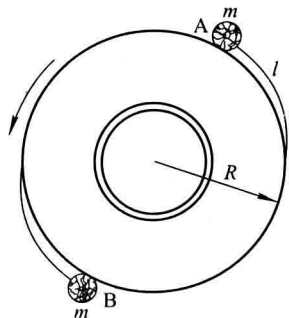
小球在点  $C$  时,由于总的转动惯量不变,用同样的方法可得环的角速度和小球相对于环的速度分别为

$$\omega_C = \omega_0$$

$$v_C = \sqrt{4gR}$$

**4-38** 为使运行中的飞船停止绕其中心轴转动,一种可能方案是将质量均为  $m$  的两质点  $A$ 、 $B$ ,用长为  $l$  的两根轻线系于圆盘状飞船的直径两端(如图所示).开始时轻线拉紧两质点靠在圆盘的边缘,圆盘与质点一起以角速度旋转;当质点离开圆盘边逐渐伸展至连线沿径向拉直的瞬时,割断质点与飞船的连线.为使此时的飞船正好停止转动,连线应取何长度?(设飞船可看作质量为  $m'$ 、半径为  $R$  的匀质圆盘.)

分析 取飞船及两质点  $A$ 、 $B$  为系统,在运行时,系统不受合外力矩作用,该系统的角动量守恒.若在运行过程中通过系统内的相互作用,改变其质量分布,使系统的角动量只存在于两质点上,此时,飞船的角动量为零,即飞船停止了转动.又因为在运行过程中合外力的功亦为零,且又无非保守内力做功,所以,系统也满足机械能守恒.当轻线恰好拉直



题 4-38 图

时质点的角速度与飞船停止转动时质点的角速度相等时,连线的长度也能够求出。

**解** 飞船绕其中心轴的转动惯量为  $J_1 = \frac{1}{2}m'R^2$ , 两质点在起始时和轻线割断瞬间的转动惯量分别为  $J_2 = 2mR^2$  和  $J'_2 = 2m(R+l)^2$ . 由于过程中系统的角动量守恒, 为使轻线沿径向拉直时, 飞船转动正好停止, 则有

$$(J_1 + J_2)\omega = 2m(R+l)^2\omega' \quad (1)$$

又根据过程中系统的机械能守恒, 有

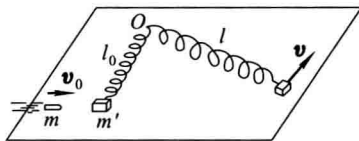
$$\frac{1}{2}(J_1 + J_2)\omega^2 = \frac{1}{2} \times 2m(R+l)^2\omega'^2 \quad (2)$$

由上述两式可解得

$$l = R\left(\sqrt{1 + \frac{m'}{4m}} - 1\right)$$

**4-39** 如图所示, 在光滑的水平面上有一轻质弹簧(其劲度系数为  $k$ ), 它的一端固定, 另一端系一质量为  $m'$  的滑块. 最初滑块静止时, 弹簧呈自然长度  $l_0$ , 今有一质量为  $m$  的子弹以速度  $v_0$  沿水平方向并垂直于弹簧轴线射向滑块且留在其中, 滑块在水平面内滑动, 当弹簧被拉伸至长度  $l$  时, 求滑块速度的大小和方向(用已知量和  $v_0$  表示)。

**分析** 该题可分两个过程来分析。(1) 子弹与滑块撞击的过程. 因滑块所系的是轻质弹簧(质量不计), 因此, 子弹射入滑块可视为质点系的完全非弹性碰撞过程. 沿子弹运动方向上外力的冲量为零, 所以, 系统在撞击过程中满足动量守恒, 由此, 可求出它们碰撞后的速度  $v'$ . (2) 子弹与滑块碰后以共同



题 4-39 图

速度运动时, 由于弹簧不断伸长, 滑块在受到指向固定点的弹力的作用下作弧线运动. 对滑块的运动而言, 该弹力为有心力, 不产生力矩, 因而滑块在运动中满足角动量守恒; 与此同时, 对滑块、弹簧所组成的系统也满足机械能守恒. 这样, 当弹簧伸长至  $l$  时的滑块速度  $v$  的大小和方向就可通过三条守恒定律求得.

**解** 子弹射入滑块瞬间, 因属非弹性碰撞, 根据动量守恒定律有

$$mv_0 = (m' + m)v' \quad (1)$$

在弹簧的弹力作用下, 滑块与子弹一起运动的过程中, 若将弹簧包括在系统内, 则系统满足机械能守恒定律, 有

$$\frac{1}{2}(m' + m)v'^2 = \frac{1}{2}(m' + m)v^2 + \frac{1}{2}k(l - l_0)^2 \quad (2)$$

又在滑块绕固定点作弧线运动中, 系统满足角动量守恒定律, 故有

$$(m'+m)v'l_0 = (m'+m)vl\sin\theta \quad (3)$$

式中  $\theta$  为滑块速度方向与弹簧线之间的夹角. 联立解上述三式, 可得

$$v = \sqrt{\left(\frac{m}{m'+m}\right)^2 v_0^2 - \frac{k(l-l_0)^2}{m'+m}}$$

$$\theta = \arcsin \frac{mv_0 l_0}{(m'+m)vl}$$

**4-40** 一长为  $l$ 、质量为  $m$  的均匀细棒, 在光滑的平面上绕质心作无滑动的转动, 其角速度为  $\omega$ . 若棒突然改绕其一端转动, 求: (1) 以端点为转轴的角速度  $\omega'$ ; (2) 在此过程中转动动能的改变.

**分析** 这是一个变轴转动问题. 棒的质心在变轴转动中将受到一瞬间力的作用, 它改变了质心的速度; 同时, 该瞬间力对新的转轴又产生力矩作用, 从而改变棒的转动角速度. 根据质心的动量定理和棒的转动定律, 并考虑到角速度与线速度的关系, 即可求得新的角速度. 由棒绕不同轴转动的转动动能, 可计算该过程中的动能变化.

**解** (1) 棒的质心的动量定理为

$$\bar{F}\Delta t = \Delta p = mv_c$$

式中  $\bar{F}$  是棒所受的平均力,  $v_c$  为棒质心的速度. 棒在转动过程中受到外力矩作用, 根据角动量定理, 有

$$-\bar{F}\frac{l}{2}\Delta t = J\omega' - J\omega$$

式中  $J$  为棒绕质心的转动惯量 (即  $J = \frac{1}{12}ml^2$ ).

而根据角量与线量的关系

$$v_c = \frac{l}{2}\omega'$$

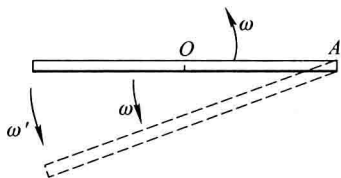
可解得

$$\omega' = \frac{J}{J + \frac{1}{4}ml^2}\omega = \frac{1}{4}\omega$$

(2) 在此过程中转动动能的改变为

$$\Delta E_k = \frac{1}{2}J'\omega'^2 - \frac{1}{2}J\omega^2 = -\frac{1}{32}ml^2\omega^2$$

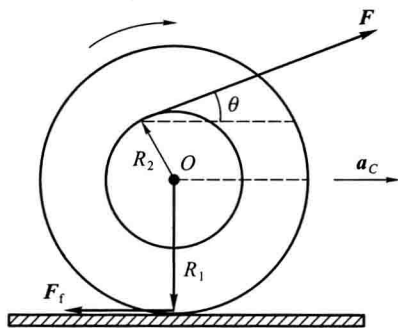
**4-41** 如图所示, 一绕有细绳的大木轴放置在水平面上, 木轴质量为  $m$ , 外轮半径为  $R_1$ , 内柱半径为  $R_2$ , 木轴对中心轴  $O$  的转动惯量为  $J_c$ . 现用一恒定外力



题 4-40 图



$F$  拉细绳一端, 设细绳与水平面夹角  $\theta$  保持不变, 木轴滚动时与地面无相对滑动. 求木轴滚动时的质心加速度  $a_c$  和木轴绕中心轴  $O$  的角加速度  $\alpha$ .



题 4-41 图

**分析** 刚体平面平行运动可以被看成: 刚体质心的平动和刚体绕质心轴转动的叠加, 因此对本题可运用质心运动定律和转动定律进行求解. 由于木轴滚动时与水平面间无相对滑动 (又叫纯滚动), 故两者之间的摩擦力应为静摩擦力, 并有  $a_c = R_1 \alpha$  这一关系式成立.

**解** 设木轴所受静摩擦力  $F_f$  如图所示, 则有

$$F \cos \theta - F_f = m a_c \quad (1)$$

$$F R_2 + F_f R_1 = J_c \alpha \quad (2)$$

$$a_c = R_1 \alpha \quad (3)$$

由式(1)、(2)、(3)可得

$$a_c = \frac{R_1^2 \cos \theta + R_1 R_2}{J_c + m R_1^2} F$$

$$\alpha = \frac{a_c}{R_1} = \frac{R_1 \cos \theta + R_2}{J_c + m R_1^2} F$$

**4-42** 匀速地将水注入一容器中, 注入的流量为  $Q = 150 \text{ cm}^3 \cdot \text{s}^{-1}$ . 容器底部有面积为  $S = 0.5 \text{ cm}^2$  的小孔, 使水不断流出. 当容器中的水达到稳定状态后, 求容器中的水的深度  $h$ .

**分析** 当容器中的水达到稳定状态时, 单位时间流入容器中的水的量 (即  $Q$ ) 等于相同时间内从小孔流出的水的量 (即  $Sv$ ). 由教材知此时小孔的水的流速满足  $v = \sqrt{2gh}$ , 式中  $h$  为稳定时容器中水的高度.

**解** 由分析知, 稳定时有

$$Q = Sv = S\sqrt{2gh}$$

$$h = \frac{(Q/S)^2}{2g} = 0.46 \text{ m}$$

则

## 第二篇

# 电 磁 学

### 求解电磁学问题的基本思路和方法

电磁学部分涉及真空和介质中的静电场和恒定磁场、电磁感应和麦克斯韦电磁场理论的基本概念等内容,涵盖了大学物理课程电磁学的核心内容.通过求解电磁学方面的习题,不仅可以使我们增强对有关电磁学基本概念的理解,还可在处理电磁学问题的方法上得到基本训练,从而感悟到麦克斯韦电磁场理论所体现的严谨、自洽、和谐与美.求解电磁学习题既包括求解一般物理习题的常用方法,也包含一些求解电磁学习题的特殊方法.下面就求解电磁学习题的方法择要介绍如下.

#### 1. 微元法

在求解电场强度、电势、磁感强度等物理量时,微元法是常用的方法之一.使用微元法的基础是电场和磁场的叠加原理.依照叠加原理,任意连续带电体激发的电场可以视作电荷元  $dq$  单独存在时激发电场的叠加.根据电荷的不同分布方式,电荷元可分别为体电荷元  $\rho dV$ 、面电荷元  $\sigma dS$  和线电荷元  $\lambda dl$ .同理,线电流激发的磁场可以视作为线电流元激发磁场的叠加.

例如求均匀带电直线的中垂线上的电场强度分布.我们可取带电线元  $\lambda dl$  为电荷元,每个电荷元可视为点电荷,建立坐标系;考虑到电荷分布的对称性必然导致电场强度分布的对称性,利用点电荷电场强度公式,电荷元激发的电场强度矢量沿垂直中垂线方向分量叠加后相互抵消,沿中垂线方向分量叠加后得

$$E = \int_{-l/2}^{l/2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dl}{r^2} \cos \alpha$$

统一积分变量后积分,就可以求得空间的电场分布.类似的方法同样可用于求电势、磁感强度的分布.

值得注意的是物理学中的微元并非为数学意义上真正的无穷小,而是测量意义上的高阶小量.从形式上微元也不仅仅局限于体元、面元、线元,在物理问题中常常根据对称性适当地选取微元.例如,求一个均匀带电圆盘轴线上的电场强度分布,我们可以取宽度为  $dr$  的同心带电圆环为电荷元,再利用带电圆环轴线上的电场强度分布公式,用叠加的方法求得均匀带电圆盘轴线上的电场强度分布.

## 2. 对称性分析

对称性分析对求解电磁场问题是十分重要的.通过分析场的对称性,可以帮助我们了解电磁场的分布,从而为求解电磁学问题带来极大方便.而电磁场的对称性有轴对称、面对称、球对称等.下面举两个例子.

在利用高斯定理求电场强度的分布时,需要根据电场的对称分布选择适当的高斯面,使得电场强度在高斯面上为常量或者电场强度通量为零,就能够借助高斯定理求得电场强度的分布.相类似,在利用安培环路定理求磁感强度的分布时,依照电流分布的对称性,选择适当的环路使得磁感强度在环路上为常量或者磁场环流为零,借助安培环路定理就可以求得磁感强度的分布.

## 3. 补偿法

补偿法是利用等量异号电荷激发的电场强度,具有大小相等、方向相反的特性;或强度相同方向相反电流元激发的磁感强度,具有大小相等方向相反这一特性,将原来对称程度较低的场源分解为若干个对称程度较高的场源,再利用场的叠加求得电场、磁场的分布.

例如在一个均匀带电球体内部挖去一个球形空腔,显然它的电场分布不再呈现球对称.为了求这一均匀带电体的电场分布,我们可将空腔带电体激发的电场视为一个外半径相同的球形带电体与一个电荷密度相同且异号、半径等于空腔半径的小球体所激发电场的矢量和.利用均匀带电球体内外的电场分布,即可求出电场分布.

## 4. 类比法

在电磁学中,许多物理量遵循着相类似的规律,表现为描述此类规律的方程式有相同的形式,例如电场强度与磁场强度、电位移矢量与磁感强度矢量、电偶极子与磁偶极子、电场能量密度与磁场能量密度等.他们尽管物理本质不同,但是所遵循的规律形式相类似.在分析这类物理问题时借助类比的方法,我们可以通过一个已知物理量的规律去推测相应的另外一个物理量的规律.例如我们在研究  $LC$  振荡电路时,我们得到回路电流满足的方程为

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{1}{LC} i = 0$$

显然这个方程是典型的简谐振动的动力学方程,只不过它所表述的是电容和电感并联电路中电流以简谐振动的方式变化罢了。

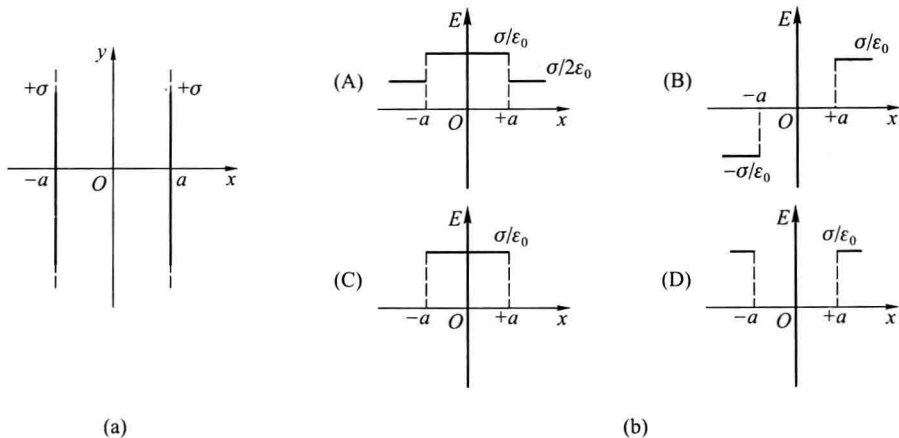
### 5. 物理近似与物理模型

几乎所有的物理模型都是简化后的理想化模型,这就意味着需要忽略影响研究对象运动的次要因素,抓住影响研究对象运动的主要因素,将其简化、抽象为理想化的数学模型。既然如此,我们在应用这些物理模型时不能脱离建立理想化模型的条件与背景,不能抛弃、跨越简化的条件。例如当带电体的线度远小于距所考察电场这一点的距离时,一个带电体的大小形状可以忽略,带电体就可以抽象为点电荷。但是一旦去研究带电体附近的电场分布时,将带电体当作点电荷的模型就失效了。在讨论物理问题时一定要注意物理模型的适用条件。在适用近似条件的情况下,灵活应用理想化模型可以大大简化求解问题的难度。

电磁学的解题方法还有很多,我们希望同学们通过练习自己去分析、归纳、创新和总结。我们反对在学习过程中不深入理解题意、不分析物理过程、简单教条地将物理问题分类而“套”公式的解题方法。我们企盼同学们把灵活运用物理基本理论求解物理问题当成是一项研究课题,通过求解问题在学习过程中自己去领悟、体会,通过解题来感悟到用所学的物理知识解决问题后的愉悦和快乐,进一步加深理解物理学基本定律,增强学习新知识和新方法的积极性。

## 第五章 静电场

**5-1** 电荷面密度均为 $+\sigma$ 的两块“无限大”均匀带电的平行平板如图(a)所示放置,其周围空间各点电场强度 $E$ (设电场强度方向向右为正、向左为负)随位置坐标 $x$ 变化的关系曲线为( )



题 5-1 图

**分析与解** “无限大”均匀带电平板激发的电场强度为 $\frac{\sigma}{2\epsilon_0}$ ,方向沿带电平板法向向外,依照电场叠加原理可以求得各区域电场强度的大小和方向.因而正确答案为(B).

**5-2** 下列说法正确的是( )

- (A) 闭合曲面上各点电场强度都为零时,曲面内一定没有电荷
- (B) 闭合曲面上各点电场强度都为零时,曲面内电荷的代数和必定为零
- (C) 闭合曲面的电场强度通量为零时,曲面上各点的电场强度必定为零
- (D) 闭合曲面的电场强度通量不为零时,曲面上任意一点的电场强度都不可能为零

**分析与解** 依照静电场中的高斯定理,闭合曲面上各点电场强度都为零时,曲面内电荷的代数和必定为零,但不能肯定曲面内一定没有电荷;闭合曲面的电场强度通量为零时,表示穿入闭合曲面的电场线数等于穿出闭合曲面的电场线数或没有电场线穿过闭合曲面,也不能由此确定曲面上各点的电场强度必定为零;同理,闭合曲面的电场强度通量不为零,也不能推断曲面上任意一点的电场

强度都不可能为零,因而正确答案为(B).

5-3 下列说法正确的是( )

- (A) 电场强度为零的点,电势也一定为零
- (B) 电场强度不为零的点,电势也一定不为零
- (C) 电势为零的点,电场强度也一定为零
- (D) 电势在某一区域内为常量,则电场强度在该区域内必定为零

**分析与解** 电场强度与电势是描述电场的两个不同物理量,电场强度为零表示试验电荷在该点受到的电场力为零,电势为零表示将试验电荷从该点移到参考零电势点时,电场力做功为零.电场中一点的电势等于单位正电荷从该点沿任意路径到参考零电势点电场力所做的功;电场强度等于负电势梯度.因而正确答案为(D).

5-4 在一个带负电的带电棒附近有一个电偶极子,其电偶极矩  $\boldsymbol{p}$  的方向如图所示.当电偶极子被释放后,该电偶极子将( )



题 5-4 图

- (A) 沿逆时针方向旋转直到电偶极矩  $\boldsymbol{p}$  水平指向棒尖端而停止
- (B) 沿逆时针方向旋转至电偶极矩  $\boldsymbol{p}$  水平指向棒尖端,同时沿电场线方向朝着棒尖端移动
- (C) 沿逆时针方向旋转至电偶极矩  $\boldsymbol{p}$  水平指向棒尖端,同时逆电场线方向朝远离棒尖端移动
- (D) 沿顺时针方向旋转至电偶极矩  $\boldsymbol{p}$  水平方向沿棒尖端朝外,同时沿电场线方向朝着棒尖端移动

**分析与解** 电偶极子在非均匀外电场中,除了受到力矩作用使得电偶极子指向电场方向外,还将受到一个指向电场强度增强方向的合力作用,因而正确答案为(B).

5-5 精密实验表明,电子与质子电荷的绝对值之差值的最大范围不会超过  $\pm 10^{-21}e$ ,而中子电荷与零的差值的最大范围也不会超过  $\pm 10^{-21}e$ ,由最为极端的情况考虑,一个有 8 个电子、8 个质子和 8 个中子构成的氧原子所带的最大可能净电荷是多少?若将原子视作质点,试比较两个氧原子间的库仑力和万有引力的大小.

**分析** 考虑到极限情况,假设电子与质子电荷的绝对值之差值的最大范围为  $2 \times 10^{-21}e$ ,中子电荷为  $10^{-21}e$ ,则由一个氧原子所包含的 8 个电子、8 个质子和

8 个中子可求得原子所带的最大可能净电荷. 由库仑定律可以估算两个带电氧原子间的库仑力, 并与万有引力作比较.

**解** 一个氧原子所带的最大可能净电荷为

$$q_{\max} = (1+2) \times 8 \times 10^{-21} e = 3.84 \times 10^{-39} \text{ C}$$

两个氧原子间的库仑力与万有引力之比为

$$\frac{F_e}{F_g} = \frac{q_{\max}^2}{4\pi\epsilon_0 G m^2} = 2.8 \times 10^{-6} \ll 1$$

假如电子、质子、中子等微观粒子所带电荷量的绝对值的差异不大于  $\pm 10^{-21} e$ , 对于天体等物体的运动起主导作用的依然还是万有引力.

**5-6** 1964 年, 盖尔曼等人提出基本粒子是由更基本的夸克构成, 中子就是由一个带  $\frac{2}{3}e$  的上夸克和两个带  $-\frac{1}{3}e$  的下夸克构成. 将夸克作为经典粒子处理 (夸克线度约为  $10^{-20} \text{ m}$ ), 中子内的两个下夸克之间相距  $2.60 \times 10^{-15} \text{ m}$ , 求它们之间的相互作用力.

**解** 假如将夸克视作点电荷, 由库仑定律

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \mathbf{e}_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{9r^2} \mathbf{e}_r = (3.78 \text{ N}) \mathbf{e}_r$$

$F$  与径向单位矢量  $\mathbf{e}_r$  方向相同, 表明它们之间为斥力.

**5-7** 质量为  $m$ , 电荷为  $-e$  的电子以圆轨道绕氢核旋转, 其动能为  $E_k$ . 证明电子的旋转频率满足

$$v^2 = \frac{32\epsilon_0^2 E_k^2}{me^4}$$

其中  $\epsilon_0$  是真空电容率. 电子的运动可视为遵守经典力学定律.

**分析** 根据题意将电子作为经典粒子处理. 电子、氢核的大小约为  $10^{-15} \text{ m}$ , 轨道半径约为  $10^{-10} \text{ m}$ , 故电子、氢核都可视作点电荷. 点电荷间的库仑引力是维持电子沿圆轨道运动的向心力, 故有

$$m \frac{v^2}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2}$$

由此可证命题.

**证** 由上述分析可得电子的动能为

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r}$$

电子旋转角速度  $\omega$  满足

$$\omega^2 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m r^3}$$

由上述两式消去  $r$ , 得

$$\nu^2 = \frac{\omega^2}{4\pi^2} = \frac{32\varepsilon_0^2 E_k^3}{me^4}$$

**5-8** 在氯化铯晶体中,一价氯离子  $\text{Cl}^-$  与其最邻近的八个一价铯离子  $\text{Cs}^+$  构成如图所示的立方晶格结构。(1) 求氯离子所受的库仑力;(2) 假设图中箭头所指处缺少一个铯离子(称为晶格缺陷),求此时氯离子所受的库仑力。

**分析** 铯离子和氯离子均可视作点电荷,可直接将晶格顶角铯离子与氯离子之间的库仑力进行矢量叠加.为方便计算可以利用晶格的对称性求氯离子所受的合力。

**解** (1) 由对称性,每条对角线上的一对铯离子与氯离子间的作用合力为零,故

$$\mathbf{F}_1 = 0$$

(2) 除了有缺陷的那条对角线外,其他铯离子与氯离子的作用合力为零,所以氯离子所受的合力  $\mathbf{F}_2$  的值为

$$F_2 = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{e^2}{3\pi\varepsilon_0 a^2} = 1.92 \times 10^{-9} \text{ N}$$

$\mathbf{F}_2$  方向如图所示。

**\*5-9** 如图所示,电荷  $Q$  均匀分布在半径为  $R$  的圆环上,现在环中央放置一个电荷量为  $q$  的点电荷,试求由于  $q$  的出现而在环中出现的张力。

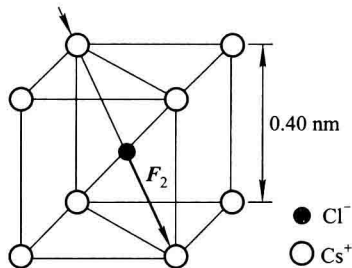
**分析** 由电荷分布的对称性,带电圆环所受到点电荷的库仑力合力为零,但圆环内的张力不为零.如图所示取半个圆环,显然,半个圆环所受库仑力等于半圆环两端的张力.由于半圆环的大小不能忽略,因而不能作为点电荷处理,在圆环取线元为电荷元  $dq' = \frac{Q}{2\pi} d\theta$ ,由库仑定律,电荷元与点电荷  $q$  间的作用力

$$d\mathbf{F} = \frac{q dq'}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \mathbf{e}_r$$

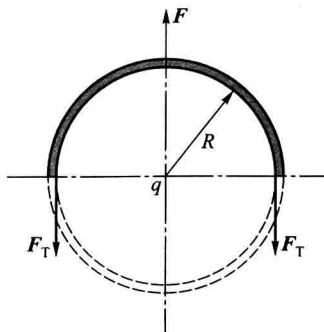
由电荷对称性,半圆环受到的库仑力必定平行于对称轴

$$F = \int_0^\pi dF \sin \theta$$

再由  $F_T = \frac{1}{2} F$ ,可以求得环中的张力。



题 5-8 图



题 5-9 图



解 在圆环上取线元, 即电荷元  $dq' = \frac{Q}{2\pi} d\theta$ , 由电荷对称性, 半圆环受到的库仑力必定平行于对称轴. 由库仑定律

$$dF = \frac{q dq'}{4\pi\epsilon_0 R^2} e_r$$

$$F = \int_0^\pi dF \sin \theta = \int_0^\pi \frac{q Q d\theta}{8\pi^2 \epsilon_0 R^2} \sin \theta = \frac{q Q}{4\pi^2 \epsilon_0 R^2}$$

$$F_T = \frac{1}{2} F = \frac{q Q}{8\pi^2 \epsilon_0 R^2}$$

5-10 若电荷  $Q$  均匀地分布在长为  $L$  的细棒上, 求证:

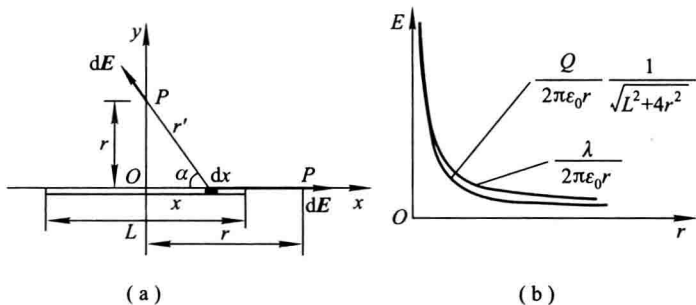
(1) 在棒的延长线上, 且离棒中心为  $r$  处的电场强度为

$$E = \frac{1}{\pi\epsilon_0} \frac{Q}{4r^2 - L^2}$$

(2) 在棒的垂直平分线上, 且离棒为  $r$  处的电场强度为

$$E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0 r} \frac{Q}{\sqrt{4r^2 + L^2}}$$

若棒为无限长 (即  $L \rightarrow \infty$ ), 试将结果与无限长均匀带电直线的电场强度相比较.



题 5-10 图

分析 这是计算连续分布电荷的电场强度. 此时棒的长度不能忽略, 因而不能将棒当作点电荷处理. 带电细棒上的电荷可看作均匀分布在一维的长直线上. 如图 (a) 所示, 在长直线上任意取一线元  $dx$ , 其电荷量为  $dq = Q dx/L$ , 它在点  $P$  的电场强度为

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r'^2} e_r$$

整个带电体在点  $P$  的电场强度为

$$E = \int dE$$

接着针对具体问题来处理这个矢量积分.

(1) 若点  $P$  在棒的延长线上, 带电棒上各电荷元在点  $P$  激发的电场强度方向相同,

$$\mathbf{E} = \int_L dE \mathbf{i}$$

(2) 若点  $P$  在棒的垂直平分线上, 则电场强度  $\mathbf{E}$  沿  $x$  轴方向的分量因左右对称, 叠加为零. 因此, 点  $P$  的电场强度为

$$\mathbf{E} = \int_L dE_y \mathbf{j} = \int_L \sin \alpha dE \mathbf{j}$$

证 (1) 延长线上一点  $P$  的电场强度  $E = \int_L \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r'^2}$ , 利用几何关系  $r' = r - x$  统一积分变量, 则

$$E_P = \int_{-L/2}^{L/2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q dx}{L (r-x)^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 L} \left( \frac{1}{r-L/2} - \frac{1}{r+L/2} \right) = \frac{1}{\pi\epsilon_0} \frac{Q}{4r^2 - L^2}$$

电场强度的方向沿  $x$  轴.

(2) 根据以上分析, 中垂线上一点  $P$  的电场强度  $\mathbf{E}$  的方向沿  $y$  轴, 大小为

$$E = \int_L \frac{\sin \alpha dq}{4\pi\epsilon_0 r'^2}$$

利用几何关系  $\sin \alpha = r/r'$ ,  $r' = \sqrt{r^2 + x^2}$  统一积分变量, 则

$$E = \int_{-L/2}^{L/2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{r Q dx}{L (x^2 + r^2)^{3/2}} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 r} \frac{1}{\sqrt{L^2 + 4r^2}}$$

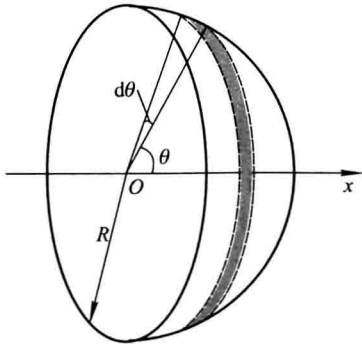
若棒单位长度所带电荷  $\lambda$  为常量, 当棒长  $L \rightarrow \infty$  时, 点  $P$  的电场强度为

$$E = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi\epsilon_0 r} \frac{Q/L}{\sqrt{1 + 4r^2/L^2}} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$$

如图(b)所示, 此结果与无限长带电直线周围的电场强度分布相同. 这说明只要满足  $r^2/L^2 \ll 1$ , 带电长直细棒可视为无限长带电直线.

**5-11** 一半径为  $R$  的半球壳, 均匀地带有电荷, 电荷面密度为  $\sigma$ . 求球心处电场强度的大小.

**分析** 这是一个求连续带电体电场分布的问题. 首先将半球壳分割为一组平行的细圆环, 如图所示, 从教材第 5-3 节例 1 可以看出, 所有平行圆环在轴线上任意一点的电场强度方向都相同, 将所有带电圆环的电场强度积分叠加, 即



题 5-11 图

可以求得球心  $O$  点处的电场强度.

**解** 将半球壳分割为一组平行细圆环,任一圆环所带电荷  $dq = \sigma dS = \sigma \cdot 2\pi R^2 \sin \theta d\theta$ ,在点  $O$  激发的电场强度为

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{x dq}{(x^2 + r^2)^{3/2}} i$$

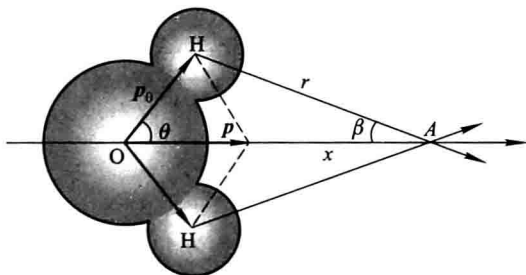
由于平行细圆环在点  $O$  激发的电场强度方向相同,利用几何关系  $x = R \cos \theta$ ,  $r = R \sin \theta$ ,统一积分变量,有

$$\begin{aligned} dE &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{x dq}{(x^2 + r^2)^{3/2}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{R \cos \theta}{R^3} \sigma \cdot 2\pi R^2 \sin \theta d\theta \\ &= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \sin \theta \cos \theta d\theta \end{aligned}$$

积分得

$$E = \int_0^{\pi/2} \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \sin \theta \cos \theta d\theta = \frac{\sigma}{4\epsilon_0}$$

**5-12** 水分子( $H_2O$ )中氧原子和氢原子的等效电荷中心如图所示.假设氧原子和氢原子的等效电荷中心间距为  $r_0$ ,试计算在分子的对称轴线上,距分子较远处的电场强度.



题 5-12 图

**分析** 水分子的电荷模型等效于两个电偶极子,它们的电偶极矩大小均为  $p_0 = er_0$ ,而夹角为  $2\theta$ .叠加后水分子的电偶极矩大小为  $p = 2er_0 \cos \theta$ ,方向沿对称轴线.由于氧原子  $O$  到场点  $A$  的距离  $x \gg r_0$ ,利用教材 5-3 节中电偶极子在延长线上的电场强度

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2p}{x^3}$$

可求得电场的分布.

也可由点电荷的电场强度叠加,求电场分布.

**解 1** 水分子的电偶极矩

$$p = 2p_0 \cos \theta = 2er_0 \cos \theta$$

在电偶极矩延长线上

$$E = \frac{2p}{4\pi\epsilon_0 x^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{4er_0 \cos \theta}{x^3} = \frac{1}{\pi\epsilon_0} \frac{er_0 \cos \theta}{x^3}$$

解2 在对称轴上任取一点A,则该点的电场强度

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_- + \mathbf{E}_+$$

$$E = 2E_+ \cos \beta - E_- = \frac{2e \cos \beta}{4\pi\epsilon_0 r^2} - \frac{2e}{4\pi\epsilon_0 x^2}$$

由于

$$r^2 = x^2 + r_0^2 - 2xr_0 \cos \theta$$

$$\cos \beta = \frac{x - r_0 \cos \theta}{r}$$

代入得

$$E = \frac{2e}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{x - r_0 \cos \theta}{(x^2 + r_0^2 - 2xr_0 \cos \theta)^{3/2}} - \frac{1}{x^2} \right]$$

测量分子的电场时,总有  $x \gg r_0$ , 因此,式中

$$(x^2 + r_0^2 - 2xr_0 \cos \theta)^{3/2} \approx x^3 \left( 1 - \frac{2r_0 \cos \theta}{x} \right)^{3/2} \approx x^3 \left( 1 - \frac{3}{2} \cdot \frac{2r_0 \cos \theta}{x} \right)$$

将上式化简并略去微小量后,得

$$E \approx \frac{e}{2\pi\epsilon_0 x^2} \left( \frac{x - r_0 \cos \theta}{x - 3r_0 \cos \theta} - 1 \right) = \frac{e}{2\pi\epsilon_0 x^2} \frac{2r_0 \cos \theta}{x - 3r_0 \cos \theta}$$

由于  $x \gg r_0$ , 故

$$E \approx \frac{1}{\pi\epsilon_0} \frac{er_0 \cos \theta}{x^3}$$

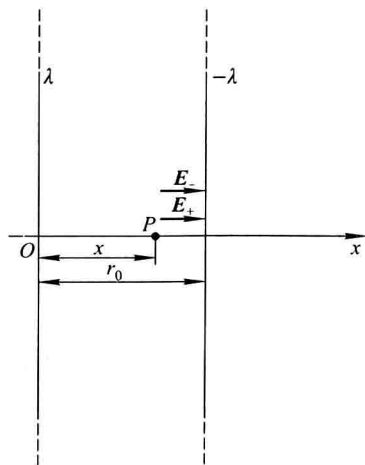
水分子的净电荷为零,但是对于  $p \neq 0$  的电荷分布,其周围依然存在电场,但它的电场强度随  $r$  的增大快速地减弱为零。

**5-13** 两条无限长平行直导线相距为  $r$ , 均匀带有等量异号电荷,电荷线密度为  $\lambda$ .

- (1) 求两导线构成的平面上任意一点的电场强度(设该点到其中一线的垂直距离为  $x$ );
- (2) 求每一根导线上单位长度导线受到另一根导线上电荷作用的电场力。

**分析** (1) 在两导线构成的平面上任一点的电场强度为两导线单独在此所激发电场的叠加。

(2) 由  $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$ , 单位长度导线所受的电场力等于另一根导线在该导线处的电场强度乘以单位长度导线所带的电荷量,即  $\mathbf{F} = \lambda\mathbf{E}$ . 应该注



题 5-13 图

意式中的电场强度  $E$  是除去自身电荷外其他电荷激发的合电场强度, 电荷自身建立的电场不会对自身电荷产生作用力。

解 (1) 设点  $P$  在导线构成的平面上,  $E_+$ 、 $E_-$  分别表示正、负带电导线在点  $P$  的电场强度, 则有

$$E = E_+ + E_- = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{r_0 - x} \right) i = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{r_0}{x(r_0 - x)} i$$

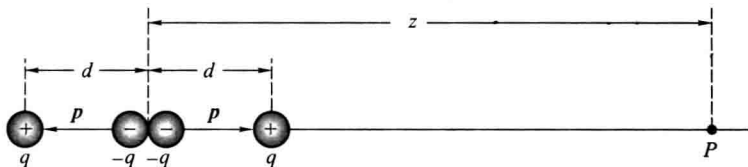
(2) 设  $F_+$ 、 $F_-$  分别表示正、负带电导线单位长度所受的电场力, 则有

$$F_+ = \lambda E_- = -\frac{\lambda^2}{2\pi\epsilon_0 r_0} i$$

$$F_- = -\lambda E_+ = -\frac{\lambda^2}{2\pi\epsilon_0 r_0} i$$

显然有  $F_+ = -F_-$ , 相互作用力大小相等, 方向相反, 两导线相互吸引。

5-14 如图所示为电四极子, 电四极子是由两个大小相等、方向相反的电偶极子组成。试求在两个电偶极子延长线上距中心为  $z$  的一点  $P$  的电场强度(假设  $z \gg d$ )。



题 5-14 图

分析 根据点电荷电场的叠加求点  $P$  的电场强度。

解 由点电荷电场公式, 得

$$E = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2q}{z^2} k + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{(z-d)^2} k + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{(z+d)^2} k$$

考虑到  $z \gg d$ , 简化上式得

$$\begin{aligned} E &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ -\frac{2}{z^2} + \frac{1}{z^2} \left[ \frac{1}{(1-d/z)^2} + \frac{1}{(1+d/z)^2} \right] \right\} k \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ -\frac{2}{z^2} + \frac{1}{z^2} \left( 1 + \frac{2d}{z} + \frac{3d^2}{z^2} + \dots + 1 - \frac{2d}{z} + \frac{3d^2}{z^2} + \dots \right) \right] k \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{6qd^2}{z^4} k \end{aligned}$$

通常将  $Q = 2qd^2$  称为电四极矩, 代入得点  $P$  的电场强度

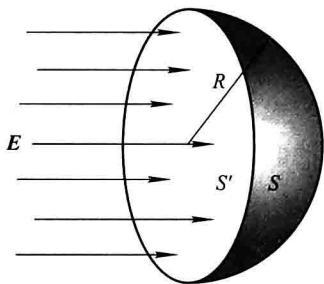
$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3Q}{z^4} k$$

电四极矩的电场随  $r$  的增大, 比电偶极矩的电场更快速地减弱到零。

**5-15** 设匀强电场的电场强度  $E$  与半径为  $R$  的半球面的对称轴平行. 试计算通过此半球面的电场强度通量.

**分析 方法 1** 由电场强度通量的定义, 对半球面  $S$  求积分, 即  $\Phi_e = \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$ ;

**方法 2** 作半径为  $R$  的平面  $S'$  与半球面  $S$  一起构成闭合曲面, 由于闭合面内无电荷, 由高斯定理



题 5-15 图

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_i q_i = 0$$

这表明穿过闭合曲面的净通量为零, 穿入平面  $S'$  的电场强度通量在数值上等于穿出半球面  $S$  的电场强度通量. 因而

$$\Phi_e = \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = - \int_{S'} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$$

**解 1** 取球坐标系, 电场强度矢量和面元在球坐标系中可表示为<sup>①</sup>

$$\mathbf{E} = E(\cos \varphi \mathbf{e}_\varphi + \sin \varphi \cos \theta \mathbf{e}_\theta + \sin \varphi \sin \theta \mathbf{e}_r)$$

$$d\mathbf{S} = R^2 \sin \theta d\theta d\varphi \mathbf{e}_r$$

$$\begin{aligned} \Phi_e &= \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \int_S ER^2 \sin^2 \theta \sin \varphi d\theta d\varphi \\ &= \int_0^\pi ER^2 \sin^2 \theta d\theta \int_0^\pi \sin \varphi d\varphi \\ &= \pi R^2 E \end{aligned}$$

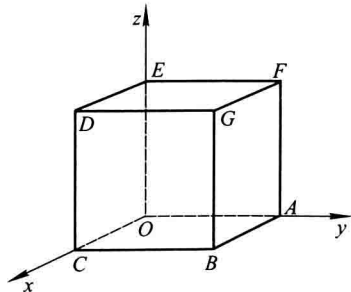
**解 2** 由于闭合曲面内无电荷分布, 根据高斯定理, 有

$$\Phi_e = \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = - \int_{S'} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$$

依照约定取闭合曲面的外法线方向为面元  $d\mathbf{S}$  的方向, 有

$$\Phi_e = -E \cdot \pi R^2 \cdot \cos \pi = \pi R^2 E$$

**5-16** 如图所示, 边长为  $a$  的立方体, 其表面分别平行于  $Oxy$ 、 $Oyz$  和  $Ozx$  平面, 立方体的一个顶点为坐标原点. 现将立方体置于电场强度  $\mathbf{E} = (E_1 + kx)\mathbf{i} + E_2\mathbf{j}$  的非均匀电场中, 求立方体各表面及立方体的电场强度通量 ( $k$ 、 $E_1$ 、 $E_2$  均为常量).



题 5-16 图

<sup>①</sup> 有关球坐标请参阅相关数学教材.

解 如图所示,由题意  $\mathbf{E} = (E_1 + kx)\mathbf{i} + E_2\mathbf{j}$  与  $Oxy$  面平行,所以对任一个与  $Oxy$  面平行的立方体表面,电场强度的通量为零. 即  $\Phi_{eOABC} = \Phi_{eDEFG} = 0$ . 而

$$\Phi_{eABGF} = \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \int_S [(E_1 + kx)\mathbf{i} + E_2\mathbf{j}] \cdot (dS\mathbf{j}) = E_2 a^2$$

考虑到面  $CDEO$  与面  $ABGF$  的外法线方向相反,且该两面的电场分布相同,故有

$$\Phi_{eCDEO} = -\Phi_{eABGF} = -E_2 a^2$$

同理 
$$\Phi_{eADEF} = \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \int_S (E_1\mathbf{i} + E_2\mathbf{j}) \cdot (-dS\mathbf{i}) = -E_1 a^2$$

$$\Phi_{eBCDG} = \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \int_S [(E_1 + ka)\mathbf{i} + E_2\mathbf{j}] \cdot (dS\mathbf{i}) = (E_1 + ka) a^2$$

因此,整个立方体表面的电场强度通量为

$$\Phi_e = \sum_i \Phi_{ei} = ka^3$$

**5-17** 地球周围的大气犹如一部大电机,由于雷雨云和大气气流的作用,在晴天区域大气电离层总是带有大量的正电荷,地球表面必然带有负电荷. 晴天大气电场平均电场强度约为  $120 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$ ,方向指向地面. 试求地球表面单位面积所带的电荷(以每平方厘米的电子数表示).

分析 考虑到地球表面的电场强度指向地球球心,在大气层中取与地球同心的球面为高斯面,利用高斯定理可以求得高斯面内的净电荷.

解 在大气层临近地球表面处取与地球表面同心的球面为高斯面,其半径  $R \approx R_E$  ( $R_E$  为地球平均半径). 由高斯定理

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = -E \cdot 4\pi R_E^2 = \frac{1}{\epsilon_0} \sum q$$

地球表面电荷面密度

$$\sigma = \sum q / 4\pi R_E^2 \approx -\epsilon_0 E = -1.06 \times 10^{-9} \text{ C} \cdot \text{m}^{-2}$$

单位面积所带电子数

$$n = \sigma / (-e) = 6.63 \times 10^5 \text{ cm}^{-2}$$

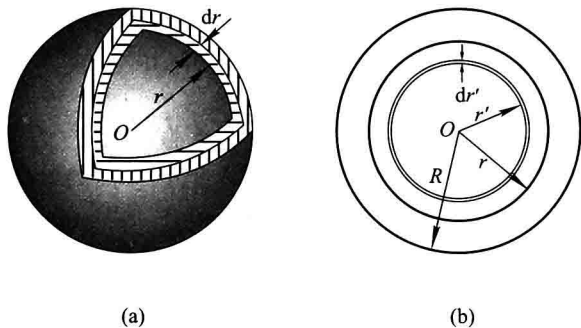
**5-18** 设在半径为  $R$  的球体内,其电荷为对称分布,电荷体密度为

$$\begin{cases} \rho = kr, & 0 \leq r \leq R \\ \rho = 0, & r > R \end{cases}$$

式中  $k$  为一常量. 试分别用高斯定理和电场叠加原理求电场强度  $\mathbf{E}$  与  $r$  的函数关系.

分析 通常有两种处理方法:

(1) 利用高斯定理求球内外的电场分布. 由题意知电荷呈球对称分布,因而电场分布也是球对称的,选择与带电球体同心的球面为高斯面,在球面上电场强度大小为常量,且方向垂直于球面,因而有



题 5-18 图

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = E \cdot 4\pi r^2$$

根据高斯定理  $\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{\Omega} \rho dV$ , 可解得电场强度的分布.

(2) 利用带电球壳电场叠加的方法求球内外的电场分布. 将带电球分割成无数个同心带电球壳, 球壳带电荷为  $dq = \rho \cdot 4\pi r'^2 dr'$ , 每个带电球壳在壳内激发的电场  $d\mathbf{E} = 0$ , 而在球壳外激发的电场

$$d\mathbf{E} = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{e}_r$$

由电场叠加可解得带电球体内外的电场分布

$$\mathbf{E}(r) = \int_0^r d\mathbf{E}, \quad 0 \leq r \leq R$$

$$\mathbf{E}(r) = \int_0^R d\mathbf{E}, \quad r > R$$

**解 1** 因电荷分布和电场分布均为球对称分布, 球面上各点电场强度的大小为常量, 由高斯定理  $\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{\Omega} \rho dV$  得球体内 ( $0 \leq r \leq R$ )

$$E(r) \cdot 4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0} \int_0^r kr \cdot 4\pi r^2 dr = \frac{\pi k}{\epsilon_0} r^4$$

$$\mathbf{E}(r) = \frac{kr^2}{4\epsilon_0} \mathbf{e}_r$$

球体外 ( $r > R$ )

$$E(r) \cdot 4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0} \int_0^R kr \cdot 4\pi r^2 dr = \frac{\pi k}{\epsilon_0} R^4$$

$$\mathbf{E}(r) = \frac{kR^4}{4\epsilon_0 r^2} \mathbf{e}_r$$

**解 2** 将带电球分割成球壳, 壁厚  $dr$  的球壳带电荷

$$dq = \rho dV = kr' \cdot 4\pi r'^2 dr'$$



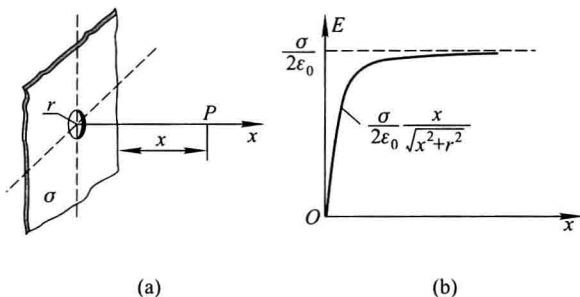
由上述分析,球体内( $0 \leq r \leq R$ )

$$E(r) = \int_0^r \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{kr' \cdot 4\pi r'^2 dr'}{r^2} e_r = \frac{kr^2}{4\epsilon_0} e_r$$

球体外( $r > R$ )

$$E(r) = \int_0^R \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{kr' \cdot 4\pi r'^2 dr'}{r^2} e_r = \frac{kR^3}{4\epsilon_0 r^2} e_r$$

**5-19** 如图(a)所示,一无限大均匀带电薄平板,电荷面密度为 $\sigma$ .在平板中部有一半径为 $r$ 的小圆孔.求圆孔中心轴线上与平板相距为 $x$ 的一点 $P$ 的电场强度.



题 5-19 图

**分析** 用补偿法求解:

利用高斯定理求解电场强度只适用于几种非常特殊的对称性电场.本题的电场分布显然不具有这样的对称性,但可以利用具有对称性的无限大带电平面和带电圆盘的电场叠加,求得电场的分布.

本题可以将小圆孔看作由等量的正、负电荷重叠而成,挖去圆孔的带电平板等效于一个完整的带电平板和一个带相反电荷(电荷面密度 $\sigma' = -\sigma$ )的圆盘.这样,中心轴线上的电场强度等效于带电平板和圆盘各自独立在该处激发电场的矢量和.

**解** 在带电平面附近

$$E_1 = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} e_n$$

$e_n$  为沿平面外法线的单位矢量;圆盘激发的电场为

$$E_2 = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left( 1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + r^2}} \right) e_n$$

它们的合电场强度为

$$E = E_1 + E_2 = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{x}{\sqrt{x^2 + r^2}} e_n$$

$E-x$  关系曲线如图(b)所示.在圆孔中心处  $x = 0$ , 则

$$E = 0$$

在距离圆孔较远时  $x \gg r$ , 则

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \frac{1}{\sqrt{1+r^2/x^2}} \mathbf{e}_n \approx \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \mathbf{e}_n$$

上述结果表明,在  $x \gg r$  时,带电平板上小圆孔对电场分布的影响可以忽略不计。

**5-20** 如图所示,在电荷体密度为  $\rho$  的均匀带电球体中,存在一个球形空腔. 如将带电球心  $O$  指向球形空腔球心  $O'$  的矢量用  $\mathbf{a}$  表示. 试证明球形空腔中任意点的电场强度为

$$\mathbf{E} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} \mathbf{a}$$

**分析** 本题带电体的电荷分布不满足球对称,其电场分布也不是球对称分布,因此无法直接利用高斯定理求电场的分布,但可用补偿法求解. 挖去球形空腔的带电球体在电学上等效于一个完整的、电荷体密度为  $\rho$  的均匀带电球和一个电荷体密度为  $-\rho$ 、球心在  $O'$  的带电小球体(半径等于空腔球体的半径). 大、小球体在空腔内点  $P$  产生的电场强度分别为  $\mathbf{E}_1$ 、 $\mathbf{E}_2$ , 则点  $P$  的电场强度  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$ .

**证** 带电球体内部一点的电场强度为

$$\mathbf{E} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} \mathbf{r}$$

所以

$$\mathbf{E}_1 = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} \mathbf{r}_1, \quad \mathbf{E}_2 = -\frac{\rho}{3\varepsilon_0} \mathbf{r}_2$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$$

由几何关系,  $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 = \mathbf{a}$ , 上式可以改写为

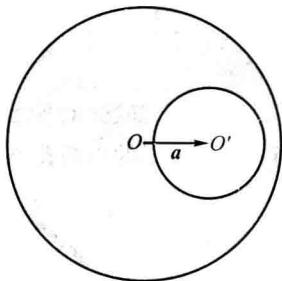
$$\mathbf{E} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} \mathbf{a}$$

**5-21** 如图所示,空间有两个球,球心间距离小于它们的半径之和  $a$ , 因而两球部分重叠,且  $\overrightarrow{OO'} = \mathbf{a}$ . 若让两个球都均匀充满电荷,电荷体密度分别为  $\rho$  和  $-\rho$ , 重叠部分由于正负电荷中和而无电荷. 求重叠区域内的电场强度.

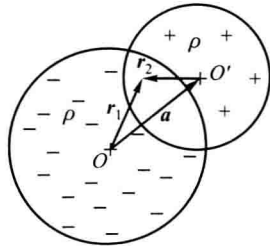
**分析** 尽管本题中电荷分布不具有特定的对称性,但是可以视作两个电荷体密度分别为  $\rho$  和  $-\rho$  的带电球的重叠,重叠区域内的电场强度也同样可以视作两个带电球单独激发电场的叠加.

**解** 带电球体内部一点的电场强度为

$$\mathbf{E} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} \mathbf{r}$$



题 5-20 图



题 5-21 图

所以

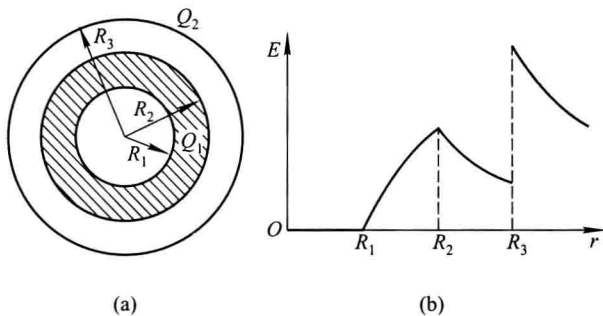
$$E_1 = -\frac{\rho}{3\varepsilon_0}r_1, E_2 = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}r_2$$

$$E = E_1 + E_2 = -\frac{\rho}{3\varepsilon_0}(r_1 - r_2)$$

由几何关系,  $r_1 - r_2 = a$ , 上式可以改写为

$$E = -\frac{\rho}{3\varepsilon_0}a$$

**5-22** 一个内外半径分别为  $R_1$  和  $R_2$  的均匀带电球壳, 总电荷为  $Q_1$ , 球壳外同心罩一个半径为  $R_3$  的均匀带电球面, 球面电荷为  $Q_2$ . 求电场分布. 电场强度是否为离球心距离  $r$  的连续函数? 试分析.



题 5-22 图

**分析** 以球心  $O$  为原点, 球心至场点的距离  $r$  为半径, 作同心球面为高斯面, 如图 (a) 所示. 由于电荷呈球对称分布, 电场强度也为球对称分布, 高斯面上电场强度沿径矢方向, 且大小相等. 因而  $\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 4\pi r^2 E$ , 在确定高斯面内的电荷  $\Sigma q$  后, 利用高斯定理

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \Sigma q / \varepsilon_0$$

即可求得电场强度的分布.

**解** 取半径为  $r$  的同心球面为高斯面, 由上述分析

$$E \cdot 4\pi r^2 = \Sigma q / \varepsilon_0$$

$r < R_1$ , 该高斯面内无电荷,  $\Sigma q = 0$ , 故

$$E_1 = 0$$

$R_1 < r < R_2$ , 高斯面内电荷  $\Sigma q = \frac{Q_1(r^3 - R_1^3)}{R_2^3 - R_1^3}$ , 故

$$E_2 = \frac{Q_1(r^3 - R_1^3)}{4\pi\varepsilon_0(R_2^3 - R_1^3)r^2}$$

$R_2 < r < R_3$ , 高斯面内电荷为  $Q_1$ , 故

$$E_3 = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

$r > R_3$ , 高斯面内电荷为  $Q_1 + Q_2$ , 故

$$E_4 = \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

电场强度的方向均沿径矢方向, 各区域的电场强度分布曲线如图(b)所示.

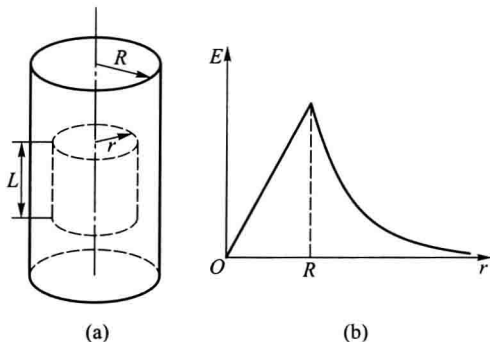
在带电球面的两侧, 电场强度的左右极限不同, 电场强度不连续, 在紧贴  $r = R_3$  的带电球面两侧, 电场强度的跃变量

$$\Delta E = E_4 - E_3 = \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 R_3} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

这一跃变是将带电球面厚度抽象为零的必然结果, 且具有普遍性. 实际带电球面应是有一定厚度的球壳, 壳层内外的电场强度也是连续变化的, 如本题中带电球壳内外的电场, 假如球壳的厚度变小,  $E$  的变化就变陡, 最后当厚度趋于零时,  $E$  的变化成为一跃变.

**5-23** 半径为  $R$  的无限长直圆柱体内均匀分布着电荷, 电荷体密度为  $\rho$ . 试求离轴线为  $r$  处的电场强度  $E$ , 并画出  $E-r$  曲线.

**分析** 电荷分布在无限长直圆柱体内, 呈轴对称, 电场强度也必定呈轴对称分布, 电场强度沿径矢方向, 如图(a)所示. 取同轴圆柱面为高斯面, 只有侧面的电场强度通量不为零, 即有  $\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 2\pi r L E$ , 求出不同半径高斯面内的电荷  $\Sigma q$ , 即可利用高斯定理得各区域电场的分布.



题 5-23 图

**解** 作同轴圆柱面为高斯面. 根据高斯定理

$$E \cdot 2\pi r L = \Sigma q / \epsilon_0$$

$r < R$

$$E \cdot 2\pi r L = \rho \cdot \pi r^2 L / \epsilon_0$$

$$E = \frac{\rho r}{2\epsilon_0} e_r$$

$$r \geq R$$

$$E \cdot 2\pi r L = \rho \cdot \pi R^2 L / \epsilon_0$$

$$E = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0 r} e_r$$

$E-r$  曲线如图(b)所示.

**5-24** 两个带有等量异号电荷的无限长同轴圆柱面, 半径分别为  $R_1$  和  $R_2$  ( $R_2 > R_1$ ), 单位长度上的电荷为  $\lambda$ . 求离轴线为  $r$  处的电场强度: (1)  $r < R_1$ , (2)  $R_1 < r < R_2$ , (3)  $r > R_2$ .

**分析** 电荷分布在无限长同轴圆柱面上, 电场强度也必定呈轴对称分布, 沿径矢方向. 如图(a)所示, 取同轴圆柱面为高斯面, 只有侧面的电场强度通量不为零, 且  $\oint_S E \cdot dS = E \cdot 2\pi r L$ , 求出不同半径高斯面内的电荷  $\Sigma q$ . 利用高斯定理可解得各区域电场的分布.

**解** 作同轴圆柱面为高斯面. 根据高斯定理

$$E \cdot 2\pi r L = \Sigma q / \epsilon_0$$

$$r < R_1$$

$$\Sigma q = 0$$

$$E_1 = 0$$

$$R_1 < r < R_2$$

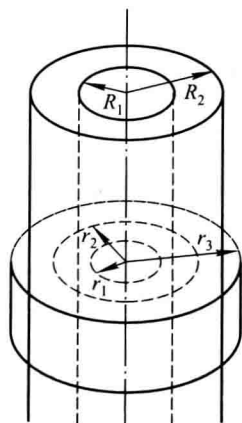
$$\Sigma q = \lambda L$$

$$E_2 = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$$

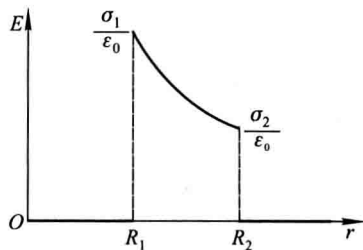
$$r > R_2$$

$$\Sigma q = 0$$

$$E_3 = 0$$



(a)



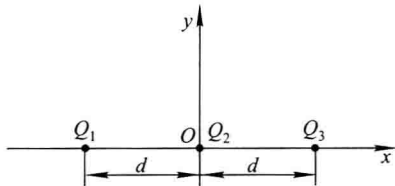
(b)

题 5-24 图

在带电面附近, 电场强度大小不连续, 如图(b)所示, 电场强度有一跃变

$$\Delta E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} = \frac{\lambda L}{2\pi\epsilon_0 rL} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

**5-25** 如图所示, 有三个点电荷  $Q_1$ 、 $Q_2$ 、 $Q_3$  沿一条直线等间距分布, 且  $Q_1 = Q_3 = Q$ , 已知其中任一点电荷所受合力均为零. 求在固定  $Q_1$ 、 $Q_3$  的情况下, 将  $Q_2$  从点  $O$  移到无穷远处外力所做的功.



题 5-25 图

**分析** 由库仑力的定义, 根据  $Q_1$ 、 $Q_3$  所受合力为零可求得  $Q_2$ .

外力做功  $W'$  应等于电场力做功  $W$  的负值, 即  $W' = -W$ . 求电场力做功的方法有两种, ① 根据功的定义, 电场力做的功为

$$W = \int_0^{\infty} Q_2 E \cdot dl$$

其中  $E$  是点电荷  $Q_1$ 、 $Q_3$  产生的合电场强度. ② 根据电场力做功与电势能差的关系, 有

$$W = Q_2(V_0 - V_{\infty}) = Q_2 V_0$$

其中  $V_0$  是  $Q_1$ 、 $Q_3$  在点  $O$  产生的电势(取无穷远处为零电势).

**解 1** 由题意  $Q_1$  所受的合力为零

$$Q_1 \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 d^2} + Q_1 \frac{Q_3}{4\pi\epsilon_0 (2d)^2} = 0$$

解得

$$Q_2 = -\frac{1}{4}Q_3 = -\frac{1}{4}Q$$

由点电荷电场的叠加原理, 垂直于电荷连线作  $Q_1$ 、 $Q_3$  的中垂线, 并取中垂线为  $y$  轴, 电荷  $Q_1$ 、 $Q_3$  在  $y$  轴上任意一点激发的电场强度为

$$E = E_{1y} + E_{3y} = \frac{Qy}{2\pi\epsilon_0 (d^2 + y^2)^{3/2}}$$

将  $Q_2$  从点  $O$  沿  $y$  轴移到无穷远处(沿其他路径所做的功相同, 请想一想为什么?), 外力所做的功为

$$W = - \int_0^{\infty} Q_2 E \cdot dy = - \int_0^{\infty} \left(-\frac{1}{4}Q\right) \frac{Qy}{2\pi\epsilon_0 (d^2 + y^2)^{3/2}} dy = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 d}$$

**解 2** 与解 1 相同, 由任一点电荷所受合力均为零得  $Q_2 = -\frac{1}{4}Q$ . 并由电势的叠加得  $Q_1$ 、 $Q_3$  在点  $O$  电势

$$V_0 = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 d} + \frac{Q_3}{4\pi\epsilon_0 d} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 d}$$

将  $Q_2$  从点  $O$  推到无穷远处的过程中,外力做的功为

$$W' = -Q_2 V_0 = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 d}$$

比较上述两种方法,显然用功与电势能变化的关系来求解较为简洁.这是因为在许多实际问题中直接求电场分布困难较大,而求电势分布要简单得多.

**5-26** 已知均匀带电直线附近的电场强度近似为

$$\mathbf{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \mathbf{e}_r$$

式中  $\lambda$  为电荷线密度.(1) 求在  $r = r_1$  和  $r = r_2$  两点间的电势差;(2) 在点电荷的电场中,我们曾取  $r \rightarrow \infty$  处的电势为零,求均匀带电直线附近的电势时能否这样取? 试说明.

**解** (1) 由于电场力做功与路径无关,若取径矢为积分路径,则有

$$U_{12} = \int_{r_1}^{r_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

(2) 不能. 严格地讲,电场强度  $\mathbf{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \mathbf{e}_r$  仅适用于无限长的均匀带电直线,这就意味着在这样的电荷模型下电荷分布在无限空间.  $r \rightarrow \infty$  处的电势应与直线上的电势相等.

**5-27** 水分子电偶极矩  $\mathbf{p}$  的大小为  $6.2 \times 10^{-30} \text{ C} \cdot \text{m}$ . 求在下述情况下,距离分子为  $r = 5.00 \times 10^{-9} \text{ m}$  处的电势.(1)  $\theta = 0^\circ$ ; (2)  $\theta = 45^\circ$ ; (3)  $\theta = 90^\circ$ .  $\theta$  为  $\mathbf{r}$  与  $\mathbf{p}$  之间的夹角.

**解** 由点电荷电势的叠加原理

$$V = V_+ + V_- = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r_+} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r_-} = \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

$$(1) \text{ 由 } \theta = 0^\circ \quad V = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^2} = 2.23 \times 10^{-3} \text{ V}$$

$$(2) \text{ 由 } \theta = 45^\circ \quad V = \frac{p \cos 45^\circ}{4\pi\epsilon_0 r^2} = 1.58 \times 10^{-3} \text{ V}$$

$$(3) \text{ 由 } \theta = 90^\circ \quad V = \frac{p \cos 90^\circ}{4\pi\epsilon_0 r^2} = 0$$

**5-28** 一个球形雨滴半径为  $0.40 \text{ mm}$ , 带有电荷量  $1.6 \text{ pC}$ , 它表面的电势有多大? 两个这样的雨滴相遇后合并为一个较大的雨滴, 这个雨滴表面的电势又是多大?

**分析** 取无穷远处为零电势参考点, 半径为  $R$  带电荷量为  $q$  的带电球形雨滴表面电势为

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R}$$

当两个球形雨滴合并为一个较大雨滴后,半径增大为 $\sqrt[3]{2}R$ ,代入上式后可以求出两雨滴相遇合并后,雨滴表面的电势.

**解** 根据已知条件球形雨滴半径 $R_1 = 0.40 \text{ mm}$ ,带有电荷量 $q_1 = 1.6 \text{ pC}$ ,可以求得带电球形雨滴表面电势

$$V_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{R_1} = 36 \text{ V}$$

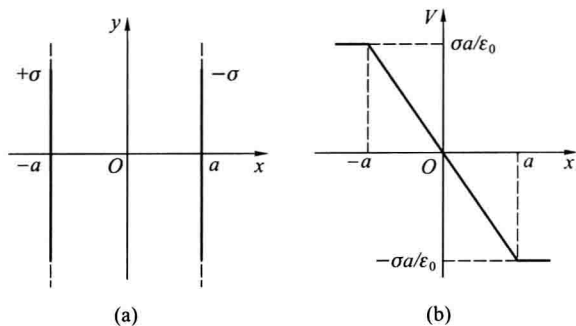
当两个球形雨滴合并为一个较大雨滴后,雨滴半径 $R_2 = \sqrt[3]{2}R_1$ ,带有电荷量 $q_2 = q_1$ ,雨滴表面电势

$$V_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2q_1}{\sqrt[3]{2}R_1} = 57 \text{ V}$$

两个球形雨滴合并后电势升高,电势能增大,这表明两个带同号电荷的雨滴融合过程中,外界要克服库仑斥力做功.

**5-29** 电荷面密度分别为 $+\sigma$ 和 $-\sigma$ 的两块“无限大”均匀带电的平行平板,如图(a)所示放置,取坐标原点 $O$ 为零电势点,求空间各点的电势分布,并画出电势随位置坐标 $x$ 变化的关系曲线.

**分析** 由于“无限大”均匀带电的平行平板电荷分布在“无限”空间,不能采用点电荷电势叠加的方法求电势分布;首先由“无限大”均匀带电平板的电场强度叠加求电场强度的分布,然后依照电势的定义式求电势分布.



题 5-29 图

**解** 由“无限大”均匀带电平板的电场强度 $\pm \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \mathbf{i}$ ,叠加求得电场强度的分布,

$$\mathbf{E} = \begin{cases} 0 & (x < -a) \\ \frac{\sigma}{\epsilon_0} \mathbf{i} & (-a < x < a) \\ 0 & (x > a) \end{cases}$$



电势等于移动单位正电荷到零电势点(坐标原点)电场力所做的功,则

$$V = \int_x^0 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}x \quad (-a < x < a)$$

$$V = \int_x^{-a} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \int_{-a}^0 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}a \quad (x < -a)$$

$$V = \int_x^a \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \int_a^0 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}a \quad (x > a)$$

电势变化曲线如图(b)所示.

**5-30** 两个同心球面的半径分别为  $R_1$  和  $R_2$ , 各自带有电荷  $Q_1$  和  $Q_2$ . 求:

(1) 各区域电势的分布, 并画出电势分布曲线; (2) 两球面上的电势差.

**分析** 通常可采用两种方法.

(1) 由于电荷均匀分布在球面上, 电场分布同样具有球对称性, 因此, 可根据电势与电场强度的积分关系求电势. 取同心球面为高斯面, 借助高斯定理先求得各区域的电场强度分布, 再由  $V_p = \int_p^\infty \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$  可求得电势分布.

(2) 利用电势叠加原理求电势. 一个均匀带电的球面, 在球面外产生的电势为

$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

在球面内电场强度为零, 电势处处相等, 等于球面的电势

$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

其中  $R$  是球面的半径. 利用电势叠加原理, 将两个球面在各区域产生的电势叠加, 可求得电势的分布.

**解 1** (1) 由高斯定理可求得电场分布

$$\mathbf{E}_1 = 0 \quad (r < R_1)$$

$$\mathbf{E}_2 = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \mathbf{e}_r \quad (R_1 < r < R_2)$$

$$\mathbf{E}_3 = \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \mathbf{e}_r \quad (r > R_2)$$

由电势定义  $V = \int_r^\infty \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$  可求得各区域的电势分布.

当  $r \leq R_1$  时, 有

$$\begin{aligned} V_1 &= \int_r^{R_1} \mathbf{E}_1 \cdot d\mathbf{l} + \int_{R_1}^{R_2} \mathbf{E}_2 \cdot d\mathbf{l} + \int_{R_2}^\infty \mathbf{E}_3 \cdot d\mathbf{l} \\ &= 0 + \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) + \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2} \end{aligned}$$

$$= \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R_1} + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 R_2}$$

当  $R_1 \leq r \leq R_2$  时,有

$$\begin{aligned} V_2 &= \int_r^{R_2} \mathbf{E}_2 \cdot d\mathbf{l} + \int_{R_2}^{\infty} \mathbf{E}_3 \cdot d\mathbf{l} \\ &= \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{R_2} \right) + \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\epsilon_0 R_2} \\ &= \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 R_2} \end{aligned}$$

当  $r \geq R_2$  时,有

$$\begin{aligned} V_3 &= \int_r^{\infty} \mathbf{E}_3 \cdot d\mathbf{l} \\ &= \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\epsilon_0 r} \end{aligned}$$

电势分布曲线如图所示.

(2) 两个球面间的电势差

$$U_{12} = \int_{R_1}^{R_2} \mathbf{E}_2 \cdot d\mathbf{l} = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

**解 2** (1) 由各球面电势的叠加计算电势分布. 若该点位于两个球面内, 即  $r \leq R_1$ , 则

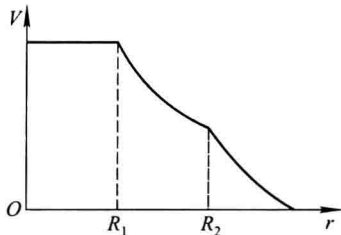
$$V_1 = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R_1} + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 R_2}$$

若该点位于两个球面之间, 即  $R_1 \leq r \leq R_2$ , 则

$$V_2 = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 R_2}$$

若该点位于两个球面之外, 即  $r \geq R_2$ , 则

$$V_3 = \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\epsilon_0 r}$$



题 5-30 图

(2) 两个球面间的电势差

$$U_{12} = |V_1 - V_2|_{r=R_2} = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R_1} - \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R_2}$$

**5-31** 一半径为  $R$  的无限长带电细棒, 其内部的电荷均匀分布, 电荷体密度为  $\rho$ . 现取棒表面为零电势, 求空间电势分布, 并画出电势分布曲线.

**分析** 无限长均匀带电细棒电荷分布呈轴对称, 其电场和电势的分布也呈轴对称. 选取同轴柱面为高斯面, 利用高斯定理

$$\oint_s \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_\Omega \rho dV$$

可求得电场分布  $E(r)$ , 取棒表面为零电势 ( $V_b = 0$ ), 根据电势的定义

$$V = \int_r^b \mathbf{E}_2 \cdot d\mathbf{l}$$

即可得空间任意点的电势

**解** 取高度为  $l$ 、半径为  $r$  且与带电细棒同轴的圆柱面为高斯面, 由高斯定理得当  $r \leq R$  时

$$E \cdot 2\pi r l = \pi r^2 l \rho / \epsilon_0$$

得 
$$E(r) = \frac{\rho r}{2\epsilon_0}$$

当  $r \geq R$  时

$$E \cdot 2\pi r l = \pi R^2 l \rho / \epsilon_0$$

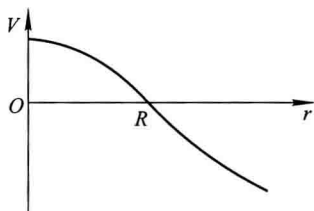
得 
$$E(r) = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0 r}$$

取棒表面为零电势, 由电势的定义得

当  $r \leq R$  时 
$$V(r) = \int_r^R \frac{\rho r}{2\epsilon_0} dr = \frac{\rho}{4\epsilon_0} (R^2 - r^2)$$

当  $r \geq R$  时 
$$V(r) = \int_r^R \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0 r} dr = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0} \ln \frac{R}{r}$$

电势分布曲线如图所示.



题 5-31 图

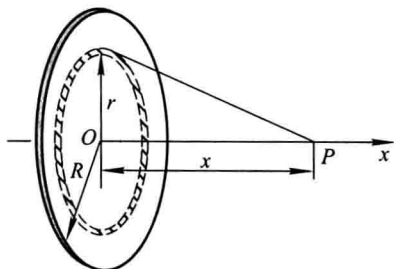
**\* 5-32** 一圆盘半径  $R = 3.00 \times 10^{-2}$  m, 圆盘均匀带电, 电荷面密度  $\sigma = 2.00 \times 10^{-5}$  C · m<sup>-2</sup>. (1) 求轴线上的电势分布; (2) 根据电场强度和电势梯度的关系求电场分布; (3) 计算离盘心 30.0 cm 处的电势和电场强度.

**分析** 将圆盘分割为一组不同半径的同心带电细圆环, 根据电势叠加原理, 利用带电细圆环轴线上一点的电势公式, 将这些不同半径的带电圆环在轴线上一点的电势相加, 即可求得带电圆盘在轴线上的电势分布. 再根据电场强度与电势间的微分关系可求得电场强度的分布.

**解** (1) 如图所示, 取无穷远处为零电势, 圆盘上半径为  $r$  的带电细圆环在轴线上任意一点  $P$  激发的电势

$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma \cdot 2\pi r dr}{\sqrt{r^2 + x^2}}$$

由电势叠加原理, 轴线上任一点  $P$  的电势为



题 5-32 图

$$V = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \int_0^R \frac{rdr}{\sqrt{r^2+x^2}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} (\sqrt{R^2+x^2} - x) \quad (1)$$

(2) 轴线上任一点  $P$  的电场强度

$$\mathbf{E} = -\nabla V = -\frac{dV}{dx} \mathbf{i} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left( 1 - \frac{x}{\sqrt{R^2+x^2}} \right) \mathbf{i} \quad (2)$$

(3) 将场点至盘心的距离  $x = 30.0 \text{ cm}$  分别代入式(1)和式(2), 得

$$V = 1\,691 \text{ V}$$

$$E = 5\,607 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$$

当  $x \ll R$  时, 圆盘也可视为点电荷, 其电荷量为  $q = \pi R^2 \sigma = 5.65 \times 10^{-8} \text{ C}$ , 依照点电荷电场中电势和电场强度的计算公式, 有

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 x} = 1\,695 \text{ V}$$

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 x^2} = 5\,649 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$$

由此可见, 当  $x \ll R$  时, 可以忽略圆盘的几何形状, 将带电的圆盘当作点电荷来处理, 在本题中作这样的近似处理,  $E$  和  $V$  的误差分别不超过 0.3% 和 0.8%, 这已足以满足一般测量的精度要求。

**5-33** 两根同长的同轴圆柱面 ( $R_1 = 3.00 \times 10^{-2} \text{ m}$ ,  $R_2 = 0.10 \text{ m}$ ), 带有等量异号的电荷, 两者的电势差为 450 V. 求: (1) 圆柱面单位长度上所带的电荷; (2)  $r = 0.050 \text{ m}$  处的电场强度.

解 (1) 两圆柱面之间的电场

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

根据电势差的定义有

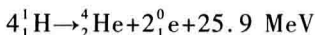
$$U_{12} = \int_{R_1}^{R_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

解得

$$\lambda = 2\pi\varepsilon_0 U_{12} / \ln \frac{R_2}{R_1} = 2.1 \times 10^{-8} \text{ C} \cdot \text{m}^{-1}$$

$$(2) \quad E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} = 7.5 \times 10^3 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$$

**5-34** 轻原子核(如氢及其同位素氘、氚的原子核)结合成为较重原子核的过程叫做核聚变. 在此过程中可以释放出巨大的能量. 例如四个氢原子核(质子)结合成一个氦原子核( $\alpha$ 粒子)时, 可以放出 25.9 MeV 的能量. 即



这类聚变反应提供了太阳发光、发热的能源. 如果我们能够在地球上实现核聚变, 就能获得丰富的廉价清洁能源. 但是要实现核聚变难度相当大, 只有在极高

的温度下,原子热运动的速度非常大时,才能使原子核相碰而结合,故核聚变反应又称热核反应. 试估算:(1) 一个质子( ${}^1\text{H}$ )以怎样的动能(用电子伏表示)才能从很远处到达与另一个质子相接触的距离;(2) 平均热运动动能达到此值时,气体温度有多高(质子的平均半径约为  $1.0 \times 10^{-15} \text{ m}$ ).

分析 作为估算,可以将质子上的电荷分布看作球对称分布,因此质子周围的电势分布为

$$V = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r}$$

将质子作为经典粒子处理,当另一质子从无穷远处以动能  $E_k$  飞向该质子时,势能增加,动能减少,如能克服库仑斥力而使两质子相碰,则质子的初始动能为

$$E_{k0} \geq eV_{2R} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{2R}$$

假设该氢原子核的初始动能就是氢分子热运动的平均动能,根据分子动理论知

$$\bar{E}_k = \frac{3}{2} kT$$

由上述分析可以估算出质子的动能和此时氢气的温度.

解 (1) 两个质子相接触时势能最大,根据能量守恒

$$E_{k0} \geq eV_{2R} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{2R} = 7.2 \times 10^5 \text{ eV}$$

由  $E_{k0} = mc^2 - m_0c^2$ ① 可以估算出质子初始速率

$$v_0 = \left[ 1 - \frac{1}{(E_{k0}/m_0c^2 + 1)^2} \right]^{1/2} c = 0.91c = 2.73 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

(2) 依照上述假设,质子的初始动能等于氢分子的平均动能

$$E_{k0} = \bar{E}_k = \frac{3}{2} kT$$

得

$$T = \frac{2E_{k0}}{3k} \approx 5.6 \times 10^9 \text{ K}$$

实际上在这么高的温度下,中性原子已经被离解为电子和正离子,成为等离子态,高温的等离子体无法用常规的容器来约束,需要采用环形磁场来约束高温等离子体(托卡马克装置).

**5-35** 在一次典型的闪电中,两个放电点间的电势差约为  $10^9 \text{ V}$ ,被迁移的电荷约为  $30 \text{ C}$ . (1) 如果释放出来的能量都用来使  $0^\circ \text{ C}$  的冰熔化成  $0^\circ \text{ C}$  的水,则可熔化多少冰?(冰的熔化热  $L = 3.34 \times 10^5 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1}$ .) (2) 假设每一个家庭 1 年消耗的能量为  $3000 \text{ kW} \cdot \text{h}$ ,则可为多少个家庭提供 1 年的能量消耗?

① 有关相对论动能请参阅教材第 14 章.

解 (1) 闪电中释放出的能量为冰所吸收,故可熔化冰的质量为

$$m = \frac{\Delta E}{L} = \frac{qU}{L} = 8.98 \times 10^4 \text{ kg}$$

即可熔化约 90 吨冰.

(2) 一个家庭 1 年消耗的能量为

$$E_0 = 3\,000 \text{ kW} \cdot \text{h} = 1.08 \times 10^{10} \text{ J}$$

$$n = \frac{\Delta E}{E_0} = \frac{qU}{E_0} = 2.8$$

\*5-36 两个半径为  $R$  的圆环分别带有等量异号电荷  $\pm q$ , 圆环如图所示相对  $O$  点对称平行放置, 其间距为  $l$ , 并且有  $l \ll R$ , (1) 以两环的对称中心  $O$  为坐标原点, 两环圆心连线为  $x$  轴, 试求  $x$  轴上的电势分布; (2) 若取无穷远处为零电势, 证明当  $x \gg R$  时, 轴线上的电势  $V = \frac{ql}{4\pi\epsilon_0 x^2}$ .

分析 参照第 5-7 节例 1, 带电圆环在轴线上一点点的电势为

$$V = \frac{\mp q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{R^2 + (x \pm l/2)^2}}$$

由电势的叠加原理可以求出两环圆心连线的  $x$  轴上的电势分布.

解 (1) 由带电圆环电势的叠加原理, 两环圆心连线的  $x$  轴上的电势为

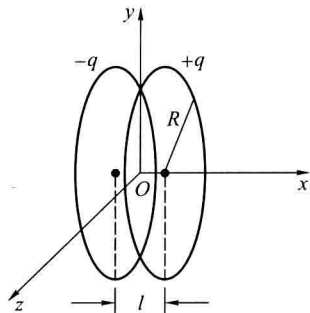
$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{R^2 + (x-l/2)^2}} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{R^2 + (x+l/2)^2}}$$

(2) 当  $x \gg l, x \gg R$  时, 化简整理得

$$\begin{aligned} V &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{R^2 + x^2 - lx + l^2/4}} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{R^2 + x^2 + xl + l^2/4}} \\ &\approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0 x} \left( \frac{1}{\sqrt{1-l/x}} - \frac{1}{\sqrt{1+l/x}} \right) \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 x} \left[ \left( 1 + \frac{l}{2x} + \dots \right) - \left( 1 - \frac{l}{2x} + \dots \right) \right] \\ &= \frac{ql}{4\pi\epsilon_0 x^2} \end{aligned}$$

在  $x \gg R$  时带电圆环等效于一对带等量异号的点电荷, 即电偶极子. 上式就是电偶极子延长线上一点的电势.

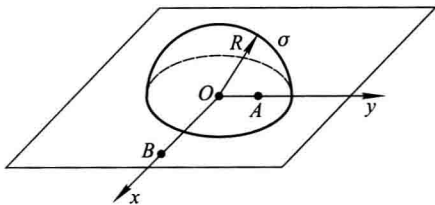
5-37 如图所示, 在  $Oxy$  平面上倒扣着半径为  $R$  的半球面, 半球面上电荷均匀分布, 其电荷面密度为  $\sigma$ .  $A$  点的坐标为  $(0, R/2)$ ,  $B$  点的坐标为  $(3R/2,$



题 5-36 图

0), 求电势差  $U_{AB}$ .

分析 电势的叠加是标量的叠加, 根据对称性, 带电半球面在  $Oxy$  平面上各点产生的电势就等于带电球面在该点激发电势的一半. 据此, 可先求出一个完整球面在  $A$ 、 $B$  间的电势差  $U'_{AB}$ , 再求出半球面时的电势差  $U_{AB}$ . 由于带电球面内等电势, 球面内  $A$  点电势等于球表面的电势, 故



题 5-37 图

$$U_{AB} = \frac{1}{2} U'_{AB} = \frac{1}{2} (V'_R - V'_B)$$

其中  $V'_R$  是带电球表面的电势,  $V'_B$  是带电球面在  $B$  点的电势.

解 假设将半球面扩展为带有相同电荷面密度  $\sigma$  的一个完整球面, 此时在  $A$ 、 $B$  两点的电势分别为

$$V'_A = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{\sigma R}{\epsilon_0} = V'_R$$

$$V'_B = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 r} = \frac{2\sigma R}{3\epsilon_0}$$

则半球面在  $A$ 、 $B$  两点的电势差

$$U_{AB} = \frac{1}{2} (V'_R - V'_B) = \frac{\sigma R}{6\epsilon_0}$$

**5-38** 在玻尔的氢原子模型中, 电子沿半径为  $0.53 \times 10^{-10} \text{ m}$  的圆周绕原子核旋转. (1) 若把电子从原子中拉出来需要克服电场力做多少功? (2) 电子的电离能为多少?

解 (1) 电子在玻尔轨道上作圆周运动时, 它的电势能为

$$E_p = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r}$$

因此, 若把电子从原子中拉出来需要克服电场力做功

$$W' = |E_p| = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} = 27.2 \text{ eV}$$

(2) 电子在玻尔轨道上运动时, 静电力提供电子作圆周运动所需的向心力, 即

$$\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{mv^2}{r}$$

此时, 电子的动能为

$$E_k = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r}$$

其总能量为

$$E = E_k + E_p = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r} = -13.6 \text{ eV}$$

电子的电离能等于外界把电子从原子中拉出来需要的最低能量,即

$$E_0 = |E| = 13.6 \text{ eV}$$

由于电子围绕原子核运动具有动能,使电子脱离原子核的束缚所需的电离能小于在此过程中克服电场力所做的功。

## 第六章 静电场中的导体与电介质

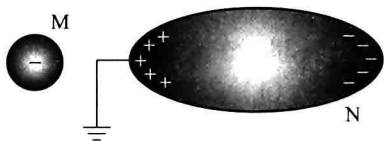
**6-1** 将一个带正电的带电体 A 从远处移到一个不带电的导体 B 附近,不带电导体 B 的电势将( )

- (A) 升高 (B) 降低  
(C) 不会发生变化 (D) 无法确定

**分析与解** 不带电的导体 B 相对无穷远处为零电势. 由于带正电的带电体 A 移到不带电的导体 B 附近时,在导体 B 的近端感应负电荷,在远端感应正电荷,不带电导体的电势将高于无穷远处,因而正确答案为(A).

**6-2** 将一带负电的物体 M 靠近一不带电的导体 N,在 N 的左端感应出正电荷,右端感应出负电荷,如图所示. 若将导体 N 的左端接地,则( )

- (A) N 上的负电荷入地  
(B) N 上的正电荷入地  
(C) N 上的所有电荷入地  
(D) N 上所有的感应电荷入地

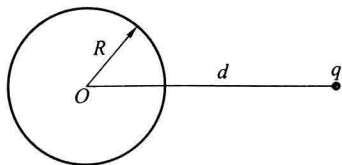


题 6-2 图

**分析与解** 导体 N 接地表明导体 N 为零电势,即与无穷远处等电势,这与导体 N 在哪一端接地无关. 因而正确答案为(A).

**6-3** 如图所示,将一个电荷量为  $q$  的点电荷放在一个半径为  $R$  的不带电的导体球附近,点电荷距导体球球心为  $d$ ,如图所示. 设无限远处为零电势,则在导体球球心  $O$  点有( )

- (A)  $E=0, V=\frac{q}{4\pi\epsilon_0 d}$   
(B)  $E=\frac{q}{4\pi\epsilon_0 d^2}, V=\frac{q}{4\pi\epsilon_0 d}$   
(C)  $E=0, V=0$   
(D)  $E=\frac{q}{4\pi\epsilon_0 d^2}, V=\frac{q}{4\pi\epsilon_0 R}$



题 6-3 图



**分析与解** 达到静电平衡时导体内处处电场强度为零. 点电荷  $q$  在导体球表面感应等量异号的感应电荷  $\pm q'$ , 导体球表面的感应电荷  $\pm q'$  在球心  $O$  点激发的电势为零,  $O$  点的电势等于点电荷  $q$  在该处激发的电势. 因而正确答案为(A).

**6-4** 根据电介质中的高斯定理, 在电介质中电位移矢量沿任意一个闭合曲面的积分等于这个曲面所包围自由电荷的代数和. 下列推论正确的是( )

(A) 若电位移矢量沿任意一个闭合曲面的积分等于零, 曲面内一定没有自由电荷

(B) 若电位移矢量沿任意一个闭合曲面的积分等于零, 曲面内电荷的代数和一定等于零

(C) 若电位移矢量沿任意一个闭合曲面的积分不等于零, 曲面内一定有极化电荷

(D) 介质中的高斯定理表明电位移矢量仅仅与自由电荷的分布有关

(E) 介质中的电位移矢量与自由电荷和极化电荷的分布有关

**分析与解** 电位移矢量沿任意一个闭合曲面的积分等于零, 表明曲面内自由电荷的代数和等于零; 由于电介质会改变自由电荷的空间分布, 介质中的电位移矢量与自由电荷和极化电荷的分布有关. 因而正确答案为(E).

**6-5** 对于各向同性的均匀介质, 下列概念正确的是( )

(A) 电介质充满整个电场并且自由电荷的分布不发生变化时, 介质中的电场强度一定等于没有电介质时该点电场强度的  $1/\epsilon_r$  倍

(B) 电介质中的电场强度一定等于没有介质时该点电场强度的  $1/\epsilon_r$  倍

(C) 在电介质充满整个电场时, 电介质中的电场强度一定等于没有电介质时该点电场强度的  $1/\epsilon_r$  倍

(D) 电介质中的电场强度一定等于没有介质时该点电场强度的  $\epsilon_r$  倍

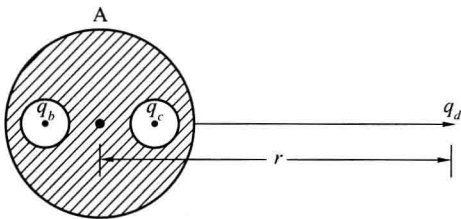
**分析与解** 电介质中的电场由自由电荷激发的电场与极化电荷激发的电场叠加而成, 由于极化电荷可能会改变电场中导体表面自由电荷的分布, 由电介质中的高斯定理, 仅当电介质充满整个电场并且自由电荷的分布不发生变化时, 对电介质中任意高斯面  $S$  有

$$\oint_S (1 + \chi_c) \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \oint_S \mathbf{E}_0 \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_i q_i$$

即  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 / \epsilon_r$ , 因而正确答案为(A).

**6-6** 不带电的导体球 A 含有两个球形空腔, 两空腔中心分别有一点电荷  $q_b$ 、 $q_c$ , 导体球外距导体球较远的  $r$  处还有一个点电荷  $q_d$  (如图所示). 试求点电荷  $q_b$ 、 $q_c$ 、 $q_d$  各自受到的电场力.

**分析与解** 根据导体静电平衡时电荷分布的规律, 空腔内点电荷的电场线



题 6-6 图

终止于空腔内表面感应电荷；导体球 A 外表面的感应电荷近似均匀分布，因而近似可看作均匀带电球对点电荷  $q_d$  的作用力。

$$F_d = \frac{(q_b + q_c)q_d}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

点电荷  $q_d$  与导体球 A 外表面感应电荷在球形空腔内激发的电场为零，点电荷  $q_b$ 、 $q_c$  处于球形空腔的中心，空腔内表面感应电荷均匀分布，点电荷  $q_b$ 、 $q_c$  受到的作用力为零。

**6-7** 一真空二极管，其主要构件是一个半径  $R_1 = 5.0 \times 10^{-4}$  m 的圆柱形阴极和一个套在阴极外、半径为  $R_2 = 4.5 \times 10^{-3}$  m 的同轴圆筒形阳极。阳极电势比阴极电势高 300 V，阴极与阳极的长均为  $L = 2.5 \times 10^{-2}$  m。假设电子从阴极射出时的初速度为零，求：(1) 该电子到达阳极时所具有的动能和速率；(2) 电子刚从阴极射出时所受的电场力。

**分析** (1) 如图所示，由于半径  $R_1 \ll L$ ，因此可将电极视为无限长圆柱面，阴极和阳极之间的电场具有轴对称性。从阴极射出的电子在电场力作用下从静止开始加速，电子所获得的动能等于电场力所做的功，也即等于电子势能的减少。由此，可求得电子到达阳极时的动能和速率。

(2) 计算阴极表面附近的电场强度，由  $F = qE$  求出电子在阴极表面所受的电场力。

**解** (1) 电子到达阳极时，势能的减少量为

$$\Delta E_{ep} = -eV = -4.8 \times 10^{-17} \text{ J}$$

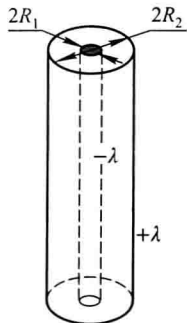
由于电子的初始速度为零，故

$$E_{ek} = \Delta E_{ek} = -\Delta E_{ep} = 4.8 \times 10^{-17} \text{ J} = 300 \text{ eV}$$

由于  $E_{ek} \ll m_0 c^2 = 0.512 \text{ MeV}$ ，因此电子到达阳极的速率为

$$v = \sqrt{\frac{2E_{ek}}{m}} = \sqrt{\frac{2eV}{m}} = 1.03 \times 10^7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

(2) 两极间的电场强度为



题 6-7 图

$$\mathbf{E} = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \mathbf{e}_r$$

阴极与阳极间的电势差为

$$V = \int_{R_1}^{R_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \int_{R_1}^{R_2} -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} dr = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

负号表示阳极电势高于阴极电势. 阴极表面电场强度为

$$\mathbf{E} = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R_1} \mathbf{e}_r = -\frac{V}{R_1 \ln \frac{R_2}{R_1}} \mathbf{e}_r$$

电子在阴极表面受力为

$$\mathbf{F} = -e\mathbf{E} = 4.37 \times 10^{-14} e_r \text{ N}$$

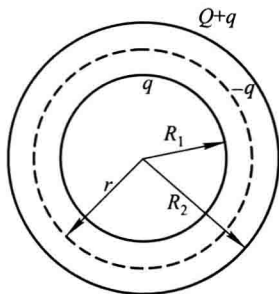
这个力尽管很小,但作用在质量为  $9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}$  的电子上,电子获得的加速度可达重力加速度的  $5 \times 10^{15}$  倍.

**6-8** 一导体球半径为  $R_1$ ,外罩一半径为  $R_2$  的同心薄导体球壳,外球壳所带总电荷为  $Q$ ,而内球的电势为  $V_0$ . 求此系统的电势和电场分布.

分析 若  $V_0 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_2}$ ,内球电势等于外球壳的电势,则内球不带电,内、外球壳间必定等电势;

若  $V_0 \neq \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_2}$ ,内、外球壳间存在电势差,则内球带电,内、外球壳间必定存在电场;

不失一般情况,假设内导体球带电荷  $q$ ,导体达到静电平衡时电荷的分布如图所示,依照电荷的这一分布,利用高斯定理可求得电场分布.并由  $V_p = \int_p^\infty \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$  或电势叠加原理求出电势的分布.最后将电场强度和电势用已知量  $V_0$ 、 $Q$ 、 $R_1$ 、 $R_2$  表示.



题 6-8 图

解 根据静电平衡时电荷的分布,可知电场分布呈球对称.作半径为  $r$  的同心球面为高斯面,由高斯定理  $\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = E(r) \cdot 4\pi r^2 = \sum q/\epsilon_0$ ,根据不同半径的高斯面内的电荷分布,解得各区域内的电场分布为

$$r < R_1 \text{ 时, } \quad E_1(r) = 0$$

$$R_1 < r < R_2 \text{ 时, } \quad E_2(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

$$r > R_2 \text{ 时, } \quad E_2(r) = \frac{Q+q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

由电场强度与电势的积分关系,可得各相应区域内的电势分布.

$r < R_1$  时,

$$V_1 = \int_r^\infty \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_r^{R_1} \mathbf{E}_1 \cdot d\mathbf{l} + \int_{R_1}^{R_2} \mathbf{E}_2 \cdot d\mathbf{l} + \int_{R_2}^\infty \mathbf{E}_3 \cdot d\mathbf{l} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_1} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_2}$$

$R_1 < r < R_2$  时,

$$V_2 = \int_r^\infty \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_r^{R_2} \mathbf{E}_2 \cdot d\mathbf{l} + \int_{R_2}^\infty \mathbf{E}_3 \cdot d\mathbf{l} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_2}$$

$r > R_2$  时,

$$V_3 = \int_r^\infty \mathbf{E}_3 \cdot d\mathbf{l} = \frac{Q+q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

也可以从球面电势的叠加求电势的分布. 在导体球内 ( $r < R_1$ )

$$V_1 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_1} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_2}$$

在导体球和球壳之间 ( $R_1 < r < R_2$ )

$$V_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_2}$$

在球壳外 ( $r > R_2$ )

$$V_3 = \frac{Q+q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

由题意

$$V_1 = V_0 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_1} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_2}$$

得

$$q = 4\pi\epsilon_0 R_1 V_0 - \frac{R_1}{R_2} Q$$

把上式代入电场、电势的分布, 于是可得

$r < R_1$  时,

$$E_1 = 0; V_1 = V_0$$

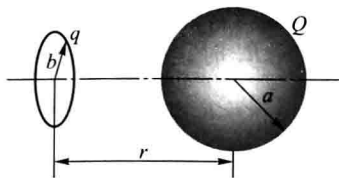
$$R_1 < r < R_2 \text{ 时, } E_2 = \frac{R_1 V_0}{r^2} - \frac{R_1 Q}{4\pi\epsilon_0 R_2 r^2}; V_2 = \frac{R_1 V_0}{r} + \frac{(r - R_1) Q}{4\pi\epsilon_0 R_2 r}$$

$$r > R_2 \text{ 时, } E_3 = \frac{R_1 V_0}{r^2} + \frac{(R_2 - R_1) Q}{4\pi\epsilon_0 R_2 r^2}; V_3 = \frac{R_1 V_0}{r} + \frac{(R_2 - R_1) Q}{4\pi\epsilon_0 R_2 r}$$

**\*6-9** 如图所示, 一个半径为  $a$ 、电荷为  $Q$  的导体球, 现将一半径为  $b$ 、均匀带电荷为  $q$  的圆环放在球旁, 圆环的轴线通过球心, 环心到球心的距离为  $r$ , 试求导体球心的电势.

分析 导体球达到静电平衡时, 感应电荷分布在导体球表面, 由导体表面电荷元的电势叠加不难求得感应电荷在球心激发的电势

$$V_a = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 a} \int_S dq$$



题 6-9 图

再由 5-7 节例 1, 带电圆环在中心轴线上一点激发的电势为

$$V_b = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\sqrt{b^2+r^2}}$$

叠加即可以求得球心的电势.

**解** 在导体球表面取电荷元  $dq = \sigma dS$ , 导体球表面感应电荷在球心一点产生的电势为

$$V_a = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 a} \int_s \sigma dS$$

尽管由于静电感应, 导体球表面的电荷分布不均匀, 但静电感应的净电荷为零,

导体表面净电荷依然为  $Q$ ,  $V_a = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a}$ .

由电势的叠加, 球心的电势等于圆环和导体球激发电势之和, 即

$$V = V_a + V_b = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\sqrt{b^2+r^2}}$$

**6-10** 如图所示, 在一半径为  $R_1 = 6.0 \text{ cm}$  的金属球 A 外面套有一个同心的金属球壳 B. 已知球壳 B 的内、外半径分别为  $R_2 = 8.0 \text{ cm}$ ,  $R_3 = 10.0 \text{ cm}$ . 设球 A 带有总电荷  $Q_A = 3.0 \times 10^{-8} \text{ C}$ , 球壳 B 带有总电荷  $Q_B = 2.0 \times 10^{-8} \text{ C}$ . (1) 求球壳 B 内、外表面上所带的电荷以及球 A 和球壳 B 的电势; (2) 将球壳 B 接地然后断开, 再把金属球 A 接地, 求球 A 和球壳 B 内、外表面上所带的电荷以及球 A 和球壳 B 的电势.

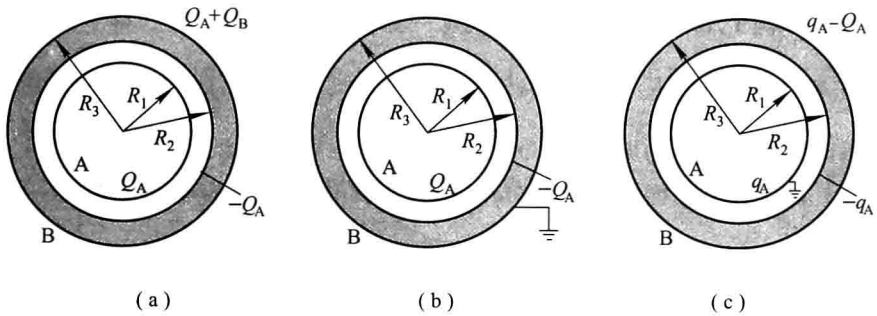
**分析** (1) 根据静电感应和静电平衡时导体表面电荷分布的规律, 电荷  $Q_A$  均匀分布在球 A 表面, 球壳 B 内表面带电荷  $-Q_A$ , 外表面带电荷  $Q_B + Q_A$ , 电荷在导体表面均匀分布 [图(a)], 由带电球面电势的叠加可求得球 A 和球壳 B 的电势.

(2) 导体接地, 表明导体与大地等电势 (大地电势通常取为零). 球壳 B 接地后, 外表面的电荷与从大地流入的负电荷中和, 球壳内表面带电荷  $-Q_A$  [图(b)].

断开球壳 B 的接地后, 再将球 A 接地, 此时球 A 的电势为零. 电势的变化必将引起电荷的重新分布, 以保持导体的静电平衡. 不失一般性可设此时球 A 带电荷  $q_A$ , 根据静电平衡时导体上电荷的分布规律, 可知球壳 B 内表面感应  $-q_A$ , 外表面带电荷  $q_A - Q_A$  [图(c)]. 此时球 A 的电势可表示为

$$V_A = \frac{q_A}{4\pi\epsilon_0 R_1} + \frac{-q_A}{4\pi\epsilon_0 R_2} + \frac{q_A - Q_A}{4\pi\epsilon_0 R_3}$$

由  $V_A = 0$  可解出球 A 所带的电荷  $q_A$ , 再由带电球面电势的叠加, 可求出球 A 和球壳 B 的电势.



题 6-10 图

解 (1) 由分析可知,球 A 的外表面带电荷  $3.0 \times 10^{-8}$  C,球壳 B 内表面带电荷  $-3.0 \times 10^{-8}$  C,外表面带电荷  $5.0 \times 10^{-8}$  C. 由电势的叠加,球 A 和球壳 B 的电势分别为

$$V_A = \frac{Q_A}{4\pi\epsilon_0 R_1} + \frac{-Q_A}{4\pi\epsilon_0 R_2} + \frac{Q_A + Q_B}{4\pi\epsilon_0 R_3} = 5.6 \times 10^3 \text{ V}$$

$$V_B = \frac{Q_A + Q_B}{4\pi\epsilon_0 R_3} = 4.5 \times 10^3 \text{ V}$$

(2) 将球壳 B 接地后断开,再把球 A 接地,设球 A 带电荷  $q_A$ ,球 A 和球壳 B 的电势为

$$V_A = \frac{q_A}{4\pi\epsilon_0 R_1} + \frac{-q_A}{4\pi\epsilon_0 R_2} + \frac{-Q_A + q_A}{4\pi\epsilon_0 R_3} = 0$$

$$V_B = \frac{-Q_A + q_A}{4\pi\epsilon_0 R_3}$$

解得

$$q_A = \frac{R_1 R_2 Q_A}{R_1 R_2 + R_2 R_3 - R_1 R_3} = 2.1 \times 10^{-8} \text{ C}$$

即球 A 外表面带电荷  $2.1 \times 10^{-8}$  C,由分析可推得球壳 B 内表面带电荷  $-2.1 \times 10^{-8}$  C,外表面带电荷  $-0.9 \times 10^{-8}$  C. 另外球 A 和球壳 B 的电势分别为

$$V_A = 0$$

$$V_B = -7.9 \times 10^2 \text{ V}$$

导体的接地使各导体的电势分布发生变化,打破了原有的静电平衡,导体表面的电荷将重新分布,以建立新的静电平衡.

**6-11** 同轴传输线由长直圆柱形导线和同轴的导体圆筒构成,导线的半径为  $R_1$ ,电势为  $V_1$ ,圆筒的半径为  $R_2$ ,电势为  $V_2$ ,如图所示. 试求他们之间距离轴线为  $r$  处 ( $R_1 < r < R_2$ ) 的电场强度.

分析 首先假设长直圆柱形导线单位长度带电荷  $\lambda$ ,同轴的导体圆筒内表

面带电荷 $-\lambda$ ,由于电荷轴对称分布,电场分布同样轴对称,电场强度必定沿径向.可以借助高斯定理求电场强度分布,并进一步由电势差 $V_1 - V_2$ 解出单位长度所带电荷 $\lambda$ 和长直圆柱形导线和导体圆筒间的电场强度.

**解** 假设长直圆柱形导线单位长度带电荷 $\lambda$ ,由分析知电场分布轴对称,电场强度沿径向.作同轴圆柱面为高斯面( $R_1 < r < R_2$ ),由高斯定理

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 2\pi r L E = \frac{1}{\epsilon_0} \lambda L$$

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$$

由电势差的定义

$$V_1 - V_2 = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} dr = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

解得

$$\lambda = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln(R_2/R_1)} (V_1 - V_2)$$

代入得长直圆柱形导线和导体圆筒间的电场强度

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} = \frac{V_1 - V_2}{r \ln(R_2/R_1)}$$

**6-12** 一根半径为 $a$ 的长直导线,其外面套有内半径为 $b$ 的同轴导体圆筒,导线与导体圆筒间相互绝缘.已知导线的电势为 $V$ ,圆筒接地电势为零.试求导线与圆筒间的电场强度以及圆筒上的电荷线密度.

**分析** 假设长直导线单位长度带电荷 $\lambda$ ,同轴导体圆筒内表面带电荷 $-\lambda$ ,由于电荷轴对称分布,电场分布同样轴对称,电场强度必定沿径向.可以借助高斯定理求电场强度分布,并进一步由导线的电势为 $V$ 解出电荷线密度 $\lambda$ 以及长直导线和导体圆筒间的电场强度.

**解** 假设长直圆柱形导线单位长度带电荷 $\lambda$ ,由分析知电场分布轴对称,电场强度沿径向.作同轴圆柱面为高斯面( $a < r < b$ ),由高斯定理

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 2\pi r L E = \frac{1}{\epsilon_0} \lambda L$$

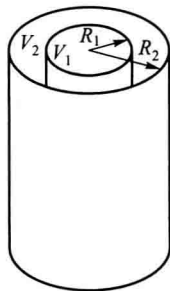
$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$$

由电势差的定义

$$V = \int_a^b \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} dr = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{b}{a}$$

解得

$$\lambda = \frac{2\pi\epsilon_0 V}{\ln(b/a)}$$



题 6-11 图

代入得长直圆柱形导线和导体圆筒间的电场强度

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} = \frac{V}{r \ln(b/a)}$$

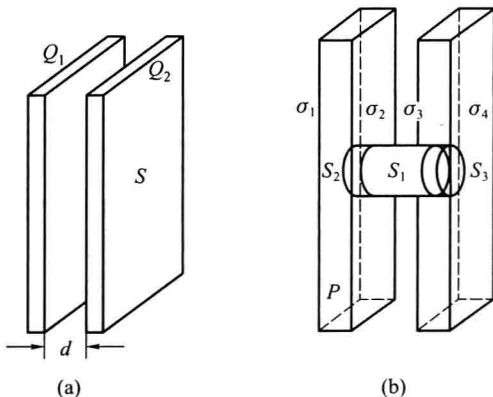
**6-13** 如图(a)所示,两块分别带电荷为  $Q_1$ 、 $Q_2$  的导体平板平行相对放置,假设导体平板面积为  $S$ ,两块导体平板间距为  $d$ ,并且  $\sqrt{S} \gg d$ . 试证明:(1) 相向的两面,电荷面密度大小相等符号相反;(2) 相背的两面,电荷面密度大小相等符号相同.

**分析** 导体平板间距  $d \ll \sqrt{S}$ ,忽略边缘效应,导体板近似可以当作无限大带电平板处理. 取如图(b)所示的圆柱面为高斯面,高斯面的侧面与电场强度  $\mathbf{E}$  平行,侧面的电场强度通量为零;高斯面的两个底面在导体内部,因静电平衡时导体内部电场强度为零,因而底面的电场强度通量同样为零,由高斯定理

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \sum q / \epsilon_0 = 0$$

得

$$\sum q = 0$$



题 6-13 图

上式表明处于静电平衡的平行导体板,相对两个面带等量异号电荷.

再利用叠加原理,导体板上四个带电面在导体内任意一点激发的合电场强度必须为零,因而平行导体板外侧两个面带等量同号电荷.

**证** (1) 设两块导体平板表面的电荷面密度分别为  $\sigma_1$ 、 $\sigma_2$ 、 $\sigma_3$ 、 $\sigma_4$ ,取如图(b)所示的圆柱面为高斯面,高斯面由侧面  $S_1$  和两个底面  $S_2$ 、 $S_3$  构成,由分析可知

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \sum q / \epsilon_0 = 0$$

$$\sum q = \sigma_2 \Delta S + \sigma_3 \Delta S = 0$$

$$\sigma_2 + \sigma_3 = 0$$



两块导体板相向的两面电荷面密度大小相等符号相反.

(2) 由电场的叠加原理, 导体内点  $P$  的电场强度为

$$\frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma_3}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma_4}{2\varepsilon_0} = 0$$

$$\sigma_1 - \sigma_4 = 0$$

两块导体板相背的两面电荷面密度大小相等符号相同.

**6-14** 将带电荷为  $Q$  的导体板 A 从远处移至不带电的导体板 B 附近 [如图(a)所示], 两导体板几何形状完全相同, 面积均为  $S$ , 移近后两导体板距离为  $d$  ( $d \ll \sqrt{S}$ ). (1) 忽略边缘效应求两导体板间的电势差; (2) 若将 B 接地, 结果又将如何?

**分析** 由习题 6-13 可知, 导体板达到静电平衡时, 相对两个面带等量异号电荷; 相背两个面带等量同号电荷. 再由电荷守恒可以求出导体各表面的电荷分布, 进一步求出电场分布和导体的电势差.

导体板 B 接地后电势为零, B 的外侧表面不带电, 根据导体板相背两个面带等量同号电荷可知, A 的外侧表面也不再带电, 由电荷守恒可以求出导体各表面的电荷分布, 进一步求出电场分布和导体的电势差.

**解** (1) 如图(b)所示, 依照题意和导体板达到静电平衡时的电荷分布规律

$$(\sigma_1 + \sigma_2)S = Q$$

$$(\sigma_3 + \sigma_4)S = 0$$

$$\sigma_1 - \sigma_4 = 0$$

$$\sigma_2 + \sigma_3 = 0$$

解得

$$\sigma_1 = \sigma_2 = -\sigma_3 = \sigma_4 = \frac{Q}{2S}$$

两导体板间电场强度为

$$E = \frac{\sigma_2}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{2\varepsilon_0 S}$$

方向为由 A 指向 B. 两导体板间的电势差为

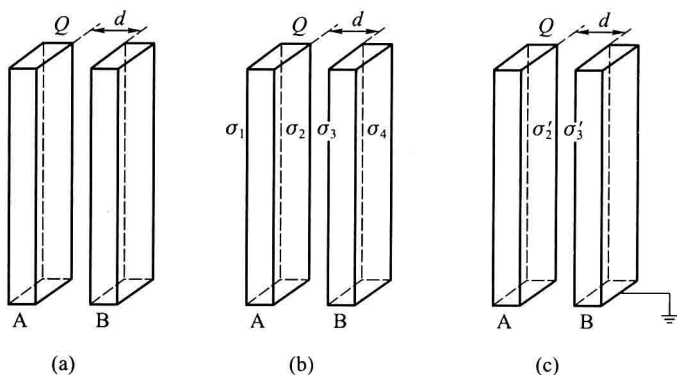
$$U_{AB} = Ed = \frac{Qd}{2\varepsilon_0 S}$$

(2) 如图(c)所示, 导体板 B 接地后电势为零, 则

$$\sigma'_1 = \sigma'_4 = 0$$

$$\sigma'_2 = -\sigma'_3 = \frac{Q}{S}$$

两导体板间电场强度为



题 6-14 图

$$E' = \frac{\sigma'_2}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0 S}$$

方向为由 A 指向 B. 两导体板间的电势差为

$$U'_{AB} = E' d = \frac{Qd}{\epsilon_0 S}$$

**6-15** 如图所示,球形金属腔带电荷为  $Q$  ( $Q > 0$ ), 内半径为  $a$ , 外半径为  $b$ , 腔内距球心  $O$  为  $r$  处有一点电荷  $q$ , 求球心的电势.

**分析** 导体球达到静电平衡时, 内表面感应电荷  $-q$ , 外表面感应电荷  $q$ ; 内表面感应电荷分布不均匀, 外表面感应电荷均匀分布. 球心  $O$  点的电势由点电荷  $q$ 、导体表面的电荷共同决定.

在带电面上任意取一电荷元, 电荷元在球心产生的电势

$$dV = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 R}$$

由于  $R$  为常量, 因而无论球面电荷如何分布, 半径为  $R$  的带电球面在球心产生的电势为

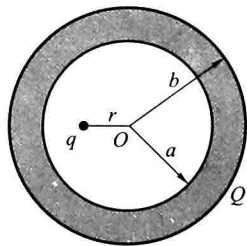
$$V = \int_s \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R}$$

由电势的叠加可以求得球心的电势.

**解** 导体球内表面感应电荷  $-q$ , 外表面感应电荷  $q$ ; 依照分析, 球心的电势为

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a} + \frac{q+Q}{4\pi\epsilon_0 b}$$

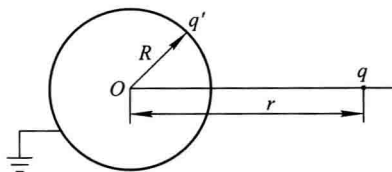
**6-16** 如图所示, 在真空中将半径为  $R$  的金属球接地, 在与球心  $O$  相距为



题 6-15 图

$r(r>R)$ 处放置一点电荷  $q$ , 不计接地导线上电荷的影响, 求金属球表面上的感应电荷.

**分析** 静电感应使得接地的导体球邻近点电荷一侧产生异号感应电荷, 感应电荷分布在导体球表面, 它和点电荷  $q$  在球体内任意点激发的电势为零, 借助这一关系可以求出导体球表面的感应电荷.



题 6-16 图

**解** 在导体球表面取电荷元  $dq = \sigma dS$ , 感应电荷在球心一点产生的电势

$$V' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R} \int_s \sigma dS$$

尽管导体球表面的感应电荷分布不均匀, 但  $\int_s \sigma dS = q'$ ,  $q'$  为感应电荷.

由电势的叠加原理, 球心一点的电势为

$$V = \frac{q'}{4\pi\epsilon_0 R} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} = 0$$

解得

$$q' = -\frac{R}{r}q$$

**6-17** 帕塞尔教授在他的《电磁学》中写道: “如果从地球上移去一滴水中所有的电子, 则地球的电势将会升高几百万伏.” 我们不妨将地球视为导体球, 取无穷远处为零电势, 请证明他这句话.

**分析** 本题仅仅是从数量级证明帕塞尔教授的命题. 在大学物理学习过程中, 习惯了定量研究问题的同时, 我们也不应忽视定性的研究, 数量级估算、量纲分析、对称性、极限情形的讨论等, 都可以帮助我们对问题的概貌有个总体的理解, 使得我们更加容易看清问题的本质.

在本题中, 首先我们需要估算移去一滴水中所有电子后的电荷, 我们不妨假设一滴水的体积为  $0.1 \text{ cm}^3$  (当然, 也可能是  $0.01 \text{ cm}^3$  或其他, 只要假设是合理的, 即使得出的结果有些偏差也可视为是正确的), 根据水分子的摩尔质量, 一滴水中的分子数为

$$N = \frac{m}{M} N_A$$

每个水分子有  $8+2=10$  个电子, 移去所有电子后的电荷

$$Q = 10Ne$$

将地球视作导体球, 取无穷远处为零电势, 地球电势为

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$$

**证** 假设一滴水的体积为  $0.1 \text{ cm}^3$ , 依据上述分析, 移去一滴水中所有电子后的电荷

$$Q = \frac{10m}{M} N_A e = 5.36 \times 10^3 \text{ C}$$

地球电势

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} = 7.6 \times 10^6 \text{ V}$$

帕塞尔教授的命题是正确的.

**6-18** 地球和电离层可当作球形电容器, 它们之间相距约为  $100 \text{ km}$ , 试估算地球-电离层系统的电容. 假设地球与电离层之间为真空.

**解** 球形电容器的电容

$$C = \frac{4\pi\epsilon_0 R_1 R_2}{R_2 - R_1} = 4.59 \times 10^{-2} \text{ F}$$

这是一个很大的电容器.

**6-19** 两根输电导线的半径为  $3.26 \text{ mm}$ , 两导线中心相距  $0.50 \text{ m}$ . 导线位于地面上空很高处, 因而大地的影响可以忽略, 求输电导线单位长度的电容.

**解** 由 6-4 节例 4, 两根平行直导线间的电容

$$C = \frac{\pi\epsilon_0}{\ln(d/R)} = 5.52 \times 10^{-12} \text{ F}$$

**6-20** 电容式计算机键盘的每一个键下面连接一小块金属片, 金属片与底板上的另一块金属片间保持一定空气间隙, 构成一小电容器 (如图所示). 当按下按键时电容发生变化, 通过与之相连的电子线路向计算机发出该键相应的代码信号. 假设金属片面积为  $50.0 \text{ mm}^2$ , 两金属片之间的距离是  $0.600 \text{ mm}$ . 如果电路能检测出的电容变化量为  $0.250 \text{ pF}$ , 那么按键需要按下多大的距离才能给出必要的信号?

**分析** 按下按键时两金属片之间的距离变小, 电容增大, 由电容的变化量可以求得按键按下的最小距离.

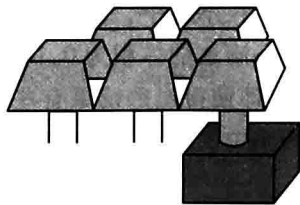
**解** 按下按键时电容的变化量为

$$\Delta C = \epsilon_0 S \left( \frac{1}{d} - \frac{1}{d_0} \right)$$

按键按下的最小距离为

$$\Delta d_{\min} = d_0 - d = \frac{\Delta C d_0^2}{d_0 \Delta C + \epsilon_0 S} = 0.152 \text{ mm}$$

**6-21** 如图 (a) 所示, 由两块相距  $0.50 \text{ mm}$  的薄金属板 A、B 构成的空气平板电容器, 被屏蔽在一金属盒 K 内, 金属盒上、下两壁与 A、B 分别相距



题 6-20 图

0.25 mm, 金属板面积为  $30\text{mm} \times 40\text{mm}$ . 问: (1) 被屏蔽后电容器的电容变为原来的几倍? (2) 若电容器的一个引脚不慎与金属屏蔽盒相碰, 此时的电容又为原来的几倍?

**分析** 薄金属板 A、B 与金属盒一起构成三个电容器, 其等效电路图如图(b)所示, 由于两导体间距离较小, 电容器可视为平板电容器, 通过分析等效电路图可求得 A、B 间的电容.

**解** (1) 如图(b)所示, 由等效电路可知

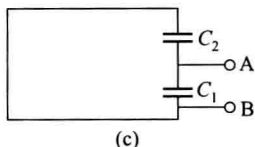
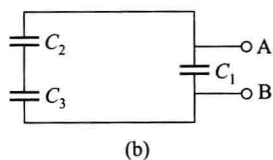
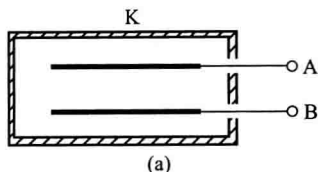
$$C = C_{23} + C_1 = \frac{C_2 \cdot C_3}{C_2 + C_3} + C_1$$

由于电容器可视为平板电容器, 且  $d_1 = 2d_2 = 2d_3$ , 故  $C_2 = C_3 = 2C_1$ , 因此 A、B 间的总电容

$$C = 2C_1$$

(2) 如图(c)所示, 若电容器的一个引脚与屏蔽盒相碰, 相当于  $C_2$  (或者  $C_3$ ) 极板短接, 其电容为零, 则总电容

$$C' = 3C_1$$



题 6-21 图

**6-22** 如图所示, 在 A 点和 B 点之间有 5 个电容器. (1) 求 A、B 两点之间的等效电容; (2) 若 A、B 之间的电势差为 12 V, 求  $U_{AC}$ 、 $U_{CD}$  和  $U_{DB}$ .

**解** (1) 由电容器的串、并联, 有

$$C_{AC} = C_1 + C_2 = 12 \mu\text{F}$$

$$C_{CD} = C_3 + C_4 = 8 \mu\text{F}$$

求得等效电容

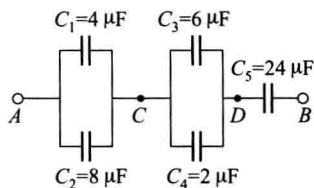
$$C_{AB} = 4 \mu\text{F}$$

(2) 由于  $Q_{AC} = Q_{CD} = Q_{DB} = Q_{AB}$ , 得

$$U_{AC} = \frac{C_{AB}}{C_{AC}} U_{AB} = 4 \text{ V}$$

$$U_{CD} = \frac{C_{AB}}{C_{CD}} U_{AB} = 6 \text{ V}$$

$$U_{DB} = \frac{C_{AB}}{C_{DB}} U_{AB} = 2 \text{ V}$$



题 6-22 图

**6-23** 盖革-米勒管可用来测量电离辐射. 该管的基本结构如图所示, 半径为  $R_1$  的长直导线作为一个电极, 半径为  $R_2$  的同轴圆柱筒为另一个电极. 它们之间充以相对电容率  $\epsilon_r \approx 1$  的气体. 当电离粒子通过气体时, 能使其电离. 若两极间有电势差时, 极板间有电流, 从而可测出电离粒子的数量. 以  $E_1$  表示半径为

$R_1$  的长直导线附近的电场强度. (1) 求极板间电势的关系式; (2) 若  $E_1 = 2.0 \times 10^6 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$ ,  $R_1 = 0.30 \text{ mm}$ ,  $R_2 = 20.0 \text{ mm}$ , 两极板间的电势差为多少?

解 (1) 利用高斯定理可得  $E \cdot 2\pi rL = \frac{1}{\epsilon_0} \lambda L$ , 则两极板

间的电场强度  $E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$ , 导线表面 ( $r = R_1$ ) 的电场强度

$$E_1 = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R_1}$$

解得  $\lambda = 2\pi\epsilon_0 R_1 E_1$ . 两极板间的电势差

$$U = \int_{R_1}^{R_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} dr = R_1 E_1 \ln \frac{R_2}{R_1}$$

(2) 将  $E_1 = 2.0 \times 10^6 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$ ,  $R_1 = 0.30 \text{ mm}$ ,  $R_2 = 20.0 \text{ mm}$  代入, 得

$$U = 2.52 \times 10^3 \text{ V}$$

**6-24** 一片二氧化钛晶片, 其面积为  $1.0 \text{ cm}^2$ , 厚度为  $0.10 \text{ mm}$ . 把平行平板电容器的两极板紧贴在晶片两侧. (1) 求电容器的电容; (2) 当在电容器的两板上加上  $12 \text{ V}$  电压时, 极板上的电荷为多少? 此时自由电荷和极化电荷的面密度各为多少? (3) 求电容器内的电场强度.

解 (1) 查表可知二氧化钛晶片的相对电容率  $\epsilon_r = 173$ , 故充满此介质的平板电容器电容为

$$C = \frac{\epsilon_r \epsilon_0 S}{d} = 1.53 \times 10^{-9} \text{ F}$$

(2) 电容器加上  $U = 12 \text{ V}$  的电压时, 极板上的电荷为

$$Q = CU = 1.84 \times 10^{-8} \text{ C}$$

极板上自由电荷面密度为

$$\sigma_0 = \frac{Q}{S} = 1.84 \times 10^{-4} \text{ C} \cdot \text{m}^{-2}$$

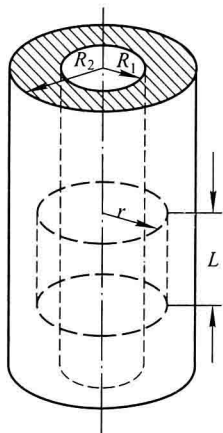
晶片表面极化电荷面密度为

$$\sigma'_0 = \left(1 - \frac{1}{\epsilon_r}\right) \sigma_0 = 1.83 \times 10^{-4} \text{ C} \cdot \text{m}^{-2}$$

(3) 晶片内的电场强度为

$$E = \frac{U}{d} = 1.2 \times 10^5 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$$

**6-25** 如图所示, 半径  $R = 0.10 \text{ m}$  的导体球带有电荷  $Q = 1.0 \times 10^{-8} \text{ C}$ , 导体外有两层均匀介质, 一层介质的  $\epsilon_r = 5.0$ , 厚度  $d = 0.10 \text{ m}$ , 另一层介质为空气, 充



题 6-23 图

满其余空间. 求: (1) 离球心为  $r=5\text{ cm}, 15\text{ cm}, 25\text{ cm}$  处的电位移矢量  $\mathbf{D}$  和电场强度  $\mathbf{E}$ ; (2) 离球心为  $r=5\text{ cm}, 15\text{ cm}, 25\text{ cm}$  处的电势; (3) 极化电荷面密度.

**分析** 带电球上的自由电荷均匀分布在导体球表面, 电介质的极化电荷也均匀分布在介质与导体球的界面上, 因而介质中的电场球对称分布.

任取同心球面为高斯面, 电位移矢量  $\mathbf{D}$  的通量只与自由电荷分布有关, 因此在高斯面上  $\mathbf{D}$  呈均匀对称分布, 由高斯定理  $\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \sum q_0$  可得  $\mathbf{D}(r)$ , 再由  $\mathbf{E} = \mathbf{D}/\varepsilon_0\varepsilon_r$  可得  $\mathbf{E}(r)$ .

由电势和电场强度的积分关系  $V = \int_r^\infty \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$  求得介质内电势的分布, 或者由电势叠加原理求得电势的分布.

极化电荷分布在均匀介质的表面, 极化电荷面密度  $|\sigma'| = P_n$ .

**解** (1) 取半径为  $r$  的同心球面为高斯面, 由高斯定理得

$$r < R \quad D_1 \cdot 4\pi r^2 = 0$$

$$\text{解得} \quad D_1 = 0; E_1 = 0$$

$$R < r < R+d \quad D_2 \cdot 4\pi r^2 = Q$$

$$\text{解得} \quad D_2 = \frac{Q}{4\pi r^2}; E_2 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r^2}$$

$$r > R+d \quad D_3 \cdot 4\pi r^2 = Q$$

$$\text{解得} \quad D_3 = \frac{Q}{4\pi r^2}; E_3 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

将不同的  $r$  值代入上述公式, 可得  $r=5\text{ cm}, 15\text{ cm}, 25\text{ cm}$  时的电位移强度和电场强度的大小, 其方向均沿径向朝外.

$r_1 = 5\text{ cm}$ , 该点在导体球内, 则

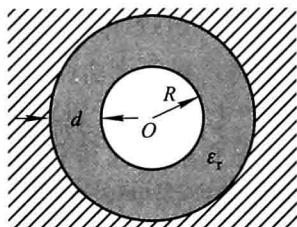
$$D_1 = 0; E_1 = 0$$

$r_2 = 15\text{ cm}$ , 该点在介质层内,  $\varepsilon_r = 5.0$ , 则

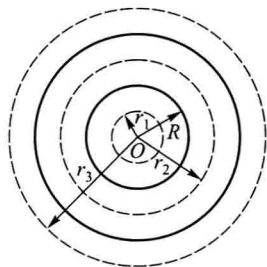
$$D_2 = \frac{Q}{4\pi r_2^2} = 3.5 \times 10^{-8} \text{ C} \cdot \text{m}^{-2}$$

$$E_2 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r_2^2} = 8.0 \times 10^2 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$$

$r_3 = 25\text{ cm}$ , 该点在空气层内, 空气中  $\varepsilon \approx \varepsilon_0$ , 则



(a)



(b)

题 6-25 图

$$D_3 = \frac{Q}{4\pi r_3^2} = 1.3 \times 10^{-8} \text{ C} \cdot \text{m}^{-2}$$

$$E_3 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_3^2} = 1.4 \times 10^3 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$$

(2) 取无穷远处电势为零,由电势与电场强度的积分关系得

$$r_3 = 25 \text{ cm}, V_3 = \int_{r_3}^{\infty} E_3 \cdot dl = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_3} = 360 \text{ V}$$

$$\begin{aligned} r_2 = 15 \text{ cm}, V_2 &= \int_{r_2}^{R+d} E_2 \cdot dl + \int_{R+d}^{\infty} E_3 \cdot dl \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r r_2} - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r(R+d)} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0(R+d)} = 480 \text{ V} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_1 = 5 \text{ cm}, V_1 &= \int_R^{R+d} E_2 \cdot dl + \int_{R+d}^{\infty} E_3 \cdot dl \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r R} - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r(R+d)} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0(R+d)} = 540 \text{ V} \end{aligned}$$

(3) 均匀介质的极化电荷分布在介质界面上,因空气的电容率  $\epsilon = \epsilon_0$ ,极化电荷可忽略.故在介质外表面

$$P_n = (\epsilon_r - 1)\epsilon_0 E_n = \frac{(\epsilon_r - 1)Q}{4\pi\epsilon_r(R+d)^2}$$

$$\sigma = P_n = \frac{(\epsilon_r - 1)Q}{4\pi\epsilon_r(R+d)^2} = 1.6 \times 10^{-8} \text{ C} \cdot \text{m}^{-2}$$

在介质内表面

$$P'_n = (\epsilon_r - 1)\epsilon_0 E'_n = \frac{(\epsilon_r - 1)Q}{4\pi\epsilon_r R^2}$$

$$\sigma' = -P'_n = -\frac{(\epsilon_r - 1)Q}{4\pi\epsilon_r R^2} = -6.4 \times 10^{-8} \text{ C} \cdot \text{m}^{-2}$$

介质球壳内、外表面的极化电荷面密度虽然不同,但是两表面极化电荷的总量还是等量异号.

**6-26** 人体的某些细胞壁两侧带有等量的异号电荷.设某细胞壁厚为  $5.2 \times 10^{-9} \text{ m}$ ,两表面所带电荷面密度分别为  $\pm 5.2 \times 10^{-3} \text{ C/m}^2$ ,内表面为正电荷.如果细胞壁物质的相对电容率为 6.0,求:(1) 细胞壁内的电场强度;(2) 细胞壁两表面间的电势差.

**解** (1) 细胞壁内的电场强度为

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0\epsilon_r} = 9.8 \times 10^7 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$$

方向指向细胞外.

(2) 细胞壁两表面间的电势差为



$$U = Ed = 0.51 \text{ V}$$

**6-27** 有一个平板电容器,充电后极板上电荷面密度为  $\sigma_0 = 4.5 \times 10^{-3} \text{ C} \cdot \text{m}^{-2}$ , 现将两极板与电源断开,然后再把相对电容率为  $\epsilon_r = 2.0$  的电介质插入两极板之间. 此时电介质中的电位移矢量  $\mathbf{D}$ 、电场强度  $\mathbf{E}$  和极化强度  $\mathbf{P}$  各为多少?

**分析** 平板电容器充电后两极板与电源断开,由电荷守恒,插入电介质过程中电容器极板上的电荷保持不变,极板间为均匀电场,依照介质中的高斯定理,如图所示作高斯面,可以求得电位移矢量  $\mathbf{D}$ ,进一步由电位移矢量  $\mathbf{D}$  和电场强度  $\mathbf{E}$  及极化强度  $\mathbf{P}$  的关系求出各量.

**解** 极板间为均匀电场,如图所示作高斯面,由介质中的高斯定理

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = D\Delta S = \sigma_0 \Delta S$$

$$D = \sigma_0 = 4.5 \times 10^{-3} \text{ C} \cdot \text{m}^{-2}$$

由介质中电位移矢量和电场强度  $\mathbf{E}$  及极化强度  $\mathbf{P}$  的关系得

$$E = \frac{D}{\epsilon_0 \epsilon_r} = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0 \epsilon_r} = 2.5 \times 10^8 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$$

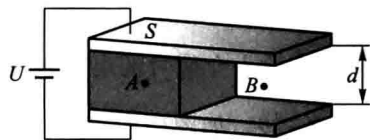
$$P = \epsilon_0 (\epsilon_r - 1) E = \left(1 - \frac{1}{\epsilon_r}\right) \sigma_0 = 2.3 \times 10^{-3} \text{ C} \cdot \text{m}^{-2}$$

**6-28** 两块面积为  $S$  的导体板构成一平板电容器,导体极板间距离为  $d$ . 将平板电容器两极板接到电压为  $U$  的电源上,接通电源后在导体极板间的一半插入电容率为  $\epsilon$  的电介质,略去边缘效应.(1) 试比较  $A$ 、 $B$  两点的电场强度各为未插入电介质时的多少倍?(2) 假如在电容器充满电后,先断开电源,再在两极板间的一半插入电介质,则结果又将如何?

**分析** (1) 电容器在两极板间插入电介质过程中保持和电源连接,导体板间的电势差保持不变,因而  $E = E_0 = U/d$ .

(2) 电容器充满电后,导体板上的电荷

$$Q_0 = CU = \frac{\epsilon_0 SU}{d}$$



题 6-28 图

断开电源再插入电介质,电容器两极板上的电荷保持不变,由于导体板是等势体,因而介质内( $A$ 区)、外( $B$ 区)的电场强度必定相等,导体板上电荷分布不均等. 设导体板  $A$ 、 $B$  区电荷面密度分别为  $\sigma_A$ 、 $\sigma_B$ , 则

$$D_A = \sigma_A, \quad D_B = \sigma_B$$

$$E'_A = \frac{D_A}{\epsilon} = \frac{\sigma_A}{\epsilon}, \quad E'_B = \frac{D_B}{\epsilon_0} = \frac{\sigma_B}{\epsilon_0}$$

再利用电荷守恒关系

$$\sigma_A \frac{S}{2} + \sigma_B \frac{S}{2} = Q_0$$

解出  $A$ 、 $B$  区电场强度.

解 (1) 插入电介质过程中保持和电源连接, 有

$$E_A = E_B = \frac{U}{d} = E_0$$

(2) 电容器充满电后, 导体板上的电荷

$$Q_0 = CU = \frac{\varepsilon_0 SU}{d}$$

断开电源插入电介质后电容器两极板上的总电荷量保持不变, 设导体板  $A$ 、 $B$  区电荷面密度分别为  $\sigma_A$ 、 $\sigma_B$ , 由介质中的高斯定理可得

$$D_A = \sigma_A, \quad D_B = \sigma_B$$

介质内 ( $A$  区)、外 ( $B$  区) 的电场强度相等, 导体板上电荷分布不相等.

$$E'_A = \frac{D_A}{\varepsilon} = \frac{\sigma_A}{\varepsilon}, \quad E'_B = \frac{D_B}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma_B}{\varepsilon_0}, \quad E'_A = E'_B$$

由于导体板上的电荷在插入电介质前后守恒

$$\sigma_A \frac{S}{2} + \sigma_B \frac{S}{2} = Q_0$$

$$\varepsilon E'_A \frac{S}{2} + \varepsilon_0 E'_B \frac{S}{2} = \frac{\varepsilon_0 SU}{d}$$

解出  $A$ 、 $B$  区电场强度

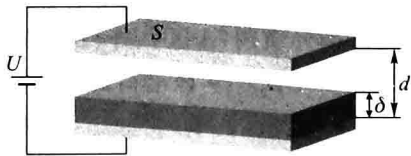
$$E'_A = E'_B = \frac{2\varepsilon_0 U}{d(\varepsilon + \varepsilon_0)}$$

比较未插入介质时的电场强度  $E_0$ , 显然有  $E'_A = E'_B = \frac{2\varepsilon_0}{\varepsilon + \varepsilon_0} E_0$ .

**6-29** 如图所示, 有一个空气平板电容器, 极板面积为  $S$ , 间距为  $d$ . 现将该电容器接在端电压为  $U$  的电源上充电, 当 (1) 充足电后, (2) 然后平行插入一块面积相同、厚度为  $\delta$  ( $\delta < d$ )、相对电容率为  $\varepsilon_r$  的电介质板, (3) 将上述电介质换为同样大小的导体板时, 分别求极板上的电荷  $Q$ 、极板间的电场强度  $E$  和电容器的电容  $C$ .

分析 (1) 电容器充电后依据已知条件可以直接求得平板电容器电容、电容器极板上电荷以及极板间的电场强度;

(2) 插入电介质板后, 电容器极板间的电势差保持不变, 不妨假设此时电容器极板上电荷为  $Q'$ , 由介质中的高斯定理可得



题 6-29 图

$$D' = \sigma' = \frac{Q'}{S}$$

由电位移矢量和电场强度间的关系,得真空和介质中的电场强度分别为

$$E' = \frac{D'}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} = \frac{Q'}{S \varepsilon_0 \varepsilon_r}, \quad E'_0 = \frac{D'}{\varepsilon_0} = \frac{Q'}{S \varepsilon_0}$$

利用极板间的电势差  $U = E' \delta + E'_0 (d - \delta)$  可以解得极板上的电荷  $Q'$  和极板间的电场强度  $E'$ 、 $E'_0$ 。由电容器电容的定义可以求得电容器电容

$$C = \frac{Q'}{U}$$

(3) 假如插入导体板,达到静电平衡时导体板内电场强度为零,电容器极板间的电势差保持不变,不妨假设此时电容器极板上电荷为  $Q''$ ,由高斯定理可得真空中的电场强度为

$$E'' = \frac{U}{d - \delta} = \frac{Q''}{S \varepsilon_0}$$

由上式解得极板上的电荷  $Q''$ 。由电容器电容的定义可以求得电容器电容

$$C = \frac{Q''}{U}$$

解 (1) 平板电容器的电容为  $C = \frac{\varepsilon_0 S}{d}$ , 充电至电势差为  $U$  后,极板间的电场强度和极板上的电荷分别为

$$E = \frac{U}{d}, \quad Q = CU = \frac{\varepsilon_0 SU}{d}$$

(2) 插入电介质板后,电容器极板间的电势差保持不变,假设此时电容器极板上电荷为  $Q'$ ,由介质中的高斯定理可得

$$D' = \sigma' = \frac{Q'}{S}$$

$$E' = \frac{D'}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} = \frac{Q'}{S \varepsilon_0 \varepsilon_r}, \quad E'_0 = \frac{D'}{\varepsilon_0} = \frac{Q'}{S \varepsilon_0}$$

$$U = \frac{Q'}{S \varepsilon_0 \varepsilon_r} \delta + \frac{Q'}{S \varepsilon_0} (d - \delta)$$

解得

$$Q' = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r SU}{\delta + \varepsilon_r (d - \delta)}$$

$$E' = \frac{U}{\delta + \varepsilon_r (d - \delta)}, \quad E'_0 = \frac{\varepsilon_r U}{\delta + \varepsilon_r (d - \delta)}$$

$$C = \frac{Q'}{U} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r S}{\delta + \varepsilon_r (d - \delta)}$$

(3) 假如插入导体板,导体板内电场强度为零,假设此时电容器极板上电荷

为  $Q''$ , 真空中的电场强度为

$$E'' = \frac{U}{d-\delta}$$

由高斯定理可得

$$E'' = \frac{Q''}{S\varepsilon_0}$$

解得

$$Q'' = \varepsilon_0 S E'' = \frac{\varepsilon_0 S U}{d-\delta}$$

$$C = \frac{Q''}{U} = \frac{\varepsilon_0 S}{d-\delta}$$

**6-30** 在一半径为  $R_1$  的长直导线外, 套有氯丁橡胶绝缘护套, 护套外半径为  $R_2$ , 相对电容率为  $\varepsilon_r$ . 设沿轴线导线的电荷线密度为  $\lambda$ , 试求介质层内的电位移矢量  $\mathbf{D}$ 、电场强度  $\mathbf{E}$  和极化强度  $\mathbf{P}$ .

解 由介质中的高斯定理, 有

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = D \cdot 2\pi r L = \lambda L$$

解得

$$D = \frac{\lambda}{2\pi r}$$

$$\mathbf{D} = \frac{\lambda}{2\pi r} \mathbf{e}_r$$

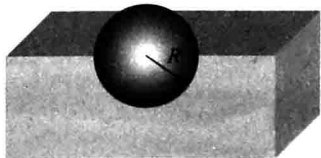
在各向同性均匀介质中

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{D}}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} = \frac{\lambda}{2\pi \varepsilon_0 \varepsilon_r r} \mathbf{e}_r$$

$$\mathbf{P} = \mathbf{D} - \varepsilon_0 \mathbf{E} = \left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r}\right) \frac{\lambda}{2\pi r} \mathbf{e}_r$$

**6-31** 如图所示, 球形电极浮在相对电容率为  $\varepsilon_r = 3.0$  的油槽中. 球的一半浸没在油中, 另一半在空气中. 已知电极所带净电荷  $Q_0 = 2.0 \times 10^{-6}$  C. 问球的上、下部分各有多少电荷?

分析 我们可以将导体球理解为两个分别悬浮在油和空气中的半球形孤立电容器, 静电平衡时导体球上的电荷分布使导体成为等势体, 故可将导体球等效为两个半球电容并联, 其相对无限远处的电势均为  $V$ , 且



题 6-31 图

$$V = \frac{Q_1}{C_1} = \frac{Q_2}{C_2} \quad (1)$$

另外导体球上的电荷总量保持不变,应有

$$Q_1 + Q_2 = Q_0 \quad (2)$$

联立可解得  $Q_1$ 、 $Q_2$ 。

**解** 将导体球看作两个分别悬浮在油和空气中的半球形孤立电容器,上半球在空气中,电容为

$$C_1 = 2\pi\epsilon_0 R$$

下半球在油中,电容为

$$C_2 = 2\pi\epsilon_0\epsilon_r R$$

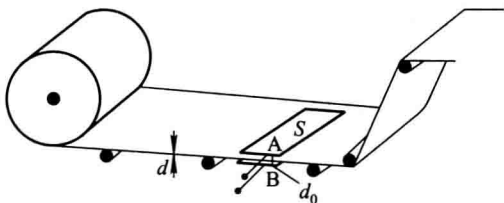
由分析中式(1)和式(2)可解得

$$Q_1 = \frac{C_1}{C_1 + C_2} Q_0 = \frac{1}{\epsilon_r + 1} Q_0 = 5.0 \times 10^{-7} \text{ C}$$

$$Q_2 = \frac{C_2}{C_1 + C_2} Q_0 = \frac{\epsilon_r}{\epsilon_r + 1} Q_0 = 1.5 \times 10^{-6} \text{ C}$$

由于导体球周围部分区域充满介质,球上电荷均匀分布的状态将改变. 此时介质中的电场强度与真空中的电场强度不满足  $E = \frac{E_0}{\epsilon_r}$  的关系. 事实上,只有当电介质均匀充满整个电场,并且自由电荷分布不变时,才有  $E = \frac{E_0}{\epsilon_r}$ 。

**6-32** 为了实时检测纺织品、纸张等材料的厚度(待测材料可视作相对电容率为  $\epsilon_r$  的电介质),通常在生产流水线上设置如图所示的传感装置,其中 A、B 为平板电容器的导体极板,  $d_0$  为两极板间的距离. 试说明检测原理,并推出直接测量量电容  $C$  与间接测量量厚度  $d$  之间的函数关系. 如果要检测钢板等金属材料的厚度,结果又将如何?



题 6-32 图

**解** 由分析可知,该装置的电容为

$$C = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r S}{d + \epsilon_r (d_0 - d)}$$

则介质的厚度为

$$d = \frac{\epsilon_r d_0 C - \epsilon_0 \epsilon_r S}{(\epsilon_r - 1) C} = \frac{\epsilon_r}{\epsilon_r - 1} d_0 - \frac{\epsilon_0 \epsilon_r S}{(\epsilon_r - 1) C}$$

如果待测材料是金属导体,其等效电容为

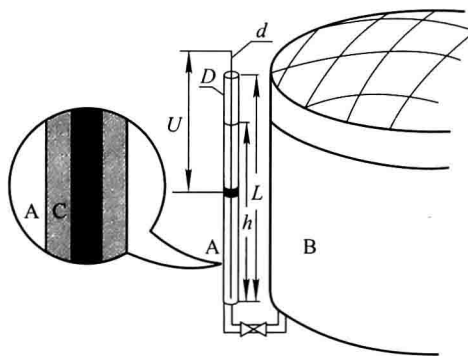
$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{d_0 - d}$$

导体材料的厚度

$$d = d_0 - \frac{\varepsilon_0 S}{C}$$

实时测量 A、B 间的电容  $C$ , 根据上述关系式就可以间接地测出材料的厚度.

**6-33** 利用电容传感器测量油料液面高度. 其原理如图所示, 导体圆管 A 与储油罐 B 相连, 圆管的内径为  $D$ , 管中心同轴插入一根外径为  $d$  的导体棒 C,  $d, D$  均远小于管长  $L$  并且相互绝缘. 试证明: 当导体圆管与导体棒之间连接电压为  $U$  的电源时, 圆管上的电荷与液面高度成线性关系 (油料的相对电容率为  $\varepsilon_r$ ).



题 6-33 图

**分析** 由于  $d, D \ll L$ , 导体 A、C 构成圆柱形电容器, 可视为一个长  $h$  ( $h$  为液面高度) 的介质电容器  $C_1$  和一个长  $L-h$  的空气电容器  $C_2$  的并联, 它们的电容值均随  $h$  变化而改变, 因此其等效电容  $C = C_1 + C_2$  也是  $h$  的函数. 由于  $Q = CU$ , 在电压一定时, 电荷  $Q$  仅随  $C$  变化而变化, 求出  $Q$  与液面高度  $h$  的函数关系, 即可得证.

**证** 由分析知, 导体 A、C 构成一组柱形电容器, 它们的电容分别为

$$C_1 = \frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r h}{\ln \frac{D}{d}}$$

$$C_2 = \frac{2\pi\varepsilon_0(L-h)}{\ln \frac{D}{d}}$$

其总电容为

$$C = C_1 + C_2 = \frac{2\pi\epsilon_0\epsilon_r h}{\ln \frac{D}{d}} + \frac{2\pi\epsilon_0(L-h)}{\ln \frac{D}{d}} = \alpha + \beta h$$

其中  $\alpha = \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\ln \frac{D}{d}}$ ,  $\beta = \frac{2\pi\epsilon_0(\epsilon_r - 1)}{\ln \frac{D}{d}}$ . 则

$$Q = CU = \alpha U + \beta U h$$

即导体管上所带电荷  $Q$  与液面高度  $h$  成线性关系. 油罐与电容传感器通过阀门联通, 两液面等高, 测出传感器圆管上的电荷  $Q$  即可确定油罐的液面高度.

**6-34** 共轴的两导体圆筒, 内筒的外半径为  $R_1$ , 外筒的内半径为  $R_2$  ( $R_2 < 2R_1$ ), 其间有两层均匀电介质, 内层电介质的电容率为  $\epsilon_1$ , 外层电介质的电容率为  $\epsilon_2 = \epsilon_1/2$ , 两层介质的交界面是半径为  $R$  的圆柱面. 已知两种电介质的击穿场强相等, 都为  $E_m$ . 试证明: 两导体圆筒间的最大电势差为  $U_m = \frac{1}{2} R E_m \ln(R_2^2 / RR_1)$ .

**分析** 首先利用介质中的高斯定理可以求得介质中的电位移矢量

$$\mathbf{D} = \frac{\lambda}{2\pi r} \mathbf{e}_r$$

再由  $\mathbf{E} = \frac{\mathbf{D}}{\epsilon}$  求得各介质中的电场分布, 并根据所给定的条件计算在介质中任一点电场强度  $E < E_m$  时导体的最大电荷线密度, 即可以导出两导体圆筒间的最大电势差.

**证** 由介质中的高斯定理, 可得介质中的电位移矢量

$$\mathbf{D} = \frac{\lambda}{2\pi r} \mathbf{e}_r$$

并可进一步求得各介质中的电场分布

$$\mathbf{E}_1 = \frac{\mathbf{D}}{\epsilon_1} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_1 r} \mathbf{e}_r \quad (R > r > R_1)$$

$$\mathbf{E}_2 = \frac{\mathbf{D}}{\epsilon_2} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_2 r} \mathbf{e}_r \quad (R_2 > r > R)$$

由于外层电介质的电容率  $\epsilon_2 = \epsilon_1/2$ ,  $R_2 < 2R_1$ , 则

$$E_{2m}/E_{1m} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_2 R} / \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_1 R_1} = \frac{\epsilon_1 R_1}{\epsilon_2 R} = \frac{2R_1}{R}$$

因为  $R < R_2 < 2R_1$ ,  $E_{2m} > E_{1m}$ . 因而当  $E_{2m} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_2 R} < E_m$  时, 两层介质都不会被击穿, 导体的最大线电荷密度

$$\lambda_m = 2\pi\epsilon_2 R E_m$$

两导体圆筒间的电势差

$$U = \int_{R_1}^R \mathbf{E}_1 \cdot d\mathbf{l} + \int_R^{R_2} \mathbf{E}_2 \cdot d\mathbf{l}$$

最大电势差为

$$\begin{aligned} U_m &= \int_{R_1}^R \frac{\lambda_m}{2\pi\epsilon_1 r} \cdot dr + \int_R^{R_2} \frac{\lambda_m}{2\pi\epsilon_2 r} \cdot dr \\ &= \frac{RE_m}{2} \ln \frac{R}{R_1} + RE_m \ln \frac{R_2}{R} \\ U_m &= \frac{RE_m}{2} \ln \left[ \frac{R}{R_1} \cdot \left( \frac{R_2}{R} \right)^2 \right] = \frac{RE_m}{2} \ln \frac{R_2^2}{R_1 R} \end{aligned}$$

**6-35** 有一电容为  $0.50 \mu\text{F}$  的平行平板电容器, 两极板间被厚度为  $0.01 \text{ mm}$  的聚四氟乙烯薄膜所隔开. 求: (1) 该电容器的额定电压; (2) 电容器储存的最大能量.

**分析** 通过查表可知聚四氟乙烯的击穿电场强度  $E_m = 6.0 \times 10^7 \text{ V/m}$ , 由电容器中的电场强度不大于击穿电场强度,  $E \leq E_m$ , 可以求得电容器的最大电势差和电容器储存的最大能量.

**解** (1) 电容器两极板间的电势差

$$U_{\max} = E_b d = 6.0 \times 10^2 \text{ V}$$

(2) 电容器储存的最大能量

$$W_c = \frac{1}{2} C U_{\max}^2 = 9.0 \times 10^{-2} \text{ J}$$

**6-36** 一空气平板电容器, 空气层厚  $1.5 \text{ cm}$ , 两极间电压为  $40 \text{ kV}$ , 该电容器会被击穿吗? 现将一厚度为  $0.30 \text{ cm}$  的玻璃板插入此电容器, 并与两极平行. 若该玻璃的相对电容率为  $7.0$ , 击穿电场强度为  $10 \text{ MV} \cdot \text{m}^{-1}$ , 则此时电容器会被击穿吗?

**解** 空气的击穿电场强度为  $E_{m1} = 3.0 \times 10^6 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$ , 未插入玻璃板时

$$E = \frac{U}{d} = 2.67 \times 10^6 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1} < E_{m1}$$

电容器不会被击穿.

由习题 6-29(2), 插入玻璃板后:

玻璃板内

$$E_1 = \frac{U}{\delta + \epsilon_r(d - \delta)} = 4.60 \times 10^5 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1} < E_{m2}$$

玻璃板外

$$E_2 = \frac{\epsilon_r U}{\delta + \epsilon_r(d - \delta)} = 3.21 \times 10^6 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1} < E_{m1}$$



空气的击穿电场强度为  $3 \times 10^6 \text{ V/m}$ , 因电容器空气层中的电场强度大于空气击穿电场强度, 空气层首先被击穿,  $40 \text{ kV}$  电压全部加到玻璃板两侧, 玻璃板内的电场强度

$$E = \frac{U}{\delta} = 1.30 \times 10^7 \text{ V/m}$$

即  $E > E_b$ , 玻璃板也将相继击穿, 电容器完全被击穿.

**6-37** 某介质的相对电容率  $\epsilon_r = 2.8$ , 击穿电场强度为  $18 \times 10^6 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$ , 如果用它来作平板电容器的电介质, 要制作电容为  $0.047 \mu\text{F}$ , 而耐压为  $4.0 \text{ kV}$  的电容器, 它的极板面积至少要多大?

**解** 介质内电场强度

$$E \leq E_b = 18 \times 10^6 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$$

电容耐压  $U_m = 4.0 \text{ kV}$ , 因而电容器极板间最小距离

$$d = U_m / E_b = 2.22 \times 10^{-4} \text{ m}$$

要制作电容为  $0.047 \mu\text{F}$  的平板电容器, 其极板面积

$$S = \frac{Cd}{\epsilon_0 \epsilon_r} = 0.42 \text{ m}^2$$

显然, 这么大的面积平铺开来的所占据的空间太大了, 通常将平板电容器卷叠后再封装.

**6-38** 设想电子是球型的, 其静止能量  $m_0 c^2$  来自于它的静电能量. 电子电荷不同的分布模型会得出不同的电子半径, 现分别假设 (1) 电子电荷均匀分布在球面上, (2) 电子电荷均匀分布在球体内, 试估算电子的半径.

**分析** (1) 假设电子电荷均匀分布在球面上, 球面内电场强度为零, 球面外电场强度为

$$E = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

电场能量密度为

$$w_e = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 = \frac{e^2}{32\pi^2 \epsilon_0 r^4}$$

取同心球壳为体元,  $dV = 4\pi r^2 dr$ , 由电场能量密度的体积分求电子的电场能量

$$\int_{\Omega} w_e dV = \int_R^{\infty} \frac{e^2}{32\pi^2 \epsilon_0 r^4} \cdot 4\pi r^2 dr = mc^2$$

由此可解得电子的半径  $R$ .

(2) 电子电荷均匀分布在球体内, 球内电荷密度  $\rho = \frac{3e}{4\pi R^3}$ , 由高斯定理不难求得球内、外电场强度

$$E_1 = \frac{\rho r}{3\epsilon_0}, \quad E_2 = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

球内、外电场能量密度分别为

$$w_{e1} = \frac{1}{2}\epsilon_0 E_1^2 = \frac{e^2 r^2}{32\pi^2 \epsilon_0 R^6}, \quad w_{e2} = \frac{1}{2}\epsilon_0 E_2^2 = \frac{e^2}{32\pi^2 \epsilon_0 r^4}$$

取同心球壳为体元,  $dV = 4\pi r^2 dr$ , 由电场能量密度的体积分求电子的电场能量

$$\int_{\Omega_1} w_{e1} dV + \int_{\Omega_2} w_{e2} dV = \int_0^R \frac{e^2 r^2}{32\pi^2 \epsilon_0 R^6} \cdot 4\pi r^2 dr + \int_R^\infty \frac{e^2}{32\pi^2 \epsilon_0 r^4} \cdot 4\pi r^2 dr = mc^2$$

由此可解得电子的半径  $R$ .

解 (1) 假设电子电荷均匀分布在球面上, 电场能量密度为

$$w_e = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 = \frac{e^2}{32\pi^2 \epsilon_0 r^4}$$

由电场能量密度的体积分求电子的电场能量

$$\int_{\Omega} w_e dV = \int_R^\infty \frac{e^2}{32\pi^2 \epsilon_0 r^4} \cdot 4\pi r^2 dr = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 R} = mc^2$$

解得电子的半径

$$R = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 mc^2}$$

将相关物理量代入可以估算出电荷面分布模型下电子的半径约为  $1.41 \times 10^{-15} \text{ m}$ .

(2) 电子电荷均匀分布在球体内, 球内外电场能量密度分别为

$$w_{e1} = \frac{1}{2}\epsilon_0 E_1^2 = \frac{e^2 r^2}{32\pi^2 \epsilon_0 R^6}, \quad w_{e2} = \frac{1}{2}\epsilon_0 E_2^2 = \frac{e^2}{32\pi^2 \epsilon_0 r^4}$$

由电场能量密度的体积分求电子的电场能量

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_1} w_{e1} dV + \int_{\Omega_2} w_{e2} dV &= \int_0^R \frac{e^2 r^2}{32\pi^2 \epsilon_0 R^6} \cdot 4\pi r^2 dr + \int_R^\infty \frac{e^2}{32\pi^2 \epsilon_0 r^4} \cdot 4\pi r^2 dr \\ &= \frac{e^2}{40\pi\epsilon_0 R} + \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 R} = \frac{3e^2}{20\pi\epsilon_0 R} = mc^2 \end{aligned}$$

解得电子的半径

$$R = \frac{3e^2}{20\pi\epsilon_0 mc^2}$$

将相关物理量代入可以估算出电荷体分布模型下电子的半径约为  $1.69 \times 10^{-15} \text{ m}$ .

**\* 6-39** 在达到静电平衡时, 导体上的电荷分布总是使得电场的能量为最小值, 这称为汤姆孙定理. 以一个有厚度的金属球壳为例, 当金属球壳带电时, 电荷为球对称均匀分布. 试论证: 只有电荷全都分布在金属球壳外表面时, 其电场能

量才能达到最小值。

证 导体达到静电平衡时,电荷球对称均匀分布在金属球壳外表面,球内的电场强度为零,球外的电场强度为

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

取同心球壳为体元,  $dV = 4\pi r^2 dr$ , 由电场能量密度的体积分可求得导体球的电场能量

$$W_c = \int_{\Omega} w_c dV = \int_R^{\infty} \frac{Q^2}{32\pi^2 \epsilon_0 r^4} \cdot 4\pi r^2 dr = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 R}$$

假如电荷均匀分布在导体球壳以及内、外表面,则球壳外表面以内电场强度必定不为零,假设球壳外表面以内电场强度为  $E_i$ , 电场能量为

$$W_i = \int_{\Omega} w'_c dV = \int_0^R \frac{1}{2} \epsilon_0 E_i^2 \cdot 4\pi r^2 dr = 2\pi\epsilon_0 \int_0^R E_i^2 r^2 dr \geq 0$$

由于导体球壳电荷均匀分布时,球壳外表面以外的电场强度不变,因而电场的总能量为

$$W = W_c + W_i = W_c + 2\pi\epsilon_0 \int_0^R E_i^2 r^2 dr$$

$$W \geq W_c, \quad W_{\min} = W_c$$

即电荷分布在导体球壳外表面时,电场能量最小。

**\*6-40** 一平行板空气电容器,极板面积为  $S$ ,极板间距为  $d$ ,充电至带电  $Q$  后与电源断开,然后用外力缓缓地把两极板间距拉开到  $2d$ 。求:(1) 电容器能量的改变;(2) 此过程中外力所做的功,并讨论此过程中的功能转化关系。

解 (1) 极板间的电场为均匀场,且电场强度保持不变,因此,电场的能量密度为

$$w_c = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 = \frac{Q^2}{2\epsilon_0 S^2}$$

在外力作用下极板间距从  $d$  拉开到  $2d$ 。电场占有空间的体积也由  $V$  增加到  $2V$ ,此时电场能量增加

$$\Delta W_c = w_c \Delta V = \frac{Q^2 d}{2\epsilon_0 S}$$

(2) 两导体极板带等量异号电荷,用外力  $F$  将一极板匀速缓缓拉开时,应有  $F = -F_c$ ,则外力所做的功为

$$A = -F_c \cdot \Delta l = Q_A E_B d = Q \cdot \frac{1}{2} E d = \frac{Q^2 d}{2\epsilon_0 S}$$

外力克服静电引力所做的功等于静电场能量的增加。

## 第七章 恒定磁场

7-1 两根长度相同的细导线分别密绕在半径为  $R$  和  $r$  的两个长直圆筒上形成两个螺线管,两个螺线管的长度相同, $R=2r$ ,螺线管通过的电流均为  $I$ ,螺线管中的磁感强度大小  $B_R$ 、 $B_r$  满足( )

- (A)  $B_R=2B_r$       (B)  $B_R=B_r$       (C)  $2B_R=B_r$       (D)  $B_R=4B_r$

分析与解 在两根通过电流相同的螺线管中,磁感强度大小与螺线管线圈单位长度的匝数成正比.根据题意,用两根长度相同的细导线绕成的线圈单位长度的匝数之比

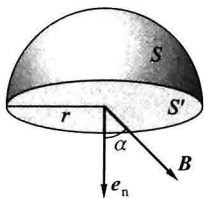
$$\frac{n_R}{n_r} = \frac{r}{R} = \frac{1}{2}$$

因而正确答案为(C).

7-2 一个半径为  $r$  的半球面如图所示放在均匀磁场中,通过半球面的磁通量为( )

- (A)  $2\pi r^2 B$       (B)  $\pi r^2 B$   
(C)  $2\pi r^2 B \cos \alpha$       (D)  $\pi r^2 B \cos \alpha$

分析与解 作半径为  $r$  的圆  $S'$  与半球面构成一闭合曲面,根据磁场的高斯定理,磁感线是闭合曲线,通过闭合曲面的磁通量为零,即穿进半球面  $S$  的磁通量等于穿出圆面  $S'$  的磁通量,  $\Phi = \mathbf{B} \cdot \mathbf{S}$ . 因而正确答案为(D).



题 7-2 图

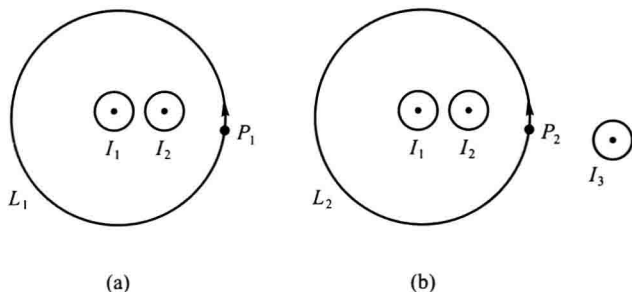
7-3 下列说法正确的是( )

- (A) 闭合回路上各点磁感强度都为零时,回路内一定没有电流穿过  
(B) 闭合回路上各点磁感强度都为零时,回路内穿过电流的代数和必定为零  
(C) 磁感强度沿闭合回路的积分为零时,回路上各点的磁感强度必定为零  
(D) 磁感强度沿闭合回路的积分不为零时,回路上任意一点的磁感强度都不可能为零

分析与解 由磁场中的安培环路定理,磁感强度沿闭合回路的积分为零时,回路上各点的磁感强度不一定为零;闭合回路上各点磁感强度为零时,穿过回路的电流代数和必定为零.因而正确答案为(B).

7-4 在图(a)和(b)中各有一半径相同的圆形回路  $L_1$ 、 $L_2$ ,圆周内有电流  $I_1$ 、 $I_2$ ,其分布相同,且均在真空中,但在图(b)中  $L_2$  回路外有电流  $I_3$ , $P_1$ 、 $P_2$  为两圆形回路上的对应点,则( )

- (A)  $\oint_{L_1} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \oint_{L_2} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}, B_{P_1} = B_{P_2}$   
 (B)  $\oint_{L_1} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} \neq \oint_{L_2} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}, B_{P_1} = B_{P_2}$   
 (C)  $\oint_{L_1} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \oint_{L_2} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}, B_{P_1} \neq B_{P_2}$   
 (D)  $\oint_{L_1} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} \neq \oint_{L_2} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}, B_{P_1} \neq B_{P_2}$



题 7-4 图

**分析与解** 由磁场中的安培环路定理,积分回路外的电流不会影响磁感强度沿回路的积分;但同样会改变回路上各点的磁场分布.因而正确答案为(C).

**7-5** 半径为  $R$  的圆柱形无限长载流直导线置于均匀无限大磁介质之中,若导线中流过的恒定电流为  $I$ ,磁介质的相对磁导率为  $\mu_r (\mu_r < 1)$ ,则与导线接触的磁介质表面上的磁化电流面密度为( )

- (A)  $-(\mu_r - 1)I/2\pi R$                       (B)  $(\mu_r - 1)I/2\pi R$   
 (C)  $\mu_r I/2\pi R$                               (D)  $I/2\pi\mu_r R$

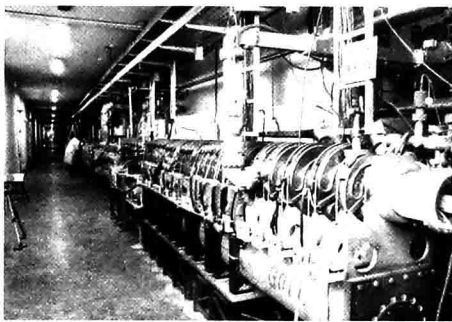
**分析与解** 由介质中的安培环路定理可以求得介质中的磁场强度,进一步由磁场强度与磁化强度的关系可以导出介质中的磁化强度分布,因磁化电流面密度  $j_m$  其大小等于介质表面的磁化强度,正确答案为(B).

**7-6** 图示为北京正负电子对撞机,其储存环是周长为 240 m 的近似圆形轨道,当环中电子流强度为 8 mA 时,在整个环中有多少电子在运行? 已知电子的速率接近光速.

**分析** 一个电子绕存储环以速度  $v$  运动时,对电流的贡献为  $\Delta I = \frac{e}{l/v}$ ,因而由  $I = \frac{Nev}{l}$ ,可解出环中的电子数.

**解** 通过分析结果可得环中的电子数

$$N = \frac{Il}{ev} = 4 \times 10^{10}$$



题 7-6 图

7-7 已知铜的摩尔质量  $M=63.75 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ , 密度  $\rho=8.9 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$ , 在铜导线里, 假设每个铜原子贡献出 1 个自由电子. (1) 为了技术上的安全, 铜线内最大电流密度  $j_m=6.0 \text{ A} \cdot \text{mm}^{-2}$ , 求此时导线内电子的平均漂移速率; (2) 在室温下, 电子热运动的平均速率是电子漂移速率的多少倍?

分析 一个铜原子的质量  $m=M/N_A$ , 其中  $N_A$  为阿伏伽德罗常量, 由铜的密度  $\rho$  可以推算出铜的原子数密度

$$n = \frac{\rho}{m}$$

根据假设, 每个铜原子贡献出一个自由电子, 其电荷量为  $e$ , 电流密度  $j_m = nev_d$ , 从而可解得电子的平均漂移速率  $v_d$ .

将导体中自由电子的运动类比作理想气体分子的运动, 根据理想气体动理论, 电子热运动的平均速率<sup>①</sup>

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_e}}$$

其中  $k$  为波耳兹曼常量,  $m_e$  为电子质量. 从而可解得电子的平均速率和平均漂移速率之比.

解 (1) 铜导线单位体积的原子数为

$$n = \frac{N_A \rho}{M}$$

电流密度为  $j_m$  时铜线内电子的漂移速率为

$$v_d = \frac{j_m}{ne} = \frac{j_m M}{N_A \rho e} = 4.46 \times 10^{-4} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

(2) 室温下 (300 K) 电子热运动的平均速率和平均漂移速率之比为

<sup>①</sup> 参见《物理学》(第六版)下册第 12-6 节.

$$\frac{\bar{v}}{v_d} = \frac{1}{v_d} \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_e}} = 2.42 \times 10^8$$

室温下电子热运动的平均速率远大于电子在恒定电场中的定向漂移速率,电子实际的运动是无规则热运动和沿电场相反方向漂移运动的叠加. 考虑到电子的漂移速率很小, 电缆中电能、电信号传输的载体并不是定向漂移的电子, 理论和实验都证明, 电能、电信号都是通过电磁波以光速传递的.

**7-8** 有两个同轴导体圆柱面, 其长度均为 20 m, 内圆柱面的半径为 3.0 mm, 外圆柱面的半径为 9.0 mm, 若两圆柱面之间有 10  $\mu$ A 的电流沿径向流过, 求通过半径为 6.0 mm 的圆柱面上的电流密度.

**解** 依照电流密度的定义

$$j = \frac{I}{S} = \frac{I}{2\pi rL} = 1.33 \times 10^{-5} \text{ A}$$

**7-9** 已知地球北极地磁场磁感强度  $B$  的大小约为  $6.0 \times 10^{-5} \text{ T}$ , 如图所示. 假如设想此地磁场是由地球赤道上一圆电流所激发的, 则此电流有多大? 流向如何?

**解** 假设赤道电流为  $I$ , 则圆电流轴线上北极点的磁感强度

$$B = \frac{\mu_0 IR^2}{2(R^2 + R^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I}{4\sqrt{2}R}$$

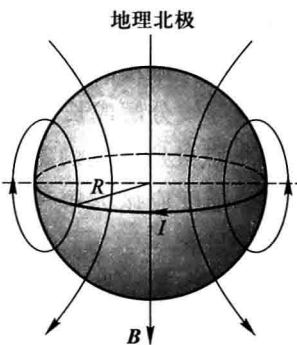
因此赤道上的等效圆电流为

$$I = \frac{4\sqrt{2}RB}{\mu_0} = 1.73 \times 10^9 \text{ A}$$

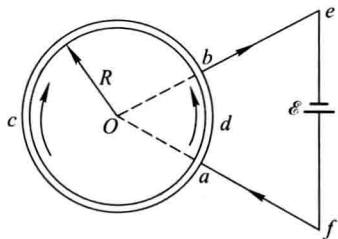
由于地球地磁场的 N 极在地理南极, 根据右手螺旋定则可以判断赤道圆电流应该是由东向西流, 与地球自转方向相反.

**7-10** 如图所示, 有两根导线沿半径方向接到铁环的  $a$ 、 $b$  两点, 并与很远处的电源相连接. 求环心  $O$  点的磁感强度.

**分析** 根据叠加原理, 点  $O$  的磁感强度可视为  $\overline{ef}$ 、 $\overline{be}$ 、 $\overline{fa}$  三段直线以及  $\widehat{acb}$ 、 $\widehat{adb}$  两段圆弧电流共同激发. 由于电源距环较远,  $B_{ef} = 0$ . 而  $\overline{be}$ 、 $\overline{fa}$  两段直线的延长线通过  $O$  点,  $Idl \times r = 0$ , 由毕奥-萨伐尔定律知,  $B_{be} = B_{fa} = 0$ , 流过圆弧的电流  $I_1$ 、 $I_2$  的方向如图所示, 两圆弧在  $O$  点激发的磁场分别为



题 7-9 图



题 7-10 图

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1 l_1}{4\pi R^2}, B_2 = \frac{\mu_0 I_2 l_2}{4\pi R^2}$$

其中  $l_1, l_2$  分别为两段圆弧  $\widehat{acb}$ 、 $\widehat{adb}$  弧线的长度, 由于导线电阻  $R$  和弧线长度成正比, 而圆弧  $\widehat{acb}$ 、 $\widehat{adb}$  又构成并联电路, 故有

$$I_1 l_1 = I_2 l_2$$

将  $B_1, B_2$  叠加, 可得点  $O$  的磁感强度  $B$ .

**解** 由上述分析可知, 点  $O$  的磁感强度大小为

$$B = B_1 - B_2 = \frac{\mu_0 I_1 l_1}{4\pi R^2} - \frac{\mu_0 I_2 l_2}{4\pi R^2} = 0$$

**7-11** 如图所示, 几种载流导线在平面内分布, 电流均为  $I$ , 它们在  $O$  点的磁感强度各为多少?

**分析** 应用磁场叠加原理求解, 将不同形状的载流导线分解成长直部分和圆弧部分, 它们各自在  $O$  点处所激发的磁感强度较容易求得, 则总的磁感强度应该为每一段载流导线激发磁感强度的矢量和.

**解** (a) 长直载流导线对  $O$  点而言, 有  $Idl \times r = 0$ , 因此它在  $O$  点产生的磁场为零, 则  $O$  点处总的磁感强度为  $1/4$  圆弧电流所激发, 故有

$$B_o = \frac{\mu_0 I}{8R}$$

磁场的方向垂直纸面朝外.

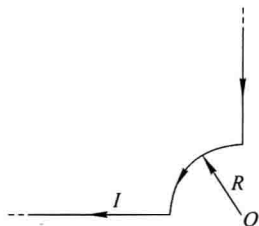
(b) 将载流导线分解为圆电流和无限长长直电流, 由叠加原理可得

$$B_o = \frac{\mu_0 I}{2R} - \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$$

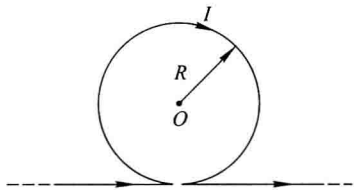
磁场的方向垂直纸面朝里.

(c) 将载流导线分解为  $1/2$  圆电流和两段半无限长长直电流, 由叠加原理可得

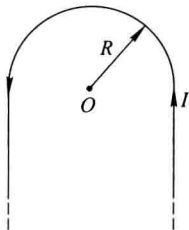
$$B_o = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} + \frac{\mu_0 I}{4\pi R} + \frac{\mu_0 I}{4R} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} + \frac{\mu_0 I}{4R}$$



(a)



(b)



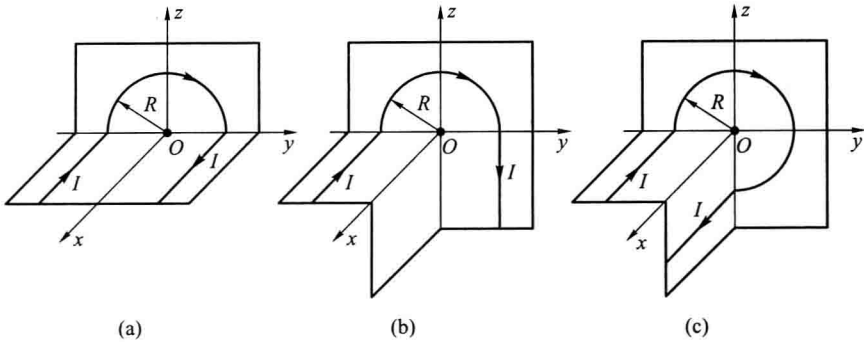
(c)

题 7-11 图



磁场的方向垂直纸面朝外.

7-12 载流导线形状如图所示(图中直线部分导线延伸到无限远),求  $O$  点的磁感强度  $B$ .



题 7-12 图

分析 由教材第 7-4 节例 2 可知,圆弧载流导线在圆心激发的磁感强度  $B = \frac{\mu_0 I \alpha}{4\pi R}$ , 其中  $\alpha$  为圆弧载流导线所张的圆心角,磁感强度的方向依照右手螺旋定则确定;半无限长载流导线在圆心  $O$  点激发的磁感强度  $B = \frac{\mu_0 I}{4\pi R}$ , 磁感强度的方向依照右手螺旋定则确定.

$O$  点的磁感强度  $B$  可以视为由圆弧载流导线、半无限长载流导线等激发的磁场在空间  $O$  点的叠加.

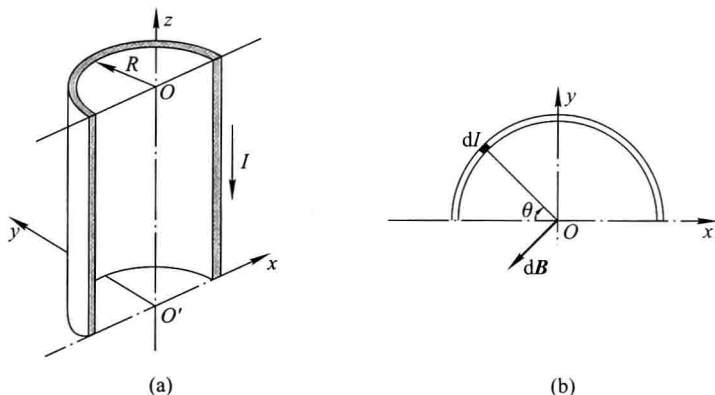
解 根据磁场的叠加原理,有

$$\begin{aligned} B_a &= -\frac{\mu_0 I}{4R} i - \frac{\mu_0 I}{4\pi R} k - \frac{\mu_0 I}{4\pi R} k = -\frac{\mu_0 I}{4R} i - \frac{\mu_0 I}{2\pi R} k \\ B_b &= -\frac{\mu_0 I}{4\pi R} i - \frac{\mu_0 I}{4R} i - \frac{\mu_0 I}{4\pi R} k = -\frac{\mu_0 I}{4R} \left( \frac{1}{\pi} + 1 \right) i - \frac{\mu_0 I}{4\pi R} k \\ B_c &= -\frac{3\mu_0 I}{8R} i - \frac{\mu_0 I}{4\pi R} j - \frac{\mu_0 I}{4\pi R} k \end{aligned}$$

7-13 如图(a)所示,一个半径为  $R$  的无限长半圆柱面导体,沿长度方向的电流  $I$  在柱面上均匀分布,求半圆柱面轴线  $OO'$  上的磁感强度.

分析 毕奥-萨伐尔定理只能用于求线电流的磁场分布,对于本题的半圆柱面电流,可将半圆柱面分割成宽度  $dl = R d\theta$  的线电流,线电流与轴线  $OO'$  平行,将线电流在轴线上产生的磁感强度叠加,即可求得半圆柱面轴线  $OO'$  上的磁感强度.

解 根据分析,由于长直细线中的电流  $dI = Idl/\pi R$ ,它在轴线上  $O$  点激发的



题 7-13 图

磁感强度大小为

$$dB = \frac{\mu_0}{2\pi R} dI = \frac{\mu_0 I}{2\pi^2 R^2} dl$$

其方向在  $Oxy$  平面内, 且与由  $dl$  引向  $O$  点的半径垂直, 如图 (b) 所示. 由几何关系  $dl = R d\theta$ , 依照对称性, 半圆柱面上细电流线在轴线  $OO'$  上产生的磁感强度叠加后

$$B_y = \int dB \cos \theta = 0$$

$$B_x = \int_0^\pi dB \sin \theta = \int_0^\pi \frac{\mu_0 I}{2\pi^2 R^2} R d\theta \cdot \sin \theta = \frac{\mu_0 I}{\pi^2 R}$$

则轴线上  $O$  点总的磁感强度大小为

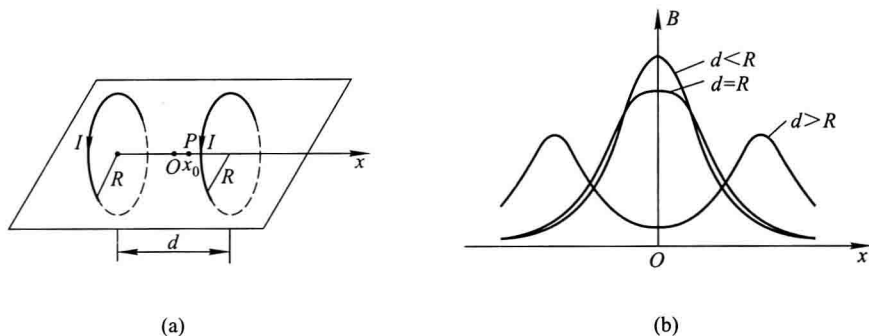
$$B = B_x = \frac{\mu_0 I}{\pi^2 R}$$

$B$  的方向指向  $Ox$  轴负向.

**7-14** 实验中常用的所谓亥姆霍兹线圈可在局部区域内获得一近似均匀磁场, 其装置简图如图 (a) 所示. 一对完全相同、彼此平行的线圈, 它们的半径均为  $R$ , 通过的电流均为  $I$ , 且两线圈中电流的流向相同. 试证明当两线圈中心之间的距离  $d$  等于线圈的半径  $R$  时, 在两线圈中心连线的中点附近区域, 磁场可看成是均匀磁场.

**分析** 设磁感强度在  $Ox$  轴线上的分布为  $B(x)$ , 可由两个圆电流线圈在轴线上磁场的叠加而得, 如在轴线上某一点处  $\frac{dB(x)}{dx} = 0$ , 则表明该点为磁感强度的驻点, 即  $\frac{d^2 B(x)}{dx^2} < 0$  时磁感强度存在极大值,  $\frac{d^2 B(x)}{dx^2} > 0$  时磁感强度存在极小值, 而  $\frac{d^2 B(x)}{dx^2} = 0$  时磁感强度更加平滑, 在局域接近恒定值. 据此可以获得均匀

磁场的条件①.



题 7-14 图

证 取两线圈中心连线的中点为坐标原点  $O$ , 两线圈中心轴线为  $x$  轴, 在  $x$  轴上任一点的磁感强度

$$B = \frac{\mu_0 I R^2}{2 [R^2 + (d/2 - x)^2]^{3/2}} + \frac{\mu_0 I R^2}{2 [R^2 + (d/2 + x)^2]^{3/2}}$$

则当 
$$\frac{dB(x)}{dx} = \frac{\mu_0 I R^2}{2} \left( \frac{3(d/2 - x)}{[R^2 + (d/2 - x)^2]^{5/2}} - \frac{3(d/2 + x)}{[R^2 + (d/2 + x)^2]^{5/2}} \right) = 0$$

$$\frac{d^2 B(x)}{dx^2} = \frac{3\mu_0 I R^2}{2} \left( \frac{4(d/2 - x)^2 - R^2}{[R^2 + (d/2 - x)^2]^{7/2}} + \frac{4(d/2 + x)^2 - R^2}{[R^2 + (d/2 + x)^2]^{7/2}} \right) = 0$$

时, 磁感强度在该点附近小区域内是均匀的, 该小区域的磁场近似为均匀磁场.

由 
$$\frac{dB(x)}{dx} = 0, \text{ 解得 } x = 0$$

由 
$$\left. \frac{d^2 B(x)}{dx^2} \right|_{x=0} = 0, \text{ 解得 } d = R$$

这表明在  $d = R$  时, 中点附近区域磁场近似为均匀场, 如图(b)所示.

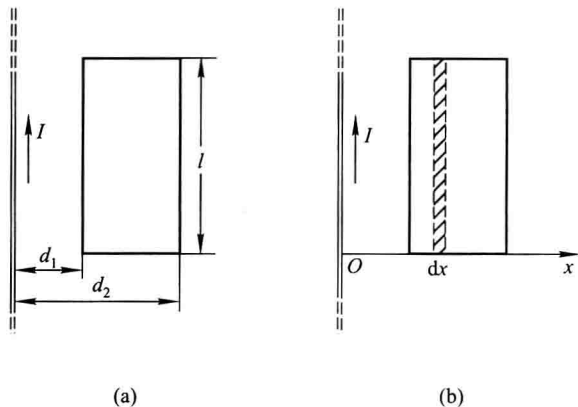
**7-15** 如图(a)所示, 载流长直导线的电流为  $I$ , 试求通过矩形面积的磁通量.

**分析** 由于矩形平面上各点的磁感强度不同, 故磁通量  $\Phi \neq BS$ . 为此, 可在矩形平面上沿平行电流方向, 取一细长的矩形面元  $dS = l dx$ , 如图(b)所示(请读

① 将磁感强度  $B$  在两线圈中点附近用泰勒级数展开, 则

$$B(x) = B(0) + \frac{dB(0)}{dx}x + \frac{1}{2} \frac{d^2 B(0)}{dx^2}x^2 + \dots$$

由于  $x \ll 1$ ,  $\frac{dB(0)}{dx} = 0$ ,  $\frac{d^2 B(0)}{dx^2} = 0$ , 磁感强度  $B(x)$  在中点  $O$  附近近似为常量.



题 7-15 图

者思考,为何不是垂直电流方向取面元). 载流长直导线的磁场穿过该面元的磁通量为

$$d\Phi = \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} l dx$$

矩形平面的总磁通量

$$\Phi = \int d\Phi$$

解 由上述分析可得矩形平面的总磁通量

$$\Phi = \int d\Phi = \int_{d_1}^{d_2} \frac{\mu_0 I}{2\pi x} l dx = \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \ln \frac{d_2}{d_1}$$

**7-16** 已知  $10 \text{ mm}^2$  裸铜线允许通过  $50 \text{ A}$  电流而不致导线过热, 假设电流在导线横截面上均匀分布. 求: (1) 导线内、外磁感强度的分布; (2) 导线表面的磁感强度.

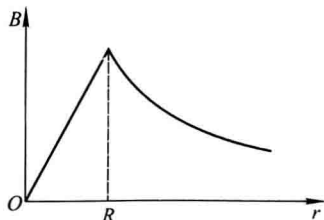
**分析** 可将导线视作长直圆柱体, 电流沿轴向均匀流过导体, 故其磁场必然呈轴对称分布, 在与导线同轴的圆柱面上各点  $\mathbf{B}$  大小相等, 方向与电流成右手螺旋关系. 为此, 可利用安培环路定理, 求出导线表面的磁感强度.

**解** (1) 围绕轴线取同心圆为环路  $L$ , 取其绕向与电流成右手螺旋关系, 根据安培环路定理, 有

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = B \cdot 2\pi r = \mu_0 \sum I$$

在导线内  $r < R$ ,  $\sum I = \frac{I}{\pi R^2} \pi r^2 = \frac{I r^2}{R^2}$ , 因而

$$B = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2}$$



题 7-16 图

在导线外  $r > R$ ,  $\Sigma I = I$ , 因而

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

磁感强度的分布曲线如图所示.

(2) 在导线表面磁感强度连续, 由  $I = 50 \text{ A}$ ,  $R = \sqrt{\frac{S}{\pi}} = 1.78 \times 10^{-3} \text{ m}$ , 得

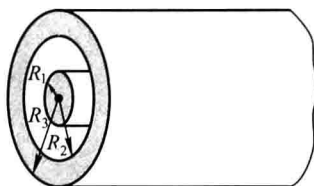
$$B_0 = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} = 5.6 \times 10^{-3} \text{ T}$$

**7-17** 有一同轴电缆, 其尺寸如图(a)所示. 两导体中的电流均为  $I$ , 但电流的流向相反, 导体的磁性可不考虑. 试计算以下各处的磁感强度: (1)  $r < R_1$ ; (2)  $R_1 < r < R_2$ ; (3)  $R_2 < r < R_3$ ; (4)  $r > R_3$ . 画出  $B-r$  图线.

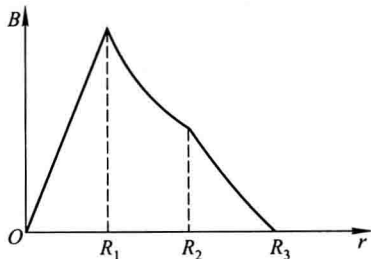
**分析** 同轴电缆导体内的电流均匀分布, 其磁场呈轴对称, 取半径为  $r$  的同心圆为积分路径,  $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = B \cdot 2\pi r$ , 利用安培环路定理

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \Sigma I$$

可以解得各区域的磁感强度.



(a)



(b)

题 7-17 图

**解** 由上述分析, 利用安培环路定理  $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \Sigma I$ , 得

$$r < R_1 \quad B_1 \cdot 2\pi r = \mu_0 \frac{I}{\pi R_1^2} \pi r^2$$

$$B_1 = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R_1^2}$$

$$R_1 < r < R_2 \quad B_2 \cdot 2\pi r = \mu_0 I$$

$$B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

$$\begin{aligned}
 R_2 < r < R_3 & \quad B_3 \cdot 2\pi r = \mu_0 \left[ I - \frac{\pi(r^2 - R_2^2)}{\pi(R_3^2 - R_2^2)} I \right] \\
 & \quad B_3 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \cdot \frac{R_3^2 - r^2}{R_3^2 - R_2^2} \\
 r > R_3 & \quad B_4 \cdot 2\pi r = \mu_0 (I - I) = 0 \\
 & \quad B_4 = 0
 \end{aligned}$$

磁感强度  $B(r)$  的分布曲线如图(b)所示.

**7-18** 如图所示,  $N$  匝线圈均匀密绕在截面为长方形的中空环形骨架上, 求通入电流  $I$  后, 环内外磁场的分布.

**分析** 根据右手螺旋定则, 螺线管内磁感线为与螺线管圆周平行、以对称轴线为中心的同心圆, 取半径为  $r$  的圆周为积分环路, 由于磁感强度沿环路为常量, 因而

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = B \cdot 2\pi r$$

依照安培环路定理,  $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \sum I$ , 可以解得螺线管内磁感强度的分布.

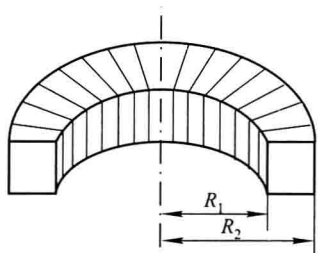
**解** 依照上述分析, 由安培环路定理

$$\begin{aligned}
 r < R_1 & \quad B \cdot 2\pi r = \mu_0 \sum I \\
 & \quad B_1 \cdot 2\pi r = 0 \\
 & \quad B_1 = 0 \\
 R_2 > r > R_1 & \quad B_2 \cdot 2\pi r = \mu_0 NI \\
 & \quad B_2 = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r} \\
 r > R_2 & \quad B_3 \cdot 2\pi r = 0 \\
 & \quad B_3 = 0
 \end{aligned}$$

在螺线管内磁感强度  $B$  沿圆周, 与电流成右手螺旋. 若  $R_2 - R_1 \ll R_1$  或  $R_2$ , 则环内的磁场可以近似视作均匀分布, 设螺线环的平均半径  $R = \frac{1}{2}(R_2 + R_1)$ , 则环内的磁感强度近似为

$$B = \frac{\mu_0 NI}{2\pi R}$$

**7-19** 半径为  $R$  的长直导体圆筒表面有一层均匀分布的面电流, 面电流绕轴线沿螺旋线流动, 其方向始终与轴线方向成  $\alpha$  角. 设电流面密度为  $j$ , 求长直导体圆筒轴线上的磁感强度.



题 7-18 图

**分析** 导体圆筒表面电流密度与轴线方向成  $\alpha$  角,不妨将电流密度分解为垂直轴线(沿导体圆筒表面圆周)方向和平行轴线方向两个分量,圆筒表面平行轴线方向的电流密度分量在圆筒轴线上的磁感强度为零;参照长直螺线管,可以求得圆筒表面沿圆周方向的电流密度分量在圆筒轴线上的磁感强度

$$B = \mu_0 j_{\perp}$$

**解** 由上述分析,借鉴长直螺线管轴线上的磁感强度

$$B = \mu_0 j_{\perp} = \mu_0 j \sin \alpha$$

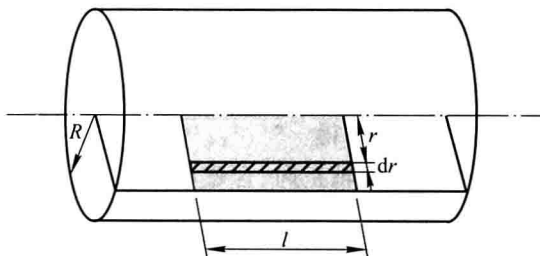
**7-20** 电流  $I$  均匀地流过半径为  $R$  的圆形长直导线,试计算单位长度导线通过图中所示剖面的磁通量.

**分析** 由习题 7-16 可得导线内部距轴线为  $r$  处的磁感强度

$$B = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2}$$

剖面上磁感强度分布不均匀,由磁通量的定义  $\Phi = \int \mathbf{B}(r) \cdot d\mathbf{S}$ . 沿轴线方向在剖面上取面元  $dS = l dr$ ,面元上各点  $\mathbf{B}$  相同,穿过面元的磁通量  $d\Phi = B dS$ ,通过积分,可得单位长度( $l=1$ )导线内的磁通量

$$\Phi' = \int_s B dr$$



题 7-20 图

**解** 由分析可得单位长度导线内的磁通量

$$\Phi' = \int_0^R \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2} dr = \frac{\mu_0 I}{4\pi}$$

**7-21** 设电流均匀流过无限大导电平面,其电流面密度为  $j$ ,求导电面两侧的磁感强度.

**分析** 依照右手螺旋定则,磁感强度  $\mathbf{B}$  和电流面密度  $\mathbf{j}$  相互垂直,由电流的面对称性分析,无限大电流平面两侧的磁感强度大小相等,方向相互平行反向,如图所示. 在垂直电流的平面内对称取矩形回路  $abcd$ ,回路所在平面与导电平面相交于  $OO'$ ,且  $ab \parallel cd \parallel OO'$ ,  $ad \perp OO'$ ,  $cb \perp OO'$ ,  $ab = cd = L$ . 根据磁场和电流

面对称分布的特点,利用安培环路定理可以求得磁感强度的分布.

**解** 对如图所示的矩形回路  $abcd$ ,磁感强度沿回路的路积分

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \int_{ab} \mathbf{B}_1 \cdot d\mathbf{l} + \int_{bc} \mathbf{B}_2 \cdot d\mathbf{l} + \int_{cd} \mathbf{B}_3 \cdot d\mathbf{l} + \int_{da} \mathbf{B}_4 \cdot d\mathbf{l}$$

由于磁场的对称分布,  $B_1 = B_3 = B$ ,  $B_2 \cdot d\mathbf{l} = B_4 \cdot d\mathbf{l} = 0$ , 因而

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = 2BL$$

回路  $abcd$  内包围的电流  $\Sigma I = jL$ , 根据安培环路定理, 有

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = 2BL = \mu_0 jL$$

解得导电平面两侧的磁感强度大小为

$$B = \frac{\mu_0 j}{2}$$

磁感强度的方向由电流的右手螺旋定则确定.

**7-22** 设有两无限大平行载流平面, 它们的电流面密度均为  $j$ , 电流向相反, 求: (1) 两载流平面之间的磁感强度; (2) 两载流平面之外空间的磁感强度.

**解** 利用上一题计算的结果, 在电流面密度为  $j$  的无限大载流平面两侧的磁感强度大小为  $\mu_0 j/2$ , 方向如图所示, 根据磁场的叠加原理可得

(1) 取垂直于纸面向里为  $x$  轴正向, 合磁场为

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 j}{2} \mathbf{i} + \frac{\mu_0 j}{2} \mathbf{i} = \mu_0 j \mathbf{i}$$

(2) 两导体载流平面之外, 合磁场的磁感强度为

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 j}{2} \mathbf{i} - \frac{\mu_0 j}{2} \mathbf{i} = 0$$

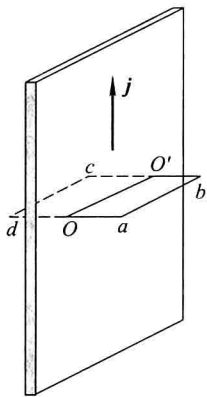
**7-23** 氢原子可以看成电子在平面内绕核作匀速圆周运动的带电系统. 已知电子电荷为  $-e$ , 质量为  $m_e$ , 电子作圆周运动的角动量为  $L$ , 求电子沿圆周轨道运动的轨道磁矩.

**分析** 电子在平面内绕原子核匀速转动可以视作圆电流, 其等效圆电流为

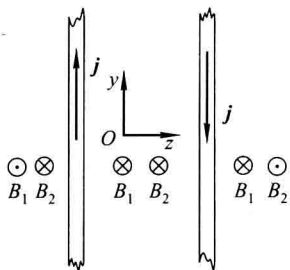
$$i = -\frac{e}{T}$$

根据磁矩的定义,  $\mathbf{m} = iS\mathbf{e}_n$  不难求得电子沿圆周轨道运动的轨道磁矩.

**解** 电子绕原子核转动的等效圆电流为



题 7-21 图



题 7-22 图



$$i = -\frac{e}{T} = -\frac{e\omega}{2\pi}$$

电子的角动量  $L = m_e r^2 \omega$ , 根据磁矩的定义

$$\mathbf{m} = i S \mathbf{e}_n = -\frac{e\omega}{2\pi} \pi r^2 \mathbf{e}_n = -\frac{e}{2m_e} \mathbf{L}$$

**7-24** 将一根带电导线弯成半径为  $R$  的圆环, 电荷线密度为  $\lambda$  ( $\lambda > 0$ ), 圆环绕过圆心且与圆环面垂直的轴以角速度  $\omega$  转动, 求轴上任一点的磁感强度.

**分析** 带电圆环绕过圆心且与圆环面垂直的轴以角速度  $\omega$  转动, 其等效圆电流为

$$i = \frac{2\pi R\lambda}{T}$$

上述等效圆电流在转动轴上任一点激发的磁感强度为

$$B = \frac{\mu_0 R^2 i}{2 (R^2 + x^2)^{3/2}}$$

代入可解得转动轴上任一点的磁感强度.

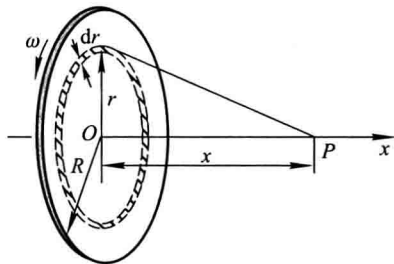
**解** 转动的带电圆环其等效圆电流为

$$i = \frac{2\pi R\lambda}{2\pi/\omega} = R\lambda\omega$$

代入得圆环在轴上任一点激发的磁感强度

$$B = \frac{\mu_0 R^2 i}{2 (R^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 R^3 \lambda \omega}{2 (R^2 + x^2)^{3/2}}$$

**7-25** 如图所示, 半径为  $R$  的圆片均匀带电, 电荷面密度为  $\sigma$ , 令该圆片以角速度  $\omega$  绕通过其中心且垂直于圆平面的轴旋转. 求轴线上距圆片中心为  $x$  处的点  $P$  的磁感强度和旋转圆片的磁矩.



题 7-25 图

**分析** 可将旋转的均匀带电圆盘视作一组旋转的不同半径带电圆环, 每一个旋转的带电圆环可以等效为相同半径的圆电流, 其等效电流

$$di = \frac{2\pi\sigma r dr}{T}$$

等效圆电流在转动轴上任一点激发的磁感强度和圆心的磁矩分别为

$$dB = \frac{\mu_0 r^2 di}{2 (r^2 + x^2)^{3/2}}$$

$$dm = \pi r^2 di$$

积分叠加可求得轴线上的磁感强度以及圆心的磁矩.

**解** 将旋转的均匀带电圆盘分割为半径为  $r$  的圆环, 等效电流为

$$di = \frac{2\pi\sigma r dr}{2\pi/\omega} = \sigma r \omega dr$$

等效圆电流在转动轴线上任一点激发的磁感强度为

$$dB = \frac{\mu_0 r^2 di}{2(r^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 \sigma \omega r^3 dr}{2(r^2 + x^2)^{3/2}}$$

积分得带电旋转圆盘轴线上距圆心  $x$  处  $P$  点的磁感强度

$$B = \int_0^R dB = \int_0^R \frac{\mu_0 \sigma \omega r^3 dr}{2(r^2 + x^2)^{3/2}}$$

作三角变换,  $r = x \tan \theta$ ,  $dr = x \sec^2 \theta d\theta$ , 代入得

$$B = \frac{1}{2} \mu_0 \sigma \omega x \int \frac{\sin^3 \theta d\theta}{\cos^2 \theta} = \frac{1}{2} \mu_0 \sigma \omega x \int_1^{\frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}}} \left(1 - \frac{1}{\cos^2 \theta}\right) d\cos \theta$$

$$B = \frac{1}{2} \mu_0 \sigma \omega \left( \frac{2x^2 + R^2}{\sqrt{x^2 + R^2}} - 2x \right)$$

等效圆电流在圆心的磁矩为

$$dm = \pi \sigma \omega r^3 dr$$

积分得带电旋转圆盘圆心的磁矩

$$m = \int_0^R dm = \int_0^R \pi \sigma \omega r^3 dr = \frac{1}{4} \pi \sigma \omega R^4$$

**7-26** 在氢原子中, 设电子以轨道角动量  $L = h/2\pi$  绕质子作圆周运动, 其半径为  $a_0 = 5.29 \times 10^{-11} \text{ m}$ , 求质子所在处的磁感强度.

**分析** 电子绕核运动基态的角动量为

$$L = m r^2 \omega = \frac{h}{2\pi}$$

电子在平面内绕原子核匀速转动可以视作圆电流, 其等效圆电流大小为

$$i = \frac{e}{T}$$

等效圆电流在圆心激发的磁感强度为

$$B = \frac{\mu_0 i}{2a_0}$$

将电子轨道角动量  $L = m_e a_0^2 \omega = h/2\pi$ , 代入解得质子所在处的磁感强度.

**解** 由分析可得, 电子绕原子核转动的等效圆电流大小为

$$i = \frac{e}{T} = \frac{e\omega}{2\pi}$$

等效圆电流在圆心激发的磁感强度为

$$B = \frac{\mu_0 i}{2a_0} = \frac{\mu_0 e \omega}{4\pi a_0}$$

由电子轨道角动量解得  $\omega = \frac{h}{2\pi m_e a_0^2}$ , 代入得

$$B = \frac{\mu_0 e h}{8\pi^2 m_e a_0^2} = 12.5 \text{ T}$$

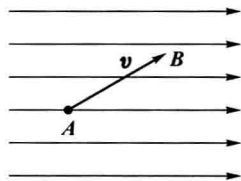
**7-27** 质子和电子以相同的速度垂直飞入磁感强度为  $B$  的匀强磁场中, 试求质子轨道半径与电子轨道半径之比.

解 由教材式(7-22), 带电粒子在均匀磁场中运动的轨道半径为

$$R = \frac{mv}{qB}$$

$$\frac{R_p}{R_e} = \frac{m_p}{m_e} = 1833$$

**7-28** 如图所示, 在  $B = 0.01 \text{ T}$  的均匀磁场中, 电子以  $v = 10^4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  的速度在磁场中通过  $A$  点运动, 电子运动速度和磁场  $B$  的夹角为  $30^\circ$ . 求电子的轨道半径和旋转频率.



题 7-28 图

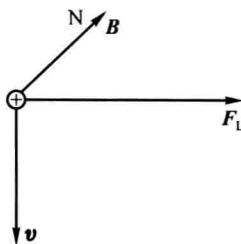
解 由教材式(7-22), 带电粒子在均匀磁场中运动的轨道半径为

$$R = \frac{mv_{\perp}}{eB} = \frac{mv \sin \theta}{eB} = 2.84 \times 10^{-6} \text{ m}$$

回转频率为

$$f = \frac{eB}{2\pi m} = 2.79 \times 10^8 \text{ Hz}$$

**7-29** 已知地面上空某处地磁场的磁感强度  $B = 0.4 \times 10^{-4} \text{ T}$ , 方向向北. 若宇宙射线中有一速度  $v = 5.0 \times 10^7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  的质子垂直地面通过该处. 求: (1) 洛伦兹力的方向; (2) 洛伦兹力的大小, 并与该质子受到的万有引力相比较.



题 7-29 图

解 (1) 依照  $F_L = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$  可知洛伦兹力  $F_L$  方向为  $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$  的方向, 如图所示.

(2) 因  $v \perp B$ , 质子所受的洛伦兹力

$$F_L = qvB = 3.2 \times 10^{-16} \text{ N}$$

在地球表面质子所受的万有引力

$$G = m_p g = 1.64 \times 10^{-26} \text{ N}$$

因而,有  $F_L/G=1.95\times 10^{10}$ ,即质子所受的洛伦兹力远大于重力.

### 7-30 试证明霍尔电场强度与恒定电场强度之比

$$\frac{E_H}{E_c} = \frac{B}{nep}$$

这里  $\rho$  为材料的电阻率,  $n$  为载流子的数密度.

**分析** 在导体内部,恒定电场推动导体中的载流子定向运动形成电流,由欧姆定律的微分形式,恒定电场强度与电流密度应满足

$$E_c = \rho j$$

其中  $\rho$  是导体的电阻率,当电流流过位于恒定磁场中的导体时,载流子受到洛伦兹力的作用,导体侧面出现电荷积累,形成霍尔电场,其电场强度为

$$E_H = -v_d \times B$$

其中  $v_d$  是载流子定向运动速率. 根据导体内电流密度公式,由上述关系可得要证明的结果.

**证** 由欧姆定律的微分形式知,在导体内恒定电场强度为

$$E_c = \rho j = \rho nev_d$$

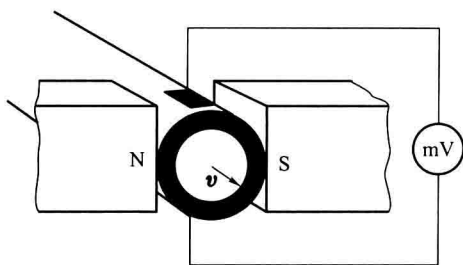
由霍尔效应,霍尔电场强度

$$E_H = -v_d \times B$$

因载流子定向运动方向与磁感强度正交,故  $E_H = v_d B$ , 因而

$$\frac{E_H}{E_c} = \frac{v_d B}{\rho j} = \frac{v_d B}{\rho nev_d} = \frac{B}{nep}$$

**7-31** 霍尔效应可用来测量血流的速度,其原理如图所示. 在动脉血管两侧分别安装电极并加以磁场. 设血管直径为 2.0 mm,磁感强度为 0.080 T,毫伏表测出血管上下两端的电压为 0.10 mV,则血流的流速为多大?



题 7-31 图

**分析** 血流稳定时有

$$qvB = qE_H$$

由上式可以解得血流的流速.

**解** 依照分析

$$v = \frac{E_H}{B} = \frac{U_H}{dB} = 0.63 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

**7-32** 磁力可以用来输送导电液体,如液态金属、血液等,而不需要机械活动组件. 如图所示是输送液态钠的管道,在

长为  $l=2.00 \text{ cm}$  的部分加一横向磁场  $B$ , 其磁感强度为  $1.50 \text{ T}$ , 同时在垂直于磁场和管道的方向加一电流, 其电流密度为  $j$ . (1) 证明在管内液体  $l$  段两端由磁力产生的压力差为  $\Delta p = jBl$ , 此压力差将驱动液体沿管道

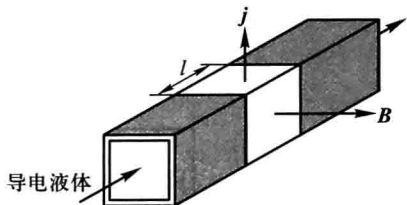


图 7-32

流动; (2) 要在  $l$  段两端产生  $1.00 \text{ atm}$  ( $1 \text{ atm} = 101\,325 \text{ Pa}$ ) 的压力差, 电流密度应为多大?

**解** (1) 由题意电流垂直流过管内导电液体, 磁场中的导电液体受到安培力的作用, 在管道纵向产生一压力差

$$\Delta p = \frac{F}{S} = \frac{IBl}{S} = jBl$$

(2) 欲在  $l$  段两端产生  $1.00 \text{ atm}$  压差, 电流密度为

$$j = \frac{\Delta p}{Bl} = 3.38 \times 10^6 \text{ A} \cdot \text{m}^{-2}$$

**7-33** 带电粒子在过饱和液体中运动, 会留下一串气泡显示出粒子运动的径迹. 设在气泡室中, 有一质子垂直于磁场飞过, 留下一个半径为  $3.5 \text{ cm}$  的圆弧径迹, 测得磁感强度为  $0.20 \text{ T}$ , 求此质子的动量和能量.

**解** 根据带电粒子回转半径与粒子运动速率的关系有

$$p = mv = ReB = 1.12 \times 10^{-21} \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$E_k = \frac{p^2}{2m} = 0.00235 \text{ MeV}$$

**7-34** 从太阳射来的速度为  $0.80 \times 10^7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  的电子进入地球赤道上空高层范艾伦辐射带中, 该处磁场为  $4.0 \times 10^{-7} \text{ T}$ , 此电子回转轨道半径为多少? 若电子沿地球磁场的磁感线旋进到地磁北极附近, 地磁北极附近磁场为  $2.0 \times 10^{-5} \text{ T}$ , 其轨道半径又为多少?

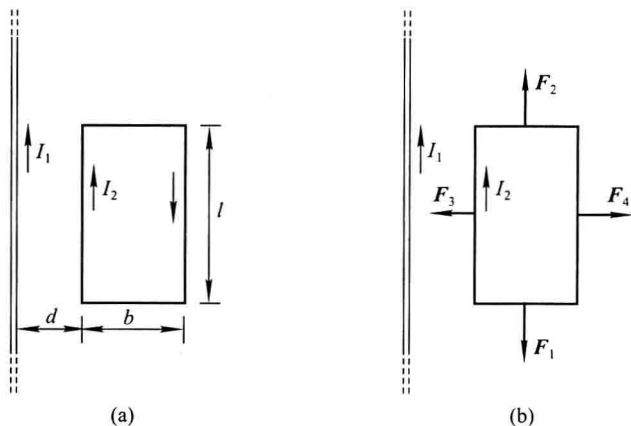
**解** 由带电粒子在磁场中运动的回转半径可得高层范艾伦辐射带中的回转半径

$$R_1 = \frac{mv}{eB_1} = 1.1 \times 10^2 \text{ m}$$

地磁北极附近的回转半径

$$R_2 = \frac{mv}{eB_2} = 23 \text{ m}$$

7-35 如图(a)所示,一根长直导线载有电流  $I_1 = 30 \text{ A}$ , 矩形回路载有电流  $I_2 = 20 \text{ A}$ . 试计算作用在回路上的合力. 已知  $d = 1.0 \text{ cm}$ ,  $b = 8.0 \text{ cm}$ ,  $l = 0.12 \text{ m}$ .



题 7-35 图

**分析** 矩形上、下两端导线受安培力  $F_1$  和  $F_2$  的大小相等, 方向相反, 对不变形的矩形回路来说, 两力的矢量和为零. 而矩形的左右两段导线, 由于载流导线所在处磁感强度不等, 所受到的安培力  $F_3$  和  $F_4$  的大小不同, 且方向相反, 因此线框所受的力为这两个力的合力.

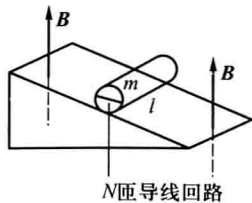
**解** 由分析可知, 线框所受总的安培力为左、右两侧安培力  $F_3$  和  $F_4$  之矢量和, 如图(b)所示, 它们的大小分别为

$$F_3 = \frac{\mu_0 I_1 I_2 l}{2\pi d}, F_4 = \frac{\mu_0 I_1 I_2 l}{2\pi(d+b)}$$

合力的大小为

$$F = F_3 - F_4 = \frac{\mu_0 I_1 I_2 l}{2\pi d} - \frac{\mu_0 I_1 I_2 l}{2\pi(d+b)} = 1.28 \times 10^{-3} \text{ N}$$

7-36 如图所示, 在粗糙斜面上放有一长为  $l$  的木制圆柱, 其上固定一平面绕组, 共  $N$  匝. 圆柱体的轴线位于绕组平面内, 整个装置的质量为  $m$ , 处于磁感强度大小为  $B$ 、方向竖直向上的均匀磁场中. 如果绕组的平面与斜面平行, 则当圆柱体静止在斜面上不动时通过回路的电流等于多少?



题 7-36 图

**分析** 线圈受到磁场的安培力矩和整个装置所受到的重力矩方向相反, 如果两者大小相等, 则装置系统受到的合外力矩为零, 圆柱体将静止在斜面上不动. 由力矩平衡可以解出线圈回路的电流.

解 线圈受到磁场的安培力矩和整个装置所受到的重力矩分别为

$$M_g = mgR \sin \theta$$

$$M_A = 2Rl \cdot NI \cdot B \cdot \sin \theta$$

力矩平衡时,圆柱体在斜面上静止不动.有

$$M_g = mgR \sin \theta = M_A = 2Rl \cdot NI \cdot B \cdot \sin \theta$$

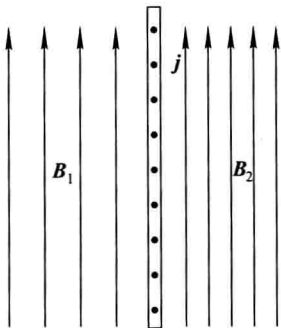
解得

$$I = \frac{mg}{2lNB}$$

7-37 将一电流均匀分布的无限大载流平面放入磁感强度为  $B_0$  的均匀磁场中,电流方向与磁场垂直,放入后,平面两侧磁场的磁感强度分别为  $B_1$  和  $B_2$ ,如图所示.求该载流平面上单位面积所受的磁场力的大小和方向.

分析 取无限大载流平面为  $Oxy$  面,电流密度  $j$  沿  $x$  轴方向,载流平面激发的磁感强度为  $B$ ,利用习题 7-21 结果,有

$$B = \frac{1}{2} \mu_0 j$$



题 7-37 图

磁感强度  $B$  的方向服从右手定则,即在图中无限大载流平面右侧磁感强度朝上;左侧磁感强度朝下.不妨设外磁场  $B_0$  方向朝上,由磁场的叠加原理

$$B_1 = B_0 - B, \quad B_2 = B_0 + B$$

从中可以解得外磁场  $B_0$  和载流平面电流面密度  $j$ .

载流平面在外磁场中受到安培力的作用,因安培定律仅适用于线电流,可将载流平面分割为宽度为  $dy$  的无限长线电流,  $dI = jdy$ ,由安培力

$$dF = dI \cdot dI \times B_0, \quad dF = jdy \cdot dx \cdot B_0$$

得

$$\frac{dF}{dx dy} = j \cdot B_0$$

代入即可解得载流平面上单位面积所受的磁场力.

解 由上述分析,载流平面激发的磁场和外磁场叠加后有

$$B_1 = B_0 - \frac{1}{2} \mu_0 j, \quad B_2 = B_0 + \frac{1}{2} \mu_0 j$$

联立解得

$$j = \frac{1}{\mu_0} (B_2 - B_1), \quad B_0 = \frac{1}{2} (B_2 + B_1)$$

外磁场作用在单位面积载流平面上的安培力

$$\frac{dF}{dx dy} = j \cdot B_0 = \frac{1}{2\mu_0} (B_2 + B_1) (B_2 - B_1) = \frac{1}{2\mu_0} (B_2^2 - B_1^2)$$

磁场力的方向水平向左.

**7-38** 在直径为 1.0 cm 的铜棒上,切割下一个圆盘. 设想这个圆盘的厚度只有一个原子线度那么大, 这样在圆盘上约有  $6.2 \times 10^{14}$  个铜原子, 每个铜原子有 27 个电子, 每个电子的自旋磁矩为  $\mu_e = 9.3 \times 10^{-24} \text{ A} \cdot \text{m}^2$ . 我们假设所有电子的自旋磁矩方向都相同, 且平行于铜棒的轴线. 求: (1) 圆盘的磁矩; (2) 如这磁矩是由圆盘上的电流产生的, 那么圆盘边缘上需要有多大的电流.

**解** (1) 因为所有电子的磁矩方向相同, 则圆盘的磁矩为

$$m = N\mu_e = 1.56 \times 10^{-7} \text{ A} \cdot \text{m}^2$$

(2) 由磁矩的定义, 可得圆盘边缘等效电流

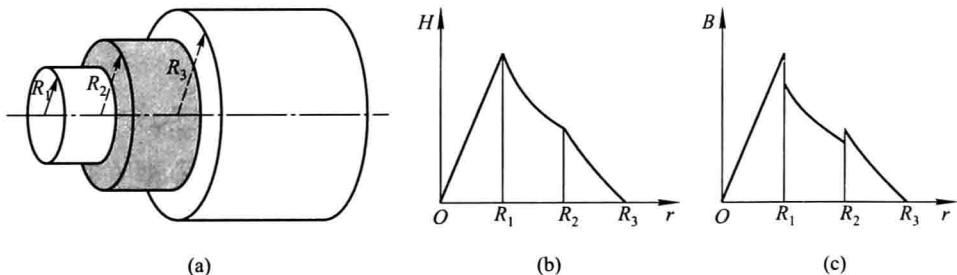
$$I = m/S = 2.0 \times 10^{-3} \text{ A}$$

**7-39** 如图(a)所示, 一根长直同轴电缆, 内、外导体之间充满磁介质, 磁介质的相对磁导率为  $\mu_r$  ( $\mu_r > 1$ ), 导体的磁化可以略去不计. 电缆沿轴向有恒定电流  $I$  通过, 内外导体上电流的方向相反. 求: (1) 空间各区域内的磁感强度和磁化强度; (2) 磁介质表面的磁化电流.

**分析** 由题意, 电流沿对称轴线通过, 依照右手定则, 磁场强度分布呈轴对称, 磁场线是一组以电缆对称轴线为中心的同心圆. 任取一同心圆为积分路径, 应该有

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = H \cdot 2\pi r$$

利用安培环路定理  $\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \sum I_i$ , 由环路内的传导电流分布, 可以求出磁场强度的分布, 并由  $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{M} = (\mu_r - 1)\mathbf{H}$ , 可以求出磁感强度和磁化强度, 再由磁化电流密度与磁化强度的关系求出磁化电流.



题 7-39 图

**解** (1) 取与电缆同轴的圆为积分路径, 根据磁介质中的安培环路定理, 有

$$H \cdot 2\pi r = \sum I_i$$



$$r < R_1 \quad \sum_i I_i = \frac{I}{\pi R_1^2} \pi r^2$$

解得 
$$H_1 = \frac{Ir}{2\pi R_1^2}$$

忽略导体的磁化, 即导体磁导率  $\mu_r = 1$ , 有

$$M_1 = (\mu_r - 1)H_1 = 0, \quad B_1 = \mu H_1 = \frac{\mu_0 Ir}{2\pi R_1^2}$$

$$R_2 > r > R_1 \quad \sum_i I_i = I$$

解得 
$$H_2 = \frac{I}{2\pi r}$$

内、外导体间的磁介质相对磁导率为  $\mu_r$ , 有

$$M_2 = (\mu_r - 1)H_2 = (\mu_r - 1)\frac{I}{2\pi r}, \quad B_2 = \mu H_2 = \frac{\mu_0 \mu_r I}{2\pi r}$$

$$R_3 > r > R_2 \quad \sum_i I_i = I - \frac{I}{\pi(R_3^2 - R_2^2)} \cdot \pi(r^2 - R_2^2)$$

解得 
$$H_2 = \frac{I(R_3^2 - r^2)}{2\pi r(R_3^2 - R_2^2)}$$

忽略导体的磁化, 有

$$M_3 = (\mu_r - 1)H_3 = 0, \quad B_3 = \mu H_3 = \frac{\mu_0 I(R_3^2 - r^2)}{2\pi r(R_3^2 - R_2^2)}$$

$$r > R_3 \quad \sum_i I_i = I - I = 0$$

解得 
$$H_4 = 0, \quad M_4 = 0, \quad B_4 = 0$$

(2) 磁化电流  $I_s = \alpha_s \cdot 2\pi r$ ,  $\alpha_s = M(R)$ , 磁介质内、外表面磁化电流的大小为

$$I_{s1} = M_2(R_1) \cdot 2\pi R_1 = (\mu_r - 1)I$$

$$I_{s2} = M_2(R_2) \cdot 2\pi R_2 = (\mu_r - 1)I$$

抗磁质  $\mu_r < 1$ , 在磁介质表面  $r = R_1$ , 磁化电流与内导体传导电流方向相反; 在磁介质外表面  $r = R_2$ , 磁化电流与外导体传导电流方向相反. 顺磁质的情况与抗磁质相反,  $H(r)$  和  $B(r)$  分布曲线分别如图(b)、(c)所示.

**7-40** 设长为  $L = 5.0 \text{ cm}$ , 截面积为  $S = 1.0 \text{ cm}^2$  的铁棒中所有铁原子的磁偶极矩都沿轴向整齐排列, 且每个铁原子的磁偶极矩  $m_0 = 1.8 \times 10^{-23} \text{ A} \cdot \text{m}^2$ . 求: (1) 铁棒的磁偶极矩; (2) 如果要使铁棒与磁感强度  $B_0 = 1.5 \text{ T}$  的外磁场正交, 需用多大的力矩? 已知铁的密度  $\rho = 7.8 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$ , 铁的摩尔质量  $M_{\text{Fe}} = 55.85 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ .

**分析** (1) 根据铁棒的体积和密度求得铁棒的质量, 再根据铁的摩尔质量求得棒内铁原子数  $N$ , 即

$$N = \frac{\rho V}{M_{\text{Fe}}} N_A$$

其中  $N_A$  为阿伏伽德罗常量, 铁棒内原子磁偶极矩同方向排列, 因而棒的磁偶极矩为

$$m = Nm_0$$

(2) 将铁棒视为一个磁偶极子, 使其与外磁场正交所需力矩

$$M = mB_0$$

解 (1) 有上述分析, 铁棒内铁原子数为

$$N = \frac{\rho SL}{M_{\text{Fe}}} N_A$$

因而铁棒的磁偶极矩为

$$m = Nm_0 = \frac{\rho SL}{M_{\text{Fe}}} N_A m_0 = 7.58 \text{ A} \cdot \text{m}^{-2}$$

(2) 维持铁棒与磁场正交所需力矩等于该位置上磁偶极矩所受的磁力矩

$$M = mB_0 = 11.4 \text{ N} \cdot \text{m}$$

**7-41** 在实验室, 为了测试某种磁性材料的相对磁导率  $\mu_r$ , 常将这种材料做成截面为矩形的圆环型样品, 然后用漆包线绕成一螺绕环. 设圆环的平均周长为  $0.10 \text{ m}$ , 横截面积为  $0.50 \times 10^{-4} \text{ m}^2$ , 线圈共绕了  $200$  匝. 当线圈通过  $0.10 \text{ A}$  的电流时, 测得穿过圆环横截面的磁通量为  $6.0 \times 10^{-5} \text{ Wb}$ , 求此时该材料的相对磁导率  $\mu_r$ .

**分析** 根据右手定则, 磁感线与电流相互环连, 磁场沿环形螺线管分布, 当环形螺线管中通过电流  $I$  时, 由安培环路定理得磁介质内部的磁场强度为

$$H = \frac{NI}{L}$$

由题意可知, 环内部的磁感强度  $B = \Phi/S$ , 而  $B = \mu_0 \mu_r H$ , 故有

$$\mu_r = \frac{B}{\mu_0 H}$$

**解** 磁介质内部的磁感强度和磁场强度分别为  $NI/L$  和  $\Phi/S$ , 因而有

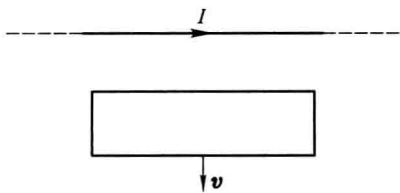
$$\mu_r = \frac{\Phi L}{\mu_0 NIS} = 4.78 \times 10^3$$

## 第八章 电磁感应 电磁场

**8-1** 一根无限长平行直导线载有  $I$ , 一矩形线圈位于导线平面内沿垂直于载流导线方向以恒定速率运动, 如图所示, 则( )

- (A) 线圈中无感应电流
- (B) 线圈中感应电流为顺时针方向
- (C) 线圈中感应电流为逆时针方向
- (D) 线圈中感应电流方向无法确定

**分析与解** 由右手定则可以判断,在矩形线圈附近磁场垂直纸面朝里,磁场是非均匀场,距离长直载流导线越远,磁场越弱.因而当矩形线圈朝下运动时,线圈中的磁通量发生变化,在线圈中产生感应电流,感应电流方向由法拉第电磁感应定律可以判定.因而正确答案为(B).



题 8-1 图

**8-2** 将形状完全相同的铜环和木环静止放置在交变磁场中,并假设通过两环面的磁通量随时间的变化率相等,不计自感时则( )

- (A) 铜环中有感应电流,木环中无感应电流
- (B) 铜环中有感应电流,木环中有感应电流
- (C) 铜环中感应电场强度大,木环中感应电场强度小
- (D) 铜环中感应电场强度小,木环中感应电场强度大

**分析与解** 根据法拉第电磁感应定律,铜环、木环中的感应电场大小相等,但在木环中不会形成电流.因而正确答案为(A).

**8-3** 有两个线圈,线圈 1 对线圈 2 的互感系数为  $M_{21}$ ,而线圈 2 对线圈 1 的互感系数为  $M_{12}$ .若它们分别流过  $i_1$  和  $i_2$  的变化电流且  $\left| \frac{di_1}{dt} \right| < \left| \frac{di_2}{dt} \right|$ ,并由  $i_2$  变化在线圈 1 中产生的互感电动势为  $\mathcal{E}_{12}$ ,由  $i_1$  变化在线圈 2 中产生的互感电动势为  $\mathcal{E}_{21}$ ,则判断正确的是( )

- (A)  $M_{12} = M_{21}$ ,  $\mathcal{E}_{21} = \mathcal{E}_{12}$
- (B)  $M_{12} \neq M_{21}$ ,  $\mathcal{E}_{21} \neq \mathcal{E}_{12}$
- (C)  $M_{12} = M_{21}$ ,  $\mathcal{E}_{21} > \mathcal{E}_{12}$
- (D)  $M_{12} = M_{21}$ ,  $\mathcal{E}_{21} < \mathcal{E}_{12}$

**分析与解** 教材中已经证明  $M_{21} = M_{12}$ ,电磁感应定律  $\mathcal{E}_{21} = M_{21} \left| \frac{di_1}{dt} \right|$ ;  $\mathcal{E}_{12} = M_{12} \left| \frac{di_2}{dt} \right|$ .因而正确答案为(D).

**8-4** 对位移电流,下述说法正确的是( )

- (A) 位移电流的实质是变化的电场
- (B) 位移电流和传导电流一样是定向运动的电荷
- (C) 位移电流服从传导电流遵循的所有定律
- (D) 位移电流的磁效应不服从安培环路定理

**分析与解** 位移电流的实质是变化的电场,犹如传导电流一般会激发磁场,在这一点位移电流等效于传导电流,但是位移电流不是定向运动的电荷,也就不服从焦耳热效应、安培力等定律.因而正确答案为(A).

**8-5** 下列概念正确的是( )

- (A) 感应电场是保守场  
 (B) 感应电场的电场线是一组闭合曲线  
 (C)  $\Phi = LI$ ,因而线圈的自感系数与回路的电流成反比  
 (D)  $\Phi = LI$ ,回路的磁通量越大,回路的自感系数也一定越大

**分析与解** 对照感应电场的性质,感应电场的电场线是一组闭合曲线.因而正确答案为(B).

**8-6** 一铁芯上绕有线圈100匝,已知铁芯中磁通量与时间的关系为  $\Phi = 8.0 \times 10^{-5} \sin 100\pi t$ ,式中  $\Phi$  的单位为 Wb,  $t$  的单位为 s. 求在  $t = 1.0 \times 10^{-2}$  s 时,线圈中的感应电动势.

**分析** 由于线圈有  $N$  匝相同回路,线圈中的感应电动势等于各匝回路的感应电动势的代数和,在此情况下,法拉第电磁感应定律通常写成  $\mathcal{E} = -N \frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d\Psi}{dt}$ ,其中  $\Psi = N\Phi$  称为磁链.

**解** 线圈中总的感应电动势

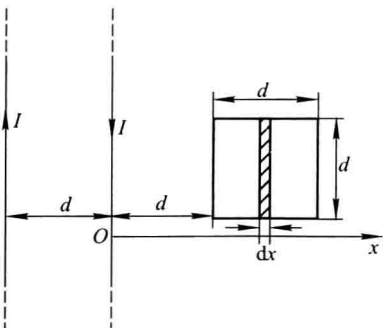
$$\mathcal{E} = -N \frac{d\Phi}{dt} = 2.51 \cos(100\pi t)$$

当  $t = 1.0 \times 10^{-2}$  s 时,  $\mathcal{E} = 2.51$  V.

**8-7** 有两根相距为  $d$  的无限长平行直导线,它们通以大小相等流向相反的电流,且电流均以  $\frac{dI}{dt}$  的变化率增长. 若有一边长为  $d$  的正方形线圈与两导线处于同一平面内,如图所示,求线圈中的感应电动势.

**分析** 本题仍可用法拉第电磁感应定律  $\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}$  来求解. 由于回路处在非均匀磁场中,磁通量  $\Phi = \int_s \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$ ,其中  $\mathbf{B}$  为两无限长直电流单独存在时产生的磁感强度  $\mathbf{B}_1$  与  $\mathbf{B}_2$  之和.

建立如图所示的坐标系. 取一个平行于长直导线且宽为  $dx$ 、长为  $d$  的面元  $dS$ ,如图中阴影部分所示,则  $dS = ddx$ ,总磁通量可通过积分求得. 本题在工程技



题 8-7 图

术中又称为互感现象,也可用公式  $\mathcal{E}_M = -M \frac{dI}{dt}$  求解.

**解 1** 穿过面元  $dS$  的磁通量为

$$d\Phi = \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = B_1 \cdot dS + B_2 \cdot dS = \frac{\mu_0 I}{2\pi(x+d)} dx - \frac{\mu_0 I}{2\pi x} dx$$

因此穿过线圈的磁通量为

$$\Phi = \int d\Phi = \int_a^{2d} \frac{\mu_0 I dx}{2\pi(x+d)} - \int_a^{2d} \frac{\mu_0 I dx}{2\pi x} = \frac{\mu_0 I d}{2\pi} \ln \frac{3}{4}$$

再由法拉第电磁感应定律,有

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = \left( \frac{\mu_0 d}{2\pi} \ln \frac{4}{3} \right) \frac{dI}{dt}$$

**解 2** 当两长直导线有电流  $I$  通过时,穿过线圈的磁通量为

$$\Phi = \frac{\mu_0 d I}{2\pi} \ln \frac{3}{4}$$

线圈与两长直导线间的互感为

$$M = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu_0 d}{2\pi} \ln \frac{3}{4}$$

当电流以  $\frac{dI}{dt}$  变化时,线圈中的互感电动势为

$$\mathcal{E} = -M \frac{dI}{dt} = \left( \frac{\mu_0 d}{2\pi} \ln \frac{4}{3} \right) \frac{dI}{dt}$$

假如线圈又以速率  $v$  沿水平向右运动,如何用法拉第电磁感应定律求图示位置的电动势呢?

此时线圈中既有动生电动势,又有感生电动势. 设时刻  $t$ , 线圈左端距右侧直导线的距离为  $\xi$ , 则穿过回路的磁通量  $\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = f(I, \xi)$ , 它表现为变量  $I$  和  $\xi$  的二元函数, 将  $\Phi$  代入  $\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}$  即可求解, 按复合函数求导,  $\frac{d\xi}{dt} = v$ , 再令  $\xi = d$  即可求得图示位置处回路中的总电动势. 最终结果为两项, 其中一项为动生电动势, 另一项为感生电动势.

**8-8** 有一测量磁感强度的线圈, 其截面积  $S = 4.0 \text{ cm}^2$ , 匝数  $N = 160$  匝, 电阻  $R = 50 \Omega$ . 线圈与一内阻  $R_i = 30 \Omega$  的冲击电流计相连. 若开始时线圈的平面与均匀磁场的磁感强度  $\mathbf{B}$  相垂直, 然后线圈的平面很快地转到与  $\mathbf{B}$  的方向平行. 此时从冲击电流计中测得电荷值  $q = 4.0 \times 10^{-5} \text{ C}$ . 问此均匀磁场的磁感强度  $B$  的值为多少?

**分析** 在电磁感应现象中, 闭合回路中的感应电动势和感应电流与磁通量

变化的快慢有关,而在一段时间内,通过导体截面的感应电荷量只与磁通量变化的大小有关,与磁通量变化的快慢无关.工程中常通过感应电荷量的测定来确定磁场的强弱.

**解** 在线圈转过  $90^\circ$  角时,通过线圈平面磁通量的变化量为

$$\Delta\Phi = \Phi_2 - \Phi_1 = NBS - 0 = NBS$$

因此,流过导体截面的电荷量为

$$q = \frac{\Delta\Phi}{R+R_i} = \frac{NBS}{R+R_i}$$

则

$$B = \frac{q(R+R_i)}{NS} = 0.050 \text{ T}$$

**8-9** 如图所示,一长直导线中通有  $I = 5.0 \text{ A}$  的电流,在距导线  $9.0 \text{ cm}$  处,放一面积为  $0.10 \text{ cm}^2$ ,  $10$  匝的小圆线圈,线圈中的磁场可看作是均匀的.今在  $1.0 \times 10^{-2} \text{ s}$  内把此线圈移至距长直导线  $10.0 \text{ cm}$  处.求:(1) 线圈中平均感应电动势;(2) 设线圈的电阻为  $1.0 \times 10^{-2} \Omega$ ,求通过线圈横截面的感应电荷.

**分析** 虽然线圈处于非均匀磁场中,但由于线圈的面积很小,可近似认为穿过线圈平面的磁场是均匀的,因而可近似用  $\Psi = NBS$  来计算线圈在始、末两个位置的磁链,再由此求得感应电动势和感应电荷.

**解** (1) 在始、末状态,通过线圈的磁链分别为

$$\Psi_1 = NB_1 S = \frac{N\mu_0 IS}{2\pi r_1}, \quad \Psi_2 = NB_2 S = \frac{N\mu_0 IS}{2\pi r_2}$$

则线圈中的平均感应电动势为

$$|\bar{\mathcal{E}}| = \left| \frac{\Delta\Psi}{\Delta t} \right| = \frac{N\mu_0 IS}{2\pi\Delta t} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = 1.11 \times 10^{-8} \text{ V}$$

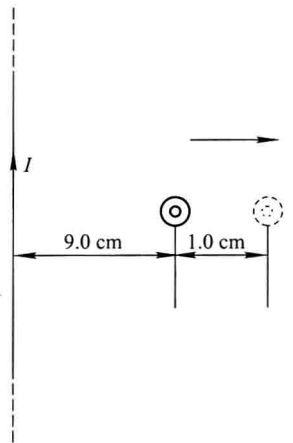
电动势的指向为顺时针方向.

(2) 通过线圈导线横截面的感应电荷为

$$q = \frac{1}{R} |\Psi_1 - \Psi_2| = \frac{|\bar{\mathcal{E}}|}{R} \Delta t = 1.11 \times 10^{-8} \text{ C}$$

**8-10** 如图(a)所示,把一半径为  $R$  的半圆形导线  $OP$  置于磁感强度为  $B$  的均匀磁场中,当导线  $OP$  以匀速率  $v$  向右移动时,求导线中感应电动势  $\mathcal{E}$  的大小.哪一端电势较高?

**分析** 本题可设法构造一个闭合回路由  $\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}$  求解;也可以利用动生电



题 8-9 图

动势公式  $\mathcal{E} = \int_l (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}$  求解, 此时导线元  $d\mathbf{l}$  上的动生电动势为  $d\mathcal{E} = (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}$ , 而矢量  $(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$  的方向就是导线中电势升高的方向.

**解 1** 如图(b)所示, 假想半圆形导线  $OP$  在宽为  $2R$  的静止“ $\square$ ”形导轨上滑动, 两者之间形成一个闭合回路. 设顺时针方向为回路正向, 任一时刻端点  $O$  或端点  $P$  距“ $\square$ ”形导轨左侧距离为  $x$ , 则

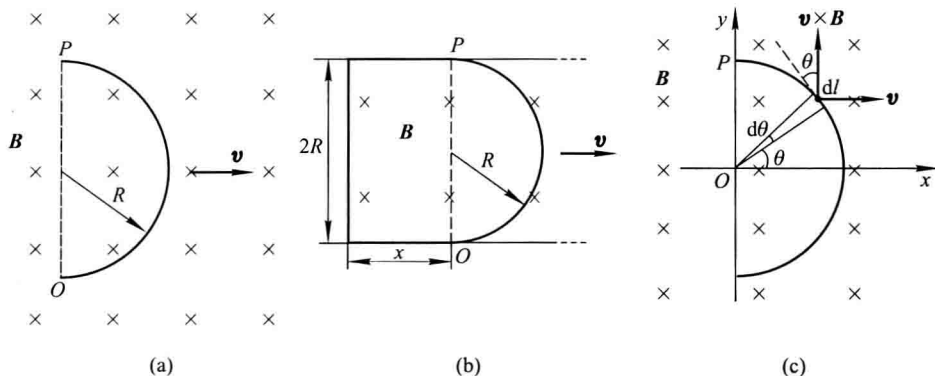
$$\Phi = \left( 2Rx + \frac{1}{2} \pi R^2 \right) B$$

则 
$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -2RB \frac{dx}{dt} = -2RvB$$

由于静止的“ $\square$ ”形导轨上的电动势为零, 则  $\mathcal{E} = -2RvB$ . 式中负号表示电动势的方向为逆时针, 对  $OP$  段来说端点  $P$  的电势较高.

**解 2** 建立如图(c)所示的坐标系, 在导体上任意处取导体元  $d\mathbf{l}$ , 则

$$d\mathcal{E} = (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} = vB \sin 90^\circ \cos \theta dl = vB \cos \theta R d\theta$$



题 8-10 图

$$\mathcal{E} = \int d\mathcal{E} = vBR \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \theta d\theta = 2RvB$$

由矢量  $(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$  的指向可知, 端点  $P$  的电势较高.

**解 3** 连接  $OP$  使导线构成一个闭合回路. 由于磁场是均匀的, 在任意时刻, 穿过回路的磁通量  $\Phi = BS = \text{常量}$ . 由法拉第电磁感应定律  $\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}$  可知, 在均匀磁场中, 任意闭合导体回路因平动而产生的动生电动势为零; 而任意曲线形导体上的动生电动势等于其两端所连直线形导体上的动生电动势.

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_{OP} + \mathcal{E}_{PO} = 0$$

即 
$$\mathcal{E}_{OP} = -\mathcal{E}_{PO} = 2RvB$$

**8-11** 长度为  $L$  的铜棒, 以距端点  $r$  处为支点, 并以角速率  $\omega$  绕通过支点且

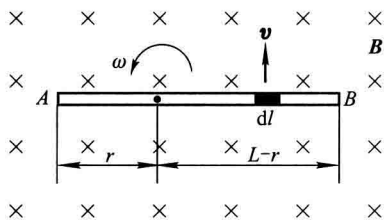
垂直于铜棒的轴转动. 设磁感强度为  $B$  的均匀磁场与轴平行, 求棒两端的电势差.

**分析** 应该注意棒两端的电势差与棒上的动生电动势是两个不同的概念, 这如同电源的端电压与电源电动势的不同. 在开路时, 两者大小相等, 方向相反 (电动势的方向是电势升高的方向, 而电势差的正方向是电势降落的方向).

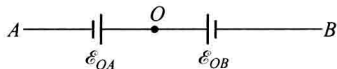
本题可直接用积分法求解棒上的电动势, 亦可以将整个棒的电动势看作是  $OA$  棒与  $OB$  棒上电动势的代数和, 如图 (b) 所示. 而  $\mathcal{E}_{OA}$  和  $\mathcal{E}_{OB}$  则可以直接利用第 8-2 节例 1 给出的结果.

**解 1** 如图 (a) 所示, 在棒上距点  $O$  为  $l$  处取导体元  $d\mathbf{l}$ , 则

$$\mathcal{E}_{AB} = \int_{AB} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} = \int_{-r}^{L-r} -\omega l B dl = -\frac{1}{2} \omega B L (L-2r)$$



(a)



(b)

题 8-11 图

因此棒两端的电势差为

$$U_{AB} = -\mathcal{E}_{AB} = \frac{1}{2} \omega B L (L-2r)$$

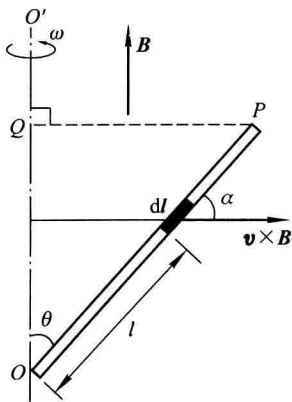
当  $L > 2r$  时, 端点  $A$  处的电势较高.

**解 2** 将  $AB$  棒上的电动势看作是  $OA$  棒和  $OB$  棒上电动势的代数和, 如图 (b) 所示. 其中

$$|\mathcal{E}_{OA}| = \frac{1}{2} B \omega r^2, \quad |\mathcal{E}_{OB}| = \frac{1}{2} \omega B (L-r)^2$$

则  $\mathcal{E}_{AB} = |\mathcal{E}_{OA}| - |\mathcal{E}_{OB}| = -\frac{1}{2} \omega B L (L-2r)$

**8-12** 如图所示, 长为  $L$  的导体棒  $OP$ , 处于均匀磁场中, 并绕  $OO'$  轴以角速度  $\omega$  旋转, 棒与转轴间夹角恒为  $\theta$ , 磁感强度  $B$  与转轴平行. 求  $OP$  棒在图示位置处的电动势.



题 8-12 图

**分析** 本题可以构造一个包含  $OP$  导体在内的



闭合回路,用法拉第电磁感应定律  $\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}$  计算,也可用  $\mathcal{E} = \int_l (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}$  来计算. 由于对称性,导体  $OP$  旋转至任何位置时产生的电动势与图示位置是相同的.

**解 1** 由上分析,得

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{OP} &= \int_{OP} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} \\ &= \int_l vB \sin 90^\circ \cos \alpha dl \\ &= \int_l (l \sin \theta \omega) B \cos(90^\circ - \theta) dl \\ &= \omega B \sin^2 \theta \int_0^L l dl = \frac{1}{2} \omega B (L \sin \theta)^2\end{aligned}$$

由矢量  $(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$  的方向可知端点  $P$  的电势较高.

**解 2** 设想导体  $OP$  为直角三角形导体回路  $OPQO$  中的一部分,任一时刻穿过回路的磁通量  $\Phi$  为零,则回路的总电动势

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = 0 = \mathcal{E}_{OP} + \mathcal{E}_{PQ} + \mathcal{E}_{QO}$$

显然,  $\mathcal{E}_{QO} = 0$ , 所以

$$\mathcal{E}_{OP} = -\mathcal{E}_{PQ} = \mathcal{E}_{QP} = \frac{1}{2} \omega B (PQ)^2 = \frac{1}{2} \omega B (L \sin \theta)^2$$

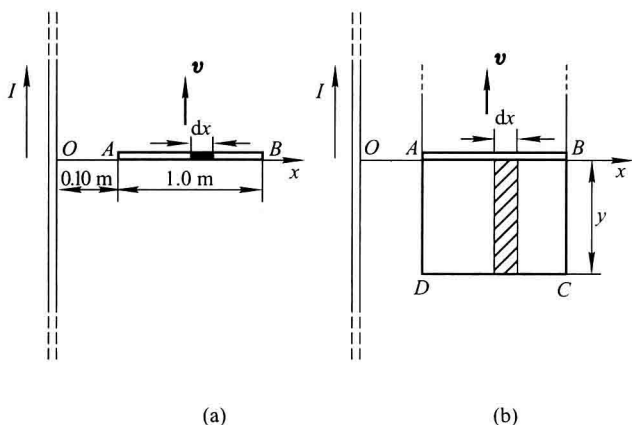
由上可知,导体棒  $OP$  旋转时,在单位时间内切割的磁感线数与导体棒  $QP$  等效. 后者是垂直切割的情况.

**8-13** 如图(a)所示,金属杆  $AB$  以匀速  $v = 2.0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  平行于一长直导线移动,此导线通有电流  $I = 40 \text{ A}$ . 问:此杆中的感应电动势为多大? 杆的哪一端电势较高?

**分析** 本题可用两种方法求解. (1) 用公式  $\mathcal{E} = \int_l (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}$  求解,建立如图(a)所示的坐标系,线元  $d\mathbf{l} = dx$  处的磁感强度  $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi x}$ . (2) 用法拉第电磁感应定律求解,构造一个包含杆  $AB$  在内的闭合回路. 为此可设想杆  $AB$  在一个静止的“□”形导轨上滑动,如图(b)所示. 设时刻  $t$ ,杆  $AB$  距导轨下端  $CD$  的距离为  $y$ ,由公式  $\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$  求得穿过该回路的磁通量,再由  $\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}$ ,即可求得回路的电动势,亦即本题金属杆  $AB$  中的电动势.

**解 1** 根据分析,杆中的感应电动势为

$$\mathcal{E}_{AB} = \int_{AB} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} = - \int_{0.1 \text{ m}}^{1.1 \text{ m}} \frac{\mu_0 I}{2\pi x} v dx = -\frac{\mu_0 I v}{2\pi} \ln 11 = -3.84 \times 10^{-5} \text{ V}$$



题 8-13 图

式中负号表示电动势方向由  $B$  指向  $A$ , 故点  $A$  电势较高.

**解 2** 设顺时针方向为回路  $ABCD$  的正向, 根据分析, 在距直导线  $x$  处, 取宽为  $dx$ 、长为  $y$  的面元  $dS$ , 则穿过面元的磁通量为

$$d\Phi = \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} y dx$$

穿过回路的磁通量为

$$\Phi = \int_S d\Phi = \int_{0.1 \text{ m}}^{1.1 \text{ m}} \frac{\mu_0 I}{2\pi x} y dx = \frac{\mu_0 I y}{2\pi} \ln 11$$

回路的电动势为

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln 11 \frac{dy}{dt} = -\frac{\mu_0 I v}{2\pi} \ln 11 = -3.84 \times 10^{-5} \text{ V}$$

由于静止的“ $\square$ ”形导轨上电动势为零, 所以

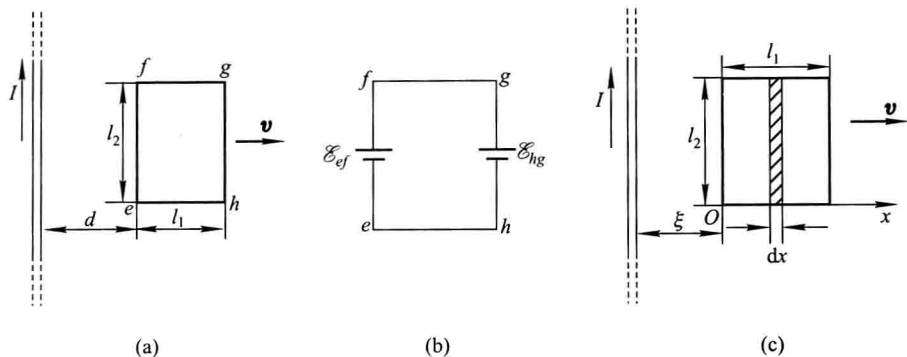
$$\mathcal{E}_{AB} = \mathcal{E} = -3.84 \times 10^{-5} \text{ V}$$

式中负号说明回路电动势方向为逆时针, 对  $AB$  导体来说, 电动势方向应由  $B$  指向  $A$ , 故点  $A$  电势较高.

**8-14** 如图(a)所示, 在一无限长直载流导线的近旁放置一个矩形导体线框. 该线框在垂直于导线方向上以匀速率  $v$  向右移动. 求在图示位置处线框中的感应电动势的大小和方向.

**分析** 本题亦可用两种方法求解.

**方法 1** 当闭合导体线框在磁场中运动时, 线框中的总电动势等于框上各段导体中的动生电动势的代数和. 如图(a)所示, 导体  $eh$  段和  $fg$  段上的电动势为零[此两段导体上处处满足  $(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} = 0$ ], 因而线框中的总电动势为



题 8-14 图

$\mathcal{E} = \oint_l (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} = \int_{ef} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} + \int_{gh} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} = \int_{ef} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} - \int_{hg} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} = \mathcal{E}_{ef} - \mathcal{E}_{hg}$ , 其等效电路如图(b)所示.

**方法 2** 用公式  $\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}$  求解, 式中  $\Phi$  是线框运动至任意位置处时, 穿过线框的磁通量. 为此设时刻  $t$  时, 线框左边距导线的距离为  $\xi$ , 如图(c)所示, 显然  $\xi$  是时间  $t$  的函数, 且有  $\frac{d\xi}{dt} = v$ . 求得线框在任意位置处的电动势  $\mathcal{E}(\xi)$ , 令  $\xi = d$ , 即可得线框在题目所给位置处的电动势.

**解 1** 根据分析, 线框中的电动势为

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \mathcal{E}_{ef} - \mathcal{E}_{hg} \\ &= \int_{ef} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} - \int_{hg} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} \\ &= \frac{\mu_0 I v}{2\pi d} \int_0^{l_2} dl - \frac{\mu_0 I v}{2\pi(d+l_1)} \int_0^{l_2} dl \\ &= \frac{\mu_0 I v l_1 l_2}{2\pi d(d+l_1)} \end{aligned}$$

由  $\mathcal{E}_{ef} > \mathcal{E}_{hg}$  可知, 线框中的电动势方向为  $efgh$ .

**解 2** 设顺时针方向为线框回路的正向. 根据分析, 在任意位置处, 穿过线框的磁通量为

$$\Phi = \int_0^{l_1} \frac{\mu_0 I l_2}{2\pi(x+\xi)} dx = \frac{\mu_0 I l_2}{2\pi} \ln \frac{\xi+l_1}{\xi}$$

相应电动势为

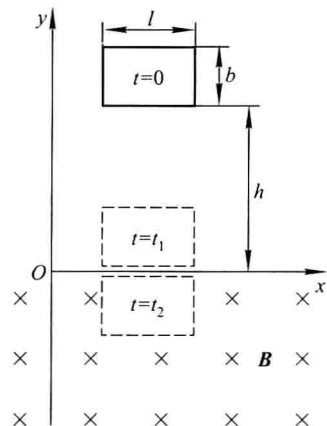
$$\mathcal{E}(\xi) = -\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\mu_0 I v l_1 l_2}{2\pi \xi(\xi+l_1)}$$

令  $\xi = d$ , 得线框在图示位置处的电动势为

$$\mathcal{E} = \frac{\mu_0 I v l_1 l_2}{2\pi d(d+l_1)}$$

由  $\mathcal{E} > 0$  可知, 线框中电动势方向为顺时针方向.

**8-15** 有一长为  $l$ , 宽为  $b$  的矩形导线框架, 其质量为  $m$ , 电阻为  $R$ . 在  $t=0$  时, 框架从距水平面  $y=0$  的上方  $h$  处由静止自由下落, 如图所示. 磁场的分布为: 在  $y=0$  的水平面上方没有磁场; 在  $y=0$  的水平面下方有磁感强度为  $B$  的均匀磁场,  $B$  的方向垂直纸面向里. 已知框架在时刻  $t_1$  和  $t_2$  的位置如图中所示. 求在下述时间内, 框架的速度与时间的关系: (1)  $0 < t \leq t_1$ , 即框架进入磁场前; (2)  $t_1 < t \leq t_2$ , 即框架进入磁场, 但尚未全部进入磁场; (3)  $t > t_2$ , 即框架全部进入磁场后.



题 8-15 图

**分析** 设线框刚进入磁场 ( $t_1$  时刻) 和全部进入磁场 ( $t_2$  时刻) 的瞬间, 其速度分别为  $v_{10}$  和  $v_{20}$ . 在情况 (1) 和 (3) 中, 线框中无感应电流, 线框仅在重力作用下作落体运动, 其速度与时间的关系分别为  $v = gt$  ( $t < t_1$ ) 和  $v = v_{20} + g(t - t_2)$  ( $t > t_2$ ). 而在  $t_1 < t < t_2$  这段时间内, 线框运动较为复杂, 由于穿过线框回路的磁通量变化, 使得回路中有感应电流存在, 从而使线框除受重力外, 还受到一个向上的安培力  $F_A$ , 其大小与速度有关, 即  $F_A = F_A(v)$ . 根据牛顿运动定律, 此时线框的运动微分方程为  $mg - F_A(v) = m \frac{dv}{dt}$ , 解此微分方程可得  $t_1 < t < t_2$  时间内线框的速度与时间的关系式.

**解** (1) 根据分析, 在  $t \leq t_1$  时间内, 线框为自由落体运动, 于是

$$v_1 = gt \quad (t \leq t_1), \quad \text{其中 } t = t_1 \text{ 时, } v_1 = v_{10} = \sqrt{2gh}$$

(2) 线框进入磁场后, 受到向上的安培力为

$$F_A = IlB = \frac{B^2 l^2}{R} v$$

根据牛顿运动定律, 可得线框运动的微分方程

$$mg - \frac{B^2 l^2}{R} v = m \frac{dv}{dt}$$

令  $K = \frac{B^2 l^2}{mR}$ , 整理上式并分离变量积分, 有

$$\int_{v_{10}}^v \frac{dv}{g - Kv} = \int_{t_1}^t dt$$

积分后将  $v_{10} = \sqrt{2gh}$  代入, 可得

$$v_2 = \frac{1}{K} [g - (g - K\sqrt{2gh}) e^{-K(t-t_1)}] \quad (t_1 \leq t \leq t_2)$$

(3) 线框全部进入磁场后 ( $t > t_2$ ), 作初速为  $v_{20}$  的落体运动, 故有

$$v_3 = v_{20} + g(t - t_2) = \frac{1}{K} [g - (g - K\sqrt{2gh}) e^{-K(t_2-t_1)}] + g(t - t_2)$$

**8-16** 有一磁感强度为  $B$  的均匀磁场, 以恒定的变化率  $\frac{dB}{dt}$  在变化. 把一块质量为  $m$  的铜, 拉成截面半径为  $r$  的导线, 并用它做成一个半径为  $R$  的圆形回路, 圆形回路的平面与磁感强度  $B$  垂直. 试证: 这回路中的感应电流为

$$I = \frac{m}{4\pi\rho d} \frac{dB}{dt}$$

式中  $\rho$  为铜的电阻率,  $d$  为铜的密度.

证 圆形回路导线长为  $2\pi R$ , 导线截面积为  $\pi r^2$ , 其电阻  $R'$  为

$$R' = \rho \frac{l}{S} = \rho \frac{2R}{r^2}$$

在均匀磁场中, 穿过该回路的磁通量为  $\Phi = BS$ , 由法拉第电磁感应定律可得回路中的感应电流为

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R'} = \frac{1}{R'} \frac{d\Phi}{dt} = \frac{1}{R'} \pi R^2 \frac{dB}{dt} = \frac{\pi R r^2}{2\rho} \frac{dB}{dt}$$

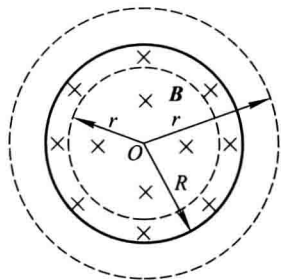
而  $m = d2\pi R\pi r^2$ , 即  $\pi R r^2 = \frac{m}{2\pi d}$ , 代入上式可得

$$I = \frac{m}{4\pi\rho d} \frac{dB}{dt}$$

**8-17** 半径为  $R = 2.0$  cm 的无限长直载流密绕螺线管, 管内磁场可视为均匀磁场, 管外磁场可近似看作零. 若通电电流均匀变化, 使得磁感强度  $B$  随时间的变化率  $\frac{dB}{dt}$  为常量, 且为正值. 试求: (1) 管内外由磁场变化激发的感生电场分布; (2) 如  $\frac{dB}{dt} = 0.010$  T · s<sup>-1</sup>, 求距螺线管中心轴  $r =$

5.0 cm 处感生电场的大小和方向.

分析 变化磁场可以在空间激发感生电场, 感生电场的空间分布与变化的磁场 (包括磁场的空间分布以及磁场的变化率  $\frac{dB}{dt}$  等) 密切相关, 即  $\oint_l \mathbf{E}_k \cdot d\mathbf{l} = - \int_s \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$ . 在一般情况下, 求解感生电场的分布是困难的. 但对于本题这种特殊情况, 则可以利用场的对称性



题 8-17 图

解 变化磁场可以在空间激发感生电场, 感生电场的空间分布与变化的磁场 (包括磁场的空间分布以及磁场的变化率  $\frac{dB}{dt}$  等) 密切相关, 即  $\oint_l \mathbf{E}_k \cdot d\mathbf{l} = - \int_s \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$ . 在一般情况下, 求解感生电场的分布是困难的. 但对于本题这种特殊情况, 则可以利用场的对称性

进行求解. 可以设想, 无限长直螺线管内磁场具有柱对称性, 其横截面的磁场分布如图所示. 由其激发的感生电场也有柱对称性, 考虑到感生电场的电场线为闭合曲线, 且在与磁场正交的平面内, 因而本题中感生电场的电场线一定是一系列以螺线管中心轴为圆心的同心圆. 同一圆周上各点的电场强度  $\mathbf{E}_k$  的大小相等, 方向沿圆周的切线方向. 图中虚线表示  $r < R$  和  $r > R$  两个区域的电场线. 电场线绕向取决于磁场的变化情况, 由楞次定律可知, 当  $\frac{dB}{dt} < 0$  时, 电场线绕向与  $\mathbf{B}$  方向满足右手螺旋关系; 当  $\frac{dB}{dt} > 0$  时, 电场线绕向与前者相反.

**解** 如图所示, 分别在  $r < R$  和  $r > R$  的两个区域内任取一电场线为闭合回路  $l$  (半径为  $r$  的圆), 依照右手定则, 不妨设顺时针方向为回路正向.

$$\begin{aligned} (1) \quad r < R, \quad \mathcal{E} &= \oint_l \mathbf{E}_k \cdot d\mathbf{l} = E_k \cdot 2\pi r = -\frac{dB}{dt} \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = -\pi r^2 \frac{dB}{dt} \\ E_k &= -\frac{r}{2} \frac{dB}{dt} \\ r > R, \quad \mathcal{E} &= \oint_l \mathbf{E}_k \cdot d\mathbf{l} = E_k \cdot 2\pi r = -\frac{dB}{dt} \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = -\pi R^2 \frac{dB}{dt} \\ E_k &= -\frac{R^2}{2r} \frac{dB}{dt} \end{aligned}$$

由于  $\frac{dB}{dt} > 0$ , 故电场线的绕向为逆时针.

(2) 由于  $r > R$ , 所求点在螺线管外, 因此

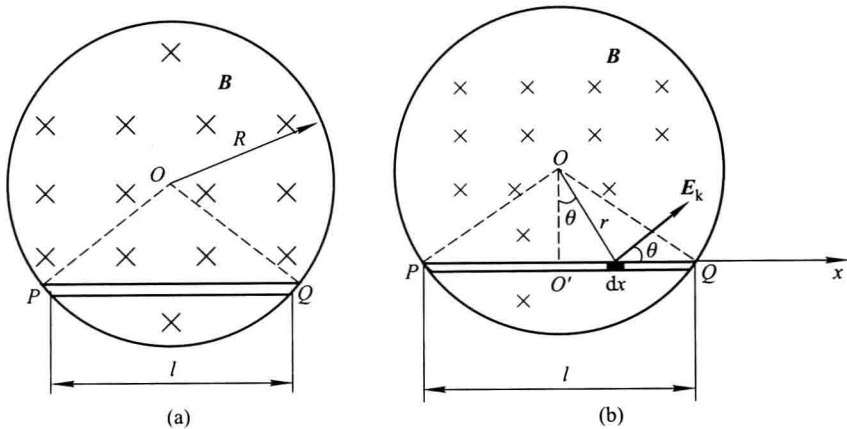
$$E_k = -\frac{R^2}{2r} \frac{dB}{dt}$$

将  $r$ 、 $R$ 、 $\frac{dB}{dt}$  的数值代入, 可得  $E_k = -4.0 \times 10^{-5} \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$ , 式中负号表示  $E_k$  的方向是逆时针的.

**8-18** 在半径为  $R$  的圆柱形空间中存在着均匀磁场,  $\mathbf{B}$  的方向与柱的轴线平行. 如图(a)所示, 有一长为  $l$  的金属棒放在磁场中, 设  $B$  随时间的变化率  $\frac{dB}{dt}$  为常量. 试证: 棒上感应电动势的大小为

$$\mathcal{E} = \frac{dB}{dt} \frac{l}{2} \sqrt{R^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2}$$

**分析** 变化磁场在其周围激发感生电场, 把导体置于感生电场中, 导体中的自由电子就会在电场力的作用下移动, 在棒内两端形成正负电荷的积累, 从而产生感生电动势. 利用上题结果, 由  $\mathcal{E} = \int_l \mathbf{E}_k \cdot d\mathbf{l}$  计算棒上感生电动势. 此外, 还可



题 8-18 图

连接  $OP$ 、 $OQ$ ，设想  $PQOP$  构成一个闭合导体回路，用法拉第电磁感应定律求解，由于  $OP$ 、 $OQ$  沿半径方向，与通过该处的感生电场强度  $E_k$  处处垂直，故  $E_k \cdot d\mathbf{l} = 0$ ， $OP$ 、 $OQ$  两段均无电动势，由法拉第电磁感应定律求出的闭合回路的总电动势，就等于导体棒  $PQ$  上的电动势。

**证 1** 由法拉第电磁感应定律，有

$$\mathcal{E}_{PQ} = \mathcal{E}_{\Delta} = \left| -\frac{d\Phi}{dt} \right| = S \frac{dB}{dt} = \frac{dB}{dt} \frac{l}{2} \sqrt{R^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2}$$

**证 2** 由习题 8-17 可知，在  $r < R$  区域，感生电场强度的大小  $E_k = \frac{r}{2} \frac{dB}{dt}$ 。设  $PQ$  上线元  $dx$  处， $E_k$  的方向如图 (b) 所示，则金属杆  $PQ$  上的电动势为

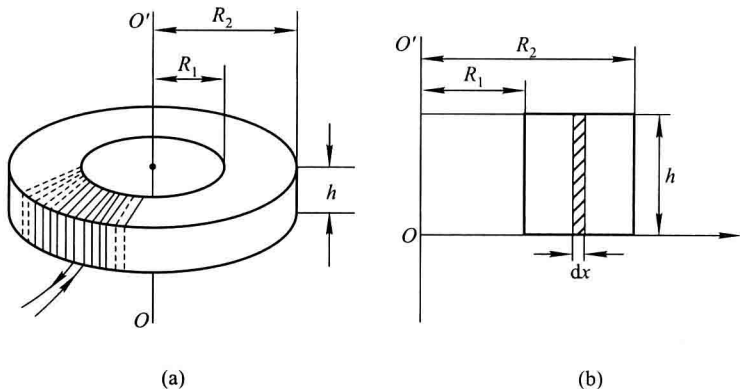
$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{PQ} &= \int_l \mathbf{E}_k \cdot d\mathbf{x} = \int E_k \cos \theta dx = \int_0^l \frac{r}{2} \frac{dB}{dt} \frac{\sqrt{R^2 - (l/2)^2}}{r} dx \\ &= \frac{dB}{dt} \frac{l}{2} \sqrt{R^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2} \end{aligned}$$

设想金属棒  $PQ$  有一段在圆外，则圆外一段导体上有无电动势？该如何求解？

**8-19** 截面积为长方形的环形均匀密绕螺绕环，其尺寸如图 (a) 所示，共有  $N$  匝，求该螺绕环的自感  $L$ 。

**分析** 设有电流  $I$  通过线圈，计算磁场穿过自身回路的总磁通量，再用公式  $L = \frac{\Phi}{I}$  计算  $L$ 。

**解** 设有电流  $I$  通过线圈，线圈回路呈长方形，如图 (b) 所示，由安培环路定理可求得在  $R_1 < r < R_2$  范围内的磁场分布为



题 8-19 图

$$B = \frac{\mu_0 NI}{2\pi x}$$

由于线圈由  $N$  匝相同的回路构成, 所以穿过自身回路的磁链为

$$\Psi = N \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = N \int_{R_1}^{R_2} \frac{\mu_0 NI}{2\pi x} h dx = \frac{\mu_0 N^2 h I}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

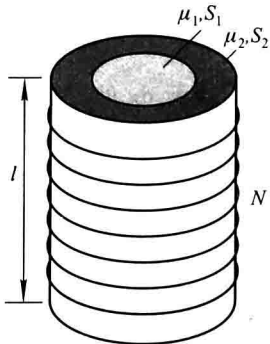
则

$$L = \frac{\Psi}{I} = \frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

若管中充满均匀同种磁介质, 其相对磁导率为  $\mu_r$ , 则自感将增大至  $\mu_r$  倍.

**8-20** 如图所示, 螺线管的管心是两个套在一起的同轴圆柱体, 其截面积分别为  $S_1$  和  $S_2$ , 磁导率分别为  $\mu_1$  和  $\mu_2$ , 管长为  $l$ , 匝数为  $N$ , 求螺线管的自感(设管的截面很小).

**分析** 本题求解时应注意磁介质的存在对磁场的影响. 在无介质时, 通电螺线管内的磁场是均匀的, 磁感强度为  $B_0$ , 由于磁介质的存在, 在不同磁介质中磁感强度分别为  $\mu_1 B_0$  和  $\mu_2 B_0$ . 通过线圈横截面的总磁通量是截面积分别为  $S_1$  和  $S_2$  的两部分磁通量之和. 由自感的定义可解得结果.



题 8-20 图

**解** 设有电流  $I$  通过螺线管, 则管中两介质中磁感强度分别为

$$B_1 = \mu_1 n I = \mu_1 \frac{N}{l} I, \quad B_2 = \mu_2 n I = \mu_2 \frac{N}{l} I$$

通过  $N$  匝回路的磁链为

$$\Psi = \Psi_1 + \Psi_2 = N B_1 S_1 + N B_2 S_2$$

则自感



$$L = L_1 + L_2 = \frac{\Psi}{I} = \frac{N^2}{l} (\mu_1 S_1 + \mu_2 S_2)$$

**8-21** 有两根半径均为  $a$  的平行长直导线, 它们中心距离为  $d$ . 试求长为  $l$  的一对导线的自感(导线内部的磁通量可略去不计).

**分析** 两平行长直导线可以看成无限长但宽为  $d$  的矩形回路的一部分. 设在矩形回路中通有逆时针方向电流  $I$ , 然后计算图中阴影部分(宽为  $d$ 、长为  $l$ )的磁通量. 该区域内磁场可以看成两无限长直载流导线分别在该区域产生的磁场的叠加.

**解** 在如图所示的坐标中, 当两导线中通有如图所示的电流  $I$  时, 两平行导线间的磁感强度为

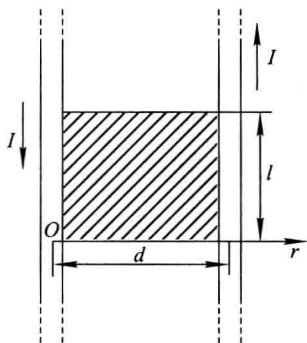
$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} + \frac{\mu_0 I}{2\pi(d-r)}$$

穿过图中阴影部分的磁通量为

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_a^{d-a} B l dr = \frac{\mu_0 I l}{\pi} \ln \frac{d-a}{a}$$

则长为  $l$  的一对导线的自感为

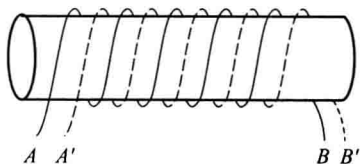
$$L = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu_0 l}{\pi} \ln \frac{d-a}{a}$$



题 8-21 图

如导线内部磁通量不能忽略, 则一对导线的自感为  $L = L_1 + 2L_2$ .  $L_1$  称为外自感, 即本题已求出的  $L$ ,  $L_2$  称为一根导线的内自感. 长为  $l$  的导线的内自感  $L_2 = \frac{\mu_0 l}{8\pi}$ , 有兴趣的读者可自行求解.

**8-22** 如图所示, 在一柱形纸筒上绕有两组相同线圈  $AB$  和  $A'B'$ , 每个线圈的自感均为  $L$ , 求: (1)  $A$  和  $A'$  相接时,  $B$  和  $B'$  间的自感  $L_1$ ; (2)  $A'$  和  $B$  相接时,  $A$  和  $B'$  间的自感  $L_2$ .



题 8-22 图

**分析** 无论线圈  $AB$  和  $A'B'$  作哪种方式连接, 均可看成一个大线圈回路的两个部分, 故仍可从自感系数的定义出发求解. 求解过程中可利用磁通量叠加的方法, 如每一组载流线圈单独存在时穿过自身回路的磁通量为  $\Phi$ , 则穿过两线圈回路的磁通量为  $2\Phi$ ; 而当两组线圈按(1)或(2)方式连接后, 则穿过大线圈回路的总磁通量为  $2\Phi \pm 2\Phi$ , “ $\pm$ ”取决于电流在两组线圈中的流向是相同或是相反.

**解** (1) 当  $A$  和  $A'$  连接时,  $AB$  和  $A'B'$  线圈中电流流向相反, 通过回路的磁通量亦相反, 总磁通量为  $\Phi_1 = 2\Phi - 2\Phi = 0$ , 故  $L_1 = 0$ .

(2) 当  $A'$  和  $B$  连接时,  $AB$  和  $A'B'$  线圈中电流流向相同, 通过回路的磁通量

亦相同,总磁通量为  $\Phi_2 = 2\Phi + 2\Phi = 4\Phi$ , 故  $L_2 = \frac{\Phi_2}{I} = 4 \frac{\Phi}{I} = 4L$ .

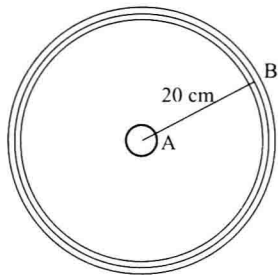
本题结果在工程实际中有实用意义,如按(1)方式连接,则可构造出一个无自感的线圈.

**8-23** 如图所示,一面积为  $4.0 \text{ cm}^2$  共 50 匝的小圆形线圈 A,放在半径为 20 cm 共 100 匝的大圆形线圈 B 的正中央,此两线圈同心且同平面. 设线圈 A 内各点的磁感强度可看作是相同的. 求:(1) 两线圈的互感;(2) 当线圈 B 中电流的变化率为  $-50 \text{ A} \cdot \text{s}^{-1}$  时,线圈 A 中感应电动势的大小和方向.

**分析** 设回路 I 中通有电流  $I_1$ , 穿过回路 II 的磁通量为  $\Phi_{21}$ , 则互感  $M = M_{21} = \frac{\Phi_{21}}{I_1}$ ; 也可设回路 II 通有电

流  $I_2$ , 穿过回路 I 的磁通量为  $\Phi_{12}$ , 则  $M = M_{12} = \frac{\Phi_{12}}{I_2}$ . 虽

然两种途径所得结果相同,但在很多情况下,不同途径所涉及的计算难易程度会有很大的不同. 以本题为例,如设线圈 B 中有电流  $I$  通过,则在线圈 A 中心处的磁感强度很易求得,由于线圈 A 很小,其所在处的磁场可视为均匀的,因而穿过线圈 A 的磁通量  $\Phi \approx BS$ . 反之,如设线圈 A 通有电流  $I$ , 其周围的磁场分布是变化的,且难以计算,因而穿过线圈 B 的磁通量也就很难求得,由此可见,计算互感一定要善于选择方便的途径.



题 8-23 图

**解** (1) 设线圈 B 有电流  $I$  通过,它在圆心处产生的磁感强度  $B_0 = N_B \frac{\mu_0 I}{2R}$ , 穿过小线圈 A 的磁链近似为

$$\Psi_A = N_A B_0 S_A = N_A N_B \frac{\mu_0 I}{2R} S_A$$

则两线圈的互感为

$$M = \frac{\Psi_A}{I} = N_A N_B \frac{\mu_0 S_A}{2R} = 6.28 \times 10^{-6} \text{ H}$$

$$(2) \quad \mathcal{E}_A = -M \frac{dI}{dt} = 3.14 \times 10^{-4} \text{ V}$$

互感电动势的方向和线圈 B 中的电流方向相同.

**8-24** 如图所示,两同轴单匝线圈 A、C 的半径分别为  $R$  和  $r$ , 两线圈相距为  $d$ . 若  $r$  很小,可认为线圈 A 在线圈 C 处所产生的磁场是均匀的. 求两线圈的互感. 若线圈 C 的匝数为  $N$  匝,则互感又为多少?

**解** 设线圈 A 中有电流  $I$  通过,它在线圈 C 所包围的平面内各点产生的磁感强度近似为

$$B = \frac{\mu_0 IR^2}{2(R^2 + d^2)^{3/2}}$$

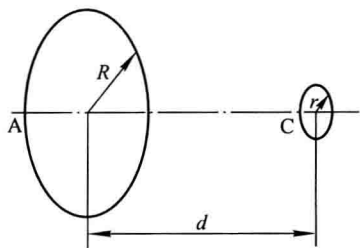
穿过线圈 C 的磁通为

$$\Psi = BS_C = \frac{\mu_0 IR^2}{2(R^2 + d^2)^{3/2}} \pi r^2$$

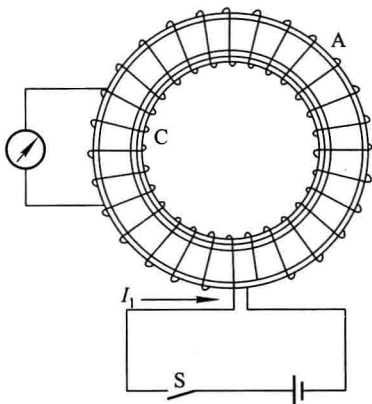
则两线圈的互感为

$$M = \frac{\Psi}{I} = \frac{\mu_0 \pi R^2 r^2}{2(R^2 + d^2)^{3/2}}$$

若线圈 C 的匝数为  $N$  匝, 则互感为上述值的  $N$  倍.



题 8-24 图



题 8-25 图

**8-25** 如图所示, 螺绕环 A 中充满了铁磁质, 管的截面积  $S$  为  $2.0 \text{ cm}^2$ , 沿环每厘米绕有 100 匝线圈, 通有电流  $I_1 = 4.0 \times 10^{-2} \text{ A}$ . 在环上再绕一线圈 C, 共 10 匝, 其电阻为  $0.10 \Omega$ , 今将开关 S 突然开启, 测得线圈 C 中的感应电荷为  $2.0 \times 10^{-3} \text{ C}$ . 求: 当螺绕环中通有电流  $I_1$  时, 铁磁质中的磁感强度  $B$  和铁磁质的相对磁导率  $\mu_r$ .

**分析** 本题与习题 8-8 相似, 均是利用冲击电流计测量电磁感应现象中通过回路的电荷的方法来计算磁场的磁感强度. 线圈 C 的磁通变化是与环形螺线管中的电流变化相联系的.

**解** 当螺绕环中通以电流  $I_1$  时, 在环内产生的磁感强度  $B = \mu_0 \mu_r n_1 I_1$ , 则通过线圈 C 的磁链为

$$\Psi_C = N_2 BS = N_2 \mu_0 \mu_r n_1 I_1 S$$

设断开电源过程中, 通过 C 的感应电荷为  $q_C$ , 则有

$$q_C = -\frac{1}{R} \Delta \Psi_C = -\frac{1}{R} (0 - \Psi_C) = \frac{N_2 \mu_0 \mu_r n_1 S I_1}{R}$$

由此得

$$B = \mu_0 \mu_r n_1 I_1 = \frac{q_c R}{N_2 S} = 0.10 \text{ T}$$

相对磁导率为

$$\mu_r = \frac{R q_c}{N_2 S \mu_0 n_1 I_1} = 199$$

**8-26** 一个直径为 0.01 m, 长为 0.10 m 的长直密绕螺线管, 共 1 000 匝线圈, 总电阻为 7.76  $\Omega$ . 问: (1) 如把线圈接到电动势  $\mathcal{E} = 2.0 \text{ V}$  的电池上, 电流稳定后, 线圈中所贮存的磁能有多少? 磁能密度是多少? (2) 从接通电路时算起, 要使线圈贮存的磁能为最大贮存磁能的一半, 需经过多少时间?

**分析** 磁场的磁能可用两种方法计算: (1) 如已知回路的自感为  $L$ , 则该回路通有电流  $I$  时所贮存的磁能  $W_m = \frac{1}{2} LI^2$ , 通常称为自感磁能. (2) 由于电流在空间激发磁场, 磁能实际是贮存于磁场之中, 因而磁场能量  $W_m = \int_V w_m dV$ , 式中  $w_m$  为磁场能量密度, 积分遍及磁场存在的空间. 由于  $w_m = \frac{B^2}{2\mu}$ , 因而采用这种方法时应首先求磁感强度  $B$  的分布.

上述两种方法还为我们提供了计算自感的另一种途径, 即运用  $\frac{1}{2} LI^2 = \int_V w_m dV$  求解  $L$ .

**解** (1) 密绕长直螺线管在忽略端部效应时, 其自感  $L = \frac{\mu_0 N^2 S}{l}$ , 电流稳定后, 线圈中电流  $I = \frac{\mathcal{E}}{R}$ , 则线圈中所贮存的磁能为

$$W_m = \frac{1}{2} LI^2 = \frac{\mu_0 N^2 S \mathcal{E}^2}{2lR^2} = 3.28 \times 10^{-5} \text{ J}$$

在忽略端部效应时, 该电流所产生的磁场可近似认为仅存在于螺线管中, 并为均匀磁场, 故磁能密度  $w_m$  处处相等,  $w_m = \frac{W_m}{Sl} = 4.17 \text{ J} \cdot \text{m}^{-3}$ .

(2) 自感为  $L$ , 电阻为  $R$  的线圈接到电动势为  $\mathcal{E}$  的电源上, 其电流变化规律  $I = \frac{\mathcal{E}}{R} (1 - e^{-\frac{R}{L}t})$ , 当电流稳定后, 其最大值  $I_m = \frac{\mathcal{E}}{R}$ .

按题意  $\frac{1}{2} LI^2 = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} LI_m^2 \right)$ , 则  $I = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\mathcal{E}}{R}$ , 将其代入  $I = \frac{\mathcal{E}}{R} (1 - e^{-\frac{R}{L}t})$  中, 得

$$t = -\frac{L}{R} \ln \left( 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{L}{R} \ln(2 + \sqrt{2}) = 1.56 \times 10^{-4} \text{ s}$$

**8-27** 一无限长直导线,截面各处的电流密度相等,总电流为  $I$ . 试证:每单位长度导线内所贮存的磁能为  $\mu I^2/16\pi$ .

分析 本题中电流激发的磁场不但存在于导体内(当  $r < R$  时,  $B_1 = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2}$ ),而且存在于导体外(当  $r > R$  时,  $B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$ ). 由于本题仅要求每单位长度导体内所贮存的磁能,故用公式  $W_m = \int_V w_m dV$  计算为宜,因本题中  $B$  呈柱对称性,取单位长度,半径为  $r$ ,厚为  $dr$  的薄柱壳(壳层内  $w_m$  处处相同)为体元  $dV$ ,则该体元内贮存的能量  $dW_m = \left[ \frac{1}{2\mu_0} \left( \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2} \right)^2 \right] 2\pi r dr$ ,积分即可求得磁能.

证 根据以上分析单位长度导线内贮存的磁能为

$$W_m = \int dW_m = \int_0^R \left( \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 R^4} r^2 \right) \cdot 2\pi r dr = \frac{\mu_0 I^2}{16\pi}$$

上述结果仅为单位长度载流导线内所具有的磁场能量,它是总磁场能量的一部分,总能量还应包括导线外磁场所贮存的磁能.

**8-28** 未来可能会利用超导线圈中持续大电流建立的磁场来贮存能量. 要贮存  $1 \text{ kW} \cdot \text{h}$  的能量,利用  $1.0 \text{ T}$  的磁场,需要多大体积的磁场? 若利用线圈中  $500 \text{ A}$  的电流贮存上述能量,则该线圈的自感系数应该多大?

解 由磁感强度与磁场能量间的关系可得

$$V = \frac{W_m}{B^2/2\mu_0} = 9.0 \text{ m}^3$$

所需线圈的自感系数为

$$L = \frac{2W_m}{I^2} = 29 \text{ H}$$

**8-29** 中子星表面的磁场估计为  $10^8 \text{ T}$ ,该处的磁能密度有多大?

解 磁场能量密度为

$$w_m = \frac{B^2}{2\mu_0} = 3.98 \times 10^{21} \text{ J} \cdot \text{m}^{-3}$$

**8-30** 在真空中,若一均匀电场中的电场能量密度与一  $0.50 \text{ T}$  的均匀磁场中的磁场能量密度相等,该电场的电场强度为多少?

解  $w_e = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2$ ,  $w_m = \frac{B^2}{2\mu_0}$ ,按题意,当  $w_e = w_m$  时,有  $\frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 = \frac{B^2}{2\mu_0}$ ,则

$$E = \frac{B}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = 1.51 \times 10^8 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$$

**8-31** 设有半径  $R = 0.20 \text{ m}$  的圆形平行平板电容器,两板之间为真空,板

间距离  $d=0.50\text{ cm}$ , 以恒定电流  $I=2.0\text{ A}$  对电容器充电. 求位移电流密度(忽略平板电容器的边缘效应, 设电场是均匀的).

**分析** 尽管变化电场与传导电流二者形成的机理不同, 但都能在空间激发磁场. 从这个意义来说, 变化电场可视为一种“广义电流”, 即位移电流. 在本题中, 导线内存在着传导电流  $I_c$ , 而在平行平板电容器间存在着位移电流  $I_d$ , 它们使电路中的电流连续, 即  $I_d=I_c$ .

**解** 忽略电容器的边缘效应, 电容器内电场的空间分布是均匀的, 因此板间位移电流  $I_d = \int_S \mathbf{j}_d \cdot d\mathbf{S} = j_d \pi R^2$ , 由此得位移电流密度的大小为

$$j_d = \frac{I_d}{\pi R^2} = \frac{I_c}{\pi R^2} = 15.9\text{ A} \cdot \text{m}^{-2}$$

## 第三篇

# 波动过程 光学

### 求解波动过程和光学问题的基本思路和方法

教材将这三部分内容安排在一起,是充分考虑到它们之间的关联性,因而在学习这部分内容和求解有关习题时也要学会前后内容和方法上的关联.我们知道振动是波动的基础,机械波就是机械振动在弹性介质中振动状态的传播过程.波动要有波源,所谓波源就是一个振动源.因而要讨论波动情况,首先要熟悉振动的研究.例如:要写波动方程,就要会求波源的振动方程.必须弄清振动物理量和波动物理量的联系和区别.又例如:研究波的干涉(包括光的干涉),就要知道两个同频率、同振动方向简谐振动的合成.这其中相位及相位差是一个十分重要的物理概念,掌握了相位差的计算对掌握振动合成、机械波和光波的干涉等一些题的求解作用很大.因此学好前面的内容对后面帮助很大.下面是这部分内容的几个常用解题方法的简介.

#### 1. 比较法

在振动、波动这两章的习题中,有相当一部分题目是求简谐振动方程和波动方程.通常有两种类型:(1)由题给一些条件求简谐振动或波动方程;(2)由题给振动曲线图和波形图求简谐振动方程和波动方程.而比较法是求解这类问题常用的一种方法.这里的所谓比较法就是针对要求的问题,有目的地先写出简谐振动方程或波动方程的一般形式,即

$$\begin{cases} y = A \cos(\omega t + \varphi_0) & \text{(简谐振动方程)} \\ y = A \cos \left[ \omega \left( t \mp \frac{x}{u} \right) + \varphi_0 \right] = A \cos \left[ 2\pi \left( \frac{t}{T} \mp \frac{x}{\lambda} \right) + \varphi_0 \right] & \text{(波动方程)} \end{cases}$$

然后采用比较法与已知条件比较确定式中各相应的物理量. 实际求解的题中往往只有少数量是未知的, 只要设法由已知条件配合其他方法求出这些未知量, 整个问题就解决了. 这种解题思路的好处是目的明确, 知道自己要做什么和如何去完成. 这里要求读者真正掌握简谐振动方程和波动方程一般表示式, 并理解其中每个量的物理意义. 请读者结合参阅 9-8, 10-12 等题的求解过程, 来学会这种解题的方法.

## 2. 旋转矢量法

描述振动可以用解析法、图示法和旋转矢量表示法等. 旋转矢量表示法就是将简谐振动与一旋转矢量  $\vec{OA}$  对应, 使矢量作逆时针匀速转动, 其长度等于简谐振动的振幅  $A$ , 角速度等于简谐振动的角频率  $\omega$ . 在  $t=0$  时, 它与参考坐标轴的夹角为简谐振动的初相位  $\varphi$ . 这时, 旋转矢量末端在参考坐标轴上的投影点的运动规律即可代表质点作简谐振动的规律. 旋转矢量表示法是研究简谐振动及其合成的直观而有力的方法. 尤其在求振动的初相位和相位时非常方便. 在求振动方程, 波动方程时常需求原点的振动初相位, 因此掌握好这种方法很关键. 读者可以结合参阅 9-4、9-14、9-16、9-17、10-3、10-17 等题的解去体会这种方法的好处.

## 3. 相位分析法

相位是研究振动、波动问题的有效工具. 无论是建立振动方程、比较两个振动的差异、研究振动的合成, 或是表述波动特征、导出波动方程和研究波的干涉及学习波动光学等都离不开相位和相位差的概念和计算. 常用相位分析法求解下述四类问题.

(1) 在振动合成问题中, 两个同频率、同方向简谐振动合成时, 它们的相位差  $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$  是一个常量, 合振动的振幅大小  $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos \Delta\varphi}$ , 其值由  $\Delta\varphi$  决定. 其中特殊情况是

$$\Delta\varphi = \begin{cases} 2k\pi & (\text{振幅极大 } A = A_1 + A_2) \\ (2k+1)\pi & (\text{振幅最小 } A = |A_1 - A_2|) \end{cases}$$

请读者参阅题 9-31、题 10-23 等的求解过程, 可体会到相位差  $\Delta\varphi$  的重要性.

(2) 在波动中, 波线上各点相位有密切联系. 因为波动是波源的振动状态由近及远向外传播的过程, 也称为振动相位的传播. 对于平面简谐波, 波线上任两点的相位差  $\Delta\varphi = 2\pi\Delta x/\lambda$  是一定的. 波线上所有点都重复同一种运动状态, 只是相位不同而已. 因此只要知道波线上任一点的运动方程, 就可通过求相位差而得出其他点的运动方程.



(3) 在波的干涉中,干涉问题实际上是振动合成问题.波场中任一点,参与的合成运动是来自两个同频率、同方向简谐振动的波源,合成结果仍是简谐振动,合振动振幅  $A$  的值取决于分振动的相位差.但要注意这种情况的相位差为

$$\Delta\varphi = \left( \omega t + \varphi_2 - \frac{2\pi}{\lambda} x_2 \right) - \left( \omega t + \varphi_1 - \frac{2\pi}{\lambda} x_1 \right) = \varphi_2 - \varphi_1 - \frac{2\pi}{\lambda} (x_2 - x_1)$$

这里相位差由两个分振动的波源初相位差和两列波到达场点的波程差决定.波场中不同点,由于波程差  $(x_2 - x_1)$  值不同而使  $\Delta\varphi$  不同,合振幅就有强弱之分,这就是波的干涉现象.讨论波的干涉,求干涉极大和极小的位置分布,采用相位分析法很方便.

(4) 在光的干涉中,两束光在相遇区出现明、暗条纹,实际上就是两束振幅相同的相干光波因干涉使合成振动振幅出现极大和相消的问题.因此只要求出两束光在相遇点的相位差即可.所以对杨氏双缝、牛顿环、劈尖、薄膜和迈克耳孙干涉仪等干涉,其核心问题就是找出两束相干光的相位差  $\Delta\varphi$ .有了  $\Delta\varphi$  则结果为

$$\Delta\varphi = \begin{cases} 2k\pi & (\text{明条纹}) \\ (2k+1)\pi & (\text{暗条纹}) \end{cases}$$

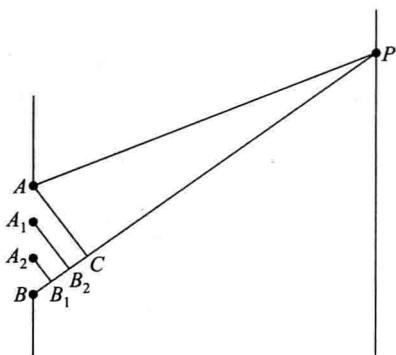
考虑到两束相干光的初相位差为零,则可有  $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \delta$ .  $\delta$  是光程差,  $\lambda$  是光在真空中的波长.那么上式也可表达为

$$\delta = \begin{cases} k\lambda & (\text{明条纹}) \\ (2k+1)\frac{\lambda}{2} & (\text{暗条纹}) \end{cases}$$

因此当你掌握了相位差(或光程差)的计算,光的干涉问题就基本解决了,对于不同问题只是等式左边形式的不同而已.例如薄膜干涉,  $\delta = 2ne + \lambda/2$  或  $\delta = 2ne$  (要仔细考虑半波损失情况,决定是否加  $\lambda/2$  项).如果你理解了这一点,能帮助你提高解题能力.而对于光的衍射,其本质仍是光波的干涉,不论是多缝的光栅衍射,还是单缝衍射,在讨论其明暗衍射条纹时,仍然是从相位差分析出发.

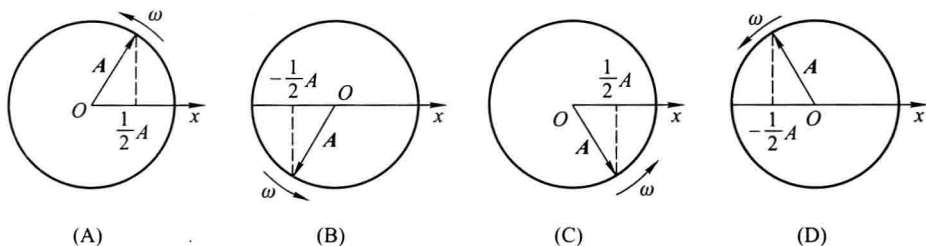
对光栅衍射,当光栅常量为  $b+b'$  时,对应不同的衍射角  $\phi$ ,任意相邻两缝到屏上某点的光程差为  $\delta = (b+b') \sin \phi = k\lambda$  时出现明条纹(即两束相干光在该点相遇时相位差为  $2\pi$ ).而对单缝衍射,要注意的是明暗条纹公式为

$$\delta = a \sin \phi = \begin{cases} k\lambda & (\text{暗条纹}) \\ (2k+1)\lambda/2 & (\text{明条纹}) \end{cases}$$



但这也由相位差分析得到. 如图所示, 对应屏上  $P$  点, 将单缝波阵面  $AB$  分成  $AA_1$ 、 $A_1A_2$ 、 $A_2B$  等段, 使  $A$ 、 $A_1$ 、 $A_2$ 、 $B$  这些相邻点的光到达  $P$  点的相位差为  $\pi$  (对应的光程差为  $\lambda/2$ , 即图中  $BB_1 = B_1B_2 = B_2C = \lambda/2$ ). 由于在相邻的  $AA_1$  和  $A_1A_2$  段波阵面上均能找到相位差为  $\pi$  的一一对应点, 从而使它们在  $P$  点干涉相消. 这样当  $AB$  被分成偶数段的波阵面时 (对应  $BC = a \sin \phi = k\lambda$ ), 屏上  $P$  点出现暗条纹, 而当  $AB$  被分成奇数段的波阵面时 [对应  $BC = a \sin \phi = (2k+1)\lambda/2$ ], 将有一段不会被抵消, 而使屏上出现明条纹.

9-1 一个质点作简谐振动, 振幅为  $A$ , 在起始时刻质点的位移为  $-\frac{A}{2}$ , 且向  $x$  轴正方向运动, 代表此简谐振动的旋转矢量为( )

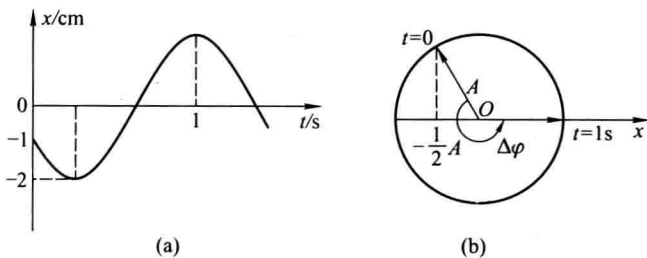


题 9-1 图

**分析与解** (B) 图中旋转矢量的矢端在  $x$  轴上投影点的位移为  $-A/2$ , 且投影点的运动方向指向  $Ox$  轴正向, 即其速度的  $x$  分量大于零, 故满足题意. 因而正确答案为 (B).

9-2 已知某简谐振动的振动曲线如图 (a) 所示, 则此简谐振动的运动方程 ( $x$  的单位为  $\text{cm}$ ,  $t$  的单位为  $\text{s}$ ) 为( )

- (A)  $x = 2 \cos\left(\frac{2}{3}\pi t - \frac{2}{3}\pi\right)$       (B)  $x = 2 \cos\left(\frac{2}{3}\pi t + \frac{2}{3}\pi\right)$   
 (C)  $x = 2 \cos\left(\frac{4}{3}\pi t - \frac{2}{3}\pi\right)$       (D)  $x = 2 \cos\left(\frac{4}{3}\pi t + \frac{2}{3}\pi\right)$



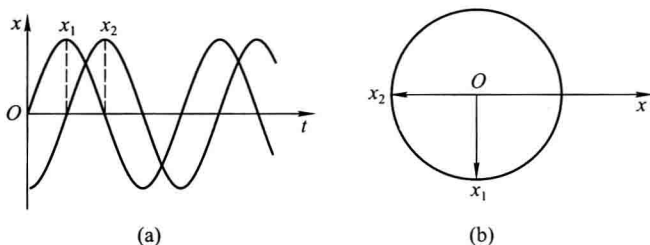
题 9-2 图

**分析与解** 由振动曲线可知, 初始时刻质点的位移为  $-A/2$ , 且向  $x$  轴负方向运动. 图 (b) 是其相应的旋转矢量图, 由旋转矢量法可知初相位为  $2\pi/3$ . 振动曲线上给出质点从  $-A/2$  处运动到  $+A$  处所需时间为  $1\text{ s}$ , 由对应旋转矢量图可知

相应的相位差  $\Delta\varphi = 4\pi/3$ , 则角频率  $\omega = \Delta\varphi/\Delta t = (4\pi/3)\text{s}^{-1}$ , 故选 (D). 本题也可根据振动曲线所给信息, 逐一代入方程来找出正确答案.

- 9-3** 两个同周期简谐振动曲线如图(a)所示,  $x_1$  的相位比  $x_2$  的相位( )  
 (A) 落后  $\frac{\pi}{2}$  (B) 超前  $\frac{\pi}{2}$  (C) 落后  $\pi$  (D) 超前  $\pi$

**分析与解** 由振动曲线图作出相应的旋转矢量图(b)即可得到答案为 (B).

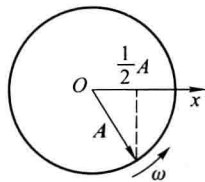


题 9-3 图

**9-4** 一质点作简谐振动, 周期为  $T$ . 当由平衡位置向  $x$  轴正方向运动时, 从  $1/2$  最大位移处运动到最大位移处这段路程所需要的时间为( )

- (A)  $T/12$  (B)  $T/8$   
 (C)  $T/6$  (D)  $T/4$

**分析与解** 质点由  $1/2$  最大位移处运动到最大位移处对应的旋转矢量图如图所示. 由图可知, 该过程相应的旋转矢量转过了  $\pi/3$  的角度. 因为振动周期为  $T$ , 也即矢量转动一周的时间. 故  $\Delta t = \frac{\Delta\varphi}{2\pi}T = T/6$ , 答案选 (C).



题 9-4 图

- 9-5** 当质点以频率  $\nu$  作简谐振动时, 它的动能的变化频率为( )  
 (A)  $\frac{\nu}{2}$  (B)  $\nu$  (C)  $2\nu$  (D)  $4\nu$

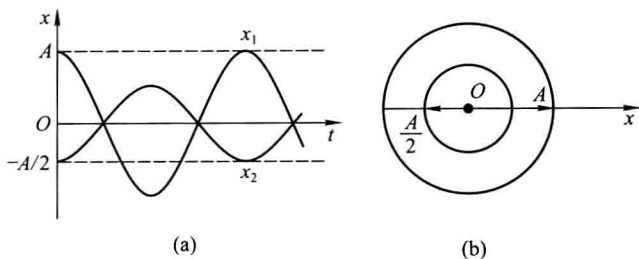
**分析与解** 质点作简谐振动的动能表式为  $E_k = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \varphi)$ , 可见其周期为简谐振动周期的一半, 则频率为简谐振动频率  $\nu$  的两倍. 因而正确答案为 (C).

**9-6** 图(a)中所画的是两个简谐振动的曲线, 若这两个简谐振动可叠加, 则合成的余弦振动的初相位为( )

- (A)  $\frac{3}{2}\pi$  (B)  $\frac{1}{2}\pi$  (C)  $\pi$  (D) 0

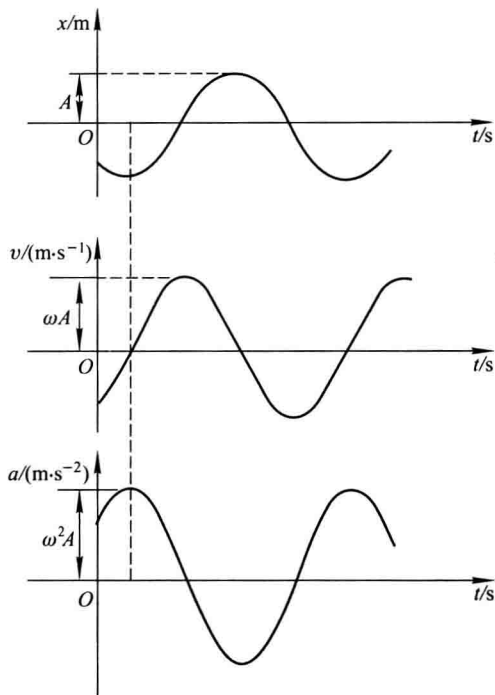
**分析与解** 由振动曲线可以知道, 这是两个同振动方向、同频率简谐振动,

它们的相位差是  $\pi$  (即反相位). 运动方程分别为  $x_1 = A \cos \omega t$  和  $x_2 = \frac{A}{2} \cos(\omega t + \pi)$ . 它们的振幅不同. 对于这样两个简谐振动, 可用旋转矢量法, 如图 (b) 所示, 很方便求得合运动方程为  $x = \frac{A}{2} \cos \omega t$ . 因而正确答案为 (D).



题 9-6 图

9-7 有一弹簧振子, 振幅  $A = 2.0 \times 10^{-2} \text{ m}$ , 周期  $T = 1.0 \text{ s}$ , 初相  $\varphi = 3\pi/4$ . 试写出它的运动方程, 并作出  $x-t$  图、 $v-t$  图和  $a-t$  图.



题 9-7 图

**分析** 弹簧振子的振动是简谐振动. 振幅  $A$ 、初相  $\varphi$ 、角频率  $\omega$  是简谐振动

方程  $x = A \cos(\omega t + \varphi)$  的三个特征量. 求运动方程就要设法确定这三个物理量. 题中除  $A, \varphi$  已知外,  $\omega$  可通过关系式  $\omega = 2\pi/T$  确定. 振子运动的速度和加速度的计算仍与质点运动学中的计算方法相同.

解 因  $\omega = 2\pi/T$ , 则运动方程

$$x = A \cos(\omega t + \varphi) = A \cos\left(\frac{2\pi t}{T} + \varphi\right)$$

根据题中给出的数据得

$$x = 2.0 \times 10^{-2} \cos(2\pi t + 0.75\pi) \text{ (m)}$$

振子的速度和加速度分别为

$$v = dx/dt = -4\pi \times 10^{-2} \sin(2\pi t + 0.75\pi) \text{ (m} \cdot \text{s}^{-1}\text{)}$$

$$a = d^2x/dt^2 = -8\pi^2 \times 10^{-2} \cos(2\pi t + 0.75\pi) \text{ (m} \cdot \text{s}^{-2}\text{)}$$

$x-t$ 、 $v-t$  及  $a-t$  图如图所示.

**9-8** 若简谐振动方程为  $x = 0.10 \cos(20\pi t + 0.25\pi)$ , 式中  $x$  的单位为 m,  $t$  的单位为 s. 求: (1) 振幅、频率、角频率、周期和初相; (2)  $t = 2$  s 时的位移、速度和加速度.

**分析** 可采用比较法求解. 将已知的简谐振动方程与简谐振动方程的一般形式  $x = A \cos(\omega t + \varphi)$  作比较, 即可求得各特征量. 运用与上题相同的处理方法, 写出位移、速度、加速度的表达式, 代入  $t$  值后, 即可求得结果.

**解** (1) 将  $x = 0.10 \cos(20\pi t + 0.25\pi)$  与  $x = A \cos(\omega t + \varphi)$  比较后可得: 振幅  $A = 0.10$  m, 角频率  $\omega = 20\pi \text{ s}^{-1}$ , 初相  $\varphi = 0.25\pi$ , 则周期  $T = 2\pi/\omega = 0.1$  s, 频率  $\nu = 1/T = 10$  Hz.

(2)  $t = 2$  s 时的位移、速度、加速度分别为

$$x = 0.10 \cos(40\pi + 0.25\pi) \text{ m} = 7.07 \times 10^{-2} \text{ m}$$

$$v = dx/dt = -2\pi \sin(40\pi + 0.25\pi) \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = -4.44 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

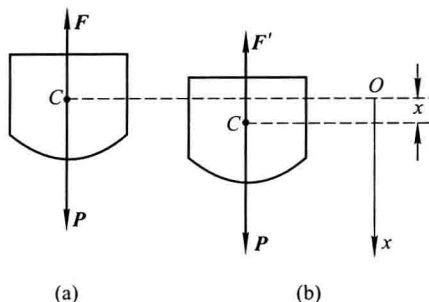
$$a = d^2x/dt^2 = -40\pi^2 \cos(40\pi + 0.25\pi) \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} = -2.79 \times 10^2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

**9-9** 一远洋货轮, 质量为  $m$ , 浮在水面时其水平截面积为  $S$ . 设在水面附近货轮的水平截面积近似相等, 水的密度为  $\rho$ , 且不计水的黏性阻力, 证明货轮在水中作振幅较小的竖直自由运动是简谐振动, 并求振动周期.

**分析** 要证明货轮作简谐振动, 需要分析货轮在平衡位置附近上下运动时, 它所受的合外力  $F$  与位移  $x$  间的关系, 如果满足  $F = -kx$ , 则货轮作简谐振动. 通过  $F = -kx$  即可求得振动周期  $T = 2\pi/\omega = 2\pi\sqrt{m/k}$ .

**证** 货轮处于平衡状态时[图(a)], 浮力大小为  $F = mg$ . 当船上下作微小振动时, 取货轮处于力平衡时的质心位置为坐标原点  $O$ , 竖直向下为  $x$  轴正向, 如图(b)所示. 则当货轮向下偏移  $x$  位移时, 受合外力为

$$\sum \mathbf{F} = \mathbf{P} + \mathbf{F}'$$



题 9-9 图

其中  $F'$  为此时货轮所受浮力, 其方向向上, 大小为

$$F' = F + \rho g S x = mg + \rho g S x$$

则货轮所受合外力为

$$\sum F = P - F' = -\rho g S x = -kx$$

式中  $k = \rho g S$  是一常量. 这表明货轮在其平衡位置上下所作的微小振动是简谐振动.

由  $\sum F = m d^2 x / dt^2$  可得货轮运动的微分方程为

$$d^2 x / dt^2 + \rho g S x / m = 0$$

令  $\omega^2 = \rho g S / m$ , 可得其振动周期为

$$T = 2\pi / \omega = 2\pi \sqrt{m / \rho g S}$$

**9-10** 设地球是一个半径为  $R$  的均匀球体, 密度  $\rho = 5.5 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ . 现假定沿直径凿通一条隧道, 有一质量为  $m$  的质点在此隧道内只受地球引力作用. (1) 证明此质点的运动是简谐振动; (2) 计算其周期.

**分析** 证明方法与上题相似. 分析质点在隧道内运动时的受力特征即可.

**证** (1) 取图所示坐标. 当质量为  $m$  的质点位于  $x$  处时, 它受地球的引力为

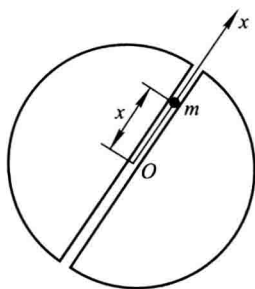
$$F = -G \frac{m_x m}{x^2}$$

式中  $G$  为引力常量,  $m_x$  是以  $x$  为半径的球体质量, 即  $m_x = 4\pi\rho x^3/3$ . 令  $k = 4\pi\rho Gm/3$ , 则质点受力

$$F = -4\pi G\rho m x / 3 = -kx$$

因此, 质点作简谐振动.

(2) 质点振动的周期为

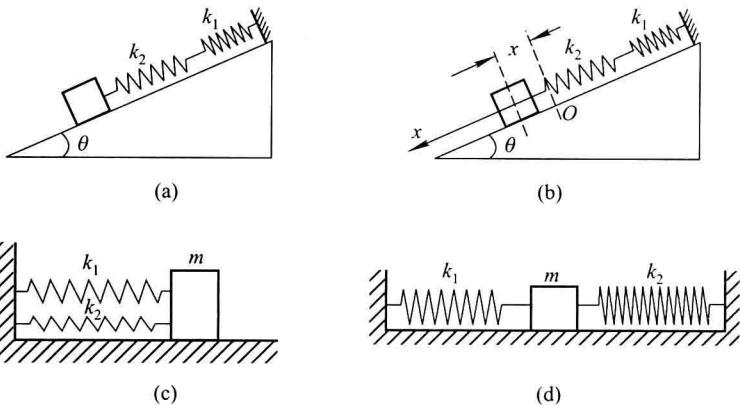


题 9-10 图

$$T = 2\pi\sqrt{m/k} = \sqrt{3\pi/G\rho}$$

$$= 5.07 \times 10^3 \text{ s}$$

9-11 如图(a)所示,两个轻弹簧的劲度系数分别为  $k_1$  和  $k_2$ , 物体在光滑斜面上振动。(1) 证明其运动仍是简谐振动;(2) 求系统的振动频率.



题 9-11 图

**分析** 从上两题的求解知道,要证明一个系统作简谐振动,首先要分析受力情况,然后看是否满足简谐振动的受力特征(或简谐振动微分方程).为此,建立如图(b)所示的坐标系.设系统平衡时物体所在位置为坐标原点  $O$ ,  $Ox$  轴正向沿斜面向下,由受力分析可知,沿  $Ox$  轴,物体受弹性力及重力分力的作用,其中弹性力是变力.利用串联时各弹簧受力相等,分析物体在任一位置时受力与位移的关系,即可证得物体作简谐振动,并可求出频率  $\nu$ .

**证** 设物体平衡时两弹簧伸长分别为  $x_1$ 、 $x_2$ ,则由物体受力平衡,有

$$mg\sin\theta = k_1x_1 = k_2x_2 \quad (1)$$

按图(b)所取坐标,物体沿  $x$  轴移动位移  $x$  时,两弹簧又分别被拉伸  $x'_1$  和  $x'_2$ ,即  $x = x'_1 + x'_2$ . 则物体受力为

$$F = mg\sin\theta - k_2(x_2 + x'_2) = mg\sin\theta - k_1(x_1 + x'_1) \quad (2)$$

将式(1)代入式(2)得

$$F = -k_2x'_2 = -k_1x'_1 \quad (3)$$

由式(3)得  $x'_1 = -F/k_1$ 、 $x'_2 = -F/k_2$ , 而  $x = x'_1 + x'_2$ , 则得到

$$F = -[k_1k_2/(k_1+k_2)]x = -kx$$

式中  $k = k_1k_2/(k_1+k_2)$  为常量,则物体作简谐振动,振动频率

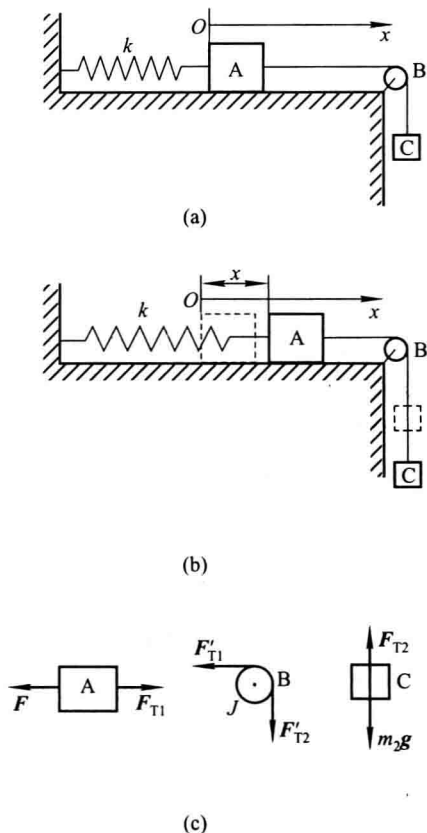
$$\nu = \omega/2\pi = \frac{1}{2\pi}\sqrt{k/m} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{k_1k_2/(k_1+k_2)m}$$

**讨论** (1) 由本题的求证可知,斜面倾角  $\theta$  对弹簧是否作简谐振动以及振



动的频率均不产生影响.事实上,无论弹簧水平放置、斜置还是竖直悬挂,物体均作简谐振动.而且可以证明它们的频率相同,均由弹簧振子的固有性质决定,这就是称为固有频率的原因.(2)如果振动系统如图(c)(弹簧并联)或如图(d)所示,也可通过物体在某一位置的受力分析得出其作简谐振动,且振动频率均为  $\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{(k_1+k_2)/m}$ ,读者可以一试.通过这些例子可以知道,证明物体是否作简谐振动的思路是相同的.

**9-12** 在如图(a)所示装置中,一劲度系数为  $k$  的轻弹簧,一端固定在墙上,另一端连接一质量为  $m_1$  的物体 A,置于光滑水平桌面上.现通过一质量  $m$ 、半径为  $R$  的定滑轮 B(可视为均质圆盘)用细绳连接另一质量为  $m_2$  的物体 C.设细绳不可伸长,且与滑轮间无相对滑动,求系统的振动角频率.



题 9-12 图

**分析** 这是一个由弹簧、物体 A、C 和滑轮 B 组成的简谐振动系统.求解系统的振动频率可采用两种方法.(1)从受力分析着手.如图(b)所示,设系统处

于平衡状态时,与物体 A 相连的弹簧一端所在位置为坐标原点  $O$ ,此时弹簧已伸长  $x_0$ ,且  $kx_0 = m_2g$ . 当弹簧沿  $Ox$  轴正向从原点  $O$  伸长  $x$  时,分析物体 A、C 及滑轮 B 的受力情况,并分别列出它们的动力学方程,可解得系统作简谐振动的微分方程.(2) 从系统机械能守恒着手. 列出系统机械能守恒方程,然后求得系统作简谐振动的微分方程.

**解 1** 在图(b)的状态下,各物体受力如图(c)所示. 其中  $\mathbf{F} = -k(x+x_0)\mathbf{i}$ . 考虑到绳子不可伸长,对物体 A、B、C 分别列方程,有

$$F_{T1} - k(x+x_0) = m_1 \frac{d^2x}{dt^2} \quad (1)$$

$$m_2g - F_{T2} = m_2 \frac{d^2x}{dt^2} \quad (2)$$

$$(F_{T2} - F_{T1})R = J\alpha = \frac{1}{2}mR \frac{d^2x}{dt^2} \quad (3)$$

$$kx_0 = m_2g \quad (4)$$

方程(3)中用到了  $F_{T1} = F'_{T1}$ 、 $F_{T2} = F'_{T2}$ 、 $J = mR^2/2$  及  $\alpha = a/R$ . 联立式(1)~式(4)可得

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m_1+m_2+m/2}x = 0 \quad (5)$$

则系统振动的角频率为

$$\omega = \sqrt{k/(m_1+m_2+m/2)}$$

**解 2** 取整个振动装置和地球为研究系统,因没有外力和非保守内力做功,系统机械能守恒. 设物体平衡时为初始状态,物体向右偏移距离  $x$  (此时速度为  $v$ 、加速度为  $a$ ) 为末状态,则由机械能守恒定律,有

$$E_0 = -m_2gx + \frac{1}{2}m_1v^2 + \frac{1}{2}m_2v^2 + \frac{1}{2}J\omega^2 + \frac{1}{2}k(x+x_0)^2$$

在列出上述方程时应注意势能(重力势能和弹性势能)零点的选取. 为运算方便,选初始状态下物体 C 所在位置为重力势能零点;弹簧原长时为弹性势能的零点. 将上述方程对时间求导得

$$0 = -m_2gv + m_1v \frac{dv}{dt} + m_2v \frac{dv}{dt} + J\omega \frac{d\omega}{dt} + k(x+x_0) \frac{dx}{dt}$$

将  $J = mR^2/2$ ,  $\omega R = v$ ,  $dv/dt = d^2x/dt^2$  和  $m_2g = kx_0$  代入上式,可得

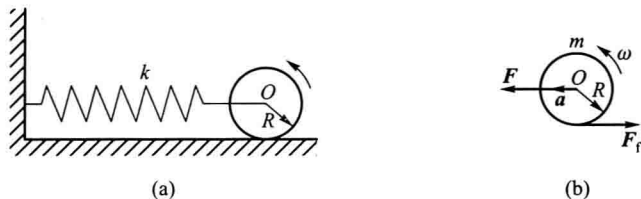
$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m_1+m_2+m/2}x = 0 \quad (6)$$

式(6)与式(5)相同,表明两种解法结果一致.

**\*9-13** 如图(a)所示,将质量为  $m$ 、半径为  $R$  的均匀圆柱体中心系于一水平的轻弹簧上,使它可以在水平面上无滑动地滚动. 弹簧的劲度系数为  $k = 3 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$ . 假

设将圆柱体从弹簧原长处拉开  $x_0 = 0.20 \text{ m}$  后, 由静止释放.

- (1) 求圆柱体通过平衡位置时的平动动能和转动动能;
- (2) 证明圆柱体质心  $O$  的运动是简谐振动, 并求振动周期.



题 9-13 图

**分析** (1) 圆柱体在水平直线上作无滑动滚动时, 仅有弹性力做功, 故机械能守恒. 弹簧与圆柱体组成的振动系统机械能由圆柱体平动动能  $E_k = \frac{1}{2}mv^2$ , 转动动能  $E'_k = \frac{1}{2}J\omega^2$  和弹簧弹性势能  $E_p = \frac{1}{2}kx^2$  组成. 这里  $v$  是质心平动速度,  $\omega$  是圆柱体的转动角速度. 而对无滑动滚动,  $v = \omega R$ , 且  $J = \frac{1}{2}mR^2$ , 则可得  $E'_k = \frac{1}{4}mR^2\omega^2 = \frac{1}{2}E_k$ . 根据机械能守恒  $E_k + E'_k + E_p = \text{常量}$ , 并且利用本题中系统起始时只有弹性势能  $\frac{1}{2}kx_0^2$ , 平衡位置时只有平动动能与转动动能  $E_k + E'_k$  的条件, 代入数据即可求得结果.

(2) 圆柱体在运动中, 水平方向受到两个力的作用. 一个是弹性力  $F = -kx$ , 另一个是使其纯滚动的摩擦力  $F_f$ , 如图 (b) 所示. 利用圆柱体纯滚动时特点, 有

$$\begin{cases} F_f R = J\alpha = \frac{1}{2}mR^2\alpha \\ a = R\alpha \end{cases}$$

式中  $a$  为质心运动加速度,  $\alpha$  为转动角加速度. 由此可得  $F_f = \frac{1}{2}ma$ , 而对圆柱体水平方向由牛顿定律可得  $F - F_f = ma$ , 将  $F = -kx$ ,  $F_f = \frac{1}{2}ma$ ,  $a = \frac{d^2x}{dt^2}$  等代入后即可证明系统作简谐振动, 并求出振动周期  $T$ .

**解** (1) 根据分析, 系统机械能守恒, 有

$$E_k + E'_k = \frac{1}{2}kx_0^2 = \frac{1}{2} \times 3 \times 0.20^2 \text{ J} = 0.06 \text{ J}$$

利用分析中已知  $E'_k = \frac{1}{2}E_k$  可得

$$\text{平动动能 } E_k = 0.04 \text{ J}, \quad \text{转动动能 } E'_k = 0.02 \text{ J}$$

(2) 根据分析, 设质心加速度为  $a$ , 角加速度为  $\alpha$ , 滚动摩擦力为  $F_f$ , 有

$$\begin{cases} F_f R = J\alpha = \frac{1}{2}mR^2\alpha & (\text{对质心的转动定律}) \\ a = R\alpha \\ F - F_f = ma & (\text{质心水平方向运动定律}) \end{cases}$$

解之得

$$F = \frac{3}{2}ma$$

即

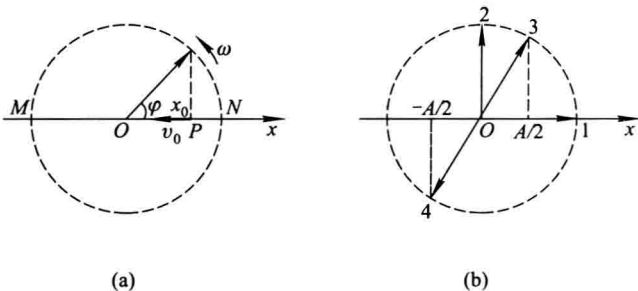
$$-kx = \frac{3}{2}m \frac{d^2x}{dt^2}, \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{2k}{3m}x = 0$$

此式表明系统作简谐振动, 且  $\omega = \sqrt{\frac{2k}{3m}}$ , 由此得

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{3m}{2k}}$$

**9-14** 一放置在水平桌面上的弹簧振子, 振幅  $A = 2.0 \times 10^{-2} \text{ m}$ , 周期  $T = 0.50 \text{ s}$ . 当  $t=0$  时: (1) 物体在正方向端点; (2) 物体在平衡位置, 向负方向运动; (3) 物体在  $x = 1.0 \times 10^{-2} \text{ m}$  处, 向负方向运动; (4) 物体在  $x = -1.0 \times 10^{-2} \text{ m}$  处, 向正方向运动. 求以上各种情况的运动方程.

**分析** 在振幅  $A$  和周期  $T$  已知的条件下, 确定初相  $\varphi$  是求解简谐振动方程的关键. 初相的确定通常有两种方法. (1) 解析法: 由振动方程出发, 根据初始条件, 即  $t=0$  时,  $x=x_0$  和  $v=v_0$  来确定  $\varphi$  值. (2) 旋转矢量法: 如图(a)所示, 将质点  $P$  在  $Ox$  轴上振动的初始位置  $x_0$  和速度  $v_0$  的方向与旋转矢量图相对应来确定  $\varphi$ . 旋转矢量法比较直观、方便, 在分析中常采用.



题 9-14 图

**解** 由题给条件知  $A = 2.0 \times 10^{-2} \text{ m}$ ,  $\omega = 2\pi/T = 4\pi \text{ s}^{-1}$ , 而初相  $\varphi$  可采用分析

中的两种不同方法来求.

解析法:根据简谐振动方程  $x = A\cos(\omega t + \varphi)$ , 当  $t = 0$  时有  $x_0 = A\cos\varphi$ ,  $v_0 = -A\omega\sin\varphi$ . 当

(1)  $x_0 = A$  时,  $\cos\varphi_1 = 1$ , 则  $\varphi_1 = 0$ ;

(2)  $x_0 = 0$  时,  $\cos\varphi_2 = 0$ ,  $\varphi_2 = \pm\frac{\pi}{2}$ , 因  $v_0 < 0$ , 取  $\varphi_2 = \frac{\pi}{2}$ ;

(3)  $x_0 = 1.0 \times 10^{-2}$  m 时,  $\cos\varphi_3 = 0.5$ ,  $\varphi_3 = \pm\frac{\pi}{3}$ , 由  $v_0 < 0$ , 取  $\varphi_3 = \pi/3$ ;

(4)  $x_0 = -1.0 \times 10^{-2}$  m 时,  $\cos\varphi_4 = -0.5$ ,  $\varphi_4 = \pi \pm \frac{\pi}{3}$ , 由  $v_0 > 0$ , 取  $\varphi_4 = 4\pi/3$ .

旋转矢量法:分别画出四个不同初始状态的旋转矢量图,如图(b)所示,它们所对应的初相分别为  $\varphi_1 = 0, \varphi_2 = \pi/2, \varphi_3 = \pi/3, \varphi_4 = 4\pi/3$ .

振幅  $A$ 、角频率  $\omega$ 、初相  $\varphi$  均确定后,则各相应状态下的运动方程为

(1)  $x = 2.0 \times 10^{-2} \cos 4\pi t$  (m)

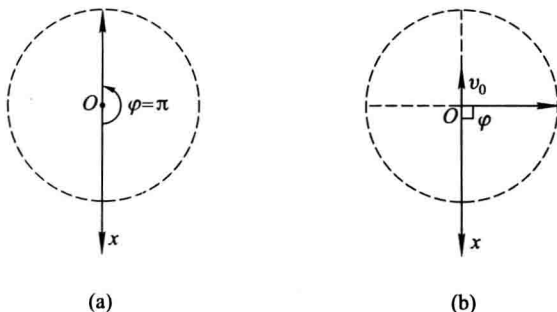
(2)  $x = 2.0 \times 10^{-2} \cos(4\pi t + \pi/2)$  (m)

(3)  $x = 2.0 \times 10^{-2} \cos(4\pi t + \pi/3)$  (m)

(4)  $x = 2.0 \times 10^{-2} \cos(4\pi t + 4\pi/3)$  (m)

**9-15** 有一弹簧,当其下端挂一质量为  $m$  的物体时,伸长量为  $9.8 \times 10^{-2}$  m. 若使物体上下振动,且规定向下为正方向.(1) 当  $t = 0$  时,物体在平衡位置上方  $8.0 \times 10^{-2}$  m 处,由静止开始向下运动,求运动方程;(2) 当  $t = 0$  时,物体在平衡位置并以  $0.60 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  的速度向上运动,求运动方程.

分析 求运动方程,也就是要确定振动的三个特征物理量  $A$ 、 $\omega$  和  $\varphi$ . 其中振动的角频率是由弹簧振子系统的固有性质(振子质量  $m$  及弹簧劲度系数  $k$ ) 决定的,即  $\omega = \sqrt{k/m}$ ,  $k$  可根据物体受力平衡时弹簧的伸长来计算;振幅  $A$  和初相  $\varphi$  需要根据初始条件确定.



题 9-15 图

**解** 物体受力平衡时,弹性力  $F$  与重力  $P$  的大小相等,即  $F = mg$ . 而此时弹簧的伸长量  $\Delta l = 9.8 \times 10^{-2}$  m. 则弹簧的劲度系数  $k = F/\Delta l = mg/\Delta l$ . 系统作简谐振动的角频率为

$$\omega = \sqrt{k/m} = \sqrt{g/\Delta l} = 10 \text{ s}^{-1}$$

(1) 设系统平衡时,物体所在处为坐标原点,向下为  $x$  轴正向. 由初始条件  $t = 0$  时,  $x_{10} = 8.0 \times 10^{-2}$  m,  $v_{10} = 0$  可得振幅  $A = \sqrt{x_{10}^2 + (v_{10}/\omega)^2} = 8.0 \times 10^{-2}$  m; 应用旋转矢量法可确定初相  $\varphi_1 = \pi$  [图(a)]. 则运动方程为

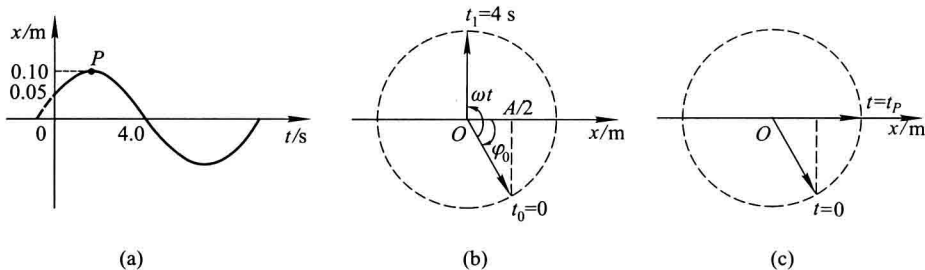
$$x_1 = 8.0 \times 10^{-2} \cos(10t + \pi) \text{ (m)}$$

(2)  $t = 0$  时,  $x_{20} = 0$ ,  $v_{20} = 0.6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ , 同理可得  $A_2 = \sqrt{x_{20}^2 + (v_{20}/\omega)^2} = 6.0 \times 10^{-2}$  m;  $\varphi_2 = \pi/2$  [图(b)]. 则运动方程为

$$x_2 = 6.0 \times 10^{-2} \cos(10t + 0.5\pi) \text{ (m)}$$

**9-16** 某振动质点的  $x-t$  曲线如图(a)所示,试求:(1) 运动方程;(2) 点  $P$  对应的相位;(3) 到达点  $P$  相应位置所需时间.

**分析** 由已知运动方程画振动曲线和由振动曲线求运动方程是振动中常见的两类问题. 本题就是要通过  $x-t$  图线确定振动的三个特征量  $A$ 、 $\omega$  和  $\varphi_0$ , 从而写出运动方程. 曲线最大幅值即为振幅  $A$ ; 而  $\omega$ 、 $\varphi_0$  通常可通过旋转矢量法或解析法解出, 一般采用旋转矢量法比较方便.



题 9-16 图

**解** (1) 质点振动振幅  $A = 0.10$  m. 而由振动曲线可画出  $t_0 = 0$  和  $t_1 = 4$  s 时旋转矢量, 如图(b)所示. 由图可见初相  $\varphi_0 = -\pi/3$  (或  $\varphi_0 = 5\pi/3$ ), 而由  $\omega(t_1 - t_0) = \pi/2 + \pi/3$  得  $\omega = 5\pi/24 \text{ s}^{-1}$ , 则运动方程为

$$x = 0.10 \cos\left(\frac{5\pi}{24}t - \pi/3\right) \text{ (m)}$$

(2) 图(a)中点  $P$  的位置是质点从  $A/2$  处运动到正向的端点处. 对应的旋转矢量图如图(c)所示. 当初相取  $\varphi_0 = -\pi/3$  时, 点  $P$  的相位为  $\varphi_P = \varphi_0 + \omega(t_P - 0) = 0$  (如果初相取成  $\varphi_0 = 5\pi/3$ , 则点  $P$  相应的相位应表示为

$$\varphi_P = \varphi_0 + \omega(t_P - 0) = 2\pi)$$

(3) 由旋转矢量图可得  $\omega(t_p - 0) = \pi/3$ , 则  $t_p = 1.6 \text{ s}$ .

**9-17** 作简谐振动的物体, 由平衡位置向  $x$  轴正方向运动, 试问经过下列路程所需的最短时间各为周期的几分之几? (1) 由平衡位置到最大位移处; (2) 由平衡位置到  $x=A/2$  处; (3) 由  $x=A/2$  处到最大位移处.

**解** 采用旋转矢量法求解较为方便. 按题意作如图所示的旋转矢量图, 平衡位置在点  $O$ .

(1) 平衡位置  $x_1$  到最大位移  $x_3$  处, 图中的旋转矢量从位置 1 转到位置 3, 故  $\Delta\varphi_1 = \pi/2$ , 则所需时间

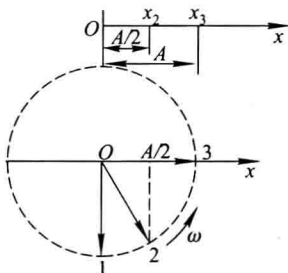
$$\Delta t_1 = \Delta\varphi_1 / \omega = T/4$$

(2) 从平衡位置  $x_1$  到  $x_2 = A/2$  处, 图中旋转矢量从位置 1 转到位置 2, 故有  $\Delta\varphi_2 = \pi/6$ , 则所需时间

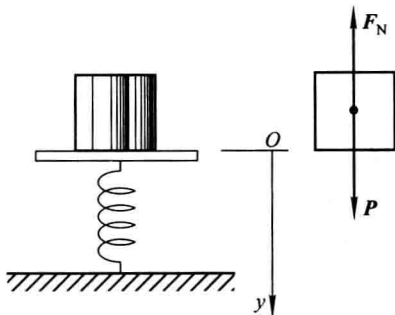
$$\Delta t_2 = \Delta\varphi_2 / \omega = T/12$$

(3) 从  $x_2 = A/2$  运动到最大位移  $x_3$  处, 图中旋转矢量从位置 2 转到位置 3, 有  $\Delta\varphi_3 = \pi/3$ , 则所需时间

$$\Delta t_3 = \Delta\varphi_3 / \omega = T/6$$



题 9-17 图



题 9-18 图

**9-18** 在一块平板下装有弹簧, 平板上放一质量为  $1.0 \text{ kg}$  的重物. 现使平板沿竖直方向作上下简谐振动, 周期为  $0.50 \text{ s}$ , 振幅为  $2.0 \times 10^{-2} \text{ m}$ . 求: (1) 平板到最低点时, 重物对平板的作用力; (2) 若频率不变, 则平板以多大的振幅振动时, 重物会跳离平板? (3) 若振幅不变, 则平板以多大的频率振动时, 重物会跳离平板?

**分析** 按题意作示意图如图所示. 物体在平衡位置附近随板作简谐振动, 其间受重力  $P$  和板支持力  $F_N$  作用,  $F_N$  是一个变力. 按牛顿定律, 有

$$F = mg - F_N = m \frac{d^2 y}{dt^2} \quad (1)$$

由于物体是随板一起作简谐振动, 因而有  $a = \frac{d^2 y}{dt^2} = -A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi)$ , 则式

(1)可改写为

$$F_N = mg + mA\omega^2 \cos(\omega t + \varphi) \quad (2)$$

(1) 根据板运动的位置,确定此刻振动的相位  $\omega t + \varphi$ ,由式(2)可求板与物体之间的作用力.

(2) 由式(2)可知支持力  $F_N$  的值与振幅  $A$ 、角频率  $\omega$  和相位  $(\omega t + \varphi)$  有关.在振动过程中,当  $\omega t + \varphi = \pi$  时  $F_N$  最小.而重物恰好跳离平板的条件为  $F_N = 0$ ,因此由式(2)可分别求出重物跳离平板所需的频率或振幅.

**解** (1) 由分析可知,重物在最低点时,相位  $\omega t + \varphi = 0$ ,物体受板的支持力为

$$F_N = mg + mA\omega^2 = mg + mA(2\pi/T)^2 = 12.96 \text{ N}$$

重物对木块的作用力  $F'_N$  与  $F_N$  大小相等,方向相反.

(2) 当频率不变时,设振幅变为  $A'$ . 根据分析中所述,将  $F_N = 0$  及  $\omega t + \varphi = \pi$  代入分析中式(2),可得

$$A' = mg/m\omega^2 = gT^2/4\pi^2 = 6.2 \times 10^{-2} \text{ m}$$

(3) 当振幅不变时,设频率变为  $\nu'$ . 同样将  $F_N = 0$  及  $\omega t + \varphi = \pi$  代入分析中式(2),可得

$$\nu' = \frac{\omega'}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{mg/mA} = 3.52 \text{ Hz}$$

**9-19** 一物体放在水平木板上,木板沿水平直线作简谐振动,运动方程为  $y = 0.03 \cos(\pi t + \pi)$ ,式中  $y$  的单位为  $\text{m}$ ,  $t$  的单位为  $\text{s}$ . 求物体在木板上不产生相对滑动需要的静摩擦因数  $\mu_s$  的值.

**分析** 物体在木板上不产生相对滑动,就是要求物体与木板保持相同的运动状态,因此它应和木板始终有相同的速度与加速度等.其中物体的加速度由木板对它的静摩擦力  $F_f$  提供.而木板离开平衡位置后,当处在最大位移的两端时有最大的加速度  $a_{\max} = A\omega^2$  (这里振幅  $A$  与振动圆频率  $\omega$  可从运动方程中获知).如果要物体不产生相对滑动,物体受到的静摩擦力  $F_f = \mu_s mg$  就必须满足

$$F_f = \mu_s mg \geq ma_{\max} = mA\omega^2$$

由此可求出  $\mu_s$  的值.

**解** 根据分析得出的关系

$$\mu_s mg \geq mA\omega^2$$

得

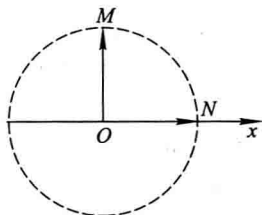
$$\mu_s \geq \frac{A\omega^2}{g} = \frac{0.03 \times 3.14^2}{9.8} = 0.03$$

**9-20** 两质点作同频率同振幅的简谐振动.第一个质点的运动方程为  $x_1 =$



$A\cos(\omega t + \varphi)$ , 当第一个质点自振动正方向回到平衡位置时, 第二个质点恰在振动正方向的端点. 试用旋转矢量图表示它们, 并求第二个质点的运动方程及它们的相位差.

**解** 图示为两质点在时刻  $t$  的旋转矢量图, 可见第一个质点  $M$  的相位比第二个质点  $N$  的相位超前  $\pi/2$ , 即它们的相位差  $\Delta\varphi = \pi/2$ . 故第二个质点的运动方程应为



题 9-20 图

$$x_2 = A\cos(\omega t + \varphi - \pi/2)$$

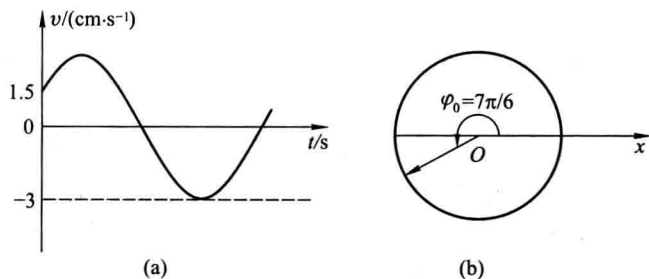
**9-21** 如图(a)所示为一简谐振动质点的速度与时间的关系曲线, 且振幅为 2 cm, 求: (1) 振动周期; (2) 加速度的最大值; (3) 运动方程.

**分析** 根据  $v-t$  图可知速度的最大值  $v_{\max}$ , 由  $v_{\max} = A\omega$  可求出角频率  $\omega$ , 进而可求出周期  $T$  和加速度的最大值  $a_{\max} = A\omega^2$ . 在要求的简谐振动方程  $x = A\cos(\omega t + \varphi)$  中, 因为  $A$  和  $\omega$  已得出, 故只要求初相位  $\varphi$  即可. 由  $v-t$  曲线图可以知道, 当  $t=0$  时, 质点运动速度  $v_0 = v_{\max}/2 = A\omega/2$ , 之后速度越来越大, 因此可以判断出质点沿  $x$  轴正向向着平衡点运动. 利用  $v_0 = -A\omega\sin\varphi$  就可求出  $\varphi$ .

**解** (1) 由  $v_{\max} = A\omega$  得  $\omega = 1.5 \text{ s}^{-1}$ , 则

$$T = 2\pi/\omega = 4.2 \text{ s}$$

(2)  $a_{\max} = A\omega^2 = 4.5 \times 10^{-2} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$



题 9-21 图

(3) 从分析中已知  $v_0 = -A\omega\sin\varphi = A\omega/2$ , 即

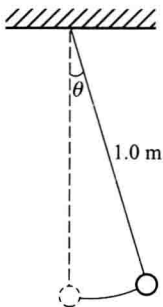
$$\sin\varphi = -1/2$$

$$\varphi = -\pi/6, \quad -5\pi/6$$

因为质点沿  $x$  轴正向向着平衡位置运动, 则取  $\varphi = -5\pi/6$ , 其旋转矢量图如图(b)所示. 则运动方程为

$$x = 2\cos(1.5t - 5\pi/6) \text{ (cm)}$$

**9-22** 有一单摆,长为 1.0 m,最大摆角为  $5^\circ$ ,如图所示。(1) 求摆的角频率和周期;(2) 设开始时摆角最大,试写出此单摆的运动方程;(3) 摆角为  $3^\circ$  时,摆球的角速度和线速度各为多少?



题 9-22 图

**分析** 单摆在摆角较小时 ( $\theta < 5^\circ$ ) 的摆动,其角量  $\theta$  与时间的关系可表示为简谐振动方程  $\theta = \theta_{\max} \cos(\omega t + \varphi)$ ,其中角频率  $\omega$  仍由该系统的性质(重力加速度  $g$  和绳长  $l$ ) 决定,即  $\omega = \sqrt{g/l}$ . 初相  $\varphi$  与摆角  $\theta$ ,质点的角速度与旋转矢量的角速度(角频率)均是不同的物理概念,必须注意区分.

**解** (1) 单摆角频率及周期分别为

$$\omega = \sqrt{g/l} = 3.13 \text{ s}^{-1}, \quad T = 2\pi/\omega = 2.01 \text{ s}$$

(2) 由  $t=0$  时  $\theta = \theta_{\max} = 5^\circ$  可得振动初相  $\varphi = 0$ ,则以角量表示的简谐振动方程为

$$\theta = \frac{\pi}{36} \cos 3.13t$$

(3) 摆角为  $3^\circ$  时,有  $\cos(\omega t + \varphi) = \theta/\theta_{\max} = 0.6$ ,则这时质点的角速度为

$$\begin{aligned} d\theta/dt &= -\theta_{\max} \omega \sin(\omega t + \varphi) = -\theta_{\max} \omega \sqrt{1 - \cos^2(\omega t + \varphi)} \\ &= -0.8 \theta_{\max} \omega = -0.218 \text{ s}^{-1} \end{aligned}$$

线速度的大小为

$$v = l |d\theta/dt| = 0.218 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

**讨论** 质点的线速度和角速度也可通过机械能守恒定律求解,但结果会有极微小的差别.这是因为在导出简谐振动方程时曾取  $\sin \theta \approx \theta$ ,所以,单摆的简谐振动方程仅在  $\theta$  较小时成立.

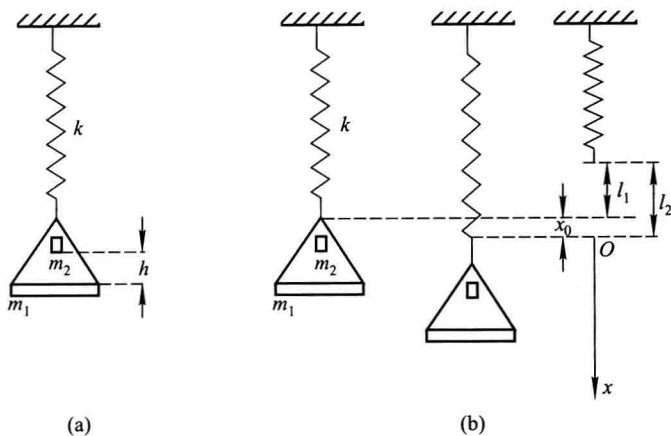
**9-23** 为了测月球表面的重力加速度,宇航员将地球上的“秒摆”(周期为 2.00 s)拿到月球上去,如测得周期为 4.90 s,则月球表面的重力加速度是多少?(地球表面的重力加速度为  $g = 9.80 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ .)

**解** 由单摆的周期公式  $T = 2\pi\sqrt{l/g}$  可知  $g \propto 1/T^2$ ,故有  $g_M/g = T_E^2/T_M^2$ ,则月球的重力加速度为

$$g_M = (T_E/T_M)^2 g = 1.63 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

**9-24** 如图(a)所示,一劲度系数为  $k$  的轻弹簧,其下挂有一质量为  $m_1$  的空盘.现有一质量为  $m_2$  的物体从盘上方高为  $h$  处自由落入盘中,并和盘黏在一起振动.问:(1) 此时的振动周期与空盘作振动的周期有何不同?(2) 此时的振幅为多大?

**分析** 原有空盘振动系统由于下落物体的加入,振子质量由  $m_1$  变为  $m_1 + m_2$ ,因此新系统的角频率(或周期)要改变.由于  $A = \sqrt{x_0^2 + (v_0/\omega)^2}$ ,因此,确定初



题 9-24 图

始速度  $v_0$  和初始位移  $x_0$  是求解振幅  $A$  的关键. 物体落到盘中, 与盘作完全非弹性碰撞, 由动量守恒定律可确定盘与物体的共同初速度  $v_0$ , 这也是该振动系统的初始速度. 在确定初始时刻的位移  $x_0$  时, 应注意新振动系统的平衡位置应是盘和物体悬挂在弹簧上的平衡位置. 因此, 本题中初始位移  $x_0$ , 也就是空盘时的平衡位置相对新系统的平衡位置的位移.

解 (1) 空盘时和物体落入盘中后的振动周期分别为

$$T = 2\pi/\omega = 2\pi\sqrt{m_1/k}$$

$$T' = 2\pi/\omega' = 2\pi\sqrt{(m_1+m_2)/k}$$

可见  $T' > T$ , 即振动周期变大了.

(2) 如图(b)所示, 取新系统的平衡位置为坐标原点  $O$ . 则根据分析中所述, 初始位移为空盘时的平衡位置相对黏上物体后新系统平衡位置的位移, 即

$$x_0 = l_1 - l_2 = \frac{m_1 g}{k} - \frac{m_1 + m_2}{k} g = -\frac{m_2 g}{k}$$

式中  $l_1 = m_1 g/k$  为空盘静止时弹簧的伸长量,  $l_2 = (m_1 + m_2)g/k$  为物体黏在盘上后, 静止时弹簧的伸长量. 由动量守恒定律可得振动系统的初始速度, 即盘与物体相碰后的速度为

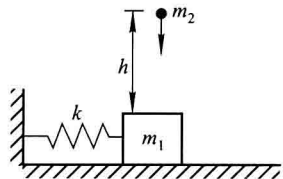
$$v_0 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} v = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \sqrt{2gh}$$

式中  $v = \sqrt{2gh}$  是物体由高为  $h$  处下落至盘时的速度. 故系统振动的振幅为

$$A = \sqrt{x_0^2 + (v_0/\omega')^2} = \frac{m_2 g}{k} \sqrt{1 + \frac{2kh}{(m_1 + m_2)g}}$$

本题也可用机械能守恒定律求振幅  $A$ .

**9-25** 如图所示,劲度系数为  $k$  的轻弹簧,系一质量为  $m_1$  的物体,在水平面上作振幅为  $A$  的简谐振动. 有一质量为  $m_2$  的黏土,从高度为  $h$  处自由下落,正好在(a)物体通过平衡位置时,(b)物体在最大位移处时,落在物体上. 在此两种情况下,问:(1) 振动周期有何变化?(2) 振幅有何变化?



题 9-25 图

**分析** 简谐振子系统的周期只与弹簧的劲度系数和振子的质量有关. 由于黏土落下前后,振子的质量发生了改变,因此,振动周期也将变化. 至于黏土如何落下是不影响振动周期的. 但是,黏土落下时将改变振动系统的初始状态,因此,对振幅是有影响的. 在黏土落到物体上的两种不同情况中,系统在水平方向的动量都是守恒的. 利用动量守恒定律可求出两种情况下系统的初始速度,从而利用机械能守恒定律或公式  $A = \sqrt{x_0^2 + (v_0/\omega)^2}$  求得两种情况下的振幅.

**解** (1) 由分析可知,在(a)、(b)两种情况中,黏土落下前后的周期均为

$$T = 2\pi/\omega = 2\pi\sqrt{m_1/k}$$

$$T' = 2\pi/\omega' = 2\pi\sqrt{(m_1+m_2)/k}$$

物体黏上黏土后的周期  $T'$  比原周期  $T$  大.

(2) (a) 设黏土落至物体前后,系统振动的振幅和物体经过平衡位置时的速度分别为  $A$ 、 $v$  和  $A'$ 、 $v'$ . 由动量守恒定律和机械能守恒定律可列出如下各式:

$$kA^2/2 = m_1v^2/2 \quad (1)$$

$$kA'^2/2 = (m_1+m_2)v'^2/2 \quad (2)$$

$$m_1v = (m_1+m_2)v' \quad (3)$$

联立解上述三式,可得

$$A' = \sqrt{m_1/(m_1+m_2)} A$$

即  $A' < A$ , 表明增加黏土后,物体的振幅变小了.

(b) 物体正好在最大位移处时,黏土落在物体上. 则由动量守恒定律知它们水平方向共同速度  $v' = m_1v/(m_1+m_2) = 0$ , 因而振幅不变,即

$$A' = A$$

**9-26** 一飞轮质量为  $12 \text{ kg}$ , 内缘半径  $r = 0.6 \text{ m}$ , 如图所示. 为了测定其对质心轴的转动惯量, 现让其绕内缘刃口摆动, 在摆角较小时, 测得周期为  $2.0 \text{ s}$ , 试求其绕质心轴的转动惯量.



题 9-26 图

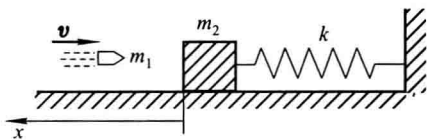
**分析** 飞轮的运动相当于一个以刃口为转轴的复摆

运动,复摆振动周期为  $T = 2\pi\sqrt{J/mgl_c}$ , 因此,只要知道复摆振动的周期和转轴到质心的距离  $l_c$ , 其以刃口为转轴的转动惯量即可求得. 再根据平行轴定理, 可求出其绕质心轴的转动惯量.

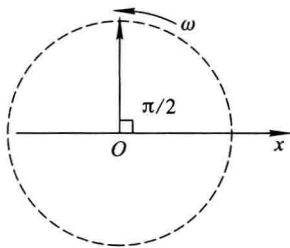
**解** 由复摆振动周期  $T = 2\pi\sqrt{J/mgl_c}$ , 可得  $J = mgrT^2/4\pi^2$ . 则由平行轴定理得

$$J_o = J - mr^2 = mgrT^2/4\pi^2 - mr^2 = 2.83 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

**9-27** 如图(a)所示, 质量为  $1.00 \times 10^{-2} \text{ kg}$  的子弹, 以  $500 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  的速度射入并嵌在木块中, 同时使弹簧压缩从而作简谐振动, 设木块的质量为  $4.99 \text{ kg}$ , 弹簧的劲度系数为  $8.00 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$ . 若以弹簧原长时物体所在处为坐标原点, 向左为  $x$  轴正向, 求简谐振动方程.



(a)



(b)

题 9-27 图

**分析** 可分为两个过程讨论. 首先是子弹射入木块的过程, 在此过程中, 子弹和木块组成的系统满足动量守恒, 因而可以确定它们共同运动的初速度  $v_0$ , 即振动的初速度. 随后的过程是以子弹和木块为弹簧振子作简谐振动. 它的角频率由振子质量  $m_1 + m_2$  和弹簧的劲度系数  $k$  确定, 振幅和初相可根据初始条件(初速度  $v_0$  和初位移  $x_0$ ) 求得. 初相位仍可用旋转矢量法求.

**解** 振动系统的角频率为

$$\omega = \sqrt{k/(m_1 + m_2)} = 40 \text{ s}^{-1}$$

由动量守恒定律得振动的初始速度即子弹和木块的共同运动初速度  $v_0$  为

$$v_0 = m_1 v / (m_1 + m_2) = 1.0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

又因初始位移  $x_0 = 0$ , 则振动系统的振幅为

$$A = \sqrt{x_0^2 + (v_0/\omega)^2} = |v_0/\omega| = 2.5 \times 10^{-2} \text{ m}$$

图(b)给出了弹簧振子的旋转矢量图,从图中可知初相位  $\varphi_0 = \pi/2$ , 则简谐振动方程为

$$x = 2.5 \times 10^{-2} \cos(40t + 0.5\pi) \text{ (m)}$$

**9-28** 质量为  $0.10 \text{ kg}$  的物体,以振幅  $1.0 \times 10^{-2} \text{ m}$  作简谐振动,其最大加速度为  $4.0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ . 求:(1) 振动的周期;(2) 物体通过平衡位置时的总能量与动能;(3) 物体在何处其动能和势能相等?(4) 当物体的位移大小为振幅的一半时,动能、势能各占总能量的多少?

**分析** 在简谐振动过程中,物体的最大加速度  $a_{\max} = A\omega^2$ , 由此可确定振动的周期  $T$ . 另外,在简谐振动过程中机械能是守恒的,其中动能和势能互相交替转化,其总能量  $E = kA^2/2$ . 当动能与势能相等时,  $E_k = E_p = kA^2/4$ . 因而可求解本题.

**解** (1) 由分析可得振动周期

$$T = 2\pi/\omega = 2\pi\sqrt{A/a_{\max}} = 0.314 \text{ s}$$

(2) 当物体处于平衡位置时,系统的势能为零,由机械能守恒可得系统的动能等于总能量,即

$$\begin{aligned} E_k = E &= \frac{1}{2}mA^2\omega^2 = \frac{1}{2}mAa_{\max} \\ &= 2.0 \times 10^{-3} \text{ J} \end{aligned}$$

(3) 设振子在位移  $x_0$  处动能与势能相等,则有

$$kx_0^2/2 = kA^2/4$$

得

$$x_0 = \pm\sqrt{2}A/2 = \pm 7.07 \times 10^{-3} \text{ m}$$

(4) 物体位移的大小为振幅的一半(即  $x = A/2$ )时的势能为

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}k\left(\frac{A}{2}\right)^2 = E/4$$

则动能为

$$E_k = E - E_p = 3E/4$$

**9-29** 一氢原子在分子中的振动可视为简谐振动. 已知氢原子质量  $m = 1.68 \times 10^{-27} \text{ kg}$ , 振动频率  $\nu = 1.0 \times 10^{14} \text{ Hz}$ , 振幅  $A = 1.0 \times 10^{-11} \text{ m}$ . 试计算:(1) 此氢原子的最大速度;(2) 与此振动相联系的能量.

**解** (1) 简谐振动系统中振子运动的速度  $v = -A\omega \sin(\omega t + \varphi)$ , 故氢原子振动的最大速度为

$$v_{\max} = \omega A = 2\pi\nu A = 6.28 \times 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

(2) 氢原子的振动能量为

$$E = mv_{\max}^2/2 = 3.31 \times 10^{-20} \text{ J}$$

**9-30** 质量  $m = 10 \text{ g}$  的小球与轻弹簧组成一振动系统, 按  $x = 0.5 \cos\left(8\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$  (式中  $x$  的单位为  $\text{cm}$ ,  $t$  的单位为  $\text{s}$ ) 的规律作自由振动, 求: (1) 振动的角频率、周期、振幅和初相; (2) 振动的能量; (3) 一个周期内的平均动能和平均势能.

**解** (1) 将  $x = 0.5 \cos\left(8\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$  ( $\text{cm}$ ) 与  $x = A \cos(\omega t + \varphi)$  比较后可得: 角频率  $\omega = 8\pi \text{ s}^{-1}$ , 振幅  $A = 0.5 \text{ cm}$ , 初相  $\varphi = \pi/3$ , 则周期  $T = 2\pi/\omega = 0.25 \text{ s}$

(2) 简谐振动的能量

$$E = \frac{1}{2} m A^2 \omega^2 = 7.90 \times 10^{-5} \text{ J}$$

(3) 简谐振动的动能和势能分别为

$$E_k = \frac{1}{2} m A^2 \omega^2 \sin^2(\omega t + \varphi)$$

$$E_p = \frac{1}{2} m A^2 \omega^2 \cos^2(\omega t + \varphi)$$

则在一个周期中, 动能与势能对时间的平均值分别为

$$\bar{E}_k = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{2} m A^2 \omega^2 \sin^2(\omega t + \varphi) dt = \frac{m A^2 \omega^2}{4} = 3.95 \times 10^{-5} \text{ J}$$

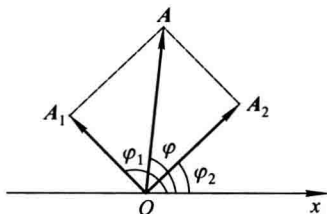
$$\bar{E}_p = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{2} m A^2 \omega^2 \cos^2(\omega t + \varphi) dt = \frac{m A^2 \omega^2}{4} = 3.95 \times 10^{-5} \text{ J}$$

**9-31** 已知两同方向同频率的简谐振动的运动方程分别为  $x_1 = 0.05 \cos(10t + 0.75\pi)$ ,  $x_2 = 0.06 \cos(10t + 0.25\pi)$ , 式中  $x_1, x_2$  的单位为  $\text{m}$ ,  $t$  的单位为  $\text{s}$ . 求: (1) 合振动的振幅及初相; (2) 若有另一同方向同频率的简谐振动  $x_3 = 0.07 \cos(10t + \varphi_3)$ , 式中  $x_3$  的单位为  $\text{m}$ ,  $t$  的单位为  $\text{s}$ , 则  $\varphi_3$  为多少时,  $x_1 + x_3$  的振幅最大? 又  $\varphi_3$  为多少时,  $x_2 + x_3$  的振幅最小?

**分析** 可采用解析法或旋转矢量法求解. 由旋转矢量合成可知, 两个同方向同频率简谐振动的合成仍为一简谐振动, 其角频率不变; 合振动的振幅  $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}$ , 其大小与两个分振动的初相差  $(\varphi_2 - \varphi_1)$  相关. 而合振动的初相位

$$\varphi = \arctan \left[ (A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2) / (A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2) \right]$$

**解** (1) 作两个简谐振动合成的旋转矢量图 (如图所示). 因为  $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = -\pi/2$ , 故合振动振幅为



题 9-31 图

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(-\pi/2)} = 7.8 \times 10^{-2} \text{ m}$$

合振动初相位

$$\begin{aligned} \varphi &= \arctan[(A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2) / (A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2)] \\ &= \arctan 11 = 1.48 \text{ rad} \end{aligned}$$

(2) 要使  $x_1 + x_3$  振幅最大, 即两振动同相, 则由  $\Delta\varphi = 2k\pi$  得

$$\varphi_3 = \varphi_1 + 2k\pi = 2k\pi + 0.75\pi, \quad k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

要使  $x_2 + x_3$  的振幅最小, 即两振动反相, 则由  $\Delta\varphi = (2k+1)\pi$  得

$$\varphi_3 = \varphi_2 + (2k+1)\pi = 2k\pi + 1.25\pi, \quad k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

**9-32** 将频率为 348 Hz 的标准音叉振动和—待测频率的音叉振动合成, 测得拍频为 3.0 Hz. 若在待测频率音叉的一端加上一小块物体, 则拍频将减少, 求待测音叉的固有频率.

**分析** 这是利用拍现象来测定振动频率的一种方法. 在频率  $\nu_1$  和拍频  $\Delta\nu = |\nu_2 - \nu_1|$  已知的情况下, 待测频率  $\nu_2$  可取两个值, 即  $\nu_2 = \nu_1 \pm \Delta\nu$ . 式中  $\Delta\nu$  前正、负号的选取应根据待测音叉系统质量改变时, 拍频变化的情况来决定.

**解** 根据分析可知, 待测频率的可能值为

$$\nu_2 = \nu_1 \pm \Delta\nu = (348 \pm 3) \text{ Hz}$$

因振动系统的固有频率  $\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$ , 即质量  $m$  增加时, 频率  $\nu$  减小. 从题意知, 当待测音叉质量增加时拍频减少, 即  $|\nu_2 - \nu_1|$  变小. 因此, 在满足  $\nu_2$  与  $\Delta\nu$  均变小的情况下, 式中只能取正号, 故待测频率为

$$\nu_2 = \nu_1 + \Delta\nu = 351 \text{ Hz}$$

**\*9-33** 示波管的电子束受到两个互相垂直的电场的作用. 电子在两个方向上的位移分别为  $x = A \cos \omega t$  和  $y = A \cos(\omega t + \varphi)$ . 求在  $\varphi = 0^\circ$ 、 $\varphi = 30^\circ$  及  $\varphi = 90^\circ$  各种情况下, 电子在荧光屏上的轨迹方程.

**解** 这是两个振动方向互相垂直的同频率简谐振动的合成问题. 合振动的轨迹方程为

$$x^2/A_1^2 + y^2/A_2^2 - 2xy \cos \Delta\varphi / A_1 A_2 = \sin^2 \Delta\varphi$$

式中  $A_1$ 、 $A_2$  为两振动的振幅,  $\Delta\varphi$  为两个振动的初相差. 本题中  $A_1 = A_2 = A$ ,  $\Delta\varphi = \varphi$ , 故有

$$x^2 + y^2 - 2xy \cos \varphi = A^2 \sin^2 \varphi$$

(1) 当  $\varphi = 0^\circ$  时, 有  $x = y$ , 轨迹为一直线方程.

(2) 当  $\varphi = 30^\circ$  时, 有  $x^2 + y^2 - \sqrt{3}xy = A^2/4$ , 轨迹为椭圆方程.

(3) 当  $\varphi = 90^\circ$  时, 有  $x^2 + y^2 = A^2$ , 轨迹为圆方程.

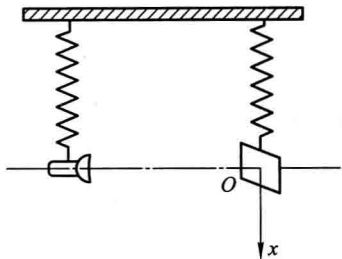
**9-34** 手电筒和屏幕质量均为  $m$ , 且均被劲度系数为  $k$  的轻弹簧悬挂于同



一水平面上,如图所示.平衡时,手电筒的光恰好照在屏幕中心.设手电筒和屏幕相对于地面上下振动的表达式分别为  $x_1 = A\cos(\omega t + \varphi_1)$  和  $x_2 = A\cos(\omega t + \varphi_2)$ . 试求在下述两种情况下初相位  $\varphi_1$  和  $\varphi_2$  应满足什么条件? (1) 光点在屏幕上相对于屏静止不动; (2) 光点在屏幕上相对于屏作振幅  $A' = 2A$  的振动. 并说明用何种方式起动,才能得到上述结果.

**分析** 落在屏幕上的光点相对地面的运动和屏幕相对于地面的运动都已知道,且是两个简谐振动. 因此由运动的合成不难写出光点相对屏的运动(实际上是两个同方向同频率简谐振动的合成). 根据相对运动公式,有

$$x_{\text{光对地}} = x_{\text{光对屏}} + x_{\text{屏对地}}$$



题 9-34 图

依题意

$$x_{\text{光对地}} = x_1 = A\cos(\omega t + \varphi_1)$$

$$x_{\text{屏对地}} = x_2 = A\cos(\omega t + \varphi_2)$$

所以  $x_{\text{光对屏}} = x_1 - x_2 = x_1 + x_2' = A\cos(\omega t + \varphi_1) + A\cos(\omega t + \pi + \varphi_2)$

可见光点对屏的运动就是两个同方向同频率简谐振动  $x_1 = A\cos(\omega t + \varphi_1)$  和  $x_2' = A\cos(\omega t + \pi + \varphi_2)$  的合成. 用与上题相同的方法即可求解本题. 其中合振动振幅  $A' = \sqrt{A^2 + A^2 + 2A^2 \cos(\pi + \varphi_2 - \varphi_1)}$ .

**解** (1) 根据分析和参考上题求解,当要求任一时刻光点相对于屏不动,即  $x_{\text{光对屏}} = 0$ ,就是当  $\pi + \varphi_2 - \varphi_1 = (2k+1)\pi$  时,即  $\varphi_2 = \varphi_1 + 2k\pi$  时 ( $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ),  $A' = 0$ . 当光点相对于屏作振幅为  $2A$  的振动时,要求  $\pi + \varphi_2 - \varphi_1 = 2k\pi$ ,即  $\varphi_2 = \varphi_1 + (2k-1)\pi$ .

(2) 由以上求解可知,要使光点相对于屏不动,就要求手电筒和屏的振动始终要同步,即同相位,为此,把它们往下拉位移  $A$  后,同时释放即可;同理,要使光点对屏作振幅为  $2A$  的简谐振动,两者必须相位相反,为此,让手电筒位于平衡点  $O$  上方的  $-A$  处,而屏则位于  $+A$  处同时释放,即可实现.

**9-35** 两个同频率简谐振动 1 和 2 的振动曲线如图 (a) 所示,求 (1) 两简谐振动的运动方程  $x_1$  和  $x_2$ ; (2) 在同一图中画出两简谐振动的旋转矢量,并比较两振动的相位关系; (3) 若两简谐振动叠加,求合振动的运动方程.

**分析** 振动图已给出了两个简谐振动的振幅和周期,因此只要利用图中所给初始条件,由旋转矢量法或解析法求出初相位,便可得两个简谐振动的方程.

**解** (1) 由振动曲线可知,  $A = 0.1 \text{ m}$ ,  $T = 2 \text{ s}$ , 则  $\omega = 2\pi/T = \pi \text{ s}^{-1}$ . 曲线 1 表示质点初始时刻在  $x = 0$  处且向  $x$  轴正向运动,因此  $\varphi_1 = -\pi/2$ ; 曲线 2 表示质点初始时刻在  $x = A/2$  处且向  $x$  轴负向运动,因此  $\varphi_2 = \pi/3$ . 它们的旋转矢量图如图 (b) 所示. 则两振动的运动方程分别为

$$x_1 = 0.1 \cos(\pi t - \pi/2) \text{ (m)}, \quad x_2 = 0.1 \cos(\pi t + \pi/3) \text{ (m)}$$

(2) 由图(b)可知振动2超前振动1的相位为  $5\pi/6$ .

$$(3) x = x_1 + x_2 = A' \cos(\omega t + \varphi)$$

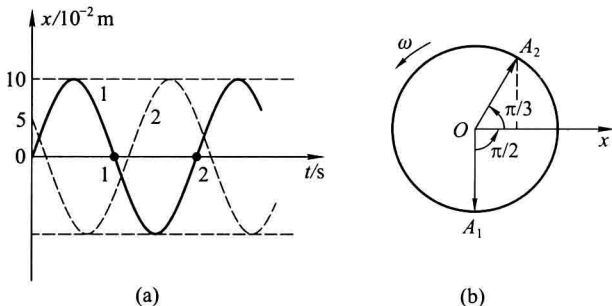
其中

$$A' = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)} = 0.052 \text{ m}$$

$$\varphi = \arctan \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2} = \arctan(-0.268) = -\frac{\pi}{12}$$

则合振动的运动方程为

$$x = 0.052 \cos(\pi t - \pi/12) \text{ (m)}$$



题 9-35 图

**9-36** 测量液体阻尼系数的装置简图如图所示,将一质量为  $m$  的物体挂在轻弹簧上,在空气中测得振动的频率为  $\nu_1$ ,置于液体中测得的频率为  $\nu_2$ ,求此液体的阻尼系数.

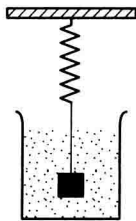
**分析** 在阻尼不太大的情况下,阻尼振动的角频率  $\omega$  与无阻尼时系统的固有角频率  $\omega_0$  及阻尼系数  $\delta$  有关系式  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ . 因此根据题中测得的  $\nu_1$  和  $\nu_2$  (即已知  $\omega_0$ 、 $\omega$ ), 就可求出  $\delta$ .

**解** 物体在空气和液体中的角频率为  $\omega_0 = 2\pi\nu_1$  和  $\omega = 2\pi\nu_2$ , 得阻尼系数为

$$\delta = \sqrt{\omega_0^2 - \omega^2} = 2\pi\sqrt{\nu_1^2 - \nu_2^2}$$

**9-37** 一弹簧振子系统, 物体的质量  $m = 1.0 \text{ kg}$ , 弹簧的劲度系数  $k = 900 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$ . 系统振动时受到阻尼作用, 其阻尼系数  $\delta = 10.0 \text{ s}^{-1}$ . 为了使振动持续, 现加一周期性外力  $F = 100 \cos 30t$  (式中  $F$  的单位为  $\text{N}$ ,  $t$  的单位为  $\text{s}$ ). (1) 求振子达到稳定时的振动角频率; (2) 若外力的角频率可以改变, 则当其值为多少时系统出现共振现象? 其共振的振幅多大?

**分析** 本题是物体在有阻尼条件下的受迫振动, 其运动方程为



题 9-36 图

$$x = A_0 e^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi) + A \cos(\omega_p t + \psi) \quad (1)$$

等式右边第一项与阻尼有关,该项经一段时间后,因  $e^{-\delta t} \rightarrow 0$  而消失. 因此,稳定时系统的振动由第二项确定,它是简谐振动方程. 其中  $\omega_p$  为周期性外力的角频率,由此可知,此时振动的角频率即是周期性外力的角频率. 而振幅为

$$A = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_p^2)^2 + 4\delta^2 \omega_p^2}} \quad (2)$$

式中  $F_0$  为周期性外力的力幅,  $\omega_0$  是弹簧振子的固有角频率,  $m$  是振子质量. 当阻尼系数  $\delta$  一定时,振幅  $A$  是外力的角频率  $\omega_p$  的函数. 共振时,振幅最大,故可采用对函数  $A(\omega_p)$  求极值的方法确定共振频率和振幅.

**解** (1) 根据分析,受迫振动达到稳定时,系统作简谐振动的角频率即为周期性外力的角频率,故有

$$\omega_1 = \omega_p = 30 \text{ s}^{-1}$$

(2) 受迫振动达到稳定后,其振幅  $A = F_0/m \sqrt{(\omega_0^2 - \omega_p^2)^2 + 4\delta^2 \omega_p^2}$ . 当  $dA/d\omega_p = 0$  时振幅将取得极大值,称共振现象. 此时可解得周期性外力的角频率为

$$\omega_p = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2} = 26.5 \text{ s}^{-1}$$

将上述结果代入振幅  $A$  的表达式中,得共振时振幅为

$$A_r = \frac{F_0}{2m\delta\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}} = 0.177 \text{ m}$$

**\*9-38** 在铁轨上行驶的火车,每次经过铁轨连接处即受到一次振动,并引起车厢在消振弹簧上振动. 设弹簧的劲度系数为  $k = 3.90 \times 10^6 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$ ,所承受的车厢负载为  $3.44 \times 10^4 \text{ kg}$ ,系统阻尼系数约为  $\delta = 2.5 \text{ s}^{-1}$ ,每段铁轨长为  $12.5 \text{ m}$ . 问:火车速度多大时振动最强烈?

**分析** 本题是一个共振问题. 火车车厢每次在连接处受到的振动,可以看成是对车厢周期性外力作用,其圆频率  $\omega_p = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi v}{L}$ ,而车厢的固有圆频率  $\omega_0 =$

$\sqrt{\frac{k}{m}}$ . 当满足共振条件  $\omega_p = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}$  时,振动最强烈. 由此可求出  $v$ .

**解** 由分析知

$$\omega_p = 2\pi \frac{v}{L} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}$$

得 
$$v = \frac{L}{2\pi} \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}$$

式中 
$$L = 12.5 \text{ m}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = 10.6 \text{ s}^{-1}, \quad \delta = 2.5 \text{ s}^{-1}$$

解得

$$v = 19.8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

为了使旅客受到的振动较小,工程设计人员一般要通过设计消振系统中的  $k$  与  $\delta$  值,尽量避免火车在常规速度下出现共振.

**9-39** 在一个  $LC$  振荡电路中,若电容器两极板上的交变电压  $u = 50\cos(10^4\pi t)$  (式中  $u$  的单位为 V,  $t$  的单位为 s), 电容  $C = 1.0 \times 10^{-7} \text{ F}$ , 电路中的电阻可以忽略不计,求:(1) 振荡的周期;(2) 电路的自感;(3) 电路中的电流随时间变化的规律.

**分析** 在不计电阻的前提下,该  $LC$  电路是无阻尼自由振荡电路,在振荡过程中电容器两极板上的电压、电荷及电路中的电流均以相同的周期变化着. 振荡周期为  $T = 2\pi\sqrt{LC}$ . 因此,本题可通过已知的电压的角频率  $\omega$ , 求出振荡周期, 然后可求出自感  $L$ . 另外,电容器极板上电压  $u$ 、电荷  $q$  始终满足关系式  $q = Cu$ . 因此,在确定  $q = q(t)$  后,根据电流定义  $I = dq/dt$ , 可求出电流的变化规律.

**解** (1) 从题中已知的电压变化关系中得振荡周期为

$$T = 2\pi/\omega = 2.0 \times 10^{-4} \text{ s}$$

(2) 由振荡电路周期  $T = 2\pi\sqrt{LC}$  得电路中的自感为

$$L = T^2/4\pi^2 C = 1.01 \times 10^{-2} \text{ H}$$

(3) 电路中电流随时间变化的规律为

$$I = dq/dt = C \cdot du/dt = -0.157 \sin 10^4 \pi t \text{ (A)}$$

**9-40** 用一个电容可在  $10.0 \text{ pF}$  到  $360.0 \text{ pF}$  范围内变化的电容器和一个自感线圈并联组成无线电收音机的调谐电路.(1) 求该调谐电路可以接收的最大和最小频率之比是多少?(2) 为了使调谐频率能在  $5.0 \times 10^5 \text{ Hz}$  到  $1.5 \times 10^6 \text{ Hz}$  的范围内,需在原电容器上并联一个多大的电容? 此电路选用的自感应为多大?

**分析** 当自感  $L$  一定时,要改变调谐频率的范围,只需改变电容的变化范围. 本题采用并联电容  $C$  的方法使电容由原有的变化范围  $C_{\min} \sim C_{\max}$  改变为  $C_{\min} + C \sim C_{\max} + C$ , 从而达到新的调谐目的. 为此,可根据  $\nu = 1/2\pi\sqrt{LC}$ , 由原有电容比  $C_{\max}/C_{\min}$  来确定对应的频率比  $\nu_{\max}/\nu_{\min}$ . 再由新要求的频率比来确定需要并联的电容的大小.

**解** (1) 当线圈自感  $L$  一定时,由  $\nu = 1/2\pi\sqrt{LC}$ , 可得

$$\nu_{\max}/\nu_{\min} = \sqrt{C_{\max}/C_{\min}} = 6.0$$

(2) 为了在  $5.0 \times 10^5 \text{ Hz} \sim 1.5 \times 10^6 \text{ Hz}$  的频率范围内调谐,应满足

$$\nu'_{\max}/\nu'_{\min} = \sqrt{(C_{\max} + C)/(C_{\min} + C)}$$

由此得在原电容器上需并联的电容为

$$C = \frac{C_{\max} - C_{\min}(\nu'_{\max}/\nu'_{\min})^2}{(\nu'_{\max}/\nu'_{\min})^2 - 1} = 33.75 \text{ pF}$$

此电路选用的线圈自感为

$$L = 1/4\pi^2\nu^2 C = 1/4\pi^2\nu_{\min}^2 (C_{\max} + C) = 2.58 \times 10^{-4} \text{ H}$$

**9-41** 一振荡电路,已知  $C = 0.025 \mu\text{F}$ ,  $L = 1.015 \text{ H}$ . 电路中的电阻可忽略不计,电容器上电荷的最大值为  $Q_0 = 2.5 \times 10^{-6} \text{ C}$ . (1) 写出电路接通后,电容器两极板间的电势差随时间而变化的方程和电路中电流随时间而变化的方程;(2) 写出电场能量、磁场能量及总能量随时间而变化的方程;(3) 求  $t_1 = T/8$  和  $t_2 = T/4$  时,电容器两极板间的电势差、电路中的电流、电场能、磁场能.

**分析** 无阻尼  $LC$  振荡电路中电流、电容器极板上电荷以及电势差均以相同的频率随时间作正弦或余弦变化. 如果令极板上电荷  $q = Q_0 \cos(\omega t + \varphi_0)$ , 则由  $I = dq/dt$ 、 $U = q/C$  可得电路中的电流  $I$ 、极板两端电势差  $U$  的变化规律. 利用电磁场中电场能量和磁场能量公式可写出它们随时间  $t$  的函数关系式和特定时刻的瞬时值.

**解** (1)  $LC$  无阻尼振荡电路的振荡角频率为

$$\omega = 1/\sqrt{LC} = 2000\pi \text{ s}^{-1}$$

若以电路闭合的瞬间为计时起点,此时极板上电荷最大. 则任一时刻极板上的电荷为

$$q = Q_0 \cos \omega t = 2.5 \times 10^{-6} \cos 2000\pi t (\text{C})$$

该时刻电路中的电流为

$$I = dq/dt = -1.57 \times 10^{-2} \sin 2000\pi t (\text{A})$$

极板两端电势差为

$$U = q/C = 100 \cos 2000\pi t (\text{V})$$

(2) 任意时刻电场能量、磁场能量及总能量分别为

$$E_e = q^2/2C = 1.25 \times 10^{-4} \cos^2 2000\pi t (\text{J})$$

$$E_m = LI^2/2 = 1.25 \times 10^{-4} \sin^2 2000\pi t (\text{J})$$

$$E = E_e + E_m = 1.25 \times 10^{-4} \text{ J}$$

(3) 由  $\omega = 2\pi\nu = 2\pi/T$ , 可得  $T = 0.001 \text{ s}$ , 则当  $t_1 = T/8$  时, 由上述各式可得

$$U_1 = 100 \cos(2000 \times 0.001 \pi / 8) \text{ V} = 70.7 \text{ V}$$

$$I_1 = -1.57 \times 10^{-2} \sin(2000 \times 0.001 \pi / 8) \text{ A} = -1.11 \times 10^{-2} \text{ A}$$

$$E_{e1} = 1.25 \times 10^{-4} \cos^2(2000 \times 0.001 \pi / 8) \text{ J} = 6.25 \times 10^{-5} \text{ J}$$

$$E_{m1} = 1.25 \times 10^{-4} \sin^2(2000 \times 0.001 \pi / 8) \text{ J} = 6.25 \times 10^{-5} \text{ J}$$

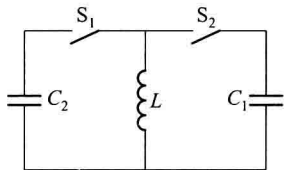
同理, 当  $t_2 = T/4$  时可得

$$U_2 = 0; \quad I_2 = -1.57 \times 10^{-2} \text{ A}; \quad E_{e2} = 0; \quad E_{m2} = 1.25 \times 10^{-4} \text{ J}$$

由上述结果可以看出  $LC$  电路在无阻尼振荡过程中, 总的电磁场能量是不

变的,即满足能量守恒定律.

**9-42** 如图所示,电容  $C_1 = 1\ 600\ \mu\text{F}$ ,  $C_2 = 100\ \mu\text{F}$ . 先将电容器  $C_1$  充电到  $100\ \text{V}$ , 然后通过图示中的开关  $S_1$ 、 $S_2$  给电容器  $C_2$  充电. 设电容器  $C_1$  上的电能全部转化为电容器  $C_2$  上的电能. 问  $C_2$  两端的电压为多少? 如何调节  $S_1$ 、 $S_2$  才能实现电能的上述转化?



题 9-42 图

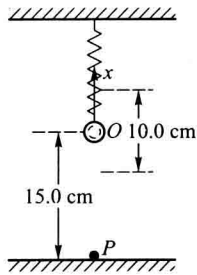
**分析** 这里将  $LC$  电路看成是无阻尼振荡电路, 因此振荡过程中能量守恒. 为了实现将电容器  $C_1$  上的电场能全部转化到  $C_2$  上, 可以先断开  $S_1$ , 合上  $S_2$ . 这时充好电的电容器  $C_1$  开始放电, 电路中产生电流并逐渐增加, 与此同时线圈内产生磁场, 电场能转化为磁场能. 放电完毕时, 电场能全部转化为磁场能, 同时线圈内产生了自感电动势. 此时断开  $S_2$ , 闭合  $S_1$ . 由于自感电动势的作用, 开始对  $C_2$  反充电. 磁场能就又转化为电场能. 根据电容器储存电场能公式  $W_e = \frac{1}{2}CU^2$ , 即可求解.

**解** 根据分析, 整个过程能量守恒, 则由

$$\frac{1}{2}C_1U_1^2 = \frac{1}{2}C_2U_2^2$$

得 
$$U_2 = \sqrt{\frac{C_1}{C_2}}U_1 = 400\ \text{V}$$

**9-43** 如图所示, 一电荷量为  $Q = -3.00 \times 10^{-6}\ \text{C}$ 、质量为  $m = 0.800\ \text{kg}$  的小球外表面包裹一层绝缘塑料, 被竖直悬挂在劲度系数为  $k = 126\ \text{N} \cdot \text{m}^{-1}$  的轻质弹簧下面, 小球正下方有一桌子. 当系统初始保持平衡状态时, 小球的中心位于桌面上方  $15\ \text{cm}$  处. 现将小球从平衡位置正上方  $5\ \text{cm}$  处静止释放. 当不考虑电荷的运动效应时, 写出小球正下方桌面上点  $P$  处的电场强度关于时间的函数表达式. 思考: 若点  $P$  处放置一半径可忽略、电荷量为  $q = 1.50 \times 10^{-10}\ \text{C}$ 、质量为  $m'$  的小球, 问如果该小球恰好能周期性地脱离桌面, 小球质量的最大值  $m'_{\max}$  应等于多少?



题 9-43 图

**分析** 这里将小球近似看成是一带电的点电荷. 在电荷量不变的条件下, 它在  $P$  点产生的电场强度的大小是由它到  $P$  点的距离决定的, 而小球上下作简谐振动, 其位置是  $t$  的函数. 因此本题关键是求出小球上下振动的运动方程. 为此按图所示选定  $x$  轴正向, 并以小球平衡位置处为坐标原点. 根据题意知小球上下作振幅  $A = 5.0\ \text{cm}$  的简谐振动. 其角频率为  $\omega = \sqrt{k/m}$ , 初相为  $\varphi = 0$ . 故振动方程  $x = A\cos\sqrt{k/m}t$ , 则小球到桌面上  $P$  处的距离为  $r = 0.15\ \text{m} + x$ , 将其代入点电荷场

强公式即可求得结果.

当在  $P$  点放一点电荷  $q$  时, 它将受到带电荷  $Q$  的小球的周期性库仑力  $F$  作用. 小球每次振动到最低端, 即离桌面  $10.0 \text{ cm}$  时, 对  $q$  有最大的作用力  $F_{\max}$ . 使其离开桌面的条件为  $F_{\max} \geq m'g$ .

解 根据分析, 小球作简谐振动的方程为

$$x = A \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t = 0.05 \cos 12.5 t (\text{m})$$

在点  $P$  处产生的场强大小为

$$\begin{aligned} E &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 (0.15 \text{ m} + x)^2} \\ &= 1.08 \times 10^7 / (3.0 + \cos 12.5 t)^2 (\text{N/C}) \end{aligned}$$

本题如果选  $x$  轴向下为正, 则振动方程为

$$x = 0.05 \cos(12.5 t + \pi)$$

在  $P$  点处产生的场强大小为

$$\begin{aligned} E &= 1.08 \times 10^7 / [3.0 - \cos(12.5 t - \pi)]^2 \\ &= 1.08 \times 10^7 / [3.0 + \cos 12.5 t]^2 (\text{N/C}) \end{aligned}$$

在  $P$  点处放一点电荷  $q$  时, 由分析知要使该带电点电荷恰能周期性离开桌面的条件为

$$m'g = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

则

$$\begin{aligned} m' &= 1.50 \times 10^{-10} \times 3.0 \times 10^{-6} \times 9 \times 10^9 \times \frac{1}{0.10^2 \times 9.8} \text{ kg} \\ &= 4.13 \times 10^{-5} \text{ kg} \end{aligned}$$

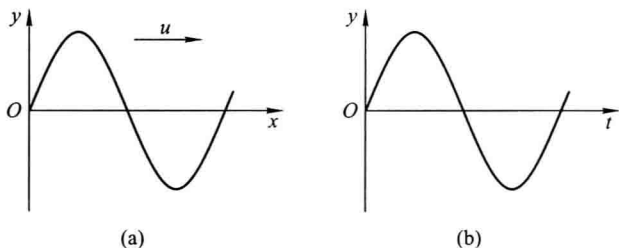
## 第十章 波动

**10-1** 图(a)表示  $t=0$  时的简谐波的波形图, 波沿  $x$  轴正方向传播, 图(b)为一质点的振动曲线. 则图(a)中所表示的  $x=0$  处质点振动的初相位与图(b)所表示的振动的初相位分别为( )

- (A) 均为零                      (B) 均为  $\frac{\pi}{2}$                       (C) 均为  $-\frac{\pi}{2}$   
(D)  $\frac{\pi}{2}$  与  $-\frac{\pi}{2}$                       (E)  $-\frac{\pi}{2}$  与  $\frac{\pi}{2}$

**分析与解** 本题给了两个很相似的曲线图, 但本质却完全不同. 求解本题要弄清振动图和波形图不同的物理意义. 图(a)描述的是连续介质中沿波线上许

许多质点振动在  $t$  时刻的位移状态. 其中原点处质点位移为零, 其运动方向由图中波形状态和波的传播方向可以知道是沿  $y$  轴负向, 利用旋转矢量法可以方便地求出该质点振动的初相位为  $\pi/2$ . 而图(b)是一个质点的振动曲线图, 该质点在  $t=0$  时位移为 0,  $t>0$  时, 由曲线形状可知, 质点向  $y$  轴正向运动, 故由旋转矢量法可判知初相位为  $-\pi/2$ , 答案为(D).



题 10-1 图

**10-2** 机械波的表达式为  $y=0.05\cos(6\pi t+0.06\pi x)$ , 式中  $y$  和  $x$  的单位为  $m$ ,  $t$  的单位为  $s$ , 则( )

- (A) 波长为  $5\text{ m}$  (B) 波速为  $10\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$   
 (C) 周期为  $\frac{1}{3}\text{ s}$  (D) 波沿  $x$  轴正方向传播

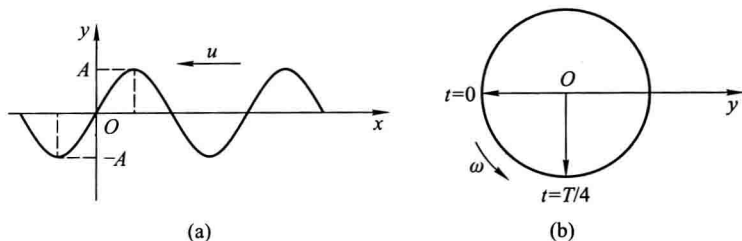
**分析与解** 波动方程的一般表达式为  $y=A\cos\left[\omega\left(t\mp\frac{x}{u}\right)+\varphi\right]$ , 其中  $A$  为振幅,  $\varphi$  为初相,  $u$  为波速.  $x/u$  前的“-”表示波沿  $x$  轴正向传播, “+”表示波沿  $x$  轴负向传播. 因此将原式写为  $y=0.05\cos\left[6\pi\left(t+x/100\right)\right]$ , 式中  $y$  和  $x$  的单位为  $m$ ,  $t$  的单位为  $s$ , 和一般式比较可知(B)、(D)均不对. 而由  $\omega=2\pi/T=6\pi\text{ s}^{-1}$  可知  $T=(1/3)\text{ s}$ . 则  $\lambda=uT=33.3\text{ m}$ , 因此(A)也不对. 只有(C)正确.

**10-3** 一平面简谐波, 沿  $x$  轴负方向传播, 角频率为  $\omega$ , 波速为  $u$ . 设  $t=\frac{T}{4}$  时刻的波形如图(a)所示, 则该波的表达式为( )

- (A)  $y=A\cos\left[\omega\left(t-\frac{x}{u}\right)+\pi\right]$  (B)  $y=A\cos\left[\omega\left(t-\frac{x}{u}\right)-\frac{\pi}{2}\right]$   
 (C)  $y=A\cos\left[\omega\left(t+\frac{x}{u}\right)-\frac{\pi}{2}\right]$  (D)  $y=A\cos\left[\omega\left(t+\frac{x}{u}\right)+\pi\right]$

**分析与解** 因为波沿  $x$  轴负向传播, 由上题分析知(A)、(B)表达式不正确. 找出(C)、(D)哪个是正确答案, 可以有很多方法. 这里给出两个常用方法. 方法一: 直接将  $t=T/4, x=0$  代入方程, 那么对(C)有  $y_0=A$ , 对(D)有  $y_0=0$ , 可见(D)的结果与图一致. 方法二: 用旋转矢量法求出波动方程的初相位.

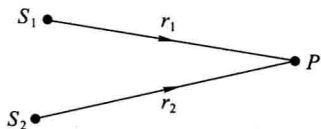




题 10-3 图

由图(a)可以知道  $t=T/4$  时原点处质点的位移为 0, 且向  $y$  轴正向运动, 则此时刻的旋转矢量图如图(b)所示. 要求初相位, 只要将该时刻的旋转矢量反转(顺时针转)  $\Delta\varphi = \omega\Delta t = \omega T/4 = \pi/2$ , 如图(b)所示, 即得  $\varphi_0 = \pi$ . 同样得(D)是正确答案.

**10-4** 如图所示, 两列波长为  $\lambda$  的相干波在点  $P$  相遇. 波在点  $S_1$  振动的初相是  $\varphi_1$ , 点  $S_1$  到点  $P$  的距离是  $r_1$ . 波在点  $S_2$  的初相是  $\varphi_2$ , 点  $S_2$  到点  $P$  的距离是  $r_2$ , 以  $k$  代表零或正、负整数, 则点  $P$  是干涉极大的条件为( )



题 10-4 图

- (A)  $r_2 - r_1 = k\pi$
- (B)  $\varphi_2 - \varphi_1 = 2k\pi$
- (C)  $\varphi_2 - \varphi_1 + 2\pi(r_2 - r_1)/\lambda = 2k\pi$
- (D)  $\varphi_2 - \varphi_1 + 2\pi(r_1 - r_2)/\lambda = 2k\pi$

**分析与解** 点  $P$  干涉极大的条件为两分振动的相位差  $\Delta\varphi = 2k\pi$ , 而两列波传到点  $P$  时的两分振动相位差为  $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 - 2\pi(r_2 - r_1)/\lambda$ , 故选项(D)正确.

**10-5** 在驻波中, 两个相邻波节间各质元的振动( )

- (A) 振幅相同, 相位相同
- (B) 振幅不同, 相位相同
- (C) 振幅相同, 相位不同
- (D) 振幅不同, 相位不同

**分析与解** 驻波方程为  $y = 2A\cos 2\pi\frac{x}{\lambda}\cos 2\pi\nu t$ , 因此根据其特点, 两波节间各点运动同相位, 但振幅不同. 因此正确答案为(B).

**10-6** 在驻波中, 一个波节的两侧各质元的振动( )

- (A) 对称点的振幅相同, 相位相同
- (B) 对称点的振幅不同, 相位相同
- (C) 对称点的振幅相同, 相位相反
- (D) 对称点的振幅不同, 相位相反

**分析与解** 由上题的驻波方程, 同样可分析知, 驻波波节两边质元振动是反相的, 而且对称点位置的质元振动的振幅相等, 因此正确答案为(C).

**10-7** 地震波在地壳中传播的纵波和横波的速度分别为  $5.5 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$  和

$3.5 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ . 已知地壳的平均密度为  $2.8 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^3$ . 估算: (1) 地壳的弹性模量  $E$  和切变模量  $G$ ; (2) 某地震台测得一次地震波的纵波与横波信号时间差为  $12 \text{ s}$ , 则震源中心到地震台的距离约为多少?

解 (1) 固体中可以传播横波与纵波, 波速分别为

$$u_{\text{横}} = \sqrt{\frac{G}{\rho}}, \quad u_{\text{纵}} = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

则弹性模量

$$E = \rho u_{\text{纵}}^2 = 2.8 \times 10^3 \times (5.5 \times 10^3)^2 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-2} = 8.47 \times 10^{10} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$$

切变模量

$$G = \rho u_{\text{横}}^2 = 2.8 \times 10^3 \times (3.5 \times 10^3)^2 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-2} = 3.43 \times 10^{10} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$$

(2) 设震源中心到地震台中心距离  $L$ , 由题意

$$\frac{L}{u_{\text{横}}} - \frac{L}{u_{\text{纵}}} = \Delta t$$

得

$$L = \frac{u_{\text{横}} u_{\text{纵}}}{u_{\text{纵}} - u_{\text{横}}} \Delta t = 115.5 \text{ km}$$

**10-8** 频率为  $\nu = 1.25 \times 10^4 \text{ Hz}$  的平面简谐纵波沿细长的金属棒传播, 棒的弹性模量  $E = 1.90 \times 10^{11} \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}$ , 棒的密度  $\rho = 7.6 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ . 求该纵波的波长.

**分析** 因机械波传播速度与介质性质有关, 固体中纵波传播速度  $u = \sqrt{E/\rho}$ . 而波的特征量波长  $\lambda$  与波速  $u$ 、频率  $\nu$  之间有  $\lambda = u/\nu$ . 所以, 频率一定的振动在不同介质中传播时, 其波长不同. 由上述关系可求得波长.

**解** 由分析可知金属棒中传播的纵波速度  $u = \sqrt{E/\rho}$ , 因此, 该纵波的波长为

$$\lambda = u/\nu = \sqrt{E/\rho\nu^2} = 0.40 \text{ m}$$

**10-9** 一横波在沿绳子传播时的波动方程为  $y = 0.20 \cos(2.50\pi t - \pi x)$ , 式中  $y$  和  $x$  的单位为  $\text{m}$ ,  $t$  的单位为  $\text{s}$ . (1) 求波的振幅、波速、频率及波长; (2) 求绳上的质点振动时的最大速度; (3) 分别画出  $t = 1 \text{ s}$  和  $t = 2 \text{ s}$  时的波形, 并指出波峰和波谷. 画出  $x = 1.0 \text{ m}$  处质点的振动曲线并讨论其与波形图的不同.

**分析** (1) 已知波动方程 (又称波函数) 求波动的特征量 (波速  $u$ 、频率  $\nu$ 、振幅  $A$  及波长  $\lambda$  等), 通常采用比较法. 将已知的波动方程按波动方程的一般形式  $y = A \cos \left[ \omega \left( t \mp \frac{x}{u} \right) + \varphi_0 \right]$  书写, 然后通过比较确定各特征量 (式中  $\frac{x}{u}$  前“-”、“+”的选取分别对应波沿  $x$  轴正向和负向传播). 比较法思路清晰、求解简便, 是一种常用的解题方法. (2) 讨论波动问题, 要理解振动物理量与波动物理量之间的内在联系与区别. 例如区分质点的振动速度与波速的不同, 振动速度是

质点的运动速度,即  $v = dy/dt$ ;而波速是波线上质点运动状态的传播速度(也称相位的传播速度、波形的传播速度或能量的传播速度),其大小由介质的性质决定.介质不变,波速保持恒定.(3)将不同时刻的  $t$  值代入已知波动方程,便可以得到不同时刻的波形方程  $y = y(x)$ ,从而作出波形图.而将确定的  $x$  值代入波动方程,便可以得到该位置处质点的运动方程  $y = y(t)$ ,从而作出振动图.

解 (1) 将已知波动方程表示为

$$y = 0.20 \cos[2.5\pi(t - x/2.5)]$$

式中  $y$  和  $x$  的单位为  $m$ ,  $t$  的单位为  $s$ .与一般表达式  $y = A \cos[\omega(t - x/u) + \varphi_0]$  比较,可得

$$A = 0.20 \text{ m}, \quad u = 2.5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}, \quad \varphi_0 = 0, \quad \omega = 2.5\pi \text{ s}^{-1}$$

则  $\nu = \omega/2\pi = 1.25 \text{ Hz}, \quad \lambda = u/\nu = 2.0 \text{ m}$

(2) 绳上质点的振动速度

$$v = dy/dt = -0.5\pi \sin[2.5\pi(t - x/2.5)]$$

式中  $v$  的单位为  $m \cdot s^{-1}$ ,  $x$  的单位为  $m$ ,  $t$  的单位为  $s$ . 则

$$v_{\max} = 1.57 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

(3)  $t = 1 \text{ s}$  和  $t = 2 \text{ s}$  时的波形方程分别为

$$y_1 = 0.20 \cos(2.5\pi - \pi x)$$

$$y_2 = 0.20 \cos(5\pi - \pi x)$$

式中  $y$  和  $x$  的单位为  $m$ . 波形图如图(a)所示.

$x = 1.0 \text{ m}$  处质点的运动方程为

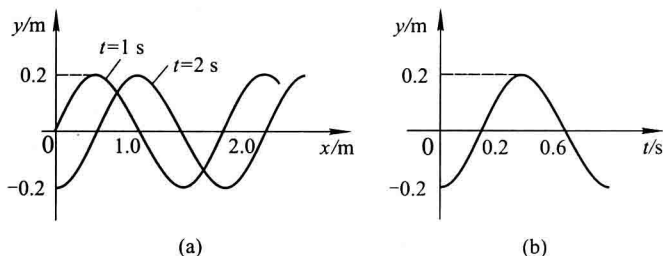
$$y = -0.20 \cos 2.5\pi t$$

式中  $y$  的单位为  $m$ ,  $t$  的单位为  $s$ . 振动图线如图(b)所示.

波形图与振动图虽在图形上相似,但却有着本质的区别.前者表示某确定时刻波线上所有质点的位移情况,而后者则表示某确定位置的一个质点,其位移随时间变化的情况.

**10-10** 波源作简谐振动,其运动方程为  $y = 4.0 \times 10^{-3} \cos(240\pi t)$ , 式中  $y$  的单位为  $m$ ,  $t$  的单位为  $s$ , 它所形成的波以  $30 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  的速度沿一直线传播.(1) 求波的周期及波长;(2) 写出波动方程.

**分析** 已知波源运动方程求波动物理量及波动方程,可先将运动方程与其一般形式  $y = A \cos(\omega t + \varphi_0)$  进行比较,求出振幅  $A$ 、角频率  $\omega$  及初相  $\varphi_0$ , 而这三个物理量与波动方程的一般形式  $y = A \cos[\omega(t - x/u) + \varphi_0]$  中相应的三个物理量是



题 10-10 图

相同的. 再利用题中已知的波速  $u$  及公式  $\omega = 2\pi\nu = 2\pi/T$  和  $\lambda = uT$  即可求解.

**解** (1) 由已知的运动方程可知, 质点振动的角频率  $\omega = 240\pi \text{ s}^{-1}$ . 根据分析中所述, 波的周期就是振动的周期, 故有

$$T = 2\pi/\omega = 8.33 \times 10^{-3} \text{ s}$$

波长为

$$\lambda = uT = 0.25 \text{ m}$$

(2) 将已知的波源运动方程与简谐振动方程的一般形式比较后可得

$$A = 4.0 \times 10^{-3} \text{ m}, \quad \omega = 240\pi \text{ s}^{-1}, \quad \varphi_0 = 0$$

故以波源为原点, 沿  $x$  轴正向传播的波的波动方程为

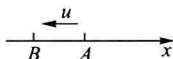
$$\begin{aligned} y &= A \cos[\omega(t - x/u) + \varphi_0] \\ &= 4.0 \times 10^{-3} \cos(240\pi t - 8\pi x) \end{aligned}$$

式中  $y$  和  $x$  的单位为  $\text{m}$ ,  $t$  的单位为  $\text{s}$ .

**10-11** 如图所示, 一平面波在介质中以波速  $u = 20 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  沿  $x$  轴负方向传播, 已知点  $A$  的振动方程为  $y = 3 \times 10^{-2} \cos(4\pi t + \pi)$ , 式中  $y$  的单位为  $\text{m}$ ,  $t$  的单位为  $\text{s}$ .

(1) 以点  $A$  为坐标原点写出波的表达式;

(2) 以距点  $A$   $5 \text{ m}$  处的点  $B$  为坐标原点, 写出波的表达式.



题 10-11 图

**分析** 波动方程的一般形式为  $y = A \cos\left[\omega\left(t \mp \frac{x}{u}\right) + \varphi\right]$ , 波线上所有点都作相同的简谐振动, 只是初相位不同而已. 因此, 只要知道波线上任一点的振动方程, 上式中的  $A$  和  $\omega$  就已知. 题中又给出了波速  $u$ , 故本题中要求的以  $A$ 、 $B$  两点为原点的波动表达式, 其关键是求  $A$ 、 $B$  两点所在处质点振动的初相位. 而点  $A$  初相由点  $A$  的运动方程已给出为  $\varphi_A = \pi$ . 为了求点  $B$  的振动初相, 常用二种方法. 方法一: 在以点  $A$  为坐标原点的波动方程求出后, 将点  $B$  所在位置  $x = -5 \text{ m}$  代入即可求出点  $B$  的运动方程, 也就求出了初相  $\varphi_B$ . 方法二: 由图可知波沿  $x$  轴负向传播, 显然点  $B$  的运动要滞后点  $A$  一个相位  $\Delta\varphi = \frac{\Delta x}{\lambda} 2\pi = \frac{\omega \Delta x}{u}$ . 这里  $\Delta x$  为  $AB$  间距离. 由此可得点

$B$  振动初相为  $\varphi_B = \varphi_A - \Delta\varphi = \varphi_A - \frac{\omega\Delta x}{u}$ . 因而可以求出波动方程.

解 (1) 根据分析, 由点  $A$  振动的运动方程  $y = 3 \times 10^{-2} \cos(4\pi t + \pi)$  可知

$$A = 3 \times 10^{-2} \text{ m}, \quad \omega = 4\pi \text{ s}^{-1}, \quad \varphi_A = \pi$$

又知波速  $u = 20 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ , 且波沿  $x$  轴负向运动, 代入波动方程一般形式可得

$$y = 3 \times 10^{-2} \cos \left[ 4\pi \left( t + \frac{x}{20} \right) + \pi \right]$$

式中  $y$  和  $x$  的单位为  $\text{m}$ ,  $t$  的单位为  $\text{s}$ .

(2) 将  $x = -5 \text{ m}$  代入上列波动方程得点  $B$  振动的运动方程

$$y_B = 3 \times 10^{-2} \cos 4\pi t$$

这里  $\varphi_B = 0$ , 故波动方程

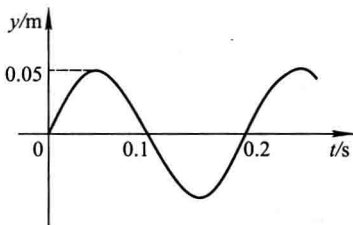
$$y = 3 \times 10^{-2} \cos \left[ 4\pi \left( t + \frac{x}{20} \right) \right]$$

式中  $y$  和  $x$  的单位为  $\text{m}$ ,  $t$  的单位为  $\text{s}$ .

**10-12** 已知一波动方程为  $y = 0.05 \sin(10\pi t - 2x)$ , 式中  $x$  和  $y$  的单位为  $\text{m}$ ,  $t$  的单位为  $\text{s}$ . (1) 求波长、频率、波速和周期;

(2) 说明  $x = 0$  时方程的意义, 并作图表示.

分析 采用比较法. 将题给的波动方程改写成波动方程的余弦函数形式, 比较可得角频率  $\omega$ 、波速  $u$ , 从而求出波长、频率等. 当  $x$  确定时波动方程即为质点的运动方程  $y = y(t)$ .



题 10-12 图

解 (1) 将题给的波动方程改写为

$$y = 0.05 \cos [10\pi(t - x/5\pi) - \pi/2]$$

与  $y = A \cos[\omega(t - x/u) + \varphi_0]$  比较后可得波速  $u = 15.7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ , 角频率  $\omega = 10\pi \text{ s}^{-1}$ , 故有

$$\nu = \omega/2\pi = 5.0 \text{ Hz}, \quad T = 1/\nu = 0.2 \text{ s}, \quad \lambda = uT = 3.14 \text{ m}$$

(2) 由分析知  $x = 0$  时, 方程  $y = 0.05 \cos(10\pi t - \pi/2)$  表示位于坐标原点的质点的运动方程, 如图所示.

**10-13** 波源作简谐振动, 周期为  $0.02 \text{ s}$ , 若该振动以  $100 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  的速度沿直线传播, 设  $t = 0$  时, 波源处的质点经平衡位置向正方向运动. 求: (1) 距波源  $15.0 \text{ m}$  和  $5.0 \text{ m}$  两处质点的运动方程和初相; (2) 距波源为  $16.0 \text{ m}$  和  $17.0 \text{ m}$  的两质点间的相位差.

分析 (1) 根据题意先设法写出波动方程, 然后代入确定点处的坐标, 即得到质点的运动方程. 并可求得振动的初相. (2) 波的传播也可以看成是相位的传播. 由波长  $\lambda$  的物理含意, 可知波线上任两点间的相位差为  $\Delta\varphi = 2\pi\Delta x/\lambda$ .

解 (1) 由题给条件  $T = 0.02 \text{ s}$ ,  $u = 100 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ , 可得

$$\omega = 2\pi/T = 100\pi \text{ s}^{-1}, \quad \lambda = uT = 2 \text{ m}$$

当  $t=0$  时, 波源质点经平衡位置向正方向运动, 因而由旋转矢量法可得该质点的初相为  $\varphi_0 = -\pi/2$  (或  $3\pi/2$ ). 若以波源为坐标原点, 则波动方程为

$$y = A\cos[100\pi(t-x/100) - \pi/2]$$

式中  $y$  和  $x$  的单位为  $\text{m}$ ,  $t$  的单位为  $\text{s}$ . 距波源为  $x_1 = 15.0 \text{ m}$  和  $x_2 = 5.0 \text{ m}$  处质点的运动方程分别为

$$y_1 = A\cos(100\pi t - 15.5\pi)$$

$$y_2 = A\cos(100\pi t - 5.5\pi)$$

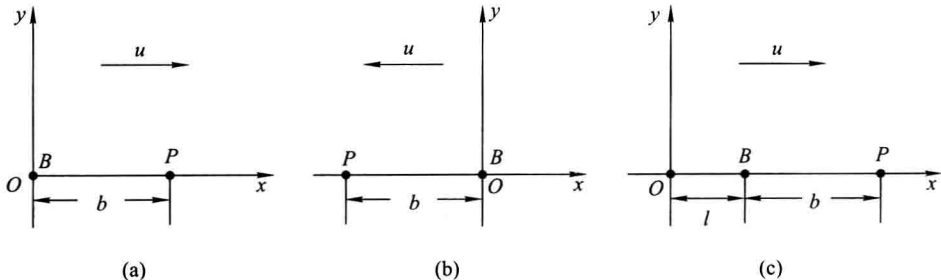
它们的初相分别为  $\varphi_{10} = -15.5\pi$  和  $\varphi_{20} = -5.5\pi$  (若波源初相取  $\varphi_0 = 3\pi/2$ , 则初相  $\varphi_{10} = -13.5\pi$ ,  $\varphi_{20} = -3.5\pi$ .)

(2) 距波源  $16.0 \text{ m}$  和  $17.0 \text{ m}$  两点间的相位差为

$$\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = 2\pi(x_2 - x_1)/\lambda = \pi$$

**10-14** 有一平面简谐波在空间传播. 已知在波线上某点  $B$  的运动规律为  $y = A\cos(\omega t + \varphi)$ , 就图 (a) (b) (c) 给出的三种坐标取法, 分别列出波动方程, 并用这三个方程来描述与点  $B$  相距为  $b$  的点  $P$  的运动规律.

**分析** (1) 波动方程的一般形式为  $y = A\cos[\omega(t \mp x/u) + \varphi_0]$ , 式中振幅  $A$ 、角频率  $\omega$  和波速  $u$  从点  $B$  运动方程和所给图均已知. 因此只要求出原点的初相  $\varphi_0$ . 而对 (a)、(b) 情况, 点  $B$  即为原点, 所以  $\varphi_0 = \varphi$ , 对情况 (c), 原点比点  $B$  超前相位  $\Delta\varphi = \omega l/u$ , 则  $\varphi_0 = \varphi + \omega l/u$ . (2) 写出三种情况下的波动方程后, 只要将点  $P$  相应的坐标代入即可写出点  $P$  的运动规律.



题 10-14 图

**解** (1) 根据分析和图示波的传播方向, 有

(a) 情况下:  $y = A\cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{u}\right) + \varphi\right]$

(b) 情况下:  $y = A\cos\left[\omega\left(t + \frac{x}{u}\right) + \varphi\right]$

(c) 情况下:  $y = A\cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{u}\right) + \varphi + \frac{\omega l}{u}\right]$

(2) 将点  $P$  的  $x$  坐标值分别代入上述相应的波动方程可得, 三种情况下均有

$$y_p = A \cos \left[ \omega \left( t - \frac{b}{u} \right) + \varphi \right]$$

**讨论** 由于三种情况下, 在沿波传播方向上, 点  $P$  均落在点  $B$  后距离为  $b$  处, 即点  $P$  的振动均比点  $B$  的振动落后时间  $b/u$ , 落后相位  $\omega b/u$ , 因而点  $P$  的运动方程均为  $y_p = A \cos[\omega(t - b/u) + \varphi]$ .

**10-15** 图示为平面简谐波在  $t=0$  时的波形图, 设此简谐波的频率为 250 Hz, 且此时图中点  $P$  的运动方向向上. 求: (1) 该波的波动方程; (2) 在距原点为 7.5 m 处质点的运动方程与  $t=0$  时该点的振动速度.

**分析** (1) 从波形曲线图获取波的特征量, 从而写出波动方程是建立波动方程的又一途径. 具体步骤为: ① 从波形图得出波长  $\lambda$ 、振幅  $A$  和波速  $u = \lambda\nu$ ; ② 根据点  $P$  的运动趋势来判断波的传播方向, 从而可确定原点处质点的运动趋向, 并利用旋转矢量法确定其初相  $\varphi_0$ . (2) 在波动方程确定后, 即可得到波线上距原点为  $x$  处的运动方程  $y = y(t)$ , 及该质点的振动速度  $v = dy/dt$ .

**解** (1) 从图中得知, 波的振幅  $A = 0.10$  m, 波长  $\lambda = 20.0$  m, 则波速  $u = \lambda\nu = 5.0 \times 10^3$  m · s<sup>-1</sup>. 根据  $t=0$  时点  $P$  向上运动, 可知波沿  $x$  轴负向传播, 并判定此时位于原点处的质点将沿  $y$  轴负方向运动. 利用旋转矢量法可得其初相  $\varphi_0 = \pi/3$ . 故波动方程为

$$\begin{aligned} y &= A \cos[\omega(t + x/u) + \varphi_0] \\ &= 0.10 \cos[500\pi(t + x/5000) + \pi/3] \end{aligned}$$

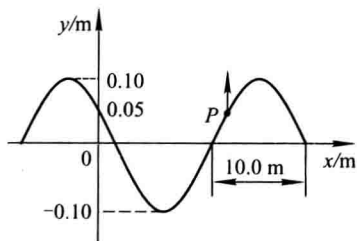
式中  $y$  和  $x$  的单位为 m,  $t$  的单位为 s.

(2) 距原点为  $x = 7.5$  m 处质点的运动方程为

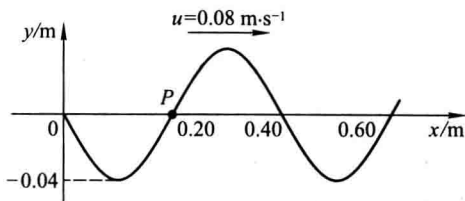
$$y = 0.10 \cos(500\pi t + 13\pi/12)$$

$t=0$  时该点的振动速度为

$$v = (dy/dt)_{t=0} = -50\pi \sin(13\pi/12) \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 40.6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$



题 10-15 图



题 10-16 图

**10-16** 图示为一平面简谐波在  $t=0$  时刻的波形图, 求: (1) 该波的波动方

程;(2)  $P$  处质点的运动方程.

**分析** (1) 根据波形图可得到波的波长  $\lambda$ 、振幅  $A$  和波速  $u$ , 因此只需要求出初相  $\varphi$ , 即可写出波动方程. 而由图可知  $t=0$  时,  $x=0$  处质点在平衡位置处, 且由波的传播方向可以判断出该质点向  $y$  轴正向运动, 利用旋转矢量法可知  $\varphi = -\pi/2$ . (2) 波动方程确定后, 将  $P$  处质点的坐标  $x$  代入波动方程即可求出其运动方程  $y_P = y_P(t)$ .

**解** (1) 由图可知振幅  $A=0.04$  m, 波长  $\lambda=0.40$  m, 波速  $u=0.08$  m  $\cdot$  s $^{-1}$ , 则  $\omega=2\pi/T=2\pi u/\lambda=(2\pi/5)$  s $^{-1}$ , 根据分析已知  $\varphi=-\pi/2$ , 因此波动方程为

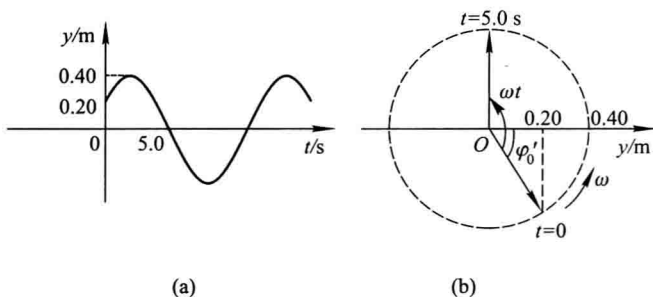
$$y=0.04\cos\left[\frac{2\pi}{5}\left(t-\frac{x}{0.08}\right)-\frac{\pi}{2}\right]$$

式中  $y$  和  $x$  的单位为 m,  $t$  的单位为 s.

(2) 距原点为  $x=0.20$  m 处的点  $P$  运动方程为

$$y=0.04\cos\left(\frac{2\pi}{5}t+\frac{\pi}{2}\right)$$

**10-17** 一平面简谐波波长为 12 m, 沿  $x$  轴负向传播. 图(a)所示为  $x=1.0$  m 处质点的振动曲线, 求此波的波动方程.



题 10-17 图

**分析** 该题可利用振动曲线来获取波动的特征量, 从而建立波动方程. 求解的关键是如何根据图(a)写出它所对应的运动方程. 较简便的方法是旋转矢量法.

**解** 由图(a)可知质点振动的振幅  $A=0.40$  m,  $t=0$  时位于  $x=1.0$  m 处的质点在  $A/2$  处并向  $y$  轴正向移动. 据此作出相应的旋转矢量图(b), 从图中可知  $\varphi_0' = -\pi/3$ . 又由图(a)可知,  $t=5.0$  s 时, 质点第一次回到平衡位置, 由图(b)可看出  $\omega t = 5\pi/6$ , 因而得角频率  $\omega = (\pi/6)$  s $^{-1}$ . 由上述特征量可写出  $x=1.0$  m 处质点的运动方程为

$$y=0.40\cos\left(\frac{\pi}{6}t-\pi/3\right)$$



式中  $y$  的单位为  $\text{m}$ ,  $t$  的单位为  $\text{s}$ .

将波速  $u = \lambda/T = \omega\lambda/2\pi = 1.0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  及  $x = 1.0 \text{ m}$  代入波动方程的一般形式  $y = A\cos[\omega(t+x/u) + \varphi_0]$  中, 并与上述  $x = 1.0 \text{ m}$  处的运动方程作比较, 可得  $\varphi_0 = -\pi/2$ , 则波动方程为

$$y = 0.40\cos\left[\frac{\pi}{6}(t+x/1.0) - \pi/2\right]$$

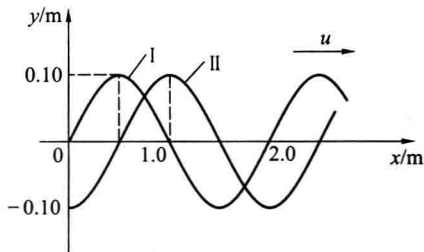
式中  $y$  和  $x$  的单位为  $\text{m}$ ,  $t$  的单位为  $\text{s}$ .

**10-18** 图中 (I) 是  $t = 0$  时的波形图, (II) 是  $t = 0.1 \text{ s}$  时的波形图. 已知  $T > 0.1 \text{ s}$ , 写出波动方程的表达式.

**分析** 已知波动方程的形式为

$$y = A\cos[2\pi(t/T - x/\lambda) + \varphi_0]$$

从如图所示的  $t = 0$  时的波形曲线 (I), 可知波的振幅  $A$  和波长  $\lambda$ , 利用旋转矢量法可确定原点处质点的初相  $\varphi_0$ . 因此, 确定波的周期就成为了解题的关键. 从题给条件来看, 周期  $T$  只能从两个不同时刻的波形曲线之间的联系来得到. 为此, 可以从下面两个不同的角度来分析.



题 10-18 图

(1) 由曲线 (I) 可知, 在  $t = 0$  时, 原点处的质点处在平衡位置且向  $y$  轴负向运动, 而曲线 (II) 则表明, 经过  $0.1 \text{ s}$  后, 该质点已运动到  $y$  轴上的  $-A$  处. 因此, 可列方程  $kT + T/4 = 0.1 \text{ s}$ , 在一般情形下,  $k = 0, 1, 2, \dots$ . 这就是说, 质点在  $0.1 \text{ s}$  内, 可以经历  $(k + \frac{1}{4})$  个周期振动后到  $-A$  处, 故有  $T = 0.1 / (k + 0.25) \text{ s}$ . (2) 从波形的移动来分析. 因波沿  $x$  轴正方向传播, 波形曲线 (II) 可视为曲线 (I) 向右平移了  $\Delta x = u\Delta t = \lambda\Delta t/T$ . 由图可知,  $\Delta x = k\lambda + \lambda/4$ , 故有  $k\lambda + \lambda/4 = \lambda\Delta t/T$ , 同样也得  $T = 0.1 / (k + 0.25) \text{ s}$ . 应当注意,  $k$  的取值由题给条件  $T > 0.1 \text{ s}$  所决定.

**解** 从图中可知波长  $\lambda = 2.0 \text{ m}$ , 振幅  $A = 0.10 \text{ m}$ . 由波形曲线 (I) 得知在  $t = 0$  时, 原点处质点位于平衡位置且向  $y$  轴负向运动, 利用旋转矢量法可得  $\varphi_0 = \pi/2$ . 根据上面的分析, 周期为

$$T = (0.1 \text{ s}) / (k + 0.25) \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

由题意知  $T > 0.1 \text{ s}$ , 故上式成立的条件为  $k = 0$ , 可得  $T = 0.4 \text{ s}$ . 这样, 波动方程可写成

$$y = 0.10\cos[2\pi(t/0.4 - x/2.0) + 0.5\pi]$$

式中  $y$  和  $x$  的单位为  $\text{m}$ ,  $t$  的单位为  $\text{s}$ .

**10-19** 平面简谐波的波动方程为  $y = 0.08\cos(4\pi t - 2\pi x)$ , 式中  $y$  和  $x$  的单

位为  $m$ ,  $t$  的单位为  $s$ . 求: (1)  $t=2.1 s$  时波源及距波源  $0.10 m$  两处的相位; (2) 离波源  $0.80 m$  及  $0.30 m$  两处的相位差.

解 (1) 将  $t=2.1 s$  和  $x=0$  代入题给波动方程, 可得波源处的相位

$$\varphi_1 = 8.4\pi$$

将  $t=2.1 s$  和  $x'=0.10 m$  代入题给波动方程, 得  $0.10 m$  处的相位为

$$\varphi_2 = 8.2\pi$$

(2) 从波动方程可知波长  $\lambda = 1.0 m$ . 这样,  $x_1 = 0.80 m$  与  $x_2 = 0.30 m$  两点间的相位差

$$\Delta\varphi = 2\pi \cdot \Delta x / \lambda = \pi$$

**10-20** 为了保持波源的振动不变, 需要消耗  $4.0 W$  的功率. 若波源发出的是球面波(设介质不吸收波的能量), 求距离波源  $5.0 m$  和  $10.0 m$  处的能流密度.

分析 波的传播伴随着能量的传播. 由于波源在单位时间内提供的能量恒定, 且介质不吸收能量, 故对于球面波而言, 单位时间内通过任意半径的球面的能量(即平均能流)相同, 都等于波源消耗的功率  $\bar{P}$ . 而在同一个球面上各处的能流密度相同, 因此, 可求出不同位置的能流密度  $I = \bar{P}/S$ .

解 由分析可知, 半径  $r$  处的能流密度为

$$I = \bar{P}/4\pi r^2$$

当  $r_1 = 5.0 m$ ,  $r_2 = 10.0 m$  时, 分别有

$$I_1 = \bar{P}/4\pi r_1^2 = 1.27 \times 10^{-2} W \cdot m^{-2}$$

$$I_2 = \bar{P}/4\pi r_2^2 = 3.18 \times 10^{-3} W \cdot m^{-2}$$

**10-21** 有一波在介质中传播, 其波速  $u = 1.0 \times 10^3 m \cdot s^{-1}$ , 振幅  $A = 1.0 \times 10^{-4} m$ , 频率  $\nu = 1.0 \times 10^3 Hz$ . 若介质的密度为  $\rho = 8.0 \times 10^2 kg \cdot m^{-3}$ , 求: (1) 该波的能流密度; (2)  $1 min$  内垂直通过  $4.0 \times 10^{-4} m^2$  的总能量.

解 (1) 由能流密度  $I$  的表达式得

$$I = \frac{1}{2} \rho u A^2 \omega^2 = 2\pi^2 \rho u A^2 \nu^2 = 1.58 \times 10^5 W \cdot m^{-2}$$

(2) 在时间间隔  $\Delta t = 60 s$  内垂直通过面积  $S$  的能量为

$$W = \bar{P} \cdot \Delta t = IS \cdot \Delta t = 3.79 \times 10^3 J$$

**10-22** 如图所示, 两振动方向相同的平面简谐波波源分别位于  $A$ 、 $B$  两点. 设它们相位相同, 且频率均为  $\nu = 30 Hz$ , 波速  $u = 0.50 m \cdot s^{-1}$ . 求在点  $P$  处两列波的相位差.

分析 在均匀介质中, 两列波相遇时的相位差  $\Delta\varphi$  一般由两部分组成, 即它

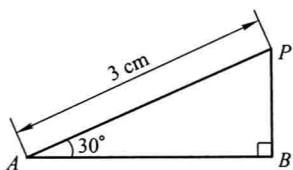
们的初相差  $\varphi_A - \varphi_B$  和由它们的波程差而引起的相位差  $2\pi\Delta r/\lambda$ . 本题因  $\varphi_A = \varphi_B$ , 故它们的相位差只取决于波程差.

解 在图中的直角三角形  $ABP$  中

$$BP = AP \sin 30^\circ = 1.5 \text{ cm}$$

两列波在点  $P$  处的波程差为  $\Delta r = AP - BP$ , 则相位差为

$$\Delta\varphi = 2\pi\Delta r/\lambda = 2\pi\nu\Delta r/u = 1.8\pi$$



题 10-22 图



题 10-23 图

**10-23** 如图所示, 两相干波源分别在  $P$ 、 $Q$  两点, 它们发出频率为  $\nu$ , 波长为  $\lambda$ , 初相位相同的两列相干波, 设  $PQ = 3\lambda/2$ ,  $R$  为  $PQ$  连线上的一点. 求: (1) 自  $P$ 、 $Q$  发出的两列波在  $R$  处的相位差; (2) 两波在  $R$  处干涉时的合振幅.

分析 因两波源的初相位相同, 两列波在点  $R$  处的相位差  $\Delta\varphi$  仍与上题一样, 由它们的波程差决定. 因  $R$  处质点同时受两列相干波的作用, 其振动为这两个同频率、同振动方向的简谐振动的合成, 合振幅  $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos \Delta\varphi}$ .

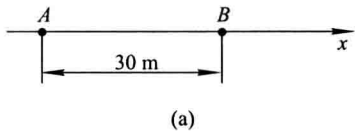
解 (1) 两列波在  $R$  处的相位差为

$$\Delta\varphi = 2\pi\Delta r/\lambda = 3\pi$$

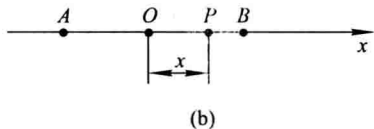
(2) 由于  $\Delta\varphi = 3\pi$ , 则合振幅为

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos 3\pi} = |A_1 - A_2|$$

**10-24** 两相干波波源位于同一介质中的  $A$ 、 $B$  两点, 如图(a)所示. 其振幅相等、频率皆为  $100 \text{ Hz}$ ,  $B$  比  $A$  的相位超前  $\pi$ . 若  $A$ 、 $B$  相距  $30.0 \text{ m}$ , 波速为  $400 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ , 试求  $AB$  连线上因干涉而静止的各点的位置.



(a)



(b)

题 10-24 图

分析 两列相干波相遇时的相位差  $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 - \frac{2\pi\Delta r}{\lambda}$ . 因此, 两列振幅相同的相干波因干涉而静止的点的位置, 可根据相消条件  $\Delta\varphi = (2k+1)\pi$  获得.

解 以  $A$ 、 $B$  两点的中点  $O$  为原点, 取坐标如图(b)所示. 两波的波长均为  $\lambda = u/\nu = 4.0 \text{ m}$ . 在  $A$ 、 $B$  连线上可分三个部分进行讨论.

(1) 位于点  $A$  左侧部分

$$\Delta\varphi = \varphi_B - \varphi_A - 2\pi(r_B - r_A)/\lambda = -14\pi$$

因该范围内两列波相位差恒为  $2\pi$  的整数倍,故干涉后质点振动处处加强,没有静止的点.

(2) 位于点  $B$  右侧部分

$$\Delta\varphi = \varphi_B - \varphi_A - 2\pi(r_B - r_A)/\lambda = 16\pi$$

显然该范围内质点振动也都是加强,无干涉静止的点.

(3) 在  $A$ 、 $B$  两点的连线间,设任意一点  $P$  距原点为  $x$ . 因  $r_B = 15\text{ m} - x$ ,  $r_A = 15\text{ m} + x$ ,则两列波在点  $P$  的相位差为

$$\Delta\varphi = \varphi_B - \varphi_A - 2\pi(r_B - r_A)/\lambda = (x/m + 1)\pi$$

根据分析中所述,干涉静止的点应满足方程

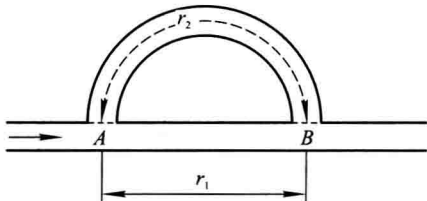
$$(x/m + 1)\pi = (2k + 1)\pi$$

得

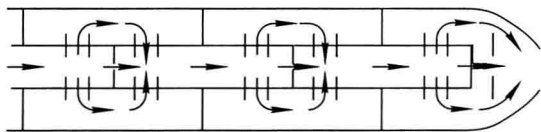
$$x = 2k\text{ m} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

因  $x \leq 15\text{ m}$ ,故  $k \leq 7$ . 即在  $A$ 、 $B$  之间的连线上共有 15 个静止点,分别距点  $A$  1 m, 3 m,  $\dots$ , 29 m.

**10-25** 图(a)是干涉型消声器结构的原理图,利用这一结构可以消除噪声.当发动机排气噪声声波经管道到达点  $A$  时,分成两路而在点  $B$  相遇,声波因干涉而相消.如果要消除频率为 300 Hz 的发动机排气噪声,求图中弯道与直管长度差  $\Delta r = r_2 - r_1$  至少应为多少?(设声波速度为  $340\text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .)



(a)



(b)

题 10-25 图

**分析** 一列声波被分成两束后再相遇,将形成波的干涉现象.由干涉相消条件,可确定所需的波程差,即两管的长度差  $\Delta r$ .

解 由分析可知,声波从点  $A$  分开到点  $B$  相遇,两列波的波程差  $\Delta r = r_2 - r_1$ , 故它们的相位差为

$$\Delta\varphi = 2\pi(r_2 - r_1)/\lambda = 2\pi\Delta r/\lambda$$

由相消静止条件

$$\Delta\varphi = (2k+1)\pi \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

得

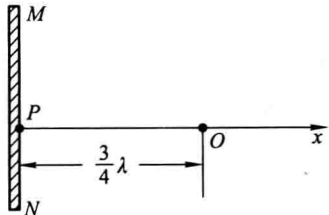
$$\Delta r = (2k+1)\lambda/2$$

根据题中要求令  $k=0$  得  $\Delta r$  至少应为

$$\Delta r = \lambda/2 = u/2\nu = 0.57 \text{ m}$$

讨论 在实际应用中,由于噪声是由多种频率的声波混合而成,因而常将具有不同  $\Delta r$  的消声单元串接起来以增加消除噪声的能力.图(b)为安装在摩托车排气系统中的干涉消声器的结构原理图.

\*10-26 如图所示,  $x=0$  处有一运动方程为  $y = A\cos \omega t$  的平面波波源,产生的波沿  $x$  轴正、负方向传播.  $MN$  为波密介质的反射面,距波源  $3\lambda/4$ . 求:(1) 波源所发射的波沿波源  $O$  左右传播的波动方程;(2) 在  $MN$  处反射波的波动方程;(3) 在  $O-MN$  区域内形成的驻波方程,以及波节和波腹的位置;(4)  $x>0$  区域内合成波的波动方程.



题 10-26 图

分析 知道波源点  $O$  的运动方程  $y = A\cos \omega t$ , 可以写出波沿  $x$  轴负向和正向传播的方程分别为  $y_1 = A\cos \omega(t+x/u)$  和  $y_2 = A\cos \omega(t-x/u)$ . 因此可以写出  $y_1$  在  $MN$  反射面上点  $P$  的运动方程. 设反射波为  $y_3$ , 它和  $y_1$  应是同振动方向、同振幅、同频率的波, 但是由于半波损失, 它在点  $P$  引起的振动和  $y_1$  在点  $P$  引起的振动反相. 利用  $y_1$  在点  $P$  的运动方程可求  $y_3$  在点  $P$  的运动方程, 从而写出反射波  $y_3$ . 在  $O-MN$  区域由  $y_1$  和  $y_3$  两列同频率、同振动方向、同振幅、沿相反方向传播的波合形成驻波. 在  $x>0$  区域是同传播方向的  $y_2$  和  $y_3$  合成新的行波.

解 (1) 由分析已知:沿  $x$  轴负向和正向传播的波动方程分别为

$$y_1 = A\cos \omega(t+x/u) \text{ 和 } y_2 = A\cos \omega(t-x/u)$$

(2)  $y_1$  在反射面  $MN$  处引起质点  $P$  振动的运动方程

$$y_{1P} = A\cos \left[ \frac{2\pi}{T}t + \frac{2\pi}{\lambda} \left( -\frac{3}{4}\lambda \right) \right] = A\cos \left( \frac{2\pi}{T}t - \frac{3}{2}\pi \right)$$

因半波损失,反射波  $y_3$  在此处引起的振动为

$$y_{3P} = A\cos \left( \frac{2\pi}{T}t - \frac{3}{2}\pi + \pi \right) = A\cos \left( \frac{2\pi}{T}t - \frac{1}{2}\pi \right)$$

设反射波的波动方程为  $y_3 = A\cos(2\pi t/T - 2\pi x/\lambda + \varphi)$ , 则反射波在  $x = -3\lambda/4$

处引起的振动为

$$y_{3\rho} = A \cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \frac{3}{2}\pi + \varphi\right)$$

与上式比较得  $\varphi = -2\pi$ , 故反射波的波动方程为

$$y_3 = A \cos\left(\frac{2\pi}{T}t - \frac{2\pi}{\lambda}x - 2\pi\right) = A \cos\left(\frac{2\pi}{T}t - \frac{2\pi}{\lambda}x\right)$$

(3) 在  $O-MN$  区域由  $y_1$  和  $y_3$  合成的驻波  $y_4$  为

$$y_4(t, x) = y_1 + y_3 = A \cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \frac{2\pi}{\lambda}x\right) + A \cos\left(\frac{2\pi}{T}t - \frac{2\pi}{\lambda}x\right) = 2A \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right) \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$$

波节的位置:  $2\pi x/\lambda = k\pi + \pi/2$ ,  $x = k\lambda/2 + \lambda/4$ , 取  $k = -1, -2$ , 即  $x = -\lambda/4, -3\lambda/4$  处为波节.

波腹的位置:  $2\pi x/\lambda = k\pi$ ,  $x = k\lambda/2$ , 取  $k = 0, -1$ , 即  $x = 0, -\lambda/2$  处为波腹.

(4) 在  $x > 0$  区域, 由  $y_2$  和  $y_3$  合成的波  $y_5$  为

$$y_5(t, x) = y_2 + y_3 = A \cos\left(\frac{2\pi}{T}t - \frac{2\pi}{\lambda}x\right) + A \cos\left(\frac{2\pi}{T}t - \frac{2\pi}{\lambda}x\right) = 2A \cos\left(\frac{2\pi}{T}t - \frac{2\pi}{\lambda}x\right)$$

这表明:  $x > 0$  区域内的合成波是振幅为  $2A$  的平面简谐波.

**10-27** 一弦上的驻波方程式为  $y = 0.03 \cos(1.6\pi x) \cos(550\pi t)$ , 式中  $y$  和  $x$  的单位为  $m$ ,  $t$  的单位为  $s$ . (1) 若将此驻波看成是由传播方向相反、振幅及波速均相同的两列相干波叠加而成的, 求它们的振幅及波速; (2) 求相邻波节之间的距离; (3) 求  $t = 3.0 \times 10^{-3} s$  时位于  $x = 0.625 m$  处质点的振动速度.

**分析** (1) 采用比较法. 将本题所给的驻波方程, 与驻波方程的一般形式相比较即可求得振幅、波速等. (2) 由波节位置的表达式可得相邻波节的距离. (3) 质点的振动速度可按速度定义  $v = dy/dt$  求得.

**解** (1) 将已知驻波方程

$$y = 0.03 \cos 1.6\pi x \cos 550\pi t (m)$$

与驻波方程的一般形式  $y = 2A \cos(2\pi x/\lambda) \cos(2\pi \nu t)$  作比较, 可得两列波的振幅  $A = 1.5 \times 10^{-2} m$ , 波长  $\lambda = 1.25 m$ , 频率  $\nu = 275 Hz$ , 则波速  $u = \lambda \nu = 343.8 m \cdot s^{-1}$ .

(2) 相邻波节间的距离为

$$\begin{aligned} \Delta x &= x_{k+1} - x_k = [2(k+1) + 1]\lambda/4 - (2k+1)\lambda/4 \\ &= \lambda/2 = 0.625 m \end{aligned}$$

(3) 在  $t = 3.0 \times 10^{-3} s$  时, 位于  $x = 0.625 m$  处质点的振动速度为

$$\begin{aligned} v &= dy/dt = -16.5\pi \cos(1.6\pi x) \sin(550\pi t) \\ &= -46.2 (m \cdot s^{-1}) \end{aligned}$$

**10-28** 两列余弦波沿  $Ox$  轴传播, 波动表达式分别为

$$y_1 = 0.06 \cos\left[\frac{1}{2}\pi(0.02x - 8.0t)\right]$$

$$y_2 = 0.06 \cos \left[ \frac{1}{2} \pi (0.02x + 8.0t) \right]$$

两式中  $y_1, y_2, x$  的单位为 m,  $t$  的单位为 s. 试确定  $Ox$  轴上合振幅为 0.06 m 的那些点的位置.

**分析** 将题给的波动表达式分别改写为一般形式

$$y_1 = 0.06 \cos \left[ 4\pi \left( t - \frac{x}{400} \right) \right]$$

$$y_2 = 0.06 \cos \left[ 4\pi \left( t + \frac{x}{400} \right) \right]$$

可见它们是在  $x$  轴上相向传播的两列频率相同、振幅相同的简谐波. 在  $x$  轴上叠加后将形成驻波. 由驻波方程  $y = 2A \cos 2\pi \frac{x}{\lambda} \cos 2\pi \nu t$  知道, 在  $Ox$  轴上各质点振动的合振幅为  $A' = \left| 2A \cos 2\pi \frac{x}{\lambda} \right|$ , 令  $A' = A = 0.06$  m 就可求出  $x$  的值. 求解本题还可以采用两个谐振动合成的合振幅条件  $A' = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos \Delta\varphi}$  求解, 根据题意令  $A' = A_1 = A_2 = 0.06$  m 可解得  $\Delta\varphi = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$ . 而两列波传到  $x$  点的相位差  $\Delta\varphi = 0.02\pi x$ , 由此可求出满足条件的  $x$  值.

**解** 把分析中改写后的波动方程与简谐波一般方程  $y = A \cos \left[ \omega \left( t - \frac{x}{u} \right) + \varphi \right]$

比较可知

$$A = 0.06 \text{ m}, \quad \omega = 4\pi \text{ s}^{-1}, \quad u = 400 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}, \quad \lambda = uT = u \frac{2\pi}{\omega} = 200 \text{ m}$$

又由分析知  $A' = \left| 2A \cos 2\pi \frac{x}{\lambda} \right|$ , 且  $A' = A$ , 故  $\cos 2\pi \frac{x}{\lambda} = \pm \frac{1}{2}$ , 即  $2\pi \frac{x}{\lambda} =$

$k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ , 则得

$$x = 100 \left( k \pm \frac{1}{3} \right) \text{ m} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

**10-29** 一警车以  $25 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  的速度在静止的空气中行驶, 假设车上警笛的频率为 800 Hz. 求: (1) 静止站在路边的人听到警车驶近和离去时的警笛声波频率; (2) 如果警车追赶一辆速度为  $15 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  的客车, 则客车上的人听到的警笛声波频率是多少? (设空气中声速为  $u = 330 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .)

**分析** 由于声源与观察者之间的相对运动而产生声多普勒效应, 由多普勒频率公式可解得结果. 在处理这类问题时, 不仅要分清观察者相对介质(空气)是静止还是运动, 同时也要分清声源的运动状态.

**解** (1) 根据多普勒频率公式, 当声源(警车)以速度  $v_s = 25 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  运动

时,静止于路边的观察者所接收到的频率为

$$\nu' = \nu \frac{u}{u \mp v_s}$$

警车驶近观察者时,式中  $v_s$  前取“-”号,故有

$$\nu'_1 = \nu \frac{u}{u - v_s} = 865.6 \text{ Hz}$$

警车驶离观察者时,式中  $v_s$  前取“+”号,故有

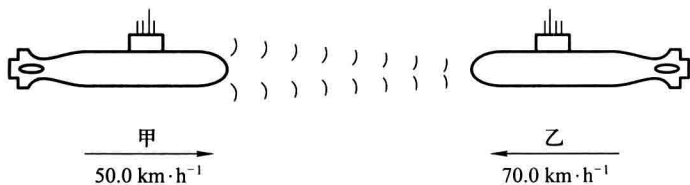
$$\nu'_2 = \nu \frac{u}{u + v_s} = 743.7 \text{ Hz}$$

(2) 声源(警车)与客车上的观察者作同向运动时,观察者收到的频率为

$$\nu'_3 = \nu \frac{u - v_0}{u - v_s} = 826.2 \text{ Hz}$$

**10-30** 一次军事演习中,有两艘潜艇在水中相向而行,甲的速度为  $50.0 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ ,乙的速度为  $70.0 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ ,如图所示.甲潜艇发出一个  $1.0 \times 10^3 \text{ Hz}$  的声音信号,设声波在水中的传播速度为  $5.47 \times 10^3 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ ,试求:(1)乙潜艇接收到的信号频率;(2)甲潜艇接收到的从乙潜艇反射回来的信号频率.

**分析** (1) 甲潜艇是声源,发出信号频率为  $\nu$ ,乙潜艇是观察者,两者相向运动,利用多普勒频率公式,即可求得乙潜艇接收到的信号频率  $\nu'$ . (2) 要求甲潜艇接收到的乙潜艇的信号频率,可将乙潜艇看成是声源,它发出的信号频率是  $\nu'$ ,将甲潜艇看成是观察者,两者相向运动,同样利用多普勒频率公式,可求出甲潜艇接收到的信号频率  $\nu''$ .



题 10-30 图

**解** 由题已知  $v_1 = 50.0 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ ,  $v_2 = 70.0 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ ,  $u = 5.47 \times 10^3 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ ,  $\nu = 1000 \text{ Hz}$ ,由分析可知:

$$(1) \nu' = \frac{u + v_2}{u - v_1} \nu = 1022 \text{ Hz}$$

$$(2) \nu'' = \frac{u + v_1}{u - v_2} \nu' = 1045 \text{ Hz}$$

**讨论** 由以上两个结果可得

$$\nu'' = \frac{u + v_1}{u - v_2} \frac{u + v_2}{u - v_1} \nu$$

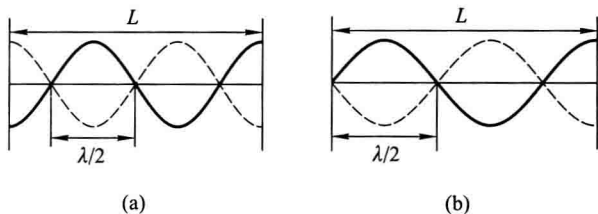
此式表明,当甲在已知波速  $u$ 、运动速度  $v_1$ 、发射信号频率  $\nu$ ,并接收到从乙反射



回来信号频率  $\nu''$  后, 就可以测出乙的运动速度  $v_2$ , 这也是雷达测速的工作原理.

**10-31** 在下述两种情况下, 求长度为  $0.15 \text{ m}$  的风琴管的基频和前四个谐频. 设声速为  $340 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ . (1) 管子两端开口; (2) 管子的一端封闭, 一端开口.

**分析** 当风琴管的某个端口封闭时, 那么风琴管内形成的驻波在该端口就是波节. 而当风琴管的端口开口时, 就形成波腹. 根据限定区域内驻波形成条件 (如图所示), 当管子两端为波腹时, 其管长与波长有关系式  $L = k\lambda_k/2$ ,  $k$  为正整数. 而当管子一端为波节、另一端为波腹时, 管长与波长有关系式  $L = (2k-1)\lambda_k/4$ . 可见取不同的  $k$  值, 得到不同的  $\lambda_k$ , 管内就出现不同频率  $\nu_k$  的波. 对应  $k=1$  称为基频,  $k=2, 3, 4, \dots$  称为各次谐频.



题 10-31 图

**解** (1) 根据分析由  $L = k\lambda_k/2$  和  $\nu_k = u/\lambda_k$  可得

$$\nu_k = ku/2L \quad (k=1, 2, 3, \dots)$$

因此, 基频:  $\nu_1 = 1\,133 \text{ Hz}$

二次谐频:  $\nu_2 = 2\,267 \text{ Hz}$

三次谐频:  $\nu_3 = 3\,400 \text{ Hz}$

四次谐频:  $\nu_4 = 4\,533 \text{ Hz}$

五次谐频:  $\nu_5 = 5\,667 \text{ Hz}$

(2) 同样根据分析由  $L = (2k-1)\lambda_k/4$  和  $\nu_k = u/\lambda_k$  可得

$$\nu_k = (2k-1)u/4L \quad (k=1, 2, 3, \dots)$$

因此, 基频:  $\nu_1 = 567 \text{ Hz}$

二次谐频:  $\nu_2 = 1\,700 \text{ Hz}$

三次谐频:  $\nu_3 = 2\,833 \text{ Hz}$

四次谐频:  $\nu_4 = 3\,967 \text{ Hz}$

五次谐频:  $\nu_5 = 5\,100 \text{ Hz}$

**10-32** 一平面简谐波的频率为  $500 \text{ Hz}$ , 在空气 ( $\rho = 1.3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ ) 中以  $u = 340 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  的速度传播, 到达人耳时振幅约为  $A = 1.0 \times 10^{-6} \text{ m}$ . 试求波在耳中的平均能量密度和声强.

**解** 波在耳中的平均能量密度为

$$\begin{aligned}\bar{w} &= \frac{1}{2} \rho A^2 \omega^2 = 2\pi^2 \rho A^2 \nu^2 \\ &= 6.42 \times 10^{-6} \text{ J} \cdot \text{m}^{-2}\end{aligned}$$

声强就是声波的能流密度,即

$$I = u\bar{w} = 2.18 \times 10^{-3} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$$

这个声强略大于繁忙街道上的噪声,使人耳已感到不适应.一般正常谈话的声强约为  $1.0 \times 10^{-6} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$  左右.

**10-33** 面积为  $1.0 \text{ m}^2$  的窗户开向街道,街道中噪声在窗口的声强级为 80 dB. 问有多少“声功率”传入窗内?

**分析** 首先要理解声强、声强级、声功率的物理意义,并了解它们之间的相互关系. 声强是声波的能流密度  $I$ , 而声强级  $L$  是描述介质中不同声波强弱的物理量. 它们之间的关系为  $L = \lg(I/I_0)$ , 其中  $I_0 = 1.0 \times 10^{-12} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$  为基准声强.  $L$  的单位是贝尔(B), 但常用的单位是分贝(dB), 且  $1 \text{ B} = 10 \text{ dB}$ . 声功率是单位时间内声波通过某面积传递的能量, 由于窗户上各处的  $I$  相同, 故有  $\bar{P} = IS$ .

**解** 根据分析, 由  $L = \lg(I/I_0)$  可得声强为

$$I = 10^L I_0$$

则传入窗户的声功率为

$$\bar{P} = IS = 10^L I_0 S = 1.0 \times 10^{-4} \text{ W}$$

**10-34** 若在同一介质中传播的频率分别为 1 200 Hz 和 400 Hz 的两声波有相同的振幅. 求: (1) 它们的强度之比; (2) 两声波的声强级差.

**解** (1) 因声强  $I = \rho u A^2 \omega^2 / 2$ , 则两声波声强之比

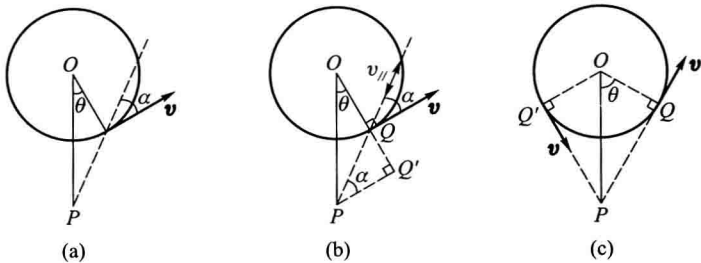
$$I_1 / I_2 = \omega_1^2 / \omega_2^2 = 9$$

(2) 因声强级  $L = \lg(I/I_0)$ , 则两声波声强级差为

$$\begin{aligned}\Delta L &= \lg(I_1/I_0) - \lg(I_2/I_0) = \lg(I_1/I_2) \\ &= 0.954 \text{ B} = 9.54 \text{ dB}\end{aligned}$$

**10-35** 如图(a)所示, 频率为 500 Hz 的声源以  $5 \text{ rad/s}$  的匀速率在圆周上运动, 圆的半径为 6 m, 试求: (1) 距圆心  $O$  12 m 处的点  $P$  处观察者听到的频率与  $\theta$  的关系; (2) 听到的频率最高和最低时, 声源运动的位置在哪? 其最高和最低的频率是多少? (声速  $u = 340 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .)

**分析** 频率发生变化是因为声源相对点  $P$  处观察者有相对运动, 这是多普勒效应. 频率变化的大小由声源相对点  $P$  处观察者运动速度  $v_{//}$  决定. 由图(b)可知  $v_{//} = v \cos \alpha = \omega R \cos \alpha$  ( $\omega$  是声源作圆周运动的角速度,  $R$  为圆周半径). 设声源频率为  $\nu_0$ , 声速为  $u$ , 则观察者听到的频率为  $\nu = \frac{u}{u+v_{//}} \nu_0 = \frac{u \nu_0}{u + \omega R \cos \alpha}$ . 显然, 为了找出  $\nu$  与  $\theta$  的关系, 只要利用图(b)中的几何关系找出  $\cos \alpha$  与  $\theta$  的关系



题 10-35 图

即可.

解 (1) 根据分析,由图(b)中直角三角形 $\triangle OPQ'$ 与 $\triangle PQ'Q$ 可得

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{PQ'}{PQ} = \frac{PQ'}{\sqrt{PQ'^2 + QQ'^2}} \\ &= \frac{2R \sin \theta}{\sqrt{(2R \sin \theta)^2 + (2R \cos \theta - R)^2}} \\ &= \frac{2 \sin \theta}{\sqrt{5 - 4 \cos \theta}} \end{aligned}$$

将其代入分析中公式,得

$$\begin{aligned} \nu &= \frac{u}{u + \omega R \cos \alpha} \nu_0 = \frac{u \nu_0}{u + \frac{2\omega R \sin \theta}{\sqrt{5 - 4 \cos \theta}}} \\ &= \frac{8\,500}{17 + 3 \sin \theta / \sqrt{5 - 4 \cos \theta}} \text{ Hz} \end{aligned}$$

(2) 当声源相对观察者运动的相对速度最大时,频率变化最大.显然声源处在图(c)中 $Q$ 与 $Q'$ 两个位置时,声源相对观察者的相对速度最大.以 $v = \omega R$ 的速度远离与接近观察者.由 $OQ = OQ' = R$ 与 $OP = 2R$ ,可得 $\theta_1 = 60^\circ$ 与 $\theta_2 = -60^\circ$ ,代入(1)中结果得

$$\nu_{\min} = 459 \text{ Hz}, \quad \nu_{\max} = 548 \text{ Hz}$$

求解这一结果,也可利用上一问中结果用求极值的方程获得.由(1)结果显然,要求 $\nu_{\min}$ 与 $\nu_{\max}$ .只要求 $f = \frac{\sin \theta}{\sqrt{5 - 4 \cos \theta}}$ 的极值.将 $\theta$ 看成变量,很容易求得相同的结果.读者可以一试.

**10-36** 一广播电台的辐射功率是 10 kW,假定辐射场均匀分布在以电台为中心的半球面上.(1)求距离电台为 $r = 10 \text{ km}$ 处的坡印廷矢量的平均值;(2)若在上述距离处的电磁波可看作平面波,求该处的电场强度和磁场强度的振幅.

分析 坡印廷矢量是电磁波的能流密度矢量,它是随时间作周期性变化的.

求其平均值,也就是指在一周期内的平均值.在忽略电磁波传播过程中的能量损耗时,按题意,波源的辐射功率就应等于单位时间通过半球面(面积  $A = 2\pi r^2$ )的电磁波能量,即  $\bar{P} = \bar{S} \cdot A$ ,而平均能流密度值  $\bar{S} = \bar{E} \bar{H}$ .另外,由电磁波的性质可知, $\mathbf{E}$  与  $\mathbf{H}$  垂直,相位相同,且有关系式  $\sqrt{\epsilon_0} E = \sqrt{\mu_0} H$ .因此,平面电磁波的坡印廷矢量大小的平均值可表示为  $\bar{S} = \frac{1}{2} E_m H_m = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} H_m^2$ ,由此可求电场强度振幅  $E_m$  和磁场强度振幅  $H_m$ .

解 (1) 因为辐射场分布在半球面上,则坡印廷矢量的平均值为

$$\bar{S} = P/2\pi r^2 = 1.59 \times 10^{-5} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$$

(2) 根据分析,  $\bar{S} = \bar{E} \bar{H} = E_m H_m / 2 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} H_m^2$ ,则磁场强度和电场强度的振幅分别为

$$H_m = (2\bar{S} \sqrt{\epsilon_0 / \mu_0})^{1/2} = 2.91 \times 10^{-4} \text{ A} \cdot \text{m}^{-1}$$

$$E_m = 2\bar{S} / H_m = 0.109 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$$

\*10-37 真空中有一平面电磁波的电场表达式如下:  $E_x = 0; E_y = 0.6 \cos[2\pi \times 10^8(t - x/c)]$ , 式中  $E_y$  的单位为  $\text{V} \cdot \text{m}^{-1}$ ,  $t$  的单位为  $\text{s}$ ,  $x$  的单位为  $\text{m}$ ;  $E_z = 0$ . 求:(1) 波长、频率;(2) 该电磁波的传播方向;(3) 磁场强度的大小和方向;(4) 坡印廷矢量.

分析 根据电磁波的特性,电场强度  $\mathbf{E}$  和磁场强度  $\mathbf{H}$  均垂直于波的传播方向.而  $\mathbf{E}$  和  $\mathbf{H}$  又互相垂直且同相位,  $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$  的方向为波速  $\mathbf{u}$  的方向.在数值上有关系  $E/H = \sqrt{\mu/\epsilon}$  成立.因此由题中给出的电场表达式可以求磁场表达式,而坡印廷矢量可由公式  $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$  求出.

解 (1) 由电场表达式可知,角频率  $\omega = 2\pi \times 10^8 \text{ s}^{-1}$ ,波速  $u$  等于光速  $c$ ,则电磁波的波长和频率分别为

$$\lambda = cT = 2\pi c / \omega = 3 \text{ m}, \quad \nu = \omega / 2\pi = 10^8 \text{ Hz}$$

(2) 由电场表达式看出,电磁波沿  $x$  轴正方向传播, $\mathbf{E}$  矢量是在  $Oxy$  平面内偏振的.

(3) 磁场强度表达式:

$$H_x = 0, \quad H_y = 0$$

$$H_z = \sqrt{\epsilon_0 / \mu_0} E_y = 1.6 \times 10^{-3} \cos[2\pi \times 10^8(t - x/c)]$$

式中  $H_z$  的单位为  $\text{A} \cdot \text{m}^{-1}$ ,  $x$  的单位为  $\text{m}$ ,  $t$  的单位为  $\text{s}$ .  $\mathbf{H}$  矢量在  $Oxz$  平面内偏振.

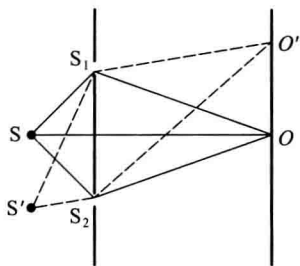
(4)  $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} = 9.6 \times 10^{-4} \cos^2 [2\pi \times 10^8(t - x/c)] \mathbf{i}$

式中  $S$  的单位为  $\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$ ,  $x$  的单位为  $\text{m}$ ,  $t$  的单位为  $\text{s}$ .

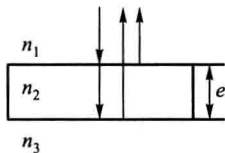
**11-1** 在双缝干涉实验中,若单色光源  $S$  到两缝  $S_1$ 、 $S_2$  距离相等,则观察屏上中央明条纹位于图中  $O$  处,现将光源  $S$  向下移动到图中的  $S'$  位置,则( )

- (A) 中央明纹向上移动,且条纹间距增大  
 (B) 中央明纹向上移动,且条纹间距不变  
 (C) 中央明纹向下移动,且条纹间距增大  
 (D) 中央明纹向下移动,且条纹间距不变

**分析与解** 由  $S$  发出的光到达  $S_1$ 、 $S_2$  的光程相同,它们传到屏上中央  $O$  处,光程差  $\Delta=0$ ,形成明纹.当光源由  $S$  移到  $S'$  时,由  $S'$  到达狭缝  $S_1$  和  $S_2$  的两束光产生了光程差.为了保持原中央明纹处的光程差为 0,它会向上移到图中  $O'$  处.使得由  $S'$  沿  $S_1$ 、 $S_2$  狭缝传到  $O'$  处的光程差仍为 0.而屏上各级条纹位置只是向上平移,因此条纹间距不变.因此正确答案为(B).



题 11-1 图



题 11-2 图

**11-2** 如图所示,折射率为  $n_2$ ,厚度为  $e$  的透明介质薄膜的上方和下方的透明介质的折射率分别为  $n_1$  和  $n_3$ ,且  $n_1 < n_2, n_2 > n_3$ ,若用波长为  $\lambda$  的单色平行光垂直入射到该薄膜上,则从薄膜上、下两表面反射的光束的光程差是( )

- (A)  $2n_2e$     (B)  $2n_2e - \frac{\lambda}{2}$     (C)  $2n_2e - \lambda$     (D)  $2n_2e - \frac{\lambda}{2n_2}$

**分析与解** 由于  $n_1 < n_2, n_2 > n_3$ ,因此在上表面的反射光有半波损失,下表面的反射光没有半波损失,故它们的光程差  $\Delta = 2n_2e \pm \lambda/2$ .这里  $\lambda$  是光在真空中的波长.因此正确答案为(B).

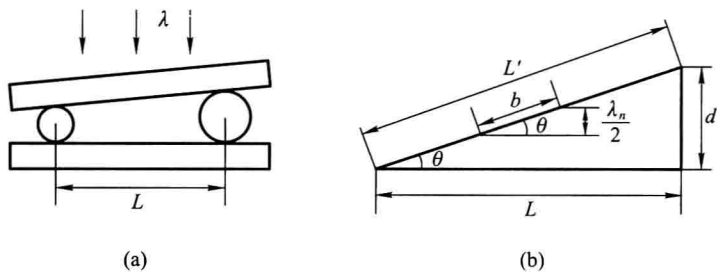
**11-3** 如图(a)所示,两个直径有微小差别的彼此平行的滚柱之间的距离为  $L$ ,夹在两块平面晶体的中间,形成空气劈形膜.当单色光垂直入射时,产生等厚干涉条纹.如果滚柱之间的距离  $L$  变小,则在  $L$  范围内干涉条纹的( )

(A) 数目减小, 间距变大

(B) 数目减小, 间距不变

(C) 数目不变, 间距变小

(D) 数目增加, 间距变小



题 11-3 图

**分析与解** 图(a)装置形成的劈尖等效图如图(b)所示. 图中  $d$  为两滚柱的直径差,  $b$  为两相邻明(或暗)条纹间距. 因为  $d$  不变, 当  $L$  变小时,  $\theta$  变大,  $L'$ 、 $b$  均变小. 由图可得  $\sin \theta = \lambda_n/2b = d/L'$ , 因此条纹总数  $N = L'/b = 2d/\lambda_n$ , 因为  $d$  和  $\lambda_n$  不变, 所以  $N$  不变. 正确答案为(C).

**11-4** 在迈克耳孙干涉仪的一条光路中放入一片折射率为  $n = 1.4$  的透明介质薄膜后, 干涉条纹产生了 7.0 条条纹的移动. 如果入射光波长为  $589.0 \text{ nm}$ , 则透明介质的膜厚为( )

(A)  $10\ 307.5 \text{ nm}$  (B)  $1\ 472.5 \text{ nm}$  (C)  $5\ 153.8 \text{ nm}$  (D)  $2\ 945.0 \text{ nm}$ 

**分析与解** 在迈克耳孙干涉仪的一条光路中, 放入折射率为  $n$  的介质后, 该条光路的光程增加, 与另一条光路的光产生了新的附加光程差, 其值为

$\Delta = 2(n-1)t$ , 这个光程差会导致条纹移动, 且有  $2(n-1)t = N\lambda$ , 则

$$t = \frac{N\lambda}{2(n-1)} = \frac{7.0 \times 589.0}{2(1.4-1)} \text{ nm} = 5\ 153.8 \text{ nm}$$

答案选(C).

**11-5** 在单缝夫琅禾费衍射实验中, 波长为  $\lambda$  的单色光垂直入射在宽度为  $3\lambda$  的单缝上, 对应于衍射角为  $30^\circ$  的方向, 单缝处波阵面可分成的半波带数目为( )

(A) 2 个 (B) 3 个 (C) 4 个 (D) 6 个

**分析与解** 根据单缝衍射公式

$$b \sin \theta = \begin{cases} \pm 2k \frac{\lambda}{2} & (\text{暗条纹}) \\ \pm (2k+1) \frac{\lambda}{2} & (\text{明条纹}) \end{cases} \quad k = 1, 2, \dots$$

因此第  $k$  级暗纹对应的单缝波阵面被分成  $2k$  个半波带, 第  $k$  级明纹对应的单缝波阵面被分成  $2k+1$  个半波带. 由题意  $b \sin \theta = 3\lambda/2$ , 即对应第 1 级明纹, 单缝分

成 3 个半波带. 正确答案为(B).

**11-6** 波长  $\lambda = 550 \text{ nm}$  的单色光垂直入射于光栅常量  $d = 1.0 \times 10^{-4} \text{ cm}$  的光栅上,可能观察到的光谱线的最大级次为( )

- (A) 4                      (B) 3                      (C) 2                      (D) 1

**分析与解** 由光栅方程  $d \sin \theta = \pm k \lambda$  ( $k = 0, 1, \dots$ ),可能观察到的最大级次为

$$k_{\max} \leq \frac{d \sin(\pi/2)}{\lambda} = 1.82$$

即只能看到第 1 级明纹,答案为(D).

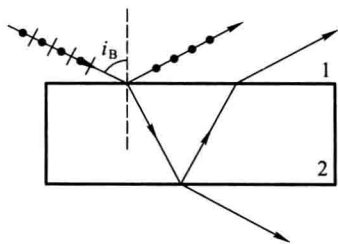
**11-7** 三个偏振片  $P_1$ 、 $P_2$  与  $P_3$  堆叠在一起, $P_1$  与  $P_3$  的偏振化方向相互垂直, $P_2$  与  $P_1$  的偏振化方向间的夹角为  $45^\circ$ ,强度为  $I_0$  的自然光入射于偏振片  $P_1$ ,并依次透过偏振片  $P_1$ 、 $P_2$  与  $P_3$ ,则通过三个偏振片后的光强为( )

- (A)  $I_0/16$               (B)  $3I_0/8$               (C)  $I_0/8$               (D)  $I_0/4$

**分析与解** 自然光透过偏振片后光强为  $I_1 = I_0/2$ . 由于  $P_1$  和  $P_2$  的偏振化方向成  $45^\circ$ ,所以偏振光透过  $P_2$  后光强由马吕斯定律得  $I_2 = I_1 \cos^2 45^\circ = I_0/4$ . 而  $P_2$  和  $P_3$  的偏振化方向也成  $45^\circ$ ,则透过  $P_3$  后光强变为  $I_3 = I_2 \cos^2 45^\circ = I_0/8$ . 故答案为(C).

**11-8** 一束自然光自空气射向一块平板玻璃,如图所示,设入射角等于布儒斯特角  $i_B$ ,则在界面 2 的反射光( )

- (A) 是自然光  
(B) 是线偏振光且光矢量的振动方向垂直于入射面  
(C) 是线偏振光且光矢量的振动方向平行于入射面  
(D) 是部分偏振光



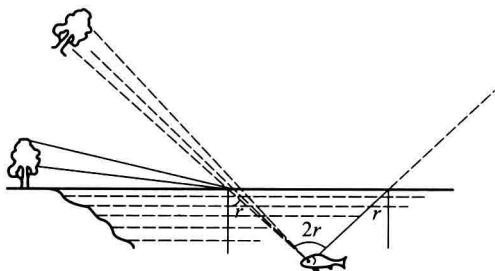
题 11-8 图

**分析与解** 由几何光学知识可知,在界面 2 处反射光与折射光仍然垂直,因此光在界面 2 处的入射角也是布儒斯特角,根据布儒斯特定律,反射光是线偏振光且光振动方向垂直于入射面. 答案为(B).

**11-9** 在水中的鱼看来,水面上和岸上的所有景物,都出现在一倒立圆锥里,其顶角为( )

- (A)  $48.8^\circ$               (B)  $41.2^\circ$               (C)  $97.6^\circ$               (D)  $82.4^\circ$

**分析与解** 本题是一个全反射的应用题. 根据水的折射率,光线从空气射入水中时反射光的临界角  $i_c = \arcsin \frac{1}{n} \approx 48.8^\circ$ ,其中  $n = 1.33$  为水的折射率. 如图所示,当光线以  $90^\circ$  的最大入射角射入水中时,折射角为  $r$ ,故所有射入水中的光



题 11-9 图

线的折射角均小于  $r$ , 根据空间旋转对称, 水面上所有的景物都落在顶角为  $2r = 2i_c = 97.6^\circ$  的锥面内. 故选 (C).

**11-10** 在双缝干涉实验中, 两缝间距为  $0.30 \text{ mm}$ , 用单色光垂直照射双缝, 在离缝  $1.20 \text{ m}$  的屏上测得中央明纹一侧第 5 条暗纹与另一侧第 5 条暗纹间的距离为  $22.78 \text{ mm}$ . 问所用光的波长为多少? 是什么颜色的光?

**分析** 在双缝干涉中, 屏上暗纹位置由  $x = \frac{d'}{d}(2k+1)\frac{\lambda}{2}$  决定, 式中  $d'$  为双缝到屏的距离,  $d$  为双缝间距. 所谓第 5 条暗纹是指对应  $k=4$  的那一级暗纹. 由于条纹对称, 该暗纹到中央明纹中心的距离  $x = \frac{22.78}{2} \text{ mm}$ , 那么由暗纹公式即可求得波长  $\lambda$ .

此外, 因双缝干涉是等间距的, 故也可用条纹间距公式  $\Delta x = \frac{d'}{d}\lambda$  求入射光波长. 应注意两个第 5 条暗纹之间所包含的相邻条纹间隔数为 9 (不是 10, 为什么?), 故  $\Delta x = \frac{22.78}{9} \text{ mm}$ .

**解 1** 屏上暗纹的位置  $x = \frac{d'}{d}(2k+1)\frac{\lambda}{2}$ , 把  $k=4$ ,  $x = \frac{22.78}{2} \times 10^{-3} \text{ m}$  以及  $d, d'$  值代入, 可得  $\lambda = 632.8 \text{ nm}$ , 为红光.

**解 2** 屏上相邻暗纹 (或明纹) 间距  $\Delta x = \frac{d'}{d}\lambda$ , 把  $\Delta x = \frac{22.78}{9} \times 10^{-3} \text{ m}$ , 以及  $d, d'$  值代入, 可得  $\lambda = 632.8 \text{ nm}$ .

**11-11** 在双缝干涉实验中, 用波长  $\lambda = 546.1 \text{ nm}$  的单色光照射, 双缝与屏的距离  $d' = 300 \text{ mm}$ . 测得中央明纹两侧的两个第五级明条纹的间距为  $12.2 \text{ mm}$ , 求双缝间的距离.

**分析** 双缝干涉在屏上形成的条纹是上下对称且等间隔的. 如果设两明纹间隔为  $\Delta x$ , 则由中央明纹两侧第五级明纹间距  $x_5 - x_{-5} = 10\Delta x$  可求出  $\Delta x$ . 再由公式  $\Delta x = d'\lambda/d$  即可求出双缝间距  $d$ .



解 根据分析

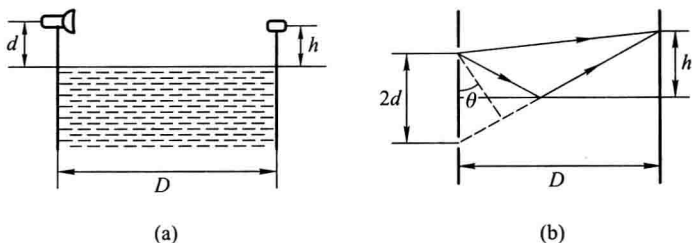
$$\Delta x = (x_5 - x_{-5}) / 10 = 1.22 \times 10^{-3} \text{ m}$$

双缝间距为

$$d = d' \lambda / \Delta x = 1.34 \times 10^{-4} \text{ m}$$

**11-12** 一个微波发射器置于岸上,离水面高度为  $d$ ,对岸在离水面  $h$  高度处放置一接收器,水面宽度为  $D$ ,且  $D \gg d, D \gg h$ ,如图(a)所示.发射器向对面发射波长为  $\lambda$  的微波,且  $\lambda > d$ ,求接收器测到极大值时,至少离地多高?

分析 由发射器直接发射的微波与经水面反射后的微波相遇可互相干涉,这种干涉与劳埃德镜实验完全相同.形成的干涉结果与缝距为  $2d$ ,缝屏间距为  $D$  的双缝干涉相似,如图(b)所示,但要注意是和劳埃德镜实验一样,由于从水面上反射的光存在半波损失,使得两束光在屏上相遇产生的光程差为  $2d \sin \theta + \lambda/2$ ,而不是  $2d \sin \theta$ .



题 11-12 图

解 由分析可知,接收到的信号为极大值时,应满足

$$2d \sin \theta + \lambda/2 = k\lambda \quad (k = 1, 2, \dots)$$

$$h \approx D \tan \theta \approx D \sin \theta = D\lambda(2k-1)/4d$$

取  $k=1$  时,得  $h_{\min} = D\lambda/4d$ .

**11-13** 如图所示,由点  $S$  发出的  $\lambda = 600 \text{ nm}$  的单色光,自空气射入折射率  $n = 1.23$  的透明物质,再射入空气.若透明物质的厚度为  $d = 1.0 \text{ cm}$ ,入射角  $\theta = 30^\circ$ ,且  $SA = BC = 5.0 \text{ cm}$ ,问:(1) 折射角  $\theta_1$  为多少?(2) 此单色光在这层透明物质里的频率、速度和波长各为多少?(3)  $S$  到  $C$  的几何路程为多少?光程又为多少?

解 (1) 由折射定律  $\frac{\sin \theta}{\sin \theta_1} = n$  可得

$$\theta_1 = \arcsin\left(\frac{\sin \theta}{n}\right) = \arcsin\left(\frac{\sin 30^\circ}{1.23}\right) = 24^\circ$$

(2) 单色光在透明介质中的速度  $v_n$ , 波长  $\lambda_n$  和频率  $\nu$  分别为

$$v_n = \frac{c}{n} = 2.44 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\lambda_n = \frac{\lambda}{n} = 4.88 \times 10^{-7} \text{ m} = 488 \text{ nm}$$

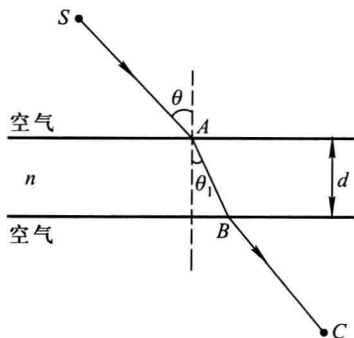
$$\nu = \frac{c}{\lambda} = 5.0 \times 10^{14} \text{ Hz}$$

(3) S 到 C 的几何路程为

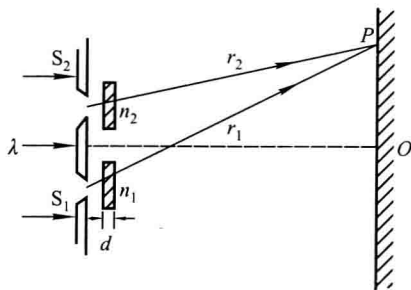
$$SC = SA + AB + BC = SA + \frac{d}{\cos \theta_1} + BC = 0.111 \text{ m}$$

S 到 C 的光程为

$$\sum n_i D_i = SA \times 1 + AB \times n + BC \times 1 = 0.114 \text{ m}$$



题 11-13 图



题 11-14 图

**11-14** 一双缝装置的一个缝被折射率为 1.40 的薄玻璃片所遮盖, 另一个缝被折射率为 1.70 的薄玻璃片所遮盖. 在玻璃片插入以后, 屏上原来中央极大的所在点, 现变为第五级明纹. 假定  $\lambda = 480 \text{ nm}$ , 且两玻璃片厚度均为  $d$ , 求  $d$ .

**分析** 本题是干涉现象在工程测量中的一个具体应用, 它可以用来测量透明介质薄片的微小厚度或折射率. 如图所示, 在不加介质片之前, 两相干光均在空气中传播, 它们到达屏上任一点  $P$  的光程差由其几何路程差决定, 对于点  $O$ , 光程差  $\Delta = 0$ , 故点  $O$  处为中央明纹, 其余条纹相对点  $O$  对称分布. 而在插入介质片后, 虽然两相干光在两介质薄片中的几何路程相同, 但光程却不同, 对于点  $O$ ,  $\Delta \neq 0$ , 故点  $O$  不再是中央明纹, 整个条纹发生平移. 这时, 干涉条纹空间分布的变化完全取决于光程差的变化. 因此, 对于屏上某点  $P$  (明纹或暗纹位置), 只要计算出插入介质片前后光程差的变化, 即可知道其干涉条纹的变化情况.

插入介质前的光程差  $\Delta_1 = r_1 - r_2 = k_1 \lambda$  (对应  $k_1$  级明纹), 插入介质后的光程差  $\Delta_2 = [(n_1 - 1)d + r_1] - [(n_2 - 1)d + r_2] = k_2 \lambda$  (对应  $k_2$  级明纹).

光程差的变化量为

$$\Delta_2 - \Delta_1 = (n_2 - n_1)d = (k_2 - k_1)\lambda$$

式中 $(k_2 - k_1)$ 可以理解为移过点 $P$ 的条纹数(本题为5).因此,对于这类问题,求解光程差的变化量是解题的关键.

**解** 由上述分析可知,两介质片插入前后,对于原中央明纹所在点 $O$ ,有

$$\Delta_2 - \Delta_1 = (n_2 - n_1)d = 5\lambda$$

将有关数据代入可得

$$d = \frac{5\lambda}{n_2 - n_1} = 8.0 \mu\text{m}$$

**11-15** 白光垂直照射到空气中一厚度为380 nm的肥皂膜上.设肥皂膜的折射率为1.32.试问该膜的正面呈现什么颜色?背面呈现什么颜色?

**分析** 这是薄膜干涉问题,求正面呈现的颜色就是在反射光中求因干涉增强光的波长(在可见光范围),求背面呈现的颜色就是在透射光中求干涉增强(即反射减弱)光的波长.

**解** 根据分析对反射光加强,有

$$2ne + \lambda/2 = k\lambda \quad (k=1, 2, \dots)$$

$$\lambda = 4ne / (2k - 1)$$

在可见光范围

$$k=2 \text{ 时, } \lambda = 668.8 \text{ nm (红光)}$$

$$k=3 \text{ 时, } \lambda = 401.3 \text{ nm (紫光)}$$

故正面呈红紫色.同理,对透射光加强,有

$$2ne = k\lambda \quad (k=1, 2, \dots)$$

在可见光范围仅有 $k=2$ 时, $\lambda=501.6 \text{ nm}$ (绿光).即背面呈绿色.

**11-16** 在折射率 $n_3=1.52$ 的照相机镜头表面涂有一层折射率 $n_2=1.38$ 的 $\text{MgF}_2$ 增透膜,若此膜仅适用于波长 $\lambda=550 \text{ nm}$ 的光,则此膜的最小厚度为多少?

**分析** 在薄膜干涉中,膜的材料及厚度都将对两反射光(或两透射光)的光程差产生影响,从而可使某些波长的光在反射(或透射)中得到加强或减弱,这种选择性使薄膜干涉在工程技术上有很多应用.本题所述的增透膜,就是希望波长 $\lambda=550 \text{ nm}$ 的光在透射中得到加强,从而得到所希望的照相效果(因感光底片对此波长附近的光最为敏感).具体求解时应注意在 $d>0$ 的前提下, $k$ 取最小的允许值.

**解1** 因干涉的互补性,波长为550 nm的光在透射中得到加强,则在反射中一定减弱,两反射光的光程差 $\Delta_2=2n_2d$ ,由干涉相消条件 $\Delta_2=(2k+1)\frac{\lambda}{2}$ ,得

$$d = (2k+1) \frac{\lambda}{4n_2}$$

取  $k=0$ , 则  $d_{\min}=99.6 \text{ nm}$ .

**解 2** 由于空气的折射率  $n_1=1$ , 且有  $n_1 < n_2 < n_3$ , 则对透射光而言, 两相干光的光程差  $\Delta_1=2n_2d+\frac{\lambda}{2}$ , 由干涉加强条件  $\Delta_1=k\lambda$ , 得

$$d=\left(k-\frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{2n_2}$$

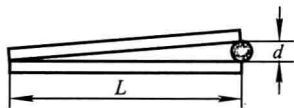
取  $k=1$ , 则膜的最小厚度  $d_{\min}=99.6 \text{ nm}$ .

**11-17** 如图所示, 利用空气劈尖测细丝直径, 已知  $\lambda=589.3 \text{ nm}$ ,  $L=2.888 \times 10^{-2} \text{ m}$ , 测得 30 条条纹的总宽度为  $4.295 \times 10^{-3} \text{ m}$ , 求细丝直径  $d$ .

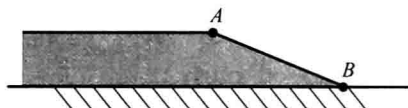
**分析** 在应用劈尖干涉公式  $d=\frac{\lambda}{2nb}L$  时, 应注意相邻条纹的间距  $b$  是  $N$  条条纹的宽度  $\Delta x$  除以  $(N-1)$ . 对空气劈尖  $n=1$ .

**解** 由分析知, 相邻条纹间距  $b=\frac{\Delta x}{N-1}$ , 则细丝直径为

$$d=\frac{\lambda}{2n} \frac{L}{b}=\frac{\lambda(N-1)}{2n\Delta x}L=5.75 \times 10^{-5} \text{ m}$$



题 11-17 图



题 11-18 图

**11-18** 集成光学中的楔形薄膜耦合器原理如图所示. 沉积在玻璃衬底上的是氧化钽 ( $\text{Ta}_2\text{O}_5$ ) 薄膜, 其楔形端从  $A$  到  $B$  厚度逐渐减小为零. 为测定薄膜的厚度, 用波长  $\lambda=632.8 \text{ nm}$  的 He-Ne 激光垂直照射, 观察到薄膜楔形端共出现 11 条暗纹, 且  $A$  处对应一条暗纹, 试求氧化钽薄膜的厚度 ( $\text{Ta}_2\text{O}_5$  对  $632.8 \text{ nm}$  激光的折射率为 2.21).

**分析** 置于玻璃上的薄膜  $AB$  段形成劈尖, 求薄膜厚度就是求该劈尖在  $A$  点处的厚度. 由于  $\text{Ta}_2\text{O}_5$  对激光的折射率大于玻璃, 故从该劈尖上表面反射的光有半波损失, 而下表面没有, 因而两反射光光程差为  $\Delta=2ne+\lambda/2$ . 由反射光暗纹公式  $2ne_k+\lambda/2=(2k+1)\lambda/2, k=0, 1, 2, 3, \dots$ , 可以求厚度  $e_k$ . 又因为  $AB$  中共有 11 条暗纹 (因半波损失  $B$  端也为暗纹), 则  $k$  取 10 即得薄膜厚度.

**解** 根据分析, 有

$$2ne_k+\lambda/2=(2k+1)\lambda/2 \quad (k=0, 1, 2, 3, \dots)$$

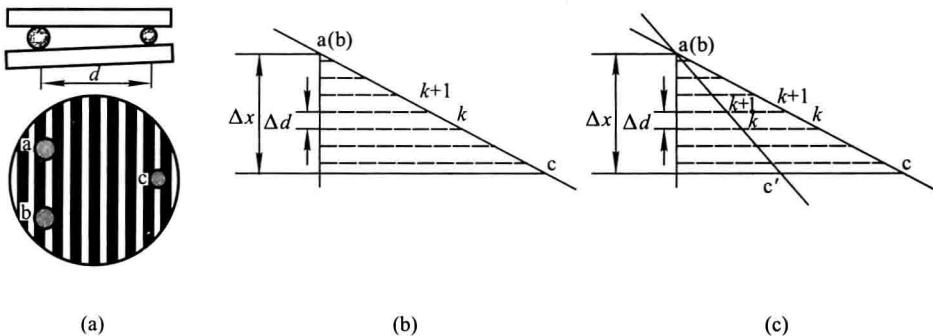
取  $k=10$ , 得薄膜厚度  $e_{10}=10\lambda/2n=1.4 \times 10^{-6} \text{ m}$ .

**11-19** 如图(a)所示, 将符合标准的轴承钢珠  $a$ 、 $b$  和待测钢珠  $c$  一起放在两块平板玻璃之间, 若垂直入射光的波长  $\lambda=580 \text{ nm}$ , 问钢珠  $c$  的直径比标准小

多少? 如果距离  $d$  不同, 对检测结果有何影响?

分析 很显然, 如钢珠  $c$  与标准件  $a$ 、 $b$  相同, 则呈现厚度相同的薄膜干涉; 如钢珠与标准件不同, 则为劈尖干涉. 后者有等厚干涉条纹出现,  $a$  与  $c$  之间的条纹分布如图 (b) 所示. 由于相邻条纹的厚度差  $\Delta d = \frac{\lambda}{2n}$ , 而空气的折射率  $n \approx 1$ , 则两钢珠之间的直径差  $\Delta x = N \frac{\lambda}{2}$ , 式中  $N$  为  $a$  与  $c$  之间的条纹间隔数目 (注: 条纹数目较多时, 也可用条纹数目作近似计算), 由图 (a) 知  $N$  约为  $6 \frac{1}{4}$ .

改变钢珠间的距离  $d$ , 将钢珠  $c$  移至  $c'$  处, 如图 (c) 所示,  $a$  与  $c'$  之间条纹数并未改变, 但由于相邻条纹间距变小, 从而影响观测.



题 11-19 图

解 钢珠  $c$  和  $a$ 、 $b$  的直径不同, 则两平板玻璃形成空气劈. 由分析得, 钢珠  $c$  的直径与标准件直径相差

$$\Delta x = N \frac{\lambda}{2} = 1.81 \times 10^{-6} \text{ m}$$

当距离  $d$  稍微改变时,  $a$ 、 $b$  与  $c$  之间条纹数目未变, 故不影响检验结果.

**11-20** 折射率为 1.60 的两块标准平面玻璃板之间形成一个劈形膜 (劈尖角  $\theta$  很小). 用波长  $\lambda = 600 \text{ nm}$  的单色光垂直入射, 产生等厚干涉条纹. 假如在劈形膜内充满  $n = 1.40$  的液体时的相邻明纹间距比劈形膜内是空气时的间距缩小  $\Delta l = 0.5 \text{ mm}$ , 那么劈尖角  $\theta$  应是多少?

分析 劈尖干涉中相邻条纹的间距  $l \approx \lambda / 2n\theta$ , 其中  $\theta$  为劈尖角,  $n$  是劈尖内介质折射率. 由于前后两次劈形膜内介质不同, 因而  $l$  不同. 则利用  $l \approx \lambda / 2n\theta$  和题给条件可求出  $\theta$ .

解 劈形膜内为空气时

$$l_{\text{空}} = \lambda / 2\theta$$

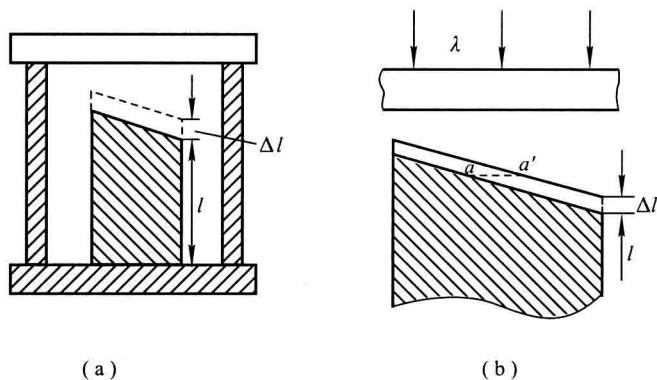
劈形膜内为液体时

$$l_{\text{液}} = \lambda/2n\theta$$

则由  $\Delta l = l_{\text{空}} - l_{\text{液}} = \lambda/2\theta - \lambda/2n\theta$ , 得

$$\theta = \frac{\lambda(1-1/n)}{2\Delta l} = 1.71 \times 10^{-4} \text{ rad}$$

**11-21** 如图(a)所示的干涉膨胀仪, 已知样品的平均高度为  $3.0 \times 10^{-2} \text{ m}$ , 用  $\lambda = 589.3 \text{ nm}$  的单色光垂直照射. 当温度由  $17^\circ\text{C}$  上升至  $30^\circ\text{C}$  时, 看到有 20 条条纹移过, 问样品的热膨胀系数为多少?



题 11-21 图

**分析** 温度升高  $\Delta T = T_2 - T_1$  后, 样品因受热膨胀, 其高度  $l$  的增加量  $\Delta l = l\alpha\Delta T$ . 由于样品表面上移, 使在倾角  $\theta$  不变的情况下, 样品与平板玻璃间的空气劈尖的整体厚度减小. 根据等厚干涉原理, 干涉条纹将整体向棱边平移, 则原  $k$  级条纹从  $a$  移至  $a'$  处, 如图(b)所示, 移过某一固定观察点的条纹数目  $N$  与  $\Delta l$  的关系为  $\Delta l = N \frac{\lambda}{2}$ , 由上述关系可得出热膨胀系数  $\alpha$ .

**解** 由题意知, 移动的条纹数  $N = 20$ , 从分析可得

$$N \frac{\lambda}{2} = l\alpha\Delta T$$

则热膨胀系数为

$$\alpha = \frac{N \frac{\lambda}{2}}{l\Delta T} = 1.51 \times 10^{-5} \text{ K}^{-1}$$

**11-22** 在利用牛顿环测未知单色光波长的实验中, 当用波长为  $589.3 \text{ nm}$  的钠黄光垂直照射时, 测得第 1 和第 4 个暗环的距离为  $\Delta r = 4.00 \times 10^{-3} \text{ m}$ ; 当用波长未知的单色光垂直照射时, 测得第 1 和第 4 个暗环的距离为  $\Delta r' = 3.85 \times 10^{-3} \text{ m}$ , 求该单色光的波长.

**分析** 牛顿环装置产生的干涉暗环半径  $r = \sqrt{kR\lambda}$ , 其中  $k = 0, 1, 2, \dots, k=0$ ,

对应牛顿环中心的暗斑,  $k=1$  和  $k=4$  则对应第 1 和第 4 个暗环, 由它们之间的间距  $\Delta r = r_4 - r_1 = \sqrt{R\lambda}$ , 可知  $\Delta r \propto \sqrt{\lambda}$ , 据此可按题中的测量方法求出未知波长  $\lambda'$ .

解 根据分析有

$$\frac{\Delta r'}{\Delta r} = \frac{\sqrt{\lambda'}}{\sqrt{\lambda}}$$

故未知光波长为

$$\lambda' = 546 \text{ nm}$$

**11-23** 在牛顿环实验中, 当透镜与玻璃间充满某种液体时, 第 10 个亮环的直径由  $1.40 \times 10^{-2} \text{ m}$  变为  $1.27 \times 10^{-2} \text{ m}$ , 试求这种液体的折射率.

分析 当透镜与平板玻璃间充满某种液体 ( $n_2 > 1$ ), 且满足  $n_1 > n_2, n_2 < n_3$  或  $n_1 < n_2, n_2 > n_3$  时, 在厚度为  $d$  的地方, 两相干光的光程差为  $\Delta = 2n_2d + \frac{\lambda}{2}$ . 由此可推

导出牛顿环暗环半径  $r = \sqrt{\frac{kR\lambda}{n_2}}$  和明环半径  $r = \sqrt{\left(k - \frac{1}{2}\right) \frac{R\lambda}{n_2}}$ , 这里明、暗环半径和充入的介质折射率  $n_2$  有关. 有兴趣的读者可自行推导. 必须指出, 在牛顿环中, 若介质不均匀或分析的是透射光而不是反射光, 那么关于暗环、明环半径的公式与教材中的公式是不同的, 不能随意套用.

解 当透镜与玻璃之间为空气时,  $k$  级明纹的直径为

$$d_k = 2r_k = 2\sqrt{\left(k - \frac{1}{2}\right) R\lambda}$$

当透镜与玻璃之间为液体时,  $k$  级明纹的直径为

$$d'_k = 2r'_k = 2\sqrt{\left(k - \frac{1}{2}\right) \frac{R\lambda}{n_2}}$$

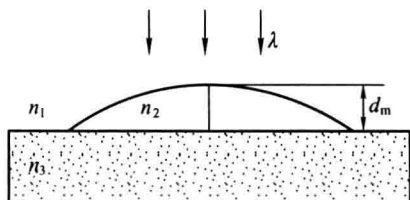
解上述两式得

$$n_2 = \left(\frac{d_k}{d'_k}\right)^2 = 1.22$$

**11-24** 如图所示, 折射率  $n_2 = 1.2$  的油滴落在  $n_3 = 1.50$  的平板玻璃上, 形成一上表面近似于球面的油膜, 测得油膜中心最高处的高度  $d_m = 1.1 \mu\text{m}$ , 用  $\lambda = 600 \text{ nm}$  的单色光垂直照射油膜. 问:

(1) 油膜周边是暗环还是明环? (2) 整个油膜可看到几个完整暗环?

分析 本题也是一种牛顿环干涉现象, 由于  $n_1 < n_2 < n_3$ , 故油膜上任一点处两反射相干光的光程差  $\Delta = 2n_2d$ . (1) 令  $d = 0$ , 由于干涉加强或减弱条件即可判断油膜



题 11-24 图

周边是明环。(2) 由  $2n_2d = (2k+1)\lambda/2$ , 且令  $d = d_m$  可求得油膜上暗环的最高级次(取整), 从而判断油膜上完整暗环的数目.

解 (1) 根据分析, 由

$$2n_2d = \begin{cases} k\lambda & (\text{明条纹}) \\ (2k+1)\lambda/2 & (\text{暗条纹}) \end{cases} \quad k=0, 1, 2, \dots$$

油膜周边处  $d=0$ , 即  $\Delta=0$  符合干涉加强条件, 故油膜周边是明环.

(2) 油膜上任一暗环处满足

$$\Delta = 2n_2d = (2k+1)\lambda/2 \quad (k=0, 1, 2, \dots)$$

令  $d = d_m$ , 解得  $k=3.9$ , 可知油膜上暗环的最高级次为 3, 故油膜上出现的完整暗环共有 4 个, 即  $k=0, 1, 2, 3$ .

\* 11-25 利用牛顿环的干涉条纹, 可测定凹曲面的曲率半径. 如图所示, 把已知半径的平凸透镜的凸面放置在待测的凹面上, 在两镜面之间形成空气层, 可观察到环状干涉条纹. 试证明第  $k$  个暗环的半径  $r_k$  和凹面半径  $R_2$ 、凸面半径  $R_1$

以及光波波长  $\lambda$  之间的关系为  $r_k^2 = k\lambda \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}$ . 这

种方法在透镜磨制中经常使用. 凸透镜的凸面具有标准的曲率半径, 凹面镜的半径  $R_2$  待定. 设  $\lambda = 589.3 \text{ nm}$ , 如果测得第 4 个暗环的半径  $r_4 = 2.25 \text{ cm}$ , 而  $R_1 = 102.3 \text{ cm}$ , 试求  $R_2$ .

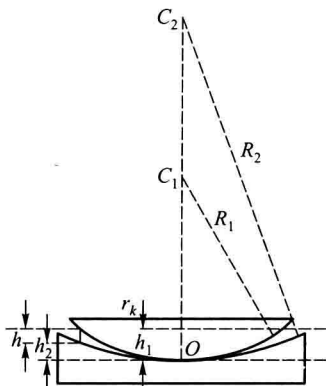
分析 图中凸透镜与凹面镜能形成环状干涉条纹是因为它们之间形成的空气层厚度  $h$  非常小, 因此从凸透镜下表面和凹面镜上表面反射回来的两束光形成了薄膜干涉. 光程差为  $\Delta = 2h + \frac{\lambda}{2}$  (有半波损失). 根据干涉条纹形成条件, 对暗纹有

$$\Delta = 2h + \frac{\lambda}{2} = \left(k + \frac{1}{2}\right) \lambda$$

所以要证明本题结果, 只须利用图中的几何关系, 求得  $h$  与  $r_k$ 、 $R_1$ 、 $R_2$  的相互几何关系, 并代入上式即可.

解 设第  $k$  个暗环处空气层厚度  $h$ , 则由图中几何关系得  $h = h_1 - h_2$ , 而由两个直角三角形关系容易得

$$\begin{cases} r_k^2 = R_2^2 - (R_2 - h_2)^2 \approx 2R_2 h_2 \\ r_k^2 = R_1^2 - (R_1 - h_1)^2 \approx 2R_1 h_1 \end{cases}$$



题 11-25 图



则

$$h = h_1 - h_2 = \frac{r_k^2}{2} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

代入分析中公式  $2h + \frac{\lambda}{2} = \left(k + \frac{1}{2}\right) \lambda$ , 证得

$$r_k^2 = k\lambda \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}$$

将题中  $k=4, r_4=2.25 \text{ cm}, R_1=102.3 \text{ cm}, \lambda=5.893 \times 10^2 \text{ nm}$  代入上式可得

$$R_2 = 102.8 \text{ cm}$$

**11-26** 某人用迈克耳孙干涉仪测量一光波的波长. 当可动反射镜 M 移动 0.310 mm 的过程中, 观察到干涉条纹移动了 1100 条, 求该光波的波长.

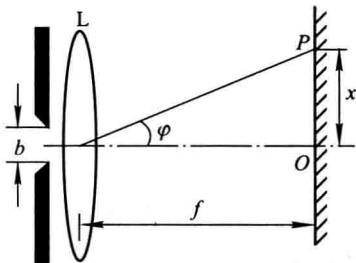
**分析与解** 当迈克耳孙干涉仪中可动镜 M 移动距离  $d$  时, 两条光路形成的光程差为  $2d$  (空气折射率  $n \approx 1$ ), 产生条纹的移动为  $\Delta N$  条, 且有关系

$$\Delta N \lambda = 2d$$

则

$$\lambda = 2d / \Delta N = 563.6 \text{ nm}$$

**11-27** 如图所示, 狭缝的宽度  $b=0.60 \text{ mm}$ , 透镜焦距  $f=0.40 \text{ m}$ , 有一与狭缝平行的屏放置在透镜焦平面处. 若以单色平行光垂直照射狭缝, 则在屏上离点 O 为  $x=1.4 \text{ mm}$  处的点 P 看到的是衍射明条纹. 试求: (1) 该入射光的波长; (2) 点 P 条纹的级数; (3) 从点 P 看, 对该光波而言, 狭缝处的波阵面可作半波带的数目.



题 11-27 图

**分析** 单缝衍射中的明纹条件为  $b \sin \varphi = \pm(2k+1) \frac{\lambda}{2}$ , 在观察点 P 确定 (即  $\varphi$  确定) 后,

由于  $k$  只能取整数, 故满足上式的  $\lambda$  只可取若干不连续的值, 对照可见光的波长范围可确定入射光波长的取值.

此外, 如点 P 处的明纹级次为  $k$ , 则狭缝处的波阵面可以划分的半波带数目为  $(2k+1)$ , 它们都与观察点 P 有关,  $\varphi$  越大, 可以划分的半波带数目也越大.

**解** (1) 透镜到屏的距离为  $d$ , 由于  $d \gg b$ , 对点 P 而言, 有  $\sin \varphi \approx \frac{x}{d}$ . 根据单缝衍射明纹条件  $b \sin \varphi = (2k+1) \frac{\lambda}{2}$ , 有

$$\frac{bx}{d} = (2k+1) \frac{\lambda}{2}$$

将  $b, d (d \approx f), x$  的值代入, 并考虑可见光波长的上、下限值, 有

$$\lambda_{\min} = 400 \text{ nm 时, } k_{\max} = 4.75$$

$$\lambda_{\max} = 760 \text{ nm 时, } k_{\min} = 2.27$$

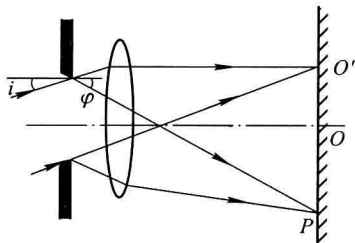
因  $k$  只能取整数值,故在可见光范围内只允许有  $k=4$  和  $k=3$ ,它们所对应的人射光波长分别为  $\lambda_2=466.7 \text{ nm}$  和  $\lambda_1=600 \text{ nm}$ .

(2) 点  $P$  的条纹级次随入射光波长而异,当  $\lambda_1=600 \text{ nm}$  时,  $k=3$ ; 当  $\lambda_2=466.7 \text{ nm}$  时,  $k=4$ .

(3) 当  $\lambda_1=600 \text{ nm}$  时,  $k=3$ ,半波带数目为  $(2k+1)=7$ ; 当  $\lambda_2=466.7 \text{ nm}$  时,  $k=4$ ,半波带数目为 9.

**11-28** 单缝的宽度  $b=0.40 \text{ mm}$ ,以波长  $\lambda=589 \text{ nm}$  的单色光垂直照射,透镜的焦距  $f=1.0 \text{ m}$ . 求:(1) 第一级暗纹距中心的距离;(2) 第二级明纹距中心的距离;\* (3) 如单色光以入射角  $i=30^\circ$  斜射到单缝上,则上述结果有何变动.

**分析** 对于问题(3)单色光倾斜入射单缝的情况,在入射光到达单缝时,其上下两列边界光线之间已存在光程差  $b \sin i$  (若为光栅,则为  $d \sin i$ ),对应等光程的中央主极大将移至点  $O'$  (此时  $\varphi=i=30^\circ$ ),屏上衍射条纹原有的对称性受到一定的破坏.



题 11-28 图

如图所示,对于点  $O'$  上方的条纹(此时入射光与衍射光位于法线两侧,且  $\varphi>i$ ),满足

$$b(\sin i - \sin \varphi) = \begin{cases} -(2k+1)\frac{\lambda}{2} & (\text{明条纹}) \\ -k\lambda & (\text{暗条纹}) \end{cases}$$

如令  $\sin \varphi=1$ ,可求得最大条纹级次  $k_{m1}$ . 对于点  $O$  下方的条纹(此时入射光与衍射光位于法线同侧),满足

$$b(\sin i + \sin \varphi) = \begin{cases} (2k+1)\frac{\lambda}{2} & (\text{明条纹}) \\ k\lambda & (\text{暗条纹}) \end{cases}$$

如令  $\sin \varphi=1$ ,可求得另一侧的最大条纹级次  $k_{m2}$ . 对于点  $O'$  与  $O$  之间的条纹(此时入射光与衍射光位于法线两侧,但  $\varphi<i$ ),满足

$$b(\sin i - \sin \varphi) = \begin{cases} (2k+1)\frac{\lambda}{2} & (\text{明条纹}) \\ k\lambda & (\text{暗条纹}) \end{cases}$$

需要说明的是,点  $O'$  与  $O$  之间的条纹与点  $O$  下方的条纹属于中央主极大同一侧的各级条纹,不同的是前者  $k$  值较小,后者  $k$  值较大,且  $k$  值在点  $O$  附近连续变化.

**解** (1) 由单缝衍射的暗纹条件  $b \sin \varphi_1 = k\lambda$ ,得  $\varphi_1 \approx \sin \varphi_1 = \frac{k\lambda}{b}$ ,则第一级

( $k=1$ )暗纹距中心的距离为

$$x_1 = f \tan \varphi_1 \approx f \varphi_1 = 1.47 \times 10^{-3} \text{ m}$$

(2) 由明纹条件  $b \sin \varphi_2 = (2k+1) \frac{\lambda}{2}$ , 得  $\varphi_2 \approx \sin \varphi_2 = (2k+1) \frac{\lambda}{2b}$ , 则第二级

( $k=2$ )明纹距中心的距离为

$$x_2 = f \tan \varphi_2 \approx f \varphi_2 = 3.68 \times 10^{-3} \text{ m}$$

在上述计算中, 由于  $k$  取值较小, 即  $\varphi$  较小, 故  $\varphi \approx \sin \varphi \approx \tan \varphi$ . 如  $k$  取值较大, 则应严格计算.

(3) 斜入射时, 中央主极大移至点  $O'$ , 先计算点  $O'$  上方条纹的位置: 对于第一级暗纹, 有  $b(\sin 30^\circ - \sin \varphi'_1) = -\lambda$ ,  $\sin \varphi'_1 = \frac{\lambda}{b} + 0.5$ , 该暗纹距中心的距离

$$x'_1 = f \tan \varphi'_1 = f \tan \left[ \arcsin \left( \frac{\lambda}{b} + 0.5 \right) \right] = 0.580 \text{ m}$$

对于第二级明纹, 有  $b(\sin 30^\circ - \sin \varphi'_2) = -\frac{5\lambda}{2}$ ,  $\sin \varphi'_2 = \frac{5\lambda}{2b} + 0.5$ , 该明纹距中心的距离

$$x'_2 = f \tan \varphi'_2 = f \tan \left[ \arcsin \left( \frac{5\lambda}{2b} + 0.5 \right) \right] = 0.583 \text{ m}$$

再计算点  $O'$  下方条纹的位置 (由于所求  $k$  值较小, 其条纹应在  $O'$  与  $O$  之间): 对于第一级暗纹, 有  $b(\sin 30^\circ - \sin \varphi''_1) = \lambda$ ,  $\sin \varphi''_1 = 0.5 - \frac{\lambda}{b}$ , 该暗纹距中心的距离

$$x''_1 = f \tan \varphi''_1 = f \tan \left[ \arcsin \left( 0.5 - \frac{\lambda}{b} \right) \right] = 0.575 \text{ m}$$

对于第二级明纹, 有  $b(\sin 30^\circ - \sin \varphi''_2) = \frac{5\lambda}{2}$ ,  $\sin \varphi''_2 = 0.5 - \frac{5\lambda}{2b}$ , 该明纹距中心的距离

$$x''_2 = f \tan \varphi''_2 = f \tan \left[ \arcsin \left( 0.5 - \frac{5\lambda}{2b} \right) \right] = 0.572 \text{ m}$$

**讨论** 斜入射时, 中央主极大移至点  $O'$  (此时  $\varphi = i = 30^\circ$ ), 它距中心点  $O$  的距离为  $x_0 = f \tan 30^\circ = 0.577 \text{ m}$ , 由上述计算数据可知, 此时衍射条纹不但相对点  $O$  不对称, 而且相对中央主极大的点  $O'$  也不再严格对称了.

**11-29** 一单色平行光垂直照射于一单缝, 若其第三级明纹位置正好和波长为  $600 \text{ nm}$  的单色光垂直入射时的第二级明纹位置一样, 求前一种单色光的波长.

**分析** 采用比较法来确定波长. 对应于同一观察点, 两次衍射的光程差相同, 由于衍射明纹条件  $b \sin \varphi = (2k+1) \frac{\lambda}{2}$ , 故有  $(2k_1+1) \lambda_1 = (2k_2+1) \lambda_2$ , 在两明

纹级次和其中一种波长已知的情况下,即可求出另一种未知波长.

**解** 根据分析,将  $\lambda_2 = 600 \text{ nm}$ ,  $k_2 = 2$ ,  $k_1 = 3$  代入  $(2k_1 + 1)\lambda_1 = (2k_2 + 1)\lambda_2$ , 得

$$\lambda_1 = \frac{(2k_2 + 1)\lambda_2}{2k_1 + 1} = 428.6 \text{ nm}$$

**11-30** 已知单缝宽度  $b = 1.0 \times 10^{-4} \text{ m}$ , 透镜焦距  $f = 0.50 \text{ m}$ , 用  $\lambda_1 = 400 \text{ nm}$  和  $\lambda_2 = 760 \text{ nm}$  的单色平行光分别垂直照射, 求这两种光的第一级明纹离屏中心的距离, 以及这两条明纹之间的距离. 若用每厘米刻有 1 000 条刻线的光栅代替这个单缝, 则这两种单色光的第一级明纹分别距屏中心多远? 这两条明纹之间的距离又是多少?

**分析** 用含有两种不同波长的混合光照射单缝或光栅, 每种波长可在屏上独立地产生自己的一组衍射条纹, 屏上最终显示出两组衍射条纹的混合图样. 因而本题可根据单缝(或光栅)衍射公式分别计算两种波长的  $k$  级条纹的位置  $x_1$  和  $x_2$ , 并算出其条纹间距  $\Delta x = x_2 - x_1$ . 通过计算可以发现, 使用光栅后, 条纹将远离屏中心, 条纹间距也变大, 这是光栅的特点之一.

**解** (1) 当光垂直照射单缝时, 屏上第  $k$  级明纹的位置

$$x = (2k + 1) \frac{\lambda}{2b} f$$

当  $\lambda_1 = 400 \text{ nm}$  和  $k = 1$  时,

$$x_1 = 3.0 \times 10^{-3} \text{ m}$$

当  $\lambda_2 = 760 \text{ nm}$  和  $k = 1$  时,

$$x_2 = 5.7 \times 10^{-3} \text{ m}$$

其条纹间距为

$$\Delta x = x_2 - x_1 = 2.7 \times 10^{-3} \text{ m}$$

(2) 当光垂直照射光栅时, 屏上第  $k$  级明纹的位置为

$$x' = \frac{k\lambda}{d} f$$

而光栅常量为

$$d = \frac{10^{-2}}{10^3} \text{ m} = 10^{-5} \text{ m}$$

当  $\lambda_1 = 400 \text{ nm}$  和  $k = 1$  时,

$$x'_1 = 2.0 \times 10^{-2} \text{ m}$$

当  $\lambda_2 = 760 \text{ nm}$  和  $k = 1$  时,

$$x'_2 = 3.8 \times 10^{-2} \text{ m}$$

其条纹间距为

$$\Delta x' = x'_2 - x'_1 = 1.8 \times 10^{-2} \text{ m}$$

**11-31** 迎面而来的一辆汽车的两车头灯相距为 1.0 m,问在汽车离人多远时,它们刚能为人眼所分辨? 设瞳孔直径为 3.0 mm,光在空气中的波长  $\lambda = 500 \text{ nm}$ .

**分析** 两物体能否被分辨,取决于两物对光学仪器通光孔(包括人眼)的张角  $\theta$  和光学仪器的最小分辨角  $\theta_0$  的关系. 当  $\theta \geq \theta_0$  时能分辨,其中  $\theta = \theta_0$  为恰能分辨. 在本题中  $\theta_0 = 1.22 \frac{\lambda}{D}$  为一定值,而  $\theta \approx \frac{l}{d}$ ,式中  $l$  为两灯间距, $d$  为人与车之间的距离. $d$  越大或  $l$  越小, $\theta$  就越小,当  $\theta < \theta_0$  时两灯就不能被分辨,这与我们的生活经验相符合.

**解** 当  $\theta = \theta_0$  时,  $\frac{l}{d} = 1.22 \frac{\lambda}{D}$ ,此时,人与车之间的距离为

$$d = \frac{Dl}{1.22\lambda} = 4.918 \text{ m}$$

**11-32** 老鹰眼睛的瞳孔直径约为 6 mm,问其最多飞翔多高时可看清地面上身长为 5 cm 的小鼠? 设光在空气中的波长为 600 nm.

**解** 根据上题的分析:  $\theta_0 = 1.22\lambda/D$ . 这里  $D$  是鹰的瞳孔直径. 而  $\theta = L/h$ ,其中  $L$  为小鼠的身长,  $h$  为老鹰飞翔的高度. 恰好看清时  $\theta = \theta_0$ , 则由  $L/h = 1.22\lambda/D$ , 得飞翔高度:  $h = LD/(1.22\lambda) = 409.8 \text{ m}$ .

**11-33** 一束平行光垂直入射到某个光栅上,该光束有两种波长的光,  $\lambda_1 = 440 \text{ nm}$  和  $\lambda_2 = 660 \text{ nm}$ . 实验发现,两种波长的谱线(不计中央明纹)第二次重合于衍射角  $\varphi = 60^\circ$  的方向上,求此光栅的光栅常量.

**分析** 根据光栅衍射方程  $d \sin \varphi = \pm k\lambda$ ,两种不同波长的谱线,除  $k=0$  中央明纹外,同级明纹在屏上位置是不同的,如果重合,应是它们对应不同级次的明纹在相同衍射角方向上重合. 故由  $d \sin \varphi = k\lambda_1 = k'\lambda_2$  可求解本题.

**解** 由分析可知

$$d \sin \varphi = k\lambda_1 = k'\lambda_2$$

得

$$k/k' = \lambda_2/\lambda_1 = 3/2$$

上式表明第一次重合是  $\lambda_1$  的第三级明纹与  $\lambda_2$  的第二级明纹重合,第二次重合是  $\lambda_1$  的第六级明纹与  $\lambda_2$  的第四级明纹重合. 此时,  $k=6, k'=4, \varphi=60^\circ$ , 则光栅常量

$$d = k\lambda_1/\sin \varphi = 3.05 \times 10^{-6} \text{ m} = 3.05 \mu\text{m}$$

**11-34** 用一毫米内有 500 条刻痕的平面透射光栅观察钠光谱 ( $\lambda = 589 \text{ nm}$ ), 设透镜焦距  $f = 1.00 \text{ m}$ . 问: (1) 光线垂直入射时,最多能看到第几级光谱? (2) 光线以入射角  $30^\circ$  入射时,最多能看到第几级光谱? (3) 若用白光垂直照射光栅,第一级光谱的线宽度是多少?

**分析** (1) 首先确定光栅常量  $d = \frac{10^{-3}}{N} \text{ m}$ , 式中  $N$  为刻痕数, 然后由光线垂

直照射光栅时的衍射条件,即可解得结果.

(2) 如同光线倾斜入射单缝一样,此时光栅衍射的明纹条件改变为  $d(\sin i \pm \sin \varphi) = \pm k\lambda$  (详见习题 11-28 的分析), 由于两侧条纹不再对称, 令  $\sin \varphi = 1$ , 可求得  $k_{m1}$  和  $k_{m2}$  两个值, 其中一个比垂直入射时的  $k_m$  值小, 另一个比  $k_m$  值大, 因而, 在其他条件不变的情况下, 倾斜入射时可以观察到较高级次的条纹.

(3) 用白光照射光栅, 除中央明纹仍为白光外, 其余处出现一系列光谱带, 称为光栅光谱. 每个光谱带是由同一级次不同波长的明纹依次排列而成. 所谓第一级光谱的线宽度是指入射光中最小波长 (取  $\lambda_{\min} = 400 \text{ nm}$ ) 和最大波长 (取  $\lambda_{\max} = 760 \text{ nm}$ ) 的第一级明纹在屏上的间距, 其余波长的第一级明纹均出现在此范围内. 需要指出的是, 对于较高级次的光谱会出现相邻光谱间的交错重叠的现象.

解 (1) 光波垂直入射时, 光栅衍射明纹的条件为  $d \sin \varphi = \pm k\lambda$ , 令  $\sin \varphi = 1$ , 可得

$$k_m = \pm \frac{d}{\lambda} = \pm 3.39$$

取整数  $k_m = 3$ , 即最多能看到第三级光谱.

(2) 倾斜入射时, 光栅明纹的条件为

$$d(\sin i \pm \sin \varphi) = \pm k\lambda$$

令  $\sin \varphi = 1$ , 可求得位于中央主极大两侧, 能观察到条纹的最大  $k_m$  值分别为  $k_{m1} = 5$  和  $k_{m2} = 1$  (已取整数). 故在法线两侧能观察到的最大级次分别为五级和一级.

(3) 白光的波长范围为  $400 \text{ nm} \sim 760 \text{ nm}$ , 用白光垂直照射时, 由  $d \sin \varphi = k\lambda$  可得第一级 ( $k=1$ ) 光谱在屏上的位置. 对应于  $\lambda_1 = 400 \text{ nm}$  和  $\lambda_2 = 760 \text{ nm}$  的明纹的衍射角为  $\varphi_1 = \arcsin \frac{\lambda_1}{d}$ ;  $\varphi_2 = \arcsin \frac{\lambda_2}{d}$ , 利用  $\tan \varphi = \frac{x}{f}$  可得明纹的位置为

$$x_1 = f \tan \varphi_1 = 0.2 \text{ m}, \quad x_2 = f \tan \varphi_2 = 0.41 \text{ m}$$

则第一级光谱的线宽度为

$$\Delta x = x_2 - x_1 = 0.21 \text{ m}$$

**11-35** 波长为  $600 \text{ nm}$  的单色光垂直入射在一光栅上, 第二级主极大出现在  $\sin \varphi = 0.20$  处, 第四级缺级. 试问: (1) 光栅上相邻两缝的间距是多少? (2) 光栅上狭缝的宽度有多大? (3) 在  $-90^\circ < \varphi < 90^\circ$  范围内, 实际呈现的全部级数是多少?

分析 (1) 利用光栅方程  $d \sin \varphi = (b+b') \sin \varphi = \pm k\lambda$ , 即可由题给条件求出光栅常量  $d$  (即两相邻缝的间距). (2) 光栅衍射是多缝干涉的结果, 也可看成是

光透过许多平行的单缝衍射的结果. 缺级就是按光栅方程计算屏上某些应出现明纹的位置, 按各个单缝衍射计算恰是出现暗纹的位置. 因此可以利用光栅方程  $d \sin \varphi = (b+b') \sin \varphi = k\lambda$  和单缝衍射暗纹公式  $b \sin \varphi = k'\lambda$  计算缝宽和屏上缺级的情况, 从而求出屏上条纹总数.

解 (1) 由题已知  $k=2$  时,  $\sin \varphi = 0.20$ , 则由分析可得光栅常量

$$d = k\lambda / \sin \varphi = 6 \times 10^{-6} \text{ m} = 6 \text{ } \mu\text{m}$$

(2) 由分析知缺级条件

$$\begin{cases} (b+b') \sin \varphi = k\lambda & (k=0, \pm 1, \dots) \\ b \sin \varphi = k'\lambda & (k'=0, \pm 1, \dots) \end{cases}$$

则  $(b+b')/b = k/k' = m, k = mk'$ , 即  $mk'$  级明纹缺级.

由题意  $k=4$  缺级, 即

$$(b+b')/b = 4/k'$$

当  $k'=1$  时,  $m=4$ ,  $\begin{cases} b = 1.5 \text{ } \mu\text{m} \\ b' = 4.5 \text{ } \mu\text{m} \end{cases}$ , 即  $\pm 4, \pm 8, \pm 12, \dots$  级缺级 (符合题意);

当  $k'=2$  时,  $m=2$ , 第  $\pm 2, \pm 4, \pm 6, \dots$  级缺级 (第二级已存在, 不符合题意, 舍去);

当  $k'=3$  时,  $m = \frac{4}{3}$ ,  $\begin{cases} b = 4.5 \text{ } \mu\text{m} \\ b' = 1.5 \text{ } \mu\text{m} \end{cases}$ , 第  $\pm 4, \pm 8, \pm 12, \dots$  级缺级 (符合题意);

当  $k'=4$  时,  $m=1$ , 第  $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \dots$  级全部缺级 (不符合题意, 舍去).

因此, 狭缝宽度  $b$  为  $1.5 \text{ } \mu\text{m}$  或者  $4.5 \text{ } \mu\text{m}$ , 而缺级只发生在  $\pm 4, \pm 8, \pm 12, \dots$  级.

(3) 由光栅方程  $(b+b') \sin \varphi = \pm k\lambda$ , 可知屏上呈现条纹最高级次应满足  $k < (b+b')/\lambda = 10$ , 故考虑到缺级, 实际屏上呈现的级数为:  $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 5, \pm 6, \pm 7, \pm 9$ , 共 15 条.

**11-36** 以波长为  $0.11 \text{ nm}$  的 X 射线照射岩盐晶体, 实验测得 X 射线与晶面夹角为  $11.5^\circ$  时获得第一级反射极大. (1) 问岩盐晶体原子平面之间的间距  $d$  为多大? (2) 如以另一束待测 X 射线照射, 测得 X 射线与晶面夹角为  $17.5^\circ$  时获得第一级反射光极大, 求该 X 射线的波长.

分析 X 射线入射到晶体上时, 干涉加强条件为  $2d \sin \theta = k\lambda$  ( $k=0, 1, 2, \dots$ ) 式中  $d$  为晶格常量, 即晶体内原子平面之间的间距 (如图所示).

解 (1) 由布拉格公式

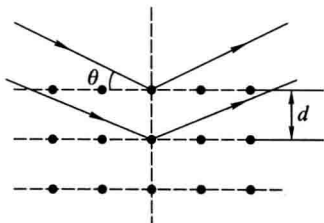
$$2d \sin \theta = k\lambda \quad (k=0, 1, 2, \dots)$$

第一级反射极大, 即  $k=1$ . 因此, 得

$$d = \lambda_1 / 2 \sin \theta_1 = 0.276 \text{ nm}$$

(2) 同理, 由  $2d \sin \theta_2 = k\lambda_2$ , 取  $k=1$ , 得

$$\lambda_2 = 2d \sin \theta_2 = 0.166 \text{ nm}$$



题 11-36 图

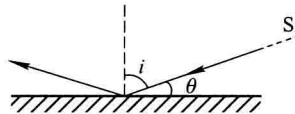
**11-37** 测得从一池静水的表面反射出来的太阳光是线偏振光,问此时太阳处在地平线的多大仰角处(水的折射率为 1.33)?

**分析** 设太阳光(自然光)以入射角  $i$  入射到水面,则所求仰角  $\theta = \frac{\pi}{2} - i$ . 当反射光起偏时,根据布儒斯特定律,有  $i = i_0 = \arctan \frac{n_2}{n_1}$  (其中  $n_1$  为空气的折射率,  $n_2$  为水的折射率).

**解** 根据以上分析,有

$$i_0 = i = \frac{\pi}{2} - \theta = \arctan \frac{n_2}{n_1}$$

则 
$$\theta = \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{n_2}{n_1} = 36.9^\circ$$



题 11-37 图

**11-38** 使自然光通过两个偏振化方向相交  $60^\circ$  的偏振片,透射光强为  $I_1$ ,今在这两个偏振片之间插入另一偏振片,它的方向与前两个偏振片均成  $30^\circ$  角,则透射光强为多少?

**分析** 设入射自然光强为  $I_0$ ,偏振片 I 对入射的自然光起起偏作用,透射的偏振光光强恒为  $\frac{I_0}{2}$ ,而偏振片 II 对入射的偏振光起检偏作用,此时透射与入射的偏振光强满足马吕斯定律.若偏振片 III 插入两块偏振片之间,则偏振片 II、III 均起检偏作用,故透射光强必须两次应用马吕斯定律方能求出.

**解** 根据以上分析,入射光通过偏振片 I 和 II 后,透射光强为

$$I_1 = \left( \frac{1}{2} I_0 \right) \cos^2 60^\circ$$

插入偏振片 III 后,其透射光强为

$$I_2 = \left[ \left( \frac{1}{2} I_0 \right) \cos^2 30^\circ \right] \cos^2 30^\circ$$

两式相比可得

$$I_2 = 2.25 I_1$$

**11-39** 一束光是自然光和平面线偏振光的混合,当它通过一偏振片时发现透射光的强度取决于偏振片的取向,其强度可以变化 5 倍.问入射光中两种光的强度各占总入射光强度的几分之几?

**分析** 偏振片的旋转,仅对入射的混合光中的线偏振光部分有影响,在偏振片旋转一周的过程中,当偏振光的振动方向平行于偏振片的偏振化方向时,透射光强最大;而相互垂直时,透射光强最小.分别计算最大透射光强  $I_{\max}$  和最小透射光强  $I_{\min}$ ,按题意用相比的方法即能求解.

**解** 设入射混合光强为  $I$ ,其中线偏振光强为  $xI$ ,自然光强为  $(1-x)I$ .按题



意旋转偏振片,则有

$$\text{最大透射光强} \quad I_{\max} = \left[ \frac{1}{2}(1-x) + x \right] I$$

$$\text{最小透射光强} \quad I_{\min} = \left[ \frac{1}{2}(1-x) \right] I$$

按题意  $I_{\max}/I_{\min} = 5$ , 则有

$$\frac{1}{2}(1-x) + x = 5 \times \frac{1}{2}(1-x)$$

解得  $x = 2/3$

即线偏振光占总入射光强的  $2/3$ , 自然光占  $1/3$ .

\* 11-40 试计算用方解石晶体制成的对波长分别为  $\lambda_1 = 589.3 \text{ nm}$  的钠黄光和  $\lambda_2 = 546.1 \text{ nm}$  的汞灯绿光的  $\frac{1}{4}$  波片的最小厚度.

解  $\frac{1}{4}$  波片的最小厚度  $d$  应满足  $|n_o - n_e| d = \frac{\lambda}{4}$ , 而方解石晶体中  $o$  光和  $e$  光的折射率分别为  $n_o = 1.658$  和  $n_e = 1.486$ . 故对  $\lambda_1$  和  $\lambda_2$  的  $\frac{1}{4}$  波片的最小厚度分别为

$$d_1 = \frac{\lambda_1}{4 |n_o - n_e|} = 857 \text{ nm}, \quad d_2 = \frac{\lambda_2}{4 |n_o - n_e|} = 794 \text{ nm}$$

\* 11-41 在偏振化方向相互平行的两偏振片间, 平行放置一片垂直于光轴切割的石英晶片. 已知石英对钠黄光的旋光率为  $21.7^\circ \text{ mm}^{-1}$ . 试问当石英晶片的厚度为多大时, 钠黄光不能通过第二个偏振片?

分析 按题意, 第一个偏振片透射的线偏振光将沿光轴方向进入石英晶片. 由于石英具有旋光性, 光的振动方向将向右或向左旋转一个角度  $\psi$ , 其大小与晶片厚度  $l$  成正比, 即  $\psi = \alpha l$ , 比例系数  $\alpha$  为晶体的旋光率. 很显然欲使钠黄光不能通过第二个偏振片, 旋光角度  $\psi$  应为  $90^\circ$ .

解 根据分析, 石英晶片的厚度为

$$l = \frac{\psi}{\alpha} = 4.15 \text{ mm}$$

\* 11-42 一块厚  $0.025 \text{ mm}$  的方解石晶片, 其表面与光轴平行, 放置在两正交的偏振片之间. 已知第一个偏振片的偏振化方向与晶片的光轴成  $45^\circ$  角. 现用白光垂直射入第一个偏振片, 问经第二个偏振片透射的可见光谱中, 缺少了哪些波长? 假定双折射率  $n_o - n_e = 0.172$  可看作常量.

分析 本题为偏振光的干涉问题. 按题意作图, 经方解石晶体透射的两束线偏振光(指  $o$  光与  $e$  光), 其振动方向相互垂直, 再经第二个偏振片的检偏作用后

成为相干光. 其相位差为  $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}(n_o - n_e)d + 0$  (或  $\pi$ ), 式中第一项为 o 光与 e 光通过晶片时产生的相位差, 第二项则为两光的  $A_o$  与  $A_e$  在  $N_2$  (第二个偏振片的偏振化方向) 上投影时有可能产生的附加相位差. 由图知, 本题应取  $\pi$ . 在可见光范围内讨论, 由于干涉相消条件, 可解得透射的可见光谱中少了哪些波长.

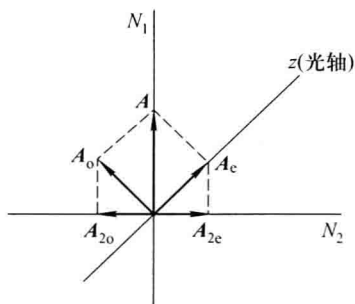
解 根据分析, 有

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}(n_o - n_e)d + \pi \quad (1)$$

$$\Delta\varphi = (2k+1)\pi \quad (2)$$

解上述两式可得

$$\lambda = \frac{(n_o - n_e)d}{k}$$



题 11-42 图

在可见光范围(400 nm ~ 760 nm)内讨论, 解得

$k$	6	7	8	9	10
$\lambda/\text{nm}$	717	614	538	478	430

很显然, 在缺少了上述波长后, 透射光不再是白光了.

讨论 若两偏振片的偏振化方向相互平行, 情况会如何?

\* 11-43 一平行超声波束入射于水中的平凸有机玻璃透镜的平的一面, 球面的曲率半径为 10 cm, 试求在水中时透镜的焦距. 假设超声波在水中的速度为  $u_1 = 1470 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ , 在有机玻璃中的速度为  $u_2 = 2680 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .

分析 薄透镜的像方焦距公式为  $f' = \frac{n_i}{\frac{n_L - n_o}{r_1} - \frac{n_i - n_L}{r_2}}$ , 弄清公式中各值代表的

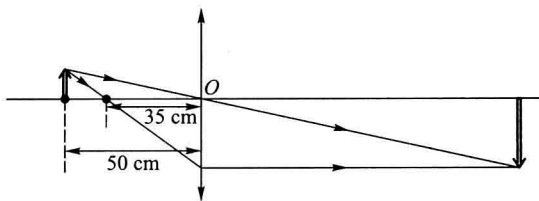
物理意义即可求解本题. 这里  $n_o$ 、 $n_i$  分别为透镜前、后介质的折射率, 由题意, 透镜前、后介质均为水, 故  $n_o = n_i = n_{\text{水}}$ ;  $n_L$  为透镜的折射率;  $r_1$  为透镜平的一面的曲率半径, 即  $r_1 = \infty$ ;  $r_2$  为透镜凸的一面的曲率半径, 即  $r_2 = -10 \text{ cm}$ .

解 由上述分析可得

$$f' = \frac{n_1}{\frac{n_2 - n_1}{r_1} - \frac{n_1 - n_2}{r_2}} = \frac{r_2}{1 - \frac{n_2}{n_1}} = \frac{r_2}{1 - \frac{u_1}{u_2}} = -22.1 \text{ cm}$$

\* 11-44 将一根短金属丝置于焦距为 35 cm 的会聚透镜的主轴上, 离开透镜的光心为 50 cm 处, 如图所示. (1) 试绘出成像光路图; (2) 求金属丝的成像位置.

分析 (1) 凸透镜的成像图只需画出两条特殊光线就可确定像的位置. 为此作出以下两条特殊光线: 过光心的入射光线折射后方向不变; 过物方焦点的入射光线通过透镜射出后平行于主光轴. (2) 在已知透镜像方焦距  $f'$  和物距  $p$  时, 利用薄透镜的成像公式  $\frac{1}{p'} - \frac{1}{p} = \frac{1}{f'}$  即可求得像的位置.



题 11-44 图

解 (1) 根据分析中所述方法作成像光路图如图所示.

(2) 由成像公式可得成像位置为

$$p' = \frac{pf'}{p+f'} = \frac{(-50) \times 35}{-50+35} \text{ cm} = 117 \text{ cm}$$

\* 11-45 月球的直径约为  $3.48 \times 10^6 \text{ m}$ , 它到地球的距离约为  $3.86 \times 10^8 \text{ m}$ . 求在焦距为  $4 \text{ m}$  的凹球面镜内月球像的直径.

分析 凹面镜的成像是反射成像, 其公式为  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f}$ . 式中  $p$  是物距,  $p'$  为像距,  $f$  为焦距. 根据教材中规定,  $p < 0, f < 0$ , 当物像同侧  $p' < 0$ , 物像不同侧  $p' > 0$ . 题中给了  $f$  与  $p$  的值, 代入可求  $p'$  值. 对近轴光线成像, 横向放大率为  $V = \left| \frac{p'}{p} \right|$ . 当  $V > 1$  表示放大,  $V < 1$  表示缩小.  $V$  的大小与物的大小无关. 求出  $V$  后就可求出月球成像的直径.

解 根据分析, 将  $p = -3.86 \times 10^8 \text{ m}, f = -4 \text{ m}$  代入公式  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f}$ , 得

$$p' \approx -4 \text{ m}$$

表示物与像在同一侧. 横向放大率为

$$V = \frac{p'}{p}$$

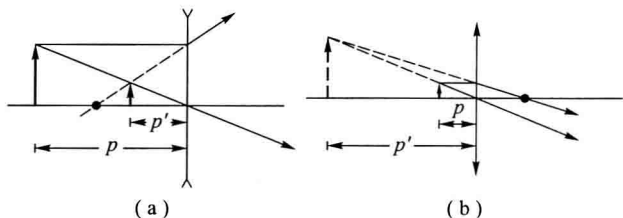
则月球像的直径为

$$d' = d \cdot V = d \frac{p'}{p} = 3.48 \times 10^6 \times \frac{-4}{-3.86 \times 10^8} \text{ m} = 3.6 \times 10^{-2} \text{ m}$$

\* 11-46 有甲、乙两人, 甲对  $0.5 \text{ m}$  以外的物看不清, 而乙对  $1 \text{ m}$  以内的物看不清. 问甲、乙两人各需配怎样的眼镜?

**分析** 甲为近视眼,远点为 0.5 m.为了校正这种远点不在无限远的缺点,需配一凹透镜,以使入射光束先发散一下,让无限远的物点在有限远点处成一虚像,原理如图(a)所示.根据教材规定的规则,在透镜成像公式  $\frac{1}{f'} = \frac{1}{p'} - \frac{1}{p}$  中,这里物距  $p = -\infty$ ,像距  $p' = 0.5$  m.由此可求出透镜像方焦距  $f'$  和透镜焦度  $\Phi = \frac{1}{f'}$ .

乙为远视眼,近点在 1.0 m 处,为了使眼前 25 cm(明视距离)处的物成虚像于所要校正的近点上,要配一凸透镜.原理如图(b)所示.同样由教材规定的规则,在透镜成像公式  $\frac{1}{f'} = \frac{1}{p'} - \frac{1}{p}$  中,  $p' = -1.0$  m,  $p = -0.25$  m,由此可求透镜像方焦距  $f'$  和透镜焦度  $\Phi = \frac{1}{f'}$ .



题 11-46 图

**解** 根据分析,对甲有

$$\frac{1}{f'} = \frac{1}{p'} - \frac{1}{p} = \frac{1}{-0.5 \text{ m}} - \frac{1}{-\infty} = -2 \text{ m}^{-1}$$

即像方焦距  $f' = -0.5$  m(凹透镜),透镜焦度  $\Phi = \frac{1}{f'} = -2$  屈光度,故甲需配 200 度的凹透镜.

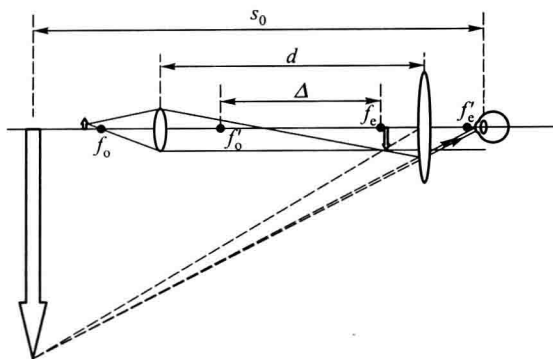
对乙有

$$\frac{1}{f'} = \frac{1}{p'} - \frac{1}{p} = \frac{1}{-1.0 \text{ m}} - \frac{1}{-0.25 \text{ m}} = 3 \text{ m}^{-1}$$

即透镜像方焦距  $f' = 0.33$  m(凸透镜),透镜焦度为 3 屈光度,故需配 300 度的凸透镜.

**11-47** 一架显微镜的物镜和目镜相距为 20 cm,物镜焦距为 7 mm,目镜的焦距为 5 mm,把物镜和目镜均看作薄透镜.试求:(1)被观察物到物镜的距离;(2)物镜的横向放大率;(3)显微镜的视角放大率.

**分析** (1) 如图所示为显微镜的工作原理.使用显微镜观察物体时,是将物体置于物镜物方焦点  $f_o$  外侧附近.调节物镜与目镜的间距  $d$ ,使物体经物镜放大成实像(显微镜的中间像)在目镜物方焦点  $f_e$  附近.由题意,图中  $d$  和  $f_e$  已知,可



题 11-47 图

以求得中间像到物镜的距离,即物体对物镜的像距  $p' = d - |f'_e|$ . 则利用薄透镜成像公式就可求得物体到物镜的距离  $p$ . (2) 物镜的横向放大率可由公式  $V = \frac{p'}{p}$  直接求出. 而显微镜的视角放大率由公式  $M = -\frac{s_0 \Delta}{f'_o f'_e}$  计算. 其中  $\Delta$  为物镜像方焦点到目镜物方焦点的距离.

解 (1) 由分析可知,显微镜的中间像对物镜的距离(像距)为

$$p' = d - |f'_e| = 195 \text{ mm}$$

而像方焦距  $f'_e = 7 \text{ mm}$ , 则由薄透镜成像公式  $\frac{1}{p'} - \frac{1}{p} = \frac{1}{f'_e}$  可得观察物到物镜的距离为

$$p = \frac{f'_e p'}{f'_e - p'} = \frac{7 \times 195}{7 - 195} \text{ mm} = -7.3 \text{ mm}$$

(2) 物镜的横向放大率为

$$V = \frac{p'}{p} = -26.7$$

(3) 由分析知  $\Delta = d - |f'_o| - |f'_e| = (200 - 7 - 5) \text{ mm} = 188 \text{ mm}$ , 则显微镜的视角放大率为

$$M = -\frac{250 \times 188}{(-7) \times (-5)} \approx -1\ 343$$

**11-48** 一天文望远镜,物镜与目镜相距  $90 \text{ cm}$ ,放大倍数为  $8 \times$  (即 8 倍),求物镜和目镜的焦距.

分析 望远镜的放大率为  $M = -\frac{f'_o}{f'_e}$ , 其中  $f'_o$  和  $f'_e$  分别为物镜和目镜的像方焦距. 而通常物镜的像方焦点和目镜的物方焦点几乎重合,即目镜和物镜的间距

为两者焦距之和,而题中已知  $f'_o + f'_e = 90$  cm,由此可求  $f'_o$  和  $f'_e$ .

解 由分析可知  $|M| = \frac{f'_o}{f'_e} = 8$ , 又  $f'_o + f'_e = 90$  cm, 则得物镜和目镜的像方焦距为

$$\begin{cases} f'_o = 80 \text{ cm} \\ f'_e = 10 \text{ cm} \end{cases}$$

## 第四篇

# 气体动理论 热力学基础

### 求解气体动理论和热力学问题的基本思路和方法

热运动包含气体动理论和热力学基础两部分. 气体动理论从物质的微观结构出发, 运用统计方法研究气体的热现象, 通过寻求宏观量与微观量之间的关系, 阐明气体的一些宏观性质和规律. 而热力学基础是从宏观角度通过实验现象研究热运动规律. 在求解这两章习题时要注意它们处理问题方法的差异. 气体动理论主要研究对象是理想气体, 求解这部分习题主要围绕以下三个方面: (1) 理想气体物态方程和能量均分定理的应用; (2) 麦克斯韦速率分布率的应用; (3) 有关分子碰撞平均自由程和平均碰撞频率. 热力学基础方面的习题则是围绕第一定律对理想气体的四个特殊过程(三个等值过程和一个绝热过程)和循环过程的应用, 以及计算热力学过程的熵变, 并用熵增定理判别过程的方向.

#### 1. 近似计算的应用

一般气体在温度不太低、压强不太大时, 可近似当作理想气体, 故理想气体也是一个理想模型. 气体动理论是以理想气体为模型建立起来的, 因此, 气体动理论所述的定律、定理和公式只能在一定条件下使用. 我们在求解气体动理论中有关问题时必须明确这一点. 然而, 这种从理想模型得出的结果在理论和实践上是有意义的. 例如理想气体的内能公式以及由此得出的理想气体的摩尔定容热容  $C_{v,m} = iR/2$  和摩尔定压热容  $C_{p,m} = (i+2)R/2$  都是近似公式, 它们与在通常温度下的实验值相差不大, 因此, 除了在低温情况下以外, 它们还都是可以使用的. 在实

际工作时如果要求精度较高,摩尔定容热容和摩尔定压热容应采用实验值.本书习题中有少数题给出了在某种条件下  $C_{v,m}$  和  $C_{p,m}$  的实验值就是这个道理.如习题中不给出实验值,可以采用近似的理论公式计算.

## 2. 热力学第一定律解题过程及注意事项

热力学第一定律  $Q = W + \Delta E$ , 其中功  $W = \int_{V_1}^{V_2} p dV$ , 内能增量  $\Delta E = \frac{m'}{M} \frac{i}{2} R \cdot$

$\Delta T$ . 本章习题主要是第一定律对理想气体的四个特殊过程(等体、等压、等温、绝热)以及由它们组成的循环过程的应用. 解题的主要过程:(1) 明确研究对象是什么气体(单原子还是双原子), 气体的质量或物质的量是多少?(2) 弄清系统经历的是些什么过程, 并掌握这些过程的特征.(3) 画出各过程相应的  $p-V$  图. 应当知道准确作出热力学过程的  $p-V$  图, 可以给出一个比较清晰的物理图像.(4) 根据各过程的方程和物态方程确定各状态的参量, 由各过程的特点和热力学第一定律就可计算出理想气体在各过程中的功、内能增量和吸放热了. 在计算中要注意  $Q$  和  $W$  的正、负取法.

## 3. 关于内能的计算

理想气体的内能是温度的单值函数, 是状态量, 与过程无关, 而功和热量是过程量, 在两个确定的初、末状态之间经历不同的过程, 功和热量一般是不一样的, 但内能的变化是相同的, 且均等于  $\Delta E = \frac{m'}{M} C_{v,m} (T_2 - T_1)$ . 因此, 对理想气体来说, 不论其经历什么过程都可用上述公式计算内能的增量. 同样, 我们在计算某一系统熵变的时候, 由于熵是状态量, 所以无论在初、末状态之间系统经历了什么过程, 初、末两个状态间的熵变是相同的. 所以, 要计算初、末两状态之间经历的不可逆过程的熵变, 可通过计算两状态之间可逆过程熵变来求得, 就是这个道理.

## 4. 麦克斯韦速率分布律的应用和分子碰撞的有关讨论

深刻理解麦克斯韦速率分布律的物理意义, 掌握速率分布函数  $f(v)$  和三种统计速率公式及物理意义是求解这部分习题的关键. 三种速率为  $v_p = \sqrt{2RT/M}$ ,  $\bar{v} = \sqrt{8RT/\pi M}$ ,  $\sqrt{\bar{v}^2} = \sqrt{3RT/M}$ . 注意它们的共同点都正比于  $\sqrt{T/M}$ , 而在物理意义上和用途上又有区别.  $v_p$  用于讨论分子速率分布图.  $\bar{v}$  用于讨论分子的碰撞;  $\sqrt{\bar{v}^2}$  用于讨论分子的平均平动动能. 解题中只要抓住这些特点就比较方便.

根据教学基本要求, 有关分子碰撞内容的习题求解比较简单, 往往只要记住平均碰撞频率公式  $\bar{Z} = \sqrt{2} \pi d^2 n \bar{v}$  和平均自由程  $\bar{\lambda} = \bar{v} / \bar{Z} = 1 / \sqrt{2} \pi d^2 n$ , 甚至只要知道  $\bar{Z} \propto \bar{v} n$ ,  $\bar{\lambda} \propto 1/n$  及  $\bar{v} \propto \sqrt{T/M}$  这种比值关系就可求解许多有关习题.



## 第十二章 气体动理论

**12-1** 处于平衡状态的一瓶氦气和一瓶氮气的分子数密度相同,分子的平均平动动能也相同,则它们( )

- (A) 温度,压强均不相同 (B) 温度相同,但氦气压强大于氮气的压强  
(C) 温度,压强都相同 (D) 温度相同,但氦气压强小于氮气的压强

**分析与解** 理想气体分子的平均平动动能  $\bar{\epsilon}_k = 3kT/2$ , 仅与温度有关. 因此当氦气和氮气的平均平动动能相同时, 温度也相同. 又由物态方程  $p = nkT$ , 当两者分子数密度  $n$  相同时, 它们压强也相同. 故选(C).

**12-2** 1 mol 氦气和 1 mol 氧气(视为刚性双原子分子理想气体), 当温度为  $T$  时, 其内能分别为( )

- (A)  $\frac{3}{2} RT, \frac{5}{2} kT$  (B)  $\frac{3}{2} kT, \frac{5}{2} kT$   
(C)  $\frac{3}{2} RT, \frac{3}{2} RT$  (D)  $\frac{3}{2} RT, \frac{5}{2} RT$

**分析与解** 温度为  $T$  时, 一个理想气体分子热运动的平均动能为  $\frac{i}{2} kT$ , 其中  $i$  是自由度. 对氦气  $i=3$  (单原子), 氧气  $i=5$  (刚性双原子分子). 而 1 mol 理想气体分子的内能, 是指 1 mol 气体分子的平均动能总和, 即  $E = N_A \frac{i}{2} kT = \frac{i}{2} RT$ , 故选(D).

**12-3** 三个容器 A、B、C 中装有同种理想气体, 其分子数密度  $n$  相同, 而方均根速率之比为  $(\bar{v}_A^2)^{1/2} : (\bar{v}_B^2)^{1/2} : (\bar{v}_C^2)^{1/2} = 1 : 2 : 4$ , 则其压强之比  $p_A : p_B : p_C$  为( )

- (A) 1 : 2 : 4 (B) 1 : 4 : 8 (C) 1 : 4 : 16 (D) 4 : 2 : 1

**分析与解** 分子的方均根速率为  $\sqrt{\bar{v}^2} = \sqrt{3RT/M}$ , 因此对同种理想气体有  $\sqrt{\bar{v}_A^2} : \sqrt{\bar{v}_B^2} : \sqrt{\bar{v}_C^2} = \sqrt{T_1} : \sqrt{T_2} : \sqrt{T_3}$ , 又由物态方程  $p = nkT$ , 当三个容器中分子数密度  $n$  相同时, 得  $p_1 : p_2 : p_3 = T_1 : T_2 : T_3 = 1 : 4 : 16$ . 故选(C).

**12-4** 在一个体积不变的容器中, 储有一定量的某种理想气体, 温度为  $T_0$  时, 气体分子的平均速率为  $\bar{v}_0$ , 分子平均碰撞频率为  $\bar{Z}_0$ , 平均自由程为  $\bar{\lambda}_0$ , 当气体温度升高为  $4T_0$  时, 气体分子的平均速率  $\bar{v}$ 、平均碰撞频率  $\bar{Z}$  和平均自由程  $\bar{\lambda}$  分别为( )

(A)  $\bar{v} = 4\bar{v}_0, \bar{Z} = 4\bar{Z}_0, \bar{\lambda} = 4\bar{\lambda}_0$  (B)  $\bar{v} = 2\bar{v}_0, \bar{Z} = 2\bar{Z}_0, \bar{\lambda} = \bar{\lambda}_0$

(C)  $\bar{v} = 2\bar{v}_0, \bar{Z} = 2\bar{Z}_0, \bar{\lambda} = 4\bar{\lambda}_0$  (D)  $\bar{v} = 4\bar{v}_0, \bar{Z} = 2\bar{Z}_0, \bar{\lambda} = \bar{\lambda}_0$

**分析与解** 理想气体分子的平均速率  $\bar{v} = \sqrt{8RT/\pi M}$ , 温度由  $T_0$  升至  $4T_0$ , 则平均速率变为  $2\bar{v}_0$ ; 又平均碰撞频率  $\bar{Z} = \sqrt{2}\pi d^2 n\bar{v}$ , 由于容器体积不变, 即分子数密度  $n$  不变, 则平均碰撞频率变为  $2\bar{Z}_0$ ; 而平均自由程  $\bar{\lambda} = 1/\sqrt{2}\pi d^2 n$ ,  $n$  不变, 则  $\bar{\lambda}$  也不变. 因此正确答案为 (B).

**12-5** 已知  $n$  为分子数密度,  $f(v)$  为麦克斯韦速率分布函数, 则  $nf(v)dv$  表示 ( )

(A) 速率  $v$  附近,  $dv$  区间内的分子数(B) 单位体积内速率在  $v \sim v+dv$  区间内的分子数(C) 速率  $v$  附近,  $dv$  区间内分子数占总分子数的比率(D) 单位时间内碰到单位器壁上, 速率在  $v \sim v+dv$  区间内的分子数

**分析与解** 麦克斯韦速率分布函数  $f(v) = dN/(Ndv)$ , 而  $n = N/V$ , 则有  $nf(v)dv = dN/V$ . 即表示单位体积内速率在  $v \sim v+dv$  区间内的分子数. 正确答案为 (B).

**12-6** 一打足气的自行车内胎若在  $7.0^\circ\text{C}$  时轮胎中空气压强为  $p_1 = 4.0 \times 10^5 \text{ Pa}$ , 则在温度变为  $37.0^\circ\text{C}$  时, 轮胎内空气压强为多少? (设内胎容积不变.)

**分析** 胎内空气可视为一定量的理想气体, 其始末状态均为平衡态, 由于气体的体积不变, 由理想气体物态方程  $pV = \frac{m}{M}RT$  可知, 压强  $p$  与温度  $T$  成正比. 由此即可求出末态的压强.

**解** 由分析可知, 当  $T_2 = (273.15 + 37.0) \text{ K} = 310.15 \text{ K}$  时, 轮胎内空气压强为

$$p_2 = T_2 p_1 / T_1 = 4.43 \times 10^5 \text{ Pa}$$

可见当温度升高时, 轮胎内气体压强变大, 因此, 夏季外出时自行车的车胎不宜充气太足, 以免爆胎.

**12-7** 在湖面下  $50.0 \text{ m}$  深处 (温度为  $4.0^\circ\text{C}$ ), 有一个体积为  $1.0 \times 10^{-5} \text{ m}^3$  的空气泡升到湖面上来, 若湖面的温度为  $17.0^\circ\text{C}$ , 求气泡到达湖面的体积. (取大气压强为  $p_0 = 1.013 \times 10^5 \text{ Pa}$ .)

**分析** 将气泡看成是一一定量的理想气体, 它位于湖底和上升至湖面代表两个不同的平衡状态. 利用理想气体物态方程即可求解本题. 位于湖底时, 气泡内的压强可用公式  $p = p_0 + \rho gh$  求出, 其中  $\rho$  为水的密度 (常取  $\rho = 1.0 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ ).

解 设气泡在湖底和湖面的状态参量分别为  $(p_1, V_1, T_1)$  和  $(p_2, V_2, T_2)$ . 由分析知湖底处压强为  $p_1 = p_2 + \rho gh = p_0 + \rho gh$ , 利用理想气体的物态方程

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2}$$

可得空气泡到达湖面的体积为

$$V_2 = p_1 T_2 V_1 / p_2 T_1 = (p_0 + \rho gh) T_2 V_1 / p_0 T_1 = 6.11 \times 10^{-5} \text{ m}^3$$

**12-8** 氧气瓶的容积为  $3.2 \times 10^{-2} \text{ m}^3$ , 其中氧气的压强为  $1.30 \times 10^7 \text{ Pa}$ , 氧气厂规定压强降到  $1.0 \times 10^6 \text{ Pa}$  时, 就应重新充气, 以免经常洗瓶. 某小型吹玻璃车间平均每天用去  $0.40 \text{ m}^3$  在  $1.01 \times 10^5 \text{ Pa}$  压强下的氧气, 问一瓶氧气能用多少天? (设使用过程中温度不变.)

**分析** 由于使用条件的限制, 瓶中氧气不可能完全被使用. 为此, 可通过两条不同的思路进行分析和求解: (1) 从氧气质量的角度来分析. 利用理想气体物态方程  $pV = m'RT/M$  可以分别计算出每天使用氧气的质量  $m_3$  和可供使用的氧气总质量 (即原瓶中氧气的总质量  $m_1$  和需充气时瓶中剩余氧气的质量  $m_2$  之差), 从而可求得使用天数  $n = (m_1 - m_2) / m_3$ . (2) 从容积角度来分析. 利用等温膨胀条件将原瓶中氧气由初态 ( $p_1 = 1.30 \times 10^7 \text{ Pa}$ ,  $V_1 = 3.2 \times 10^{-2} \text{ m}^3$ ) 膨胀到需充气条件下的终态 ( $p_2 = 1.00 \times 10^6 \text{ Pa}$ ,  $V_2$  待求), 比较可得  $p_2$  状态下实际使用掉的氧气的体积为  $V_2 - V_1$ . 同样将每天使用的氧气由初态 ( $p_3 = 1.01 \times 10^5 \text{ Pa}$ ,  $V_3 = 0.4 \text{ m}^3$ ) 等温压缩到压强为  $p_2$  的终态, 并算出此时的体积  $V'_2$ , 由此可得使用天数应为  $n = (V_2 - V_1) / V'_2$ .

**解 1** 根据分析有

$$m_1 = Mp_1 V_1 / RT, \quad m_2 = Mp_2 V_1 / RT, \quad m_3 = Mp_3 V_3 / RT$$

则一瓶氧气可用天数

$$n = (m_1 - m_2) / m_3 = (p_1 - p_2) V_1 / p_3 V_3 = 9.5$$

**解 2** 根据分析中所述, 由理想气体物态方程得等温膨胀后瓶内氧气在压强为  $p_2 = 1.00 \times 10^6 \text{ Pa}$  时的体积为

$$V_2 = p_1 V_1 / p_2$$

每天用去相同状态的氧气容积

$$V'_2 = p_3 V_3 / p_2$$

则瓶内氧气可用天数为

$$n = (V_2 - V_1) / V'_2 = (p_1 - p_2) V_1 / p_3 V_3 = 9.5$$

**12-9** 设想太阳是由氢原子组成的理想气体, 其密度可当作是均匀的. 若此理想气体的压强为  $1.35 \times 10^{14} \text{ Pa}$ . 试估计太阳的温度. (已知氢原子的质量  $m_H = 1.67 \times 10^{-27} \text{ kg}$ , 太阳半径  $R_S = 6.96 \times 10^8 \text{ m}$ , 太阳质量  $m_S = 1.99 \times 10^{30} \text{ kg}$ .)

**分析** 本题可直接运用物态方程  $p = nkT$  进行计算.

**解** 氢原子的数密度可表示为

$$n = m_s / (m_H V_s) = m_s / \left( m_H \cdot \frac{4}{3} \pi R_s^3 \right)$$

根据题给条件,由  $p = nkT$  可得太阳的温度为

$$T = p/nk = 4\pi\rho m_H R_s^3 / (3m_s k) = 1.16 \times 10^7 \text{ K}$$

**说明** 实际上太阳结构并非本题中所设想的理想化模型,因此,计算所得的太阳温度与实际的温度相差较大.估算太阳(或星体)表面温度的几种较实用的方法在教材第十五章有所介绍.

**12-10** 一容器内储有氧气,其压强为  $1.01 \times 10^5 \text{ Pa}$ ,温度为  $27^\circ \text{C}$ ,求:(1) 气体分子的数密度;(2) 氧气的密度;(3) 分子的平均平动动能;(4) 分子间的平均距离.(设分子间均匀等距排列.)

**分析** 在题中压强和温度的条件下,氧气可视为理想气体.因此,可由理想气体的物态方程、密度的定义以及分子的平均平动动能与温度的关系等求解.又因可将分子看成是均匀等距排列的,故每个分子占有的体积为  $V_0 = \bar{d}^3$ ,由数密度的含意可知  $V_0 = 1/n$ , $\bar{d}$  即可求出.

**解** (1) 单位体积分子数

$$n = p/kT = 2.44 \times 10^{25} \text{ m}^{-3}$$

(2) 氧气的密度

$$\rho = m' / V = pM/RT = 1.30 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$$

(3) 氧气分子的平均平动动能

$$\bar{\varepsilon}_k = 3kT/2 = 6.21 \times 10^{-21} \text{ J}$$

(4) 氧气分子的平均距离

$$\bar{d} = \sqrt[3]{1/n} = 3.45 \times 10^{-9} \text{ m}$$

通过对本题的求解,我们可以对通常状态下理想气体的分子数密度、平均平动动能、分子间平均距离等物理量的数量级有所了解.

**12-11**  $2.0 \times 10^{-2} \text{ kg}$  氢气装在  $4.0 \times 10^{-3} \text{ m}^3$  的容器内,当容器内的压强为  $3.90 \times 10^5 \text{ Pa}$  时,氢气分子的平均平动动能为多大?

**分析** 理想气体的温度是由分子的平均平动动能决定的,即  $\bar{\varepsilon}_k = 3kT/2$ .因此,根据题中给出的条件,通过物态方程  $pV = \frac{m'}{M}RT$ ,求出容器内氢气的温度即可得  $\bar{\varepsilon}_k$ .

**解** 由分析知氢气的温度  $T = \frac{MpV}{m'R}$ ,则氢气分子的平均平动动能为

$$\bar{\varepsilon}_k = 3kT/2 = 3pVMk/(2m'R) = 3.89 \times 10^{-22} \text{ J}$$

**12-12** 温度为0 °C 和 100 °C 时理想气体分子的平均平动动能各为多少? 欲使分子的平均平动动能等于 1 eV, 气体的温度需多高?

**解** 分子在 0 °C 和 100 °C 时平均平动动能分别为

$$\bar{\varepsilon}_1 = 3kT_1/2 = 5.65 \times 10^{-21} \text{ J}$$

$$\bar{\varepsilon}_2 = 3kT_2/2 = 7.72 \times 10^{-21} \text{ J}$$

由于  $1 \text{ eV} = 1.6 \times 10^{-19} \text{ J}$ , 因此, 分子具有 1 eV 平均平动动能时, 气体温度为

$$T = 2\bar{\varepsilon}_k/3k = 7.73 \times 10^3 \text{ K}$$

这个温度约为  $7.5 \times 10^3 \text{ }^\circ\text{C}$ .

**12-13** 当氢气和氦气的压强、体积和温度都相等时, 它们的质量比  $\frac{m'(\text{H}_2)}{m'(\text{He})}$  和内能比  $\frac{E(\text{H}_2)}{E(\text{He})}$  各为多少. (将氢气视为刚性双原子分子理想气体.)

**分析** 对理想气体有物态方程  $pV = \frac{m'}{M} RT$  成立, 故气体质量  $m' = \frac{pVM}{RT}$ , 其中  $M$  为摩尔质量. 而对理想气体, 其内能为温度的单值函数, 即  $E = \frac{m'}{M} \frac{i}{2} RT = \frac{i}{2} pV$  ( $i$  为自由度). 可见, 当  $p, V, T$  相同时, 质量比恰为摩尔质量之比, 内能之比恰为自由度之比.

**解** 由分析知

$$\frac{m'(\text{H}_2)}{m'(\text{He})} = \frac{M(\text{H}_2)}{M(\text{He})} = \frac{1}{2}, \quad \frac{E(\text{H}_2)}{E(\text{He})} = \frac{i(\text{H}_2)}{i(\text{He})} = \frac{5}{3}$$

**12-14** 某些恒星的温度可达到约  $1.0 \times 10^8 \text{ K}$ , 这也是发生聚变反应 (也称热核反应) 所需的温度. 在此温度下, 恒星可视为由质子组成. 求: (1) 质子的平均动能是多少? (2) 质子的方均根速率为多大?

**分析** 将组成恒星的大量质子视为理想气体, 质子可作为质点, 其自由度  $i=3$ , 因此, 质子的平均动能就等于平均平动动能. 此外, 由平均平动动能与温度的关系  $m\bar{v}^2/2 = 3kT/2$ , 可得方均根速率  $\sqrt{\bar{v}^2}$ .

**解** (1) 由分析可得质子的平均动能为

$$\bar{\varepsilon}_k = m\bar{v}^2/2 = 3kT/2 = 2.07 \times 10^{-15} \text{ J}$$

(2) 质子的方均根速率为

$$\sqrt{\bar{v}^2} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = 1.58 \times 10^6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

**12-15** 星际空间温度可达 2.7 K, 试求温度为 300.0 K 和 2.7 K 的氢气分子的平均速率、方均根速率及最概然速率.

**分析** 分清平均速率  $\bar{v}$ 、方均根速率  $\sqrt{v^2}$  及最概然速率  $v_p$  的物理意义, 并利用三种速率相应的公式即可求解.

**解** 氢气的摩尔质量  $M = 2 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}$ , 气体温度  $T_1 = 300.0 \text{ K}$ , 则有

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8RT_1}{\pi M}} = 1.78 \times 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\sqrt{v^2} = \sqrt{\frac{3RT_1}{M}} = 1.93 \times 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$v_p = \sqrt{\frac{2RT_1}{M}} = 1.58 \times 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

气体温度  $T_2 = 2.7 \text{ K}$  时, 有

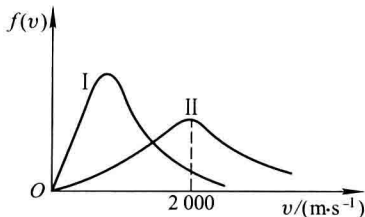
$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8RT_2}{\pi M}} = 1.69 \times 10^2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\sqrt{v^2} = \sqrt{\frac{3RT_2}{M}} = 1.83 \times 10^2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$v_p = \sqrt{\frac{2RT_2}{M}} = 1.50 \times 10^2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

**12-16** 图中 I、II 两条曲线分别是两种不同气体(氢气和氧气)在同一温度下的麦克斯韦分子速率分布曲线. 试由图中数据求:(1) 氢气分子和氧气分子的最概然速率;(2) 两种气体所处的温度;(3) 若图中 I、II 分别表示氢气在不同温度下的麦克斯韦分子速率分布曲线, 那么哪条曲线的气体温度较高?

**分析** 由  $v_p = \sqrt{2RT/M}$  可知, 在相同温度下, 由于不同气体的摩尔质量不同, 它们的最概然速率  $v_p$  也就不同. 因  $M_{\text{H}_2} < M_{\text{O}_2}$ , 故氢气比氧气的  $v_p$  要大, 由此可判定图中曲线 II 所标  $v_p = 2.0 \times 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  应是对应于氢气分子的最概然速率. 从而可求出该曲线所对应的温度. 又因曲线 I、II 所处的温度相同, 故曲线 I 中氧气的最概然速率也可按上式求得. 同样, 由  $v_p = \sqrt{2RT/M}$  可知, 如果是同种气体, 当温度不同时, 最概然速率  $v_p$  也不同. 温度越高,  $v_p$  越大. 而曲线 II 对应的  $v_p$  较大, 因而代表气体温度较高状态.



题 12-16 图

**解** (1) 由分析知氢气分子的最概然速率为

$$(v_p)_{\text{H}_2} = \sqrt{2RT/M_{\text{H}_2}} = 2.0 \times 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

利用  $M_{\text{O}_2}/M_{\text{H}_2} = 16$  可得氧气分子的最概然速率为

$$(v_p)_{\text{O}_2} = (v_p)_{\text{H}_2}/4 = 5.0 \times 10^2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

(2) 由  $v_p = \sqrt{2RT/M}$  得气体温度

$$T = v_p^2 M / 2R = 4.81 \times 10^2 \text{ K}$$

(3) II 代表气体温度较高状态.

**12-17** 日冕的温度为  $2.0 \times 10^6 \text{ K}$ , 所喷出的电子气可视为理想气体. 试求其中电子的方均根速率和热运动平均动能.

解 方均根速率为

$$\sqrt{v^2} = \sqrt{3kT/m_e} = 9.5 \times 10^6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

平均动能为

$$\bar{\varepsilon}_k = 3kT/2 = 4.1 \times 10^{-17} \text{ J}$$

**12-18** 在容积为  $2.0 \times 10^{-3} \text{ m}^3$  的容器中, 有内能为  $6.75 \times 10^2 \text{ J}$  的刚性双原子分子的理想气体. (1) 求气体的压强; (2) 若容器中分子总数为  $5.4 \times 10^{22}$  个, 求分子的平均平动动能及气体的温度.

分析 (1) 一定量理想气体的内能  $E = \frac{m'}{M} \frac{i}{2} RT$ , 对刚性双原子分子而言,  $i=5$ . 由上述内能公式和理想气体物态方程  $pV = \frac{m'}{M} RT$  可解出气体的压强. (2) 求得压强后, 再依据题给数据可求得分子数密度, 则由公式  $p = nkT$  可求气体温度. 气体分子的平均平动动能可由  $\bar{\varepsilon}_k = 3kT/2$  求出.

解 (1) 由  $E = \frac{m'}{M} \frac{i}{2} RT$  和  $pV = \frac{m'}{M} RT$  可得气体压强

$$p = 2E/(iV) = 1.35 \times 10^5 \text{ Pa}$$

(2) 分子数密度  $n = N/V$ , 则该气体的温度

$$T = p/(nk) = pV/(Nk) = 3.62 \times 10^2 \text{ K}$$

气体分子的平均平动动能为

$$\bar{\varepsilon}_k = 3kT/2 = 7.49 \times 10^{-21} \text{ J}$$

**12-19** 温度相同的氢气和氧气, 若氢气分子的平均平动动能为  $6.21 \times 10^{-21} \text{ J}$ , 试求: (1) 氧气分子的平均平动动能及温度; (2) 氧气分子的最概然速率.

分析 (1) 理想气体分子的平均平动动能  $\bar{\varepsilon}_k = 3kT/2$ , 是温度的单值函数, 与气体种类无关. 因此, 氧气和氢气在相同温度下具有相同的平均平动动能, 从而可以求出氧气的温度. (2) 知道温度后再由最概然速率公式  $v_p = \sqrt{2RT/M}$  即可求解  $v_p$ .

解 (1) 由分析知氧气分子的平均平动动能为  $\bar{\varepsilon}_k = 3kT/2 = 6.21 \times 10^{-21} \text{ J}$ , 则氧气的温度为

$$T = 2\bar{\varepsilon}_k/3k = 300 \text{ K}$$

(2) 氧气的摩尔质量  $M = 3.2 \times 10^{-2} \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}$ , 则有

$$v_p = \sqrt{2RT/M} = 3.95 \times 10^2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

**12-20** 声波在理想气体中传播的速率正比于气体分子的方均根速率. 问声波通过氧气的速率与通过氢气的速率之比为多少? 设这两种气体都为理想气体并具有相同的温度.

分析 由题意声波速率  $u$  与气体分子的方均根速率成正比, 即  $u \propto \sqrt{v^2}$ ; 而在一定温度下, 气体分子的方均根速率  $\sqrt{v^2} \propto \sqrt{1/M}$ , 式中  $M$  为气体的摩尔质量. 因此, 在一定温度下声波速率  $u \propto \sqrt{1/M}$ .

解 依据分析可设声速  $u = A\sqrt{1/M}$ , 式中  $A$  为比例常量. 则声波通过氧气与氢气的速率之比为

$$\frac{u_{\text{O}_2}}{u_{\text{H}_2}} = \sqrt{\frac{M_{\text{H}_2}}{M_{\text{O}_2}}} = 0.25$$

**12-21** 已知质点离开地球引力作用所需的逃逸速率为  $v = \sqrt{2gR_E}$ , 其中  $R_E$  为地球半径. (1) 若使氢气分子和氧气分子的平均速率分别与逃逸速率相等, 它们各自应有多高的温度? (2) 说明大气层中为什么氢气比氧气要少. (取  $R_E = 6.40 \times 10^6 \text{ m}$ .)

分析 气体分子热运动的平均速率  $\bar{v} = \sqrt{8RT/\pi M}$ , 对于摩尔质量  $M$  不同的气体分子, 为使  $\bar{v}$  等于逃逸速率  $v$ , 所需的温度是不同的; 如果环境温度相同, 则摩尔质量  $M$  较小的就容易达到逃逸速率.

解 (1) 由题意逃逸速率  $v = \sqrt{2gR_E}$ , 而分子热运动的平均速率  $\bar{v} = \sqrt{8RT/\pi M}$ . 当  $\bar{v} = v$  时, 有

$$T = \frac{\pi MR_E g}{4R}$$

由于氢气的摩尔质量  $M_{\text{H}_2} = 2.0 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}$ , 氧气的摩尔质量  $M_{\text{O}_2} = 3.2 \times 10^{-2} \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}$ , 则它们达到逃逸速率时所需的温度分别为

$$T_{\text{H}_2} = 1.18 \times 10^4 \text{ K}, \quad T_{\text{O}_2} = 1.89 \times 10^5 \text{ K}$$

(2) 根据上述分析, 当温度相同时, 氢气的平均速率比氧气的要大(约为4倍), 因此达到逃逸速率的氢气分子比氧气分子多. 按大爆炸理论, 宇宙在形成过程中经历了一个极高温过程. 在地球形成的初期, 虽然温度已大大降低, 但温



度值还是很高. 因而, 在气体分子产生过程中就开始有分子逃逸地球, 其中氢气分子比氧气分子更易逃逸. 另外, 虽然目前的大气层温度不可能达到上述计算结果中逃逸速率所需的温度, 但由麦克斯韦分子速率分布曲线可知, 在任一温度下, 总有一些气体分子的运动速率大于逃逸速率. 从分布曲线也可知道在相同温度下氢气分子能达到逃逸速率的可能性大于氧气分子. 故大气层中氢气比氧气要少.

**12-22** 一储有氧气(可视为刚性分子理想气体)的钢瓶随汽车以  $40 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  的速度运动, 汽车突然刹车停止运动. 假设钢瓶内气体的原定向机械运动的动能 80% 变为气体分子热运动的动能, 问钢瓶内氧气温度的升高多少?

**分析** 容器作匀速直线运动时, 容器内分子除了相对容器作杂乱无章的热运动外, 还和容器一起作定向运动. 其定向运动动能为  $\frac{1}{2} m'v^2$  (即机械能). 按照题意, 突然停止后, 这部分能量的 80% 转化为系统内能. 而对一定量理想气体, 内能是温度的单值函数, 则有关系式:  $\Delta E = (m'v^2/2) \cdot 80\% = \frac{m'}{M} \frac{5}{2} R\Delta T$  成立, 从而可求  $\Delta T$ .

**解** 根据分析中所得

$$\Delta E = (m'v^2/2) \cdot 80\% = \frac{m'}{M} \frac{5}{2} R\Delta T$$

式中  $m'$  为容器中氧气质量,  $M = 3.2 \times 10^{-2} \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}$  为氧气的摩尔质量, 由此可解得

$$\Delta T = 0.986 \text{ K}$$

**12-23** 某容器内装有一定量的氢气. 求氢气在 300 K 时分子速率在  $(v_p - 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1})$  与  $(v_p + 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1})$  之间的分子数所占容器内总分子数的百分比.

**分析** 求解本题要掌握教材中介绍的两个知识点, 一个是温度为  $T$  时理想气体分子的方均根速率, 即  $v_p = \sqrt{\frac{2RT}{M}}$ ; 另一个是关于麦克斯韦速率分布函数  $f(v)$  的物理意义.  $f(v) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2kT}}$  表示系统内理想气体分子在速率  $v$  附近, 单位速率区间内的分子数占总分子数的百分比, 即  $f(v) = \frac{dN}{N \cdot dv}$ . 当速率区间较小时, 常可用该式作近似计算, 即  $f(v) \approx \frac{\Delta N}{N \cdot \Delta v}$ . 因此, 对于本题要求的结果, 可由式  $\frac{\Delta N}{N} \approx f(v_p) \cdot \Delta v$  求出.

**解** 由分析知, 速率在  $(v_p - 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1})$  到  $(v_p + 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1})$  间分子数占总分

子数的百分比为

$$\frac{\Delta N}{N} \approx f(v_p) \cdot \Delta v = 4\pi \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{mv_p^2}{2kT}} v_p^2 \cdot \Delta v$$

将方均根速率  $v_p = \sqrt{\frac{2RT}{M}}$ , 分子质量  $m = \frac{M}{N_A}$  代入上式, 并利用  $N_A k = R$ ,  $\Delta v = 20 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ , 得

$$\frac{\Delta N}{N} = 4 \left( \frac{M}{2\pi RT} \right)^{1/2} e^{-1} \cdot \Delta v = 4 \left( \frac{2 \times 10^{-3}}{2 \times 3.14 \times 8.31 \times 300} \right)^{1/2} e^{-1} \cdot 20 = 1.05\%$$

**12-24** 有  $N$  个质量均为  $m$  的同种气体分子, 它们的速率分布如图所示.

(1) 说明曲线与横坐标所包围的面积的含义; (2) 由  $N$  和  $v_0$  求  $a$  值; (3) 求在速率  $v_0/2$  到  $3v_0/2$  间隔内的分子数; (4) 求分子的平均平动动能.

**分析** 处理与气体分子速率分布曲线有关的问题时, 关键要理解分布函数  $f(v)$  的物理意义.  $f(v) = dN/Ndv$ , 题中纵坐标  $Nf(v) = dN/dv$ , 即处于速率  $v$  附近单位速率区间内的分子数. 同时要掌握  $f(v)$  的归一化条件, 即  $\int_0^{\infty} f(v) dv = 1$ . 在此基础上, 根据分布函数并运用数学方法 (如函数求平均值或极值等), 即可求解本题.

**解** (1) 由于分子所允许的速率在  $0$  到  $2v_0$  的范围内, 由归一化条件可知图中曲线下的面积

$$S = \int_0^{2v_0} Nf(v) dv = N$$

即曲线下面积表示系统分子总数  $N$ .

(2) 从图中可知, 在  $0$  到  $v_0$  区间内,  $Nf(v) = av/v_0$ ; 而在  $v_0$  到  $2v_0$  区间,  $Nf(v) = a$ . 则利用归一化条件有

$$N = \int_0^{v_0} \frac{av}{v_0} dv + \int_{v_0}^{2v_0} a dv$$

得

$$a = 2N/3v_0$$

(3) 速率在  $v_0/2$  到  $3v_0/2$  间隔内的分子数为

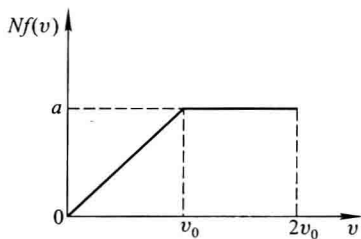
$$\Delta N = \int_{v_0/2}^{v_0} \frac{av}{v_0} dv + \int_{v_0}^{3v_0/2} a dv = 7N/12$$

(4) 分子速率平方的平均值按定义为

$$\overline{v^2} = \int_0^{\infty} v^2 dN/N = \int_0^{\infty} v^2 f(v) dv$$

故分子的平均平动动能为

$$\bar{\epsilon}_k = \frac{1}{2} m \overline{v^2} = \frac{1}{2} m \left( \int_0^{v_0} \frac{a}{Nv_0} v^3 dv + \int_{v_0}^{2v_0} \frac{a}{N} v^2 dv \right) = \frac{31}{36} m v_0^2$$



题 12-24 图

**12-25** 试用麦克斯韦分子速率分布定律导出方均根速率和最概然速率。

分析 麦克斯韦分子速率分布函数为

$$f(v) = 4\pi \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} v^2 \exp\left( -\frac{mv^2}{2kT} \right)$$

采用数学中对连续函数求自变量平均值的方法,求解分子速率平方的平均值,即

$$\overline{v^2} = \frac{\int v^2 dN}{\int dN}, \text{从而得出方均根速率. 由于分布函数较复杂,在积分过程中需作适当的}$$

数学代换. 另外,最概然速率是指麦克斯韦分子速率分布函数极大值所对应的速率,因而可采用求函数极值的方法求得.

解 (1) 根据分析可得分子的方均根速率为

$$\sqrt{\overline{v^2}} = \left( \int_0^\infty v^2 dN/N \right)^{1/2} = \left[ \int_0^\infty 4\pi \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} v^4 \exp\left( -\frac{mv^2}{2kT} \right) dv \right]^{1/2}$$

令  $mv^2/2kT = x^2$ , 则有

$$\sqrt{\overline{v^2}} = \left[ \frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{2kT}{m} \int_0^\infty x^4 e^{-x^2} dx \right]^{1/2} = \left( \frac{3kT}{m} \right)^{1/2} \approx 1.73 \left( \frac{RT}{M} \right)^{1/2}$$

(2) 令  $df(v)/dv = 0$ , 即

$$4\pi \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \left[ 2v \exp\left( -\frac{mv^2}{2kT} \right) - 2v^2 \frac{mv}{2kT} \exp\left( -\frac{mv^2}{2kT} \right) \right] = 0$$

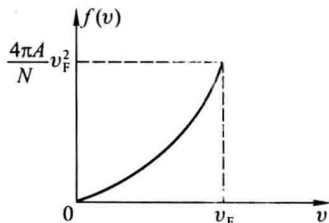
得 
$$v = v_p = \left( \frac{2kT}{m} \right)^{1/2} \approx 1.41 \left( \frac{RT}{M} \right)^{1/2}$$

**12-26** 导体中自由电子的运动可看作类似于气体分子的运动(故称电子气). 设导体中共有  $N$  个自由电子, 其中电子的最大速率为  $v_F$  (称为费米速率). 电子在速率  $v \sim v+dv$  之间的概率为

$$\frac{dN}{N} = \begin{cases} \frac{4\pi A}{N} v^2 dv & (v_F > v > 0, A \text{ 为常量}) \\ 0 & (v > v_F) \end{cases}$$

(1) 画出分布函数图; (2) 用  $N, v_F$  定出常量  $A$ ; (3) 证明电子气中电子的平均动能  $\bar{\epsilon} = 3\epsilon_F/5$ , 其中  $\epsilon_F = mv_F^2/2$  称为费米能.

分析 理解速率分布函数的物理意义, 就不难求解本题. 速率分布函数  $f(v) = \frac{1}{N} \frac{dN}{dv}$ , 表示在  $v$  附近单位速率区间的粒子数占总粒子数的百分比. 它应满足归一化条件  $\int_0^\infty f(v) dv =$



题 12-26 图

$\int_0^{v_F} f(v) dv = 1$ , 因此根据题给条件可得  $f(v) - v$  的函数关系, 由此可作出解析图和求出  $A$ . 在  $f(v) - v$  函数关系确定的情况下, 由  $\overline{v^2} = \int v^2 f(v) dv$  可以求出  $\overline{v^2}$ , 从而求出  $\overline{\varepsilon} = m\overline{v^2}/2$ .

解 (1) 由题设可知, 电子的速率分布函数

$$f(v) = \begin{cases} \frac{4\pi A}{N} v^2 & (v_F > v > 0) \\ 0 & (v > v_F) \end{cases}$$

其分布函数图如图所示.

(2) 利用分析中所述归一化条件, 有  $\int_0^{v_F} \frac{4\pi A}{N} v^2 dv = 1$ , 得

$$A = 3N/4\pi v_F^3$$

(3)  $\overline{v^2} = \int_0^{v_F} v^2 f(v) dv = \int_0^{v_F} \frac{4\pi A}{N} v^4 dv = \frac{4\pi A v_F^5}{5N} = \frac{3v_F^2}{5}$

$$\overline{\varepsilon} = m\overline{v^2}/2 = 3\varepsilon_F/5$$

**12-27** 一飞机在地面时机舱中的压力计指示为  $1.01 \times 10^5$  Pa, 到高空后压强降为  $8.11 \times 10^4$  Pa. 设大气的温度均为  $27.0^\circ\text{C}$ . 问此时飞机距地面的高度为多少? (设空气的摩尔质量为  $2.89 \times 10^{-2} \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}$ .)

分析 当温度不变时, 大气压强随高度的变化主要是因为分子数密度的改变而造成. 气体分子在重力场中的分布满足玻耳兹曼分布. 利用地球表面附近气压公式  $p = p_0 \exp(-mgh/kT)$ , 即可求得飞机的高度  $h$ . 式中  $p_0$  是地面的大气压强.

解 飞机高度为

$$h = \frac{kT}{mg} \ln(p_0/p) = \frac{RT}{Mg} \ln(p_0/p) = 1.93 \times 10^3 \text{ m}$$

**12-28** 在压强为  $1.01 \times 10^5$  Pa 下, 氮气分子的平均自由程为  $6.0 \times 10^{-6}$  cm. 当温度不变时, 在多大压强下, 其平均自由程为  $1.0$  mm?

分析 气体分子热运动的平均自由程  $\bar{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n}$ , 其中分子数密度  $n$  由物态方程  $p = nkT$  确定, 因此在温度一定时, 平均自由程  $\bar{\lambda} \propto 1/p$ .

解 由分析知平均自由程  $\bar{\lambda} \propto 1/p$ . 当自由程由  $\bar{\lambda}_1$  改变为  $\bar{\lambda}_2$  时, 其压强为

$$p_2 = (\bar{\lambda}_1/\bar{\lambda}_2)p_1 = 6.06 \text{ Pa}$$

**12-29** 目前实验室获得的极限真空约为  $1.33 \times 10^{-11}$  Pa, 这与距地球表面  $1.0 \times 10^4$  km 处的压强大致相等. 而电视机显像管的真空度为  $1.33 \times 10^{-3}$  Pa, 试求在  $27^\circ\text{C}$  时这两种不同压强下单位体积中的分子数及分子的平均自由程 (设气

体分子的有效直径  $d = 3.0 \times 10^{-8}$  cm).

解 理想气体分子数密度和平均自由程分别为  $n = p/kT$ ;  $\bar{\lambda} = kT/\sqrt{2} \pi d^2 p$ , 压强为  $1.33 \times 10^{-11}$  Pa 时, 有

$$n = p/kT = 3.21 \times 10^9 \text{ m}^{-3}$$

$$\bar{\lambda} = kT/\sqrt{2} \pi d^2 p = 7.8 \times 10^8 \text{ m}$$

从  $\bar{\lambda}$  的值可见分子几乎不发生碰撞. 压强为  $1.33 \times 10^{-3}$  Pa 时, 有

$$n = p/kT = 3.21 \times 10^{17} \text{ m}^{-3}$$

$$\bar{\lambda} = kT/\sqrt{2} \pi d^2 p = 7.8 \text{ m}$$

此时分子的平均自由程变小, 碰撞概率变大. 但相对显像管的尺寸而言, 碰撞仍很少发生.

12-30 若氖气分子的有效直径为  $2.59 \times 10^{-8}$  cm, 问在温度为 600 K, 压强为  $1.33 \times 10^2$  Pa 时氖气分子 1 s 内的平均碰撞次数为多少?

分析 分子 1 s 内的平均碰撞次数即平均碰撞频率  $\bar{Z} = \sqrt{2} \pi d^2 n \bar{v}$ , 其中分子数密度  $n$  及平均速率  $\bar{v}$  可利用物态方程  $p = nkT$  和平均速率  $\bar{v} = (8RT/\pi M)^{1/2}$  公式分别求出.

解 由分析可得氖气分子的平均碰撞频率

$$\begin{aligned} \bar{Z} &= \sqrt{2} \pi d^2 n \bar{v} = \sqrt{2} \pi d^2 \left( \frac{p}{kT} \right) \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}} \\ &= 3.81 \times 10^6 \text{ s}^{-1} \end{aligned}$$

12-31 在一定的压强下, 温度为 20 °C 时, 氩气和氮气分子的平均自由程分别为  $9.9 \times 10^{-8}$  m 和  $27.5 \times 10^{-8}$  m. 试求: (1) 氩气和氮气分子的有效直径之比; (2) 当温度不变且压强为原值的一半时, 氮气分子的平均自由程和平均碰撞频率.

分析 (1) 气体分子热运动的平均自由程  $\bar{\lambda} = 1/(\sqrt{2} \pi d^2 n) = kT/(\sqrt{2} \pi d^2 p)$ , 因此, 温度、压强一定时, 平均自由程  $\bar{\lambda} \propto 1/d^2$ . (2) 当温度不变时, 平均自由程  $\bar{\lambda} \propto 1/p$ .

解 (1) 由分析可知

$$d_{\text{Ar}}/d_{\text{N}_2} = \sqrt{\bar{\lambda}_{\text{N}_2}/\bar{\lambda}_{\text{Ar}}} = 1.67$$

(2) 由分析可知氮气分子的平均自由程在压强降为原值的一半时, 有

$$\bar{\lambda}'_{\text{N}_2} = 2 \bar{\lambda}_{\text{N}_2} = 5.5 \times 10^{-7} \text{ m}$$

而此时的分子平均碰撞频率为

$$\bar{Z}_{\text{N}_2} = \frac{\bar{v}_{\text{N}_2}}{\bar{\lambda}'_{\text{N}_2}} = \frac{\sqrt{8RT/\pi M_{\text{N}_2}}}{2 \bar{\lambda}_{\text{N}_2}}$$

将  $T = 293 \text{ K}$ ,  $M_{\text{N}_2} = 2.8 \times 10^{-2} \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}$  代入, 可得

$$\bar{Z}_{\text{N}_2} = 8.56 \times 10^8 \text{ s}^{-1}$$

**12-32** 对于  $\text{CO}_2$  气体有范德瓦耳斯常量  $a = 0.37 \text{ Pa} \cdot \text{m}^6 \cdot \text{mol}^{-2}$ ,  $b = 4.3 \times 10^{-5} \text{ m}^3 \cdot \text{mol}^{-1}$ . 当  $0 \text{ }^\circ\text{C}$  时其摩尔体积为  $6.0 \times 10^{-4} \text{ m}^3 \cdot \text{mol}^{-1}$ . 试求其压强. 如果将其当作理想气体处理, 结果又如何?

**分析** 直接运用范德瓦耳斯方程和理想气体物态方程可分别求出对应的压强.

**解** 用范德瓦耳斯方程求解, 其压强为

$$p = \frac{RT}{V_m - b} - \frac{a}{V_m^2} = 3.05 \times 10^6 \text{ Pa}$$

作为理想气体求解, 则有

$$p' = RT/V_m = 3.78 \times 10^6 \text{ Pa}$$

**讨论** 由计算可知,  $p' > p$ . 这正是因为在建立理想气体模型时, 忽略了分子本身占有的体积所致.

**12-33** 一台普通冰箱等效于一个厚  $90 \text{ mm}$ , 内表面积为  $5.6 \text{ m}^2$  的软木盒子. 关上冰箱门后, 内部温度比外界温度低  $22.2 \text{ K}$ , 若冰箱马达运行时间为冰箱关闭时间的  $15\%$ , 求马达运行时, 冰箱内热量的迁移率 (即单位时间内从冰箱内迁出的热量). 已知软木盒热导率  $\kappa = 0.05 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ .

**解** 根据热传导公式

$$\Delta Q / \Delta t = -\kappa S (\Delta T / \Delta x)$$

由题已知  $\kappa = 0.05 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ ,  $S = 5.6 \text{ m}^2$ ,  $\Delta x = 0.09 \text{ m}$ ,  $\Delta T = 22.2 \text{ K}$ , 得  $\Delta Q / \Delta t = 69.1 \text{ W}$ , 则马达运行时, 热量迁移率为

$$\Delta Q / (\Delta t \cdot 15\%) = 460 \text{ W}$$

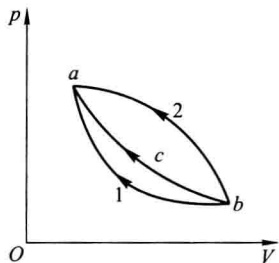
## 第十三章 热力学基础

**13-1** 如图所示,  $bca$  为理想气体绝热过程,  $b1a$  和  $b2a$  是任意过程, 则上述两过程中气体做功与吸收热量的情况是 ( )

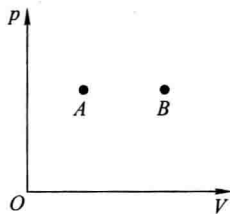
- (A)  $b1a$  过程放热, 做负功;  $b2a$  过程放热, 做负功
- (B)  $b1a$  过程吸热, 做负功;  $b2a$  过程放热, 做负功
- (C)  $b1a$  过程吸热, 做正功;  $b2a$  过程吸热, 做负功
- (D)  $b1a$  过程放热, 做正功;  $b2a$  过程吸热, 做正功

**分析与解**  $bca$ ,  $b1a$  和  $b2a$  均是外界压缩系统, 由  $W = \int p dV$  知系统经这三

个过程均做负功,因而(C)、(D)不对.理想气体的内能是温度的单值函数,因此三个过程初末态内能变化相等,设为 $\Delta E$ .对绝热过程 $bca$ ,由热力学第一定律知 $\Delta E = -W_{bca}$ .另外,由图可知: $|W_{b2a}| > |W_{bca}| > |W_{b1a}|$ ,则 $W_{b2a} < W_{bca} < W_{b1a}$ .对 $b1a$ 过程: $Q = \Delta E + W_{b1a} > \Delta E + W_{bca} = 0$ 是吸热过程.而对 $b2a$ 过程: $Q = \Delta E + W_{b2a} < \Delta E + W_{bca} = 0$ 是放热过程.可见(A)不对,正确的是(B).



题 13-1 图



题 13-2 图

**13-2** 如图所示,一定量的理想气体,由平衡态 A 变到平衡态 B,且它们的压强相等,即 $p_A = p_B$ .则在状态 A 和状态 B 之间,气体无论经过的是什么过程,气体必然( )

- (A) 对外做正功                      (B) 内能增加  
(C) 从外界吸热                      (D) 向外界放热

**分析与解** 由 $p$ - $V$ 图可知, $p_A V_A < p_B V_B$ ,即知 $T_A < T_B$ .理想气体内能 $\Delta E = \frac{m'}{M} \frac{i}{2} R \cdot \Delta T$ ,则对一定量理想气体必有 $E_B > E_A$ .即气体由状态 A 变化到状态 B,内能必增加.而做功、热传递是过程量,将与具体过程有关.所以(A)、(C)、(D)不是必然结果,只有(B)正确.

**13-3** 两个相同的刚性容器,一个盛有氢气,一个盛有氦气(均视为刚性分子理想气体).开始时它们的压强和温度都相同,现将 3 J 热量传给氦气,使之升高到一定的温度.若使氢气也升高同样的温度,则应向氢气传递的热量为( )

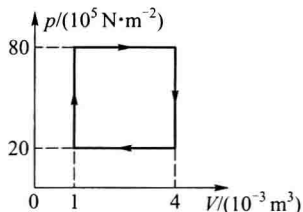
- (A) 6 J              (B) 3 J              (C) 5 J              (D) 10 J

**分析与解** 当容器体积不变,即为等体过程时系统不做功,根据热力学第一定律 $Q = \Delta E + W$ ,有 $Q = \Delta E$ .而由理想气体内能公式 $\Delta E = \frac{m'}{M} \frac{i}{2} R \Delta T$ 可知,欲使氢气和氦气升高相同温度,须传递的热量 $Q_{H_2} : Q_{He} = \left( \frac{m'_{H_2}}{M_{H_2}} i_{H_2} \right) / \left( \frac{m'_{He}}{M_{He}} i_{He} \right)$ .再由理想气体物态方程 $pV = \frac{m'}{M} RT$ ,初始时,氢气和氦气具有相同的温度、压强和体积,因

而物质的量相同,则  $Q_{H_2}/Q_{He} = i_{H_2}/i_{He} = 5/3$ . 因此正确答案为(C).

**13-4** 气体经历如图所示的循环过程,在这个循环过程中,外界传给气体的净热量是( )

- (A)  $3.2 \times 10^4$  J      (B)  $1.8 \times 10^4$  J  
 (C)  $2.4 \times 10^4$  J      (D) 0 J



题 13-4 图

**分析** 由于内能是状态量,对于  $p-V$  图上的一个循环过程,内能变化为 0. 因此根据热力学第一定律可知,外界传给系统的净热量就等于系统循环做的净功,即  $p-V$  图上循环的面积.

**解** 根据分析,外界传给气体的净热量为

$$\begin{aligned} Q &= W_{\text{净}} = (p_2 - p_1)(V_2 - V_1) \\ &= (80 - 20) \times 10^5 \times (4 - 1) \times 10^{-3} \text{ J} = 1.8 \times 10^3 \text{ J} \end{aligned}$$

故选(B).

**13-5** 一台工作于温度分别为  $327^\circ\text{C}$  和  $27^\circ\text{C}$  的高温热源与低温热源之间的卡诺热机,每经历一个循环吸热  $2000$  J,则对外做功( )

- (A)  $2000$  J      (B)  $1000$  J      (C)  $4000$  J      (D)  $500$  J

**分析与解** 热机循环效率  $\eta = W/Q_{\text{吸}}$ ,对卡诺机,其循环效率又可表示为:  $\eta = 1 - T_2/T_1$ ,则由  $W/Q_{\text{吸}} = 1 - T_2/T_1$  可求答案. 正确答案为(B).

**13-6** 根据热力学第二定律( )

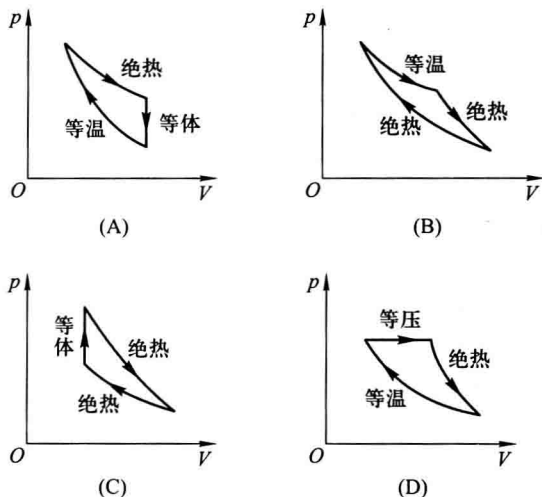
- (A) 自然界中的一切自发过程都是不可逆的  
 (B) 不可逆过程就是不能向相反方向进行的过程  
 (C) 热量可以从高温物体传到低温物体,但不能从低温物体传到高温物体  
 (D) 任何过程总是沿着熵增加的方向进行

**分析与解** 对选项(B):不可逆过程应是指在不引起其他变化的条件下,不能使逆过程重复正过程的每一状态,或者虽然重复但必然会引起其他变化的过程. 对选项(C):应是热量不可能从低温物体自动传到高温物体而不引起外界的变化. 对选项(D):缺少了在孤立系统中这一前提条件. 只有选项(A)正确.

**13-7** 有人想象了如图所示的四个理想气体的循环过程,则在理论上可以实现的为( )

**分析与解** 由绝热过程方程  $pV^\gamma = \text{常量}$ ,以及等温过程方程  $pV = \text{常量}$ ,可知绝热线比等温线要陡,所以(A)过程不对.(B)、(C)过程中都有两条绝热线相交于一点,这是不可能的,因为它们的循环过程表明系统从单一热源吸热且不引起外界变化,使之全部变成有用功,违反了热力学第二定律. 因此只有(D)正确.





题 13-7 图

**13-8** 位于委内瑞拉的安赫尔瀑布是世界上落差最大的瀑布,它高 979 m. 如果在水下落的过程中,重力对它所做的功中有 50% 转化为热量使水温升高,求水由瀑布顶部落到底部而产生的温差(水的比热容为  $4.18 \times 10^3 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ ).

**分析** 取质量为  $m$  的水作为研究对象,水从瀑布顶部下落到底部过程中重力做功  $W = mgh$ ,按题意,被水吸收的热量  $Q = 0.5 W$ ,则水吸收热量后升高的温度可由  $Q = mc\Delta T$  求得.

**解** 由上述分析得

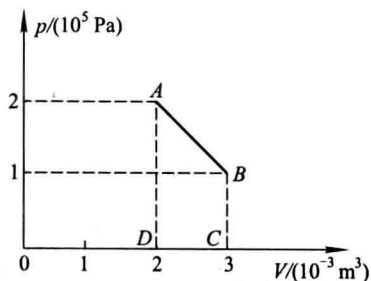
$$mc\Delta T = 0.5mgh$$

水下落后升高的温度为

$$\Delta T = 0.5gh/c = 1.15 \text{ K}$$

**13-9** 如图所示,一定量的空气,开始在状态 A,其压强为  $2.0 \times 10^5 \text{ Pa}$ ,体积为  $2.0 \times 10^{-3} \text{ m}^3$ ,沿直线 AB 变化到状态 B 后,压强变为  $1.0 \times 10^5 \text{ Pa}$ ,体积变为  $3.0 \times 10^{-3} \text{ m}^3$ ,求此过程中气体所做的功.

**分析** 理想气体做功的表达式为  $W = \int p(V) dV$ . 功的数值就等于  $p$ - $V$  图中过程曲线下所对应的面积.



题 13-9 图

**解**  $S_{ABCD} = \frac{1}{2}(BC+AD) \times CD$

故

$$W = 150 \text{ J}$$

**13-10** 气缸内贮有 2.0 mol 的空气, 温度为 27 °C, 若维持压强不变, 而使空气的体积膨胀到原体积的 3 倍, 求空气膨胀时所做的功.

**分析** 本题是等压膨胀过程, 气体做功  $W = \int_{V_1}^{V_2} p dV = p(V_2 - V_1)$ , 其中压强  $p$  可通过物态方程求得.

**解** 根据物态方程  $pV_1 = \nu RT_1$ , 气缸内气体的压强  $p = \nu RT_1 / V_1$ , 则做功为

$$\begin{aligned} W &= p(V_2 - V_1) = \nu RT_1 (V_2 - V_1) / V_1 \\ &= 2\nu RT_1 = 9.97 \times 10^3 \text{ J} \end{aligned}$$

**13-11** 一定量的空气, 吸收了  $1.71 \times 10^3 \text{ J}$  的热量, 并保持在  $1.0 \times 10^5 \text{ Pa}$  下膨胀, 体积从  $1.0 \times 10^{-2} \text{ m}^3$  增加到  $1.5 \times 10^{-2} \text{ m}^3$ , 问空气对外做了多少功? 它的内能改变了多少?

**分析** 由于气体作等压膨胀, 气体做功可直接由  $W = p(V_2 - V_1)$  求得. 取该空气为系统, 根据热力学第一定律  $Q = \Delta E + W$  可确定它的内能变化. 在计算过程中要注意热量、功、内能的正负取值.

**解** 该空气等压膨胀, 对外做功为

$$W = p(V_2 - V_1) = 5.0 \times 10^2 \text{ J}$$

其内能的改变为

$$\Delta E = Q - W = 1.21 \times 10^3 \text{ J}$$

**13-12** 0.1 kg 的水蒸气自 120 °C 加热升温到 140 °C, 问: (1) 在等体过程中, (2) 在等压过程中, 各吸收了多少热量? (根据实验测定, 已知水蒸气的摩尔定压热容  $C_{p,m} = 36.21 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ , 摩尔定容热容  $C_{v,m} = 27.82 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ .)

**分析** 热量的计算公式为  $Q = \nu C_m \Delta T$ . 按热力学第一定律, 在等体过程中,  $Q_v = \Delta E = \nu C_{v,m} \Delta T$ ; 在等压过程中,  $Q_p = \int p dV + \Delta E = \nu C_{p,m} \Delta T$ .

**解** (1) 在等体过程中吸收的热量为

$$Q_v = \Delta E = \frac{m'}{M} C_{v,m} (T_2 - T_1) = 3.1 \times 10^3 \text{ J}$$

(2) 在等压过程中吸收的热量为

$$Q_p = \int p dV + \Delta E = \frac{m'}{M} C_{p,m} (T_2 - T_1) = 4.0 \times 10^3 \text{ J}$$

**13-13** 如图所示, 在有绝热壁的气缸内盛有 1 mol 的氮气, 活塞外为大气, 氮气的压强为  $1.51 \times 10^5 \text{ Pa}$ , 活塞面积为  $0.02 \text{ m}^2$ . 从气缸底部加热, 使活塞缓慢上升了 0.5 m. 问: (1) 气体经历了什么过程? (2) 气缸中的气体吸收了多少热量? (根据实验测定, 已知氮气的摩尔定压热容  $C_{p,m} = 29.12 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ , 摩

尔定容热容  $C_{v,m} = 20.80 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ .)

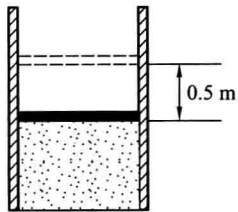
分析 因活塞可以自由移动, 活塞对气体的作用力始终为大气压力和活塞重力之和. 容器内气体压强将保持不变. 对等压过程, 吸热  $Q_p = \nu C_{p,m} \Delta T$ .  $\Delta T$  可由理想气体物态方程求出.

解 (1) 由分析可知气体经历了等压膨胀过程.

(2) 吸热  $Q_p = \nu C_{p,m} \Delta T$ . 其中  $\nu = 1 \text{ mol}$ ,  $C_{p,m} = 29.12 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ . 由理想气体物态方程  $pV = \nu RT$ , 得

$$\Delta T = (p_2 V_2 - p_1 V_1) / R = p(V_2 - V_1) / R = pS \Delta l / R$$

则  $Q_p = C_{p,m} pS \Delta l / R = 5.29 \times 10^3 \text{ J}$



题 13-13 图

**13-14** 一压强为  $1.0 \times 10^5 \text{ Pa}$ , 体积为  $1.0 \times 10^{-3} \text{ m}^3$  的氧气自  $0^\circ \text{C}$  加热到  $100^\circ \text{C}$ , 问: (1) 当压强不变时, 需要多少热量? 当体积不变时, 需要多少热量? (2) 在等压或等体过程中各做了多少功?

分析 (1) 求  $Q_p$  和  $Q_v$  的方法与习题 13-12 相同. (2) 求过程的做功通常有两个途径. ① 利用公式  $W = \int p(V) dV$ ; ② 利用热力学第一定律去求解. 在本题中, 热量  $Q$  已求出, 而内能变化可由  $\Delta E = \nu C_{v,m} (T_2 - T_1)$  得到. 从而可求得功  $W$ .

解 根据题给初态条件得氧气的物质的量为

$$\nu = \frac{m'}{M} = p_1 V_1 / RT_1 = 4.41 \times 10^{-2} \text{ mol}$$

氧气的摩尔定压热容  $C_{p,m} = \frac{7}{2} R$ , 摩尔定容热容  $C_{v,m} = \frac{5}{2} R$ .

(1) 求  $Q_p$ 、 $Q_v$

等压过程氧气(系统)吸热

$$Q_p = \int p dV + \Delta E = \nu C_{p,m} (T_2 - T_1) = 128.1 \text{ J}$$

等体过程氧气(系统)吸热

$$Q_v = \Delta E = \nu C_{v,m} (T_2 - T_1) = 91.5 \text{ J}$$

(2) 按分析中的两种方法求做功值

解 1 利用公式  $W = \int p(V) dV$  求解. 在等压过程中,  $dW = p dV = \frac{m'}{M} R dT$ , 则得

$$W_p = \int dW = \int_{T_1}^{T_2} \frac{m'}{M} R dT = 36.6 \text{ J}$$

而在等体过程中, 因气体的体积不变, 故做功为

$$W_v = \int p(V) dV = 0$$

解 2 利用热力学第一定律  $Q = \Delta E + W$  求解. 氧气的内能变化为

$$\Delta E = \frac{m'}{M} C_{V,m} (T_2 - T_1) = 91.5 \text{ J}$$

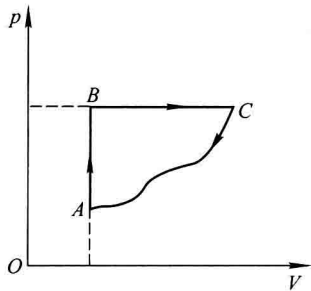
由于在(1)中已求出  $Q_p$  与  $Q_v$ , 则由热力学第一定律可得在等压过程、等体过程中所做的功分别为

$$W_p = Q_p - \Delta E = 36.6 \text{ J}$$

$$W_v = Q_v - \Delta E = 0$$

**13-15** 如图所示, 系统从状态  $A$  沿  $ABC$  变化到状态  $C$  的过程中, 外界有  $326 \text{ J}$  的热量传递给系统, 同时系统对外做功  $126 \text{ J}$ . 如果系统从状态  $C$  沿另一曲线  $CA$  回到状态  $A$ , 外界对系统做功为  $52 \text{ J}$ , 则此过程中系统是吸热还是放热? 传递的热量是多少?

**分析** 已知系统从状态  $C$  到状态  $A$ , 外界对系统做功为  $W_{CA}$ , 如果再能知道此过程中内能的变化  $\Delta E_{CA}$ , 则由热力学第一定律即可求得该过程中系统传递的热量  $Q_{CA}$ . 由于理想气体的内能是状态(温度)的函数, 利用题中给出的  $ABC$  过程吸热、做功的情况, 由热力学第一定律即可求得由  $A$  至  $C$  过程中系统内能的变化  $\Delta E_{AC}$ , 而  $\Delta E_{AC} = -\Delta E_{CA}$ , 故可求得  $Q_{CA}$ .



题 13-15 图

**解** 系统经  $ABC$  过程所吸收的热量及对外所做的功分别为

$$Q_{ABC} = 326 \text{ J}, \quad W_{ABC} = 126 \text{ J}$$

则由热力学第一定律可得由  $A$  到  $C$  过程中系统内能的增量

$$\Delta E_{AC} = Q_{ABC} - W_{ABC} = 200 \text{ J}$$

由此可得从  $C$  到  $A$ , 系统内能的增量为

$$\Delta E_{CA} = -200 \text{ J}$$

从  $C$  到  $A$ , 系统所吸收的热量为

$$Q_{CA} = \Delta E_{CA} + W_{CA} = -252 \text{ J}$$

式中负号表示系统向外界放热  $252 \text{ J}$ . 这里要说明的是由于  $CA$  是一未知过程, 上述求出的放热是过程的总效果, 而对其中每一微小过程来讲并不一直都是放热.

**13-16** 如图所示, 一定量的理想气体经历  $ACB$  过程时吸热  $700 \text{ J}$ , 则经历  $ACBDA$  过程时吸热又为多少?

**分析** 从图中可见  $ACBDA$  过程是一个循环过程. 由于理想气体系统经历一个循环的内能变化为零, 故根据热力学第一定律, 循环系统净吸热即为外界对系统所做的净功. 为了求得该循环过程中所做的功, 可将  $ACBDA$  循环过程分成  $ACB$ 、 $BD$  及  $DA$  三个过程讨论. 其中  $BD$  及  $DA$  分别为等体和等压过程, 过程中所做的功按定义很容易求得; 而  $ACB$  过程中所做的功可根据上题同样的方法利用

热力学第一定律去求。

解 由图中数据有  $p_A V_A = p_B V_B$ , 则 A、B 两状态温度相同, 故 ACB 过程内能的变化  $\Delta E_{ACB} = 0$ , 由热力学第一定律可得系统对外界做功

$$W_{ACB} = Q_{ACB} - \Delta E_{ACB} = Q_{ACB} = 700 \text{ J}$$

在等体过程 BD 及等压过程 DA 中气体做功分别为

$$W_{BD} = \int p dV = 0$$

$$W_{DA} = \int p dV = p_A (V_A - V_D) = -1200 \text{ J}$$

则在循环过程 ACBDA 中系统所做的总功为

$$W = W_{ACB} + W_{BD} + W_{DA} = -500 \text{ J}$$

负号表示外界对系统做功. 由热力学第一定律可得, 系统在循环中吸收的总热量为

$$Q = W = -500 \text{ J}$$

负号表示在此过程中, 热量传递的总效果为放热。

13-17 除非温度很低, 许多物质的摩尔定压热容都可以用下式表示:

$$C_{p,m} = a + 2bT - cT^{-2}$$

式中  $a$ 、 $b$  和  $c$  是常量,  $T$  是热力学温度. 求: (1) 在恒定压强下, 1 mol 物质的温度从  $T_1$  升高到  $T_2$  时需要的热量; (2) 在温度  $T_1$  和  $T_2$  之间的平均摩尔热容; (3) 对镁这种物质来说, 若  $C_{p,m}$  的单位为  $\text{J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ , 则  $a = 25.7 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ ,  $b = 3.13 \times 10^{-3} \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-2}$ ,  $c = 3.27 \times 10^5 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}$ . 计算镁在 300 K 时的摩尔定压热容  $C_{p,m}$ , 以及在 200 K 和 400 K 之间  $C_{p,m}$  的平均值。

分析 由题目知摩尔定压热容  $C_{p,m}$  随温度变化的函数关系, 则根据积分式

$Q_p = \int_{T_1}^{T_2} C_{p,m} dT$  即可求得在恒定压强下, 1 mol 物质从  $T_1$  升至  $T_2$  所吸收的热量

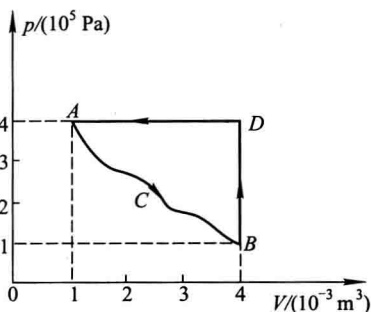
$Q_p$ . 故温度在  $T_1$  至  $T_2$  之间的平均摩尔定压热容  $\bar{C}_{p,m} = Q_p / (T_2 - T_1)$ .

解 (1) 1 mol 物质从温度  $T_1$  等压升温至  $T_2$  时吸热为

$$\begin{aligned} Q_p &= \int C_{p,m} dT = \int_{T_1}^{T_2} (a + 2bT - cT^{-2}) dT \\ &= a(T_2 - T_1) + b(T_2^2 - T_1^2) + c(T_2^{-1} - T_1^{-1}) \end{aligned}$$

(2) 在  $T_1$  和  $T_2$  间的平均摩尔定压热容为

$$\bar{C}_{p,m} = Q_p / (T_2 - T_1) = a + b(T_2 + T_1) - c / T_1 T_2$$



题 13-16 图

(3) 镁在  $T=300\text{ K}$  时的摩尔定压热容为

$$C_{p,m} = a + 2bT - cT^{-2} = 23.9\text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$$

镁在  $200\text{ K}$  和  $400\text{ K}$  之间  $C_{p,m}$  的平均值为

$$\begin{aligned}\bar{C}_{p,m} &= a + b(T_2 + T_1) - c/T_1 T_2 \\ &= 23.5\text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}\end{aligned}$$

**13-18** 空气由压强为  $1.52 \times 10^5\text{ Pa}$ , 体积为  $5.0 \times 10^{-3}\text{ m}^3$ , 等温膨胀到压强为  $1.01 \times 10^5\text{ Pa}$ , 然后再经等压压缩到原来的体积. 试计算空气所做的功.

**解** 空气在等温膨胀过程中所做的功为

$$W_T = \frac{m'}{M} RT_1 \ln(V_2/V_1) = p_1 V_1 \ln(p_1/p_2)$$

空气在等压压缩过程中所做的功为

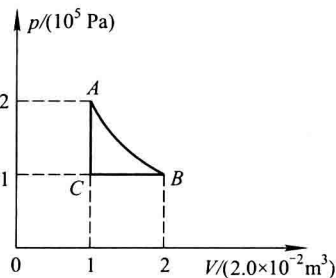
$$W_p = \int p dV = p_2 (V_1 - V_2)$$

利用等温过程关系  $p_1 V_1 = p_2 V_2$ , 则空气在整个过程中所做的功为

$$\begin{aligned}W &= W_T + W_p = p_1 V_1 \ln(p_1/p_2) + p_2 V_1 - p_1 V_1 \\ &= 55.7\text{ J}\end{aligned}$$

**13-19** 如图所示, 使  $1\text{ mol}$  氧气(1) 由  $A$  等温地变到  $B$ , (2) 由  $A$  等体地变到  $C$ , 再由  $C$  等压地变到  $B$ . 试分别计算氧气所做的功和吸收的热量.

**分析** 从  $p-V$  图(也称示功图)上可以看出, 氧气在  $AB$  与  $ACB$  两个过程中所做的功是不同的, 其大小可通过  $W = \int p(V) dV$  求出. 考虑到内能是状态的函数, 其变化值与过程无关, 所以这两个不同过程的内能变化是相同的, 而且因初、末状态温度相同  $T_A = T_B$ , 故  $\Delta E = 0$ , 利用热力学第一定律  $Q = W + \Delta E$ , 可求出每一过程所吸收的热量.



题 13-19 图

**解** (1) 沿  $AB$  作等温膨胀的过程中, 系统做功

$$\begin{aligned}W_{AB} &= \frac{m'}{M} RT \ln(V_B/V_A) = p_A V_A \ln(V_B/V_A) \\ &= 2.77 \times 10^3\text{ J}\end{aligned}$$

由分析可知在等温过程中, 氧气吸收的热量为

$$Q_{AB} = W_{AB} = 2.77 \times 10^3\text{ J}$$

(2) 沿  $A$  到  $C$  再到  $B$  的过程中系统做功和吸热分别为

$$W_{ACB} = W_{AC} + W_{CB} = W_{CB} = p_C (V_B - V_C) = 2.0 \times 10^3\text{ J}$$

$$Q_{ACB} = W_{ACB} = 2.0 \times 10^3 \text{ J}$$

**13-20** 将体积为  $1.0 \times 10^{-4} \text{ m}^3$ , 压强为  $1.01 \times 10^5 \text{ Pa}$  的氢气绝热压缩, 使其体积变为  $2.0 \times 10^{-5} \text{ m}^3$ , 求压缩过程中气体所做的功 (氢气的摩尔定压热容与摩尔定容热容比值为  $\gamma = 1.41$ ).

**分析** 可采用习题 13-14 中气体做功的两种计算方法. (1) 气体做功可由积分  $W = \int p(V) dV$  求解, 其中函数  $p(V)$  可通过绝热过程方程  $pV^\gamma = C$  得出. (2) 因为过程是绝热的, 故  $Q=0$ , 因此, 有  $W = -\Delta E$ ; 而系统内能的变化可由系统的始末状态求出.

**解** 根据上述分析, 这里采用方法 (1) 求解, 方法 (2) 留给读者试解. 设  $p$ 、 $V$  分别为绝热过程中任一状态的压强和体积, 则由  $p_1 V_1^\gamma = p V^\gamma$  得

$$p = p_1 V_1^\gamma V^{-\gamma}$$

氢气绝热压缩做功为

$$\begin{aligned} W &= \int p dV = \int_{V_1}^{V_2} p_1 V_1^\gamma V^{-\gamma} dV \\ &= \frac{p_1}{1-\gamma} \left[ V_2 \left( \frac{V_1}{V_2} \right)^\gamma - V_1 \right] = -23.0 \text{ J} \end{aligned}$$

**13-21** 试验用的火炮炮筒长为  $3.66 \text{ m}$ , 内膛直径为  $0.152 \text{ m}$ , 炮弹质量为  $45.4 \text{ kg}$ , 击发后火药爆燃完全时炮弹已被推行  $0.98 \text{ m}$ , 速度为  $311 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ , 这时膛内气体压强为  $2.43 \times 10^8 \text{ Pa}$ . 设此后膛内气体作绝热膨胀, 直到炮弹出口. 求: (1) 在这一绝热膨胀过程中气体对炮弹做功多少? 设摩尔定压热容与摩尔定容热容比值为  $\gamma = 1.2$ . (2) 炮弹的出口速度 (忽略摩擦).

**分析** (1) 气体绝热膨胀做功可由公式  $W = \int p dV = (p_1 V_1 - p_2 V_2) / (\gamma - 1)$  计算. 由题中条件可知绝热膨胀前后气体的体积  $V_1$  和  $V_2$ , 因此只要通过绝热过程方程  $p_1 V_1^\gamma = p_2 V_2^\gamma$  求出绝热膨胀后气体的压强就可求出做功值. (2) 在忽略摩擦的情况下, 可认为气体所做的功全部用来增加炮弹的动能. 由此可得到炮弹速度.

**解** 由题设  $l = 3.66 \text{ m}$ ,  $D = 0.152 \text{ m}$ ,  $m = 45.4 \text{ kg}$ ,  $l_1 = 0.98 \text{ m}$ ,  $v_1 = 311 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ ,  $p_1 = 2.43 \times 10^8 \text{ Pa}$ ,  $\gamma = 1.2$ .

(1) 炮弹出口时气体压强为

$$p_2 = p_1 (V_1 / V_2)^\gamma = p_1 (l_1 / l)^\gamma = 5.00 \times 10^7 \text{ Pa}$$

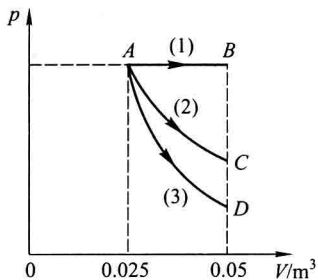
气体做的功为

$$W = \frac{p_1 V_1 - p_2 V_2}{\gamma - 1} = \frac{p_1 l_1 - p_2 l}{\gamma - 1} \cdot \frac{\pi D^2}{4} = 5.00 \times 10^6 \text{ J}$$

(2) 根据分析  $W = mv^2 / 2 - mv_1^2 / 2$ , 则

$$v = \sqrt{2W/m + v_1^2} = 563 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

**13-22** 1 mol 氢气在温度为 300 K, 体积为  $0.025 \text{ m}^3$  的状态下, 经过(1) 等压膨胀, (2) 等温膨胀, (3) 绝热膨胀. 气体的体积都变为原来的两倍. 试分别计算这三种过程中氢气对外做的功以及吸收的热量.



题 13-22 图

**分析** 这三个过程是教材中重点讨论的过程. 在  $p$ - $V$  图上, 它们的过程曲线如图所示. 由图可知过程(1)做功最多, 过程(3)做功最少. 温度  $T_B > T_C > T_D$ , 而过程(3)是绝热过程, 因此过程(1)和(2)均吸热, 且过程(1)吸热多. 具体计算时只需直接代有关公式即可.

**解** (1) 等压膨胀

$$W_p = p_A(V_B - V_A) = \frac{\nu RT_A}{V_A}(V_B - V_A) = RT_A = 2.49 \times 10^3 \text{ J}$$

$$Q_p = W_p + \Delta E = \nu C_{p,m} \Delta T = \nu C_{p,m} (T_B - T_A) = \nu C_{p,m} T_A = \frac{7R}{2} T_A = 8.73 \times 10^3 \text{ J}$$

(2) 等温膨胀

$$W_T = \nu RT \ln V_C / V_A = RT_A \ln 2 = 1.73 \times 10^3 \text{ J}$$

对等温过程  $\Delta E = 0$ , 所以

$$Q_T = W_T = 1.73 \times 10^3 \text{ J}$$

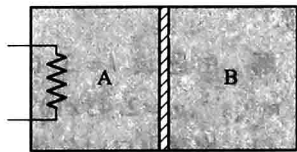
(3) 绝热膨胀

$$T_D = T_A (V_A / V_D)^{\gamma-1} = 300 \times (0.5)^{0.4} \text{ K} = 227.4 \text{ K}$$

对绝热过程  $Q_a = 0$ , 则有

$$W_a = -\Delta E = \nu C_{v,m} (T_A - T_D) = \frac{5R}{2} (T_A - T_D) = 1.51 \times 10^3 \text{ J}$$

**13-23** 绝热气缸被一不导热的隔板均分成体积相等的 A、B 两室, 隔板可无摩擦地平移, 如图所示. A、B 中各有 1 mol 的氮气, 它们的温度都是  $T_0$ , 体积都是  $V_0$ . 现用 A 室中的电热丝对气体加热, 平衡后 A 室体积为 B 室的两倍. 试求: (1) 此时 A、B 两室气体的温度; (2) A 室中气体吸收的热量.



题 13-23 图

**分析** (1) B 室中气体经历的是一个绝热压缩过程, 遵循绝热方程  $TV^{\gamma-1} = \text{常量}$ , 由此可求出 B 室中气体的末态温度  $T_B$ . 又由于 A、B 两室中隔板可无摩擦地平移, 故 A、B 两室等压. 则由物态方程  $pV_A = \nu RT_A$  和  $pV_B = \nu RT_B$  可知  $T_A = 2T_B$ . (2) 欲求 A 室中气体吸收的热量, 我们可以有两种方法. 方法一: 视 A、B 为整



体,那么系统(气缸)对外不做功,吸收的热量等于系统内能的增量. 即  $Q_A = \Delta E_A + \Delta E_B$ . 方法二: A 室吸热一方面提高其内能  $\Delta E_A$ , 另外对“外界”B 室做功  $W_A$ . 而对 B 室而言, 由于是绝热的, “外界”对它做的功就全部用于提高系统的内能  $\Delta E_B$ . 因而在数值上  $W_A = \Delta E_B$ . 同样得到  $Q_A = \Delta E_A + \Delta E_B$ .

解 设平衡后 A、B 中气体的温度、体积分别为  $T_A, T_B$  和  $V_A, V_B$ . 而由分析知

$$\text{压强 } p_A = p_B = p. \text{ 由题已知 } \begin{cases} V_A = 2V_B \\ V_A + V_B = 2V_0 \end{cases}, \text{ 得 } \begin{cases} V_A = 4V_0/3 \\ V_B = 2V_0/3 \end{cases}$$

(1) 根据分析, 对 B 室有

$$V_0^{-1} T_0 = V_B^{-1} T_B$$

$$\text{得 } T_B = (V_0/V_B)^{\gamma-1} T_0 = 1.176 T_0, \quad T_A = 2T_B = 2.352 T_0$$

$$(2) \quad Q_A = \Delta E_A + \Delta E_B = \frac{5R}{2}(T_A - T_0) + \frac{5R}{2}(T_B - T_0) = 31.7 T_0$$

13-24 0.32 kg 的氧气作图中所示循环 ABCDA, 设  $V_2 = 2V_1, T_1 = 300 \text{ K}, T_2 = 200 \text{ K}$ , 求循环效率.

分析 该循环是正循环. 循环效率可根据定义式  $\eta = W/Q$  来求出, 其中  $W$  表示一个循环过程系统做的净功,  $Q$  为循环过程系统吸收的总热量.

解 根据分析, 因 AB、CD 为等温过程, 循环过程中系统做的净功为

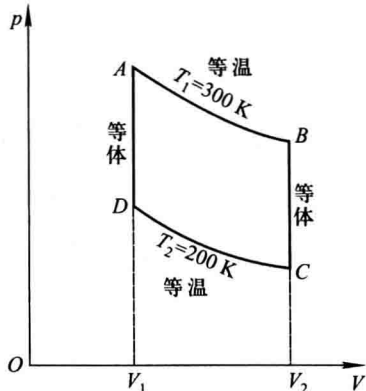
$$\begin{aligned} W &= W_{AB} + W_{CD} = \frac{m'}{M} R T_1 \ln(V_2/V_1) + \frac{m'}{M} R T_2 \ln(V_1/V_2) \\ &= \frac{m'}{M} R (T_1 - T_2) \ln(V_2/V_1) \\ &= 5.76 \times 10^3 \text{ J} \end{aligned}$$

由于吸热过程仅在等温膨胀(对应于 AB 段)和等体升压(对应于 DA 段)中发生, 而等温过程中  $\Delta E = 0$ , 则  $Q_{AB} = W_{AB}$ . 等体升压过程中  $W = 0$ , 则  $Q_{DA} = \Delta E_{DA}$ , 所以, 循环过程中系统吸热的总量为

$$\begin{aligned} Q &= Q_{AB} + Q_{DA} = W_{AB} + \Delta E_{DA} \\ &= \frac{m'}{M} R T_1 \ln(V_2/V_1) + \frac{m'}{M} C_{V,m} (T_1 - T_2) \\ &= \frac{m'}{M} R T_1 \ln(V_2/V_1) + \frac{m'}{M} \frac{5}{2} R (T_1 - T_2) \\ &= 3.81 \times 10^4 \text{ J} \end{aligned}$$

由此得到该循环的效率为

$$\eta = W/Q = 15\%$$



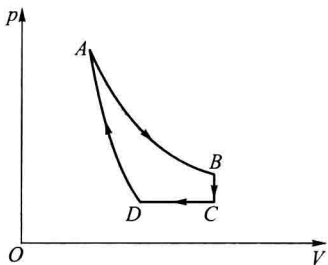
题 13-24 图

13-25 一定量理想气体经图示的 ABCDA 循环, 其中 AB 是等温过程, BC

是等体过程,  $CD$  是等压过程,  $DA$  为绝热过程. 请完成表格中的空格.

过程	内能变化 $\Delta E/\text{J}$	做功 $W/\text{J}$	吸热 $Q/\text{J}$
$A \rightarrow B$		1 400	
$B \rightarrow C$	-200		
$C \rightarrow D$	-200	-400	
$D \rightarrow A$			
$ABCD A$	循环效率 $\eta =$		

**分析** 本循环由教材中介绍的理想气体的四个特殊过程组成. 通过本题求解可以使我们对四个过程的特殊性有所了解. 求解本题可以分四步进行: (1) 先抓住各过程的特点填写一些特殊值, 如等温过程  $AB$  中  $\Delta E = 0$ , 等体过程  $BC$  中  $W = 0$ , 绝热过程  $DA$  中  $Q = 0$  等. (2) 填出  $AB$  中  $\Delta E = 0$  后, 利用气体经历一个循环, 内能变化为 0 的特点, 即根据表格中第一列  $\Delta E$  之和



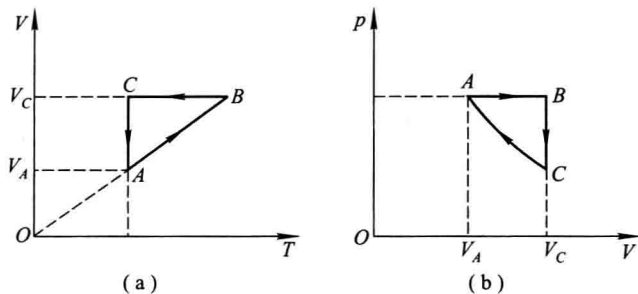
题 13-25 图

为 0 的要求, 填出  $DA$  过程内能变化值 (这是本题顺利求解的关键). (3) 在上两步的基础上, 由热力学第一定律  $Q = \Delta E + W$  可以填写各过程中  $Q$  与  $W$  值的其他空格. (4) 在明确了气体在循环中各过程的内能变化  $\Delta E$ , 做功  $W$ , 吸放热  $Q$  值后, 整个系统的总吸热  $Q_1$ , 总放热  $Q_2$  以及对外做的净功  $W$  就都知道了, 则效率可由公式  $\eta = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}$  或  $\eta = \frac{W}{Q_1}$  求出.

**解** 根据分析中方法, 完成填写的表格如下:

过程	内能变化 $\Delta E/\text{J}$	做功 $W/\text{J}$	吸热 $Q/\text{J}$
$A \rightarrow B$	0	1 400	1 400
$B \rightarrow C$	-200	0	-200
$C \rightarrow D$	-200	-400	-600
$D \rightarrow A$	400	-400	0
$ABCD A$	循环效率 $\eta = 42.9\%$		

**13-26** 图(a)是某单原子分子理想气体循环过程的  $V-T$  图, 图中  $V_C = 2V_A$ . 试问: (1) 图中所示循环代表制冷机还是热机? (2) 如是正循环(热机循环), 求出循环效率.



题 13-26 图

**分析** 以正、逆循环来区分热机和制冷机是针对  $p-V$  图中循环曲线行进方向而言的. 因此, 对图 (a) 中的循环进行分析时, 一般要先将其转换为  $p-V$  图. 转换方法主要是通过找每一过程的特殊点, 并利用理想气体物态方程来完成. 由图 (a) 可以看出,  $BC$  为等体降温过程,  $CA$  为等温压缩过程; 而对  $AB$  过程的分析, 可以依据图中直线过原点来判别. 其直线方程为  $V = CT$ ,  $C$  为常量. 将其与理想气体物态方程  $pV = \frac{m'}{M}RT$  比较可知, 该过程为等压膨胀过程 (注意: 如果直线不过原点, 就不是等压过程). 这样, 就可得出  $p-V$  图中的过程曲线, 并可判别是正循环 (热机循环) 还是逆循环 (制冷机循环), 再参考习题 13-24 的方法求出循环效率.

**解** (1) 根据分析, 将  $V-T$  图转换为相应的  $p-V$  图, 如图 (b) 所示. 图中曲线行进方向是正循环, 即为热机循环.

(2) 根据得到的  $p-V$  图可知,  $AB$  为等压膨胀过程, 为吸热过程.  $BC$  为等体降温过程,  $CA$  为等温压缩过程, 均为放热过程. 故系统在循环过程中吸收和放出的热量分别为

$$Q_1 = \frac{m'}{M} C_{p,m} (T_B - T_A)$$

$$Q_2 = \frac{m'}{M} C_{v,m} (T_B - T_C) + \frac{m'}{M} RT_A \ln(V_C/V_A)$$

$CA$  为等温线, 有  $T_A = T_C$ ;  $AB$  为等压线, 且因  $V_C = 2V_A$ , 则有  $T_A = T_B/2$ . 对单原子理想气体, 其摩尔定压热容  $C_{p,m} = 5R/2$ , 摩尔定容热容  $C_{v,m} = 3R/2$ . 故循环效率为

$$\eta = 1 - Q_2/Q_1 = 1 - \left( \frac{3}{2} T_A + T_A \ln 2 \right) / (5T_A/2) = 1 - (3 + 2 \ln 2) / 5 = 12.3\%$$

**13-27** 一卡诺热机的低温热源温度为  $7^\circ\text{C}$ , 效率为  $40\%$ , 若要将其效率提高到  $50\%$ , 问高温热源的温度需提高多少?

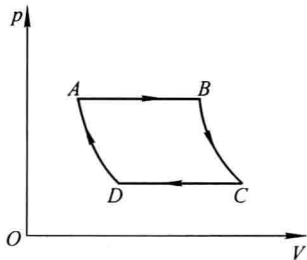
**解** 设高温热源的温度分别为  $T'_1$ 、 $T''_1$ , 则有

$$\eta' = 1 - T_2/T_1', \quad \eta'' = 1 - T_2/T_1''$$

其中  $T_2$  为低温热源温度. 由上述两式可得高温热源需提高的温度为

$$\Delta T = T_1'' - T_1' = \left( \frac{1}{1-\eta''} - \frac{1}{1-\eta'} \right) T_2 = 93.3 \text{ K}$$

**13-28** 一定量的理想气体, 经历如图所示的循环过程. 其中  $AB$  和  $CD$  是等压过程,  $BC$  和  $DA$  是绝热过程. 已知  $B$  点温度  $T_B = T_1$ ,  $C$  点温度  $T_C = T_2$ . (1) 证明该热机的效率为  $\eta = 1 - T_2/T_1$ ; (2) 这个循环是卡诺循环吗?



题 13-28 图

**分析** 首先分析判断循环中各过程的吸热、放热情况.  $BC$  和  $DA$  是绝热过程, 故  $Q_{BC}$ 、 $Q_{DA}$  均为零; 而  $AB$  为等压膨胀过程(吸热)、 $CD$  为等压压缩过程(放热), 这两个过程所吸收和放出的热量均可由相关的温度表示. 再利用绝热和等压的过程方程, 建立四点温度之间的联系, 最终可得到求证的形式.

**证** (1) 根据分析可知

$$\begin{aligned} \eta &= 1 - \frac{|Q_{CD}|}{Q_{AB}} = 1 - \frac{\left| \frac{m'}{M} C_{p,m} (T_D - T_C) \right|}{\frac{m'}{M} C_{p,m} (T_B - T_A)} = 1 - \frac{T_C - T_D}{T_B - T_A} \\ &= 1 - \frac{T_C}{T_B} \left( 1 - \frac{T_D}{T_C} \right) \bigg/ \left( 1 - \frac{T_A}{T_B} \right) \end{aligned} \quad (1)$$

与求证的结果比较, 只需证得  $T_D/T_C = T_A/T_B$ . 为此, 对  $AB$ 、 $CD$ 、 $BC$ 、 $DA$  分别列出过程方程如下

$$V_A/T_A = V_B/T_B \quad (2)$$

$$V_C/T_C = V_D/T_D \quad (3)$$

$$V_B^{\gamma-1} T_B = V_C^{\gamma-1} T_C \quad (4)$$

$$V_D^{\gamma-1} T_D = V_A^{\gamma-1} T_A \quad (5)$$

联立求解上述各式, 可证得

$$\eta = 1 - T_C/T_B = 1 - T_2/T_1$$

(2) 虽然该循环效率的表达式与卡诺循环相似, 但并不是卡诺循环. 其原因是: ① 卡诺循环是由两条绝热线和两条等温线构成, 而这个循环则与卡诺循环不同; ② 式中  $T_1$ 、 $T_2$  的含义不同, 本题中  $T_1$ 、 $T_2$  只是温度变化中两特定点的温度, 不是两等温热源的恒定温度.

**13-29** 一小型热电厂内, 一台利用地热发电的热机工作于温度为  $227^\circ\text{C}$  的地下热源和温度为  $27^\circ\text{C}$  的地表之间. 假定该热机每小时能从地下热源获取  $1.8 \times 10^{11} \text{ J}$  的热量. 试从理论上计算其最大功率.

分析 热机必须工作在最高的循环效率时,才能获取最大的功率.由卡诺定理可知,在高温热源  $T_1$  和低温热源  $T_2$  之间工作的可逆卡诺热机的效率最高,其效率为  $\eta = 1 - T_2/T_1$ . 由于已知热机在确定的时间内吸取的热量,故由效率与功率的关系式  $\eta = W/Q = Pt/Q$ , 可得此条件下的最大功率.

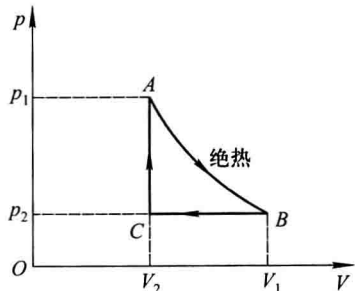
解 根据分析,热机获得的最大功率为

$$P = \eta Q/t = (1 - T_2/T_1) Q/t = 2.0 \times 10^7 \text{ J} \cdot \text{s}^{-1}$$

13-30 有一以理想气体为工作物质的热机,其循环如图所示,试证明热机效率为

$$\eta = 1 - \gamma \frac{V_1/V_2 - 1}{p_1/p_2 - 1}$$

分析 该热机由三个过程组成,图中  $AB$  是绝热过程,  $BC$  是等压压缩过程,  $CA$  是等体升压过程. 其中  $CA$  过程系统吸热,  $BC$  过程系统放热. 本题可从效率定义  $\eta = 1 - Q_2/Q_1 = 1 - |Q_{BC}|/Q_{CA}$  出发,利用热力学第一定律和等体、等压过程方程以及  $\gamma = C_{p,m}/C_{v,m}$  的关系来证明.



题 13-30 图

证 该热机循环的效率为

$$\eta = 1 - Q_2/Q_1 = 1 - |Q_{BC}|/Q_{CA}$$

其中  $Q_{BC} = \frac{m'}{M} C_{p,m} (T_C - T_B)$ ,  $Q_{CA} = \frac{m'}{M} C_{v,m} (T_A - T_C)$ , 则上式可写为

$$\eta = 1 - \gamma \frac{|T_C - T_B|}{T_A - T_C} = 1 - \gamma \frac{T_B/T_C - 1}{T_A/T_C - 1}$$

在等压过程  $BC$  和等体过程  $CA$  中分别有  $T_B/V_1 = T_C/V_2$ ,  $T_A/p_1 = T_C/p_2$ , 代入上式得

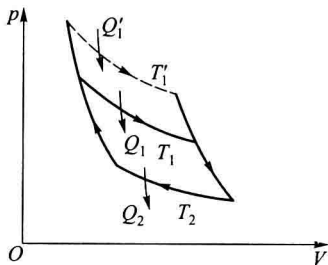
$$\eta = 1 - \gamma \frac{V_1/V_2 - 1}{p_1/p_2 - 1}$$

证毕.

13-31 一可逆卡诺热机高温热源的温度为  $227^\circ\text{C}$ , 低温热源的温度为  $27^\circ\text{C}$ . 其每次循环对外做净功  $2000 \text{ J}$ , 现通过提高高温热源的温度改进热机的工作效率, 使其每次对外做净功为  $3000 \text{ J}$ . 若前后两个卡诺循环都工作在相同的两条绝热线间且低温热源温度不变, 试求: (1) 改进前后热机循环的效率分别为多少; (2) 改进后热机的高温热源温度.

分析 热机的效率可表示为  $\eta = \frac{W}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}$ . 式中  $W$  为循环做的净功,  $Q_1$  为

总吸热,  $Q_2$  为总放热. 而对于卡诺循环, 它是由两条绝热线和两条等温线组成. 只从高温热源吸热  $Q_1$ , 向低温热源放热  $Q_2$ , 做的净功  $W = Q_1 - Q_2$ . 卡诺循环效率除了可用上述公式表示外, 还可用  $\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1}$  表示.  $T_1$  是高温热源温度,  $T_2$  是低温热源温度 (环境温度). 当采用提高高温热源温度 (由  $T_1$  变为  $T'_1$ ) 改进热机效率时, 由于前后



题 13-31 图

两个热机都工作在相同的绝热线间, 而低温不变 ( $T_2 = T'_2$ ), 则它们的放热相同, 即  $Q_2 = Q'_2$  (这是顺利求解本题的关键). 而变化的是吸热和做功, 分别由  $Q_1$  变为  $Q'_1$  和  $W$  变为  $W'$ , 如图所示. 为此: (1) 改进前热机效率可用  $\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1}$  求出. 再利用

$\eta = \frac{W}{Q_1}$  和  $Q_2 = Q_1 - W$  求出  $Q_1$ 、 $Q_2$ . (2) 对于改进后的热机因为  $Q'_2 = Q_2$  所以可求

出  $Q'_1 = W' + Q'_2$ , 由热机效率  $\eta' = \frac{W'}{Q'_1} = 1 - \frac{T_2}{T'_1}$  就可求  $\eta'$  和  $T'_1$  了.

解 将题给数据代入分析中相关公式即得

$$(1) \quad \eta = 1 - \frac{T_2}{T_1} = 1 - \frac{300}{500} = 40\%$$

且由  $\eta = \frac{W}{Q_1}$  得

$$Q_1 = \frac{W}{\eta} = \frac{2\,000}{0.4} \text{ J} = 5\,000 \text{ J}, \quad Q_2 = Q_1 - W = 3\,000 \text{ J}$$

(2) 对于改进后热机: 由  $W' = 3\,000 \text{ J}$  和  $Q_2 = Q'_2 = 3\,000 \text{ J}$  可知

$$Q'_1 = W' + Q'_2 = 6\,000 \text{ J}$$

则热机效率为

$$\eta' = \frac{W'}{Q'_1} = 50\%$$

又由

$$\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1} = 1 - \frac{T_2}{T'_1}$$

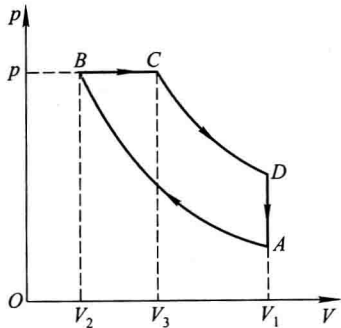
得  $T'_1 = 600 \text{ K}$ .

\*13-32 图示为理想的狄塞尔 (Diesel) 内燃机循环过程, 它由两绝热线  $AB$  与  $CD$ 、等压线  $BC$  及等体线  $DA$  组成, 试证此内燃机的效率为

$$\eta = 1 - \frac{(V_3/V_2)^{\gamma} - 1}{\gamma(V_1/V_2)^{\gamma-1}(V_3/V_2 - 1)}$$

证 求证方法与习题 13-30 相似. 由于该循环仅在  $DA$  过程中放热,  $BC$  过程中吸热, 则热机效率为

$$\begin{aligned} \eta &= 1 - |Q_{DA}|/Q_{BC} = 1 - \frac{\frac{m'}{M}C_{V,m}(T_D - T_A)}{\frac{m'}{M}C_{p,m}(T_C - T_B)} \\ &= 1 - \frac{1}{\gamma} \frac{T_D - T_A}{T_C - T_B} \end{aligned} \quad (1)$$



题 13-32 图

在绝热过程  $AB$  中, 有  $T_A V_1^{\gamma-1} = T_B V_2^{\gamma-1}$ , 即

$$T_B/T_A = (V_1/V_2)^{\gamma-1} \quad (2)$$

在等压过程  $BC$  中, 有  $T_C/V_3 = T_B/V_2$ , 即

$$T_C/T_B = V_3/V_2 \quad (3)$$

再利用绝热过程  $CD$ , 得

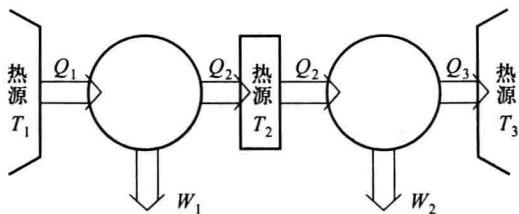
$$T_D V_1^{\gamma-1} = T_C V_3^{\gamma-1} \quad (4)$$

解上述各式, 可证得

$$\eta = 1 - \frac{(V_3/V_2)^{\gamma-1}}{\gamma(V_1/V_2)^{\gamma-1}(V_3/V_2 - 1)}$$

**13-33** 如图所示, 将两部卡诺热机连接起来, 使从一个热机输出的热量输入到另一个热机中去. 设第一个热机工作在温度为  $T_1$  和  $T_2$  的两热源之间, 其效率为  $\eta_1$ , 而第二个热机工作在温度为  $T_2$  和  $T_3$  的两热源之间, 其效率为  $\eta_2$ . 如组合热机的总效率以  $\eta = (W_1 + W_2)/Q_1$  表示, 试证总效率表达式为

$$\eta = (1 - \eta_1)\eta_2 + \eta_1 \quad \text{或} \quad \eta = 1 - T_3/T_1$$



题 13-33 图

**分析** 按效率定义, 两热机单独的效率分别为  $\eta_1 = W_1/Q_1$  和  $\eta_2 = W_2/Q_2$ , 其中  $W_1 = Q_1 - Q_2$ ,  $W_2 = Q_2 - Q_3$ . 第一个等式的证明可采用两种方法: (1) 从等式右侧出发, 将  $\eta_1$ 、 $\eta_2$  的上述表达式代入, 即可得证. 读者可以一试. (2) 从等式左侧的组合热机效率  $\eta = (W_1 + W_2)/Q_1$  出发, 利用  $\eta_1$ 、 $\eta_2$  的表达式, 即可证明.

由于卡诺热机的效率只取决于两热源的溫度, 故只需分别将两个卡诺热机

的效率表达式  $\eta_1 = 1 - T_2/T_1$  和  $\eta_2 = 1 - T_3/T_2$  代入第一个等式, 即可得到第二个等式.

证 按分析中所述方法(2) 求证. 因  $\eta_1 = W_1/Q_1$ ,  $\eta_2 = W_2/Q_2$ , 则组合热机效率为

$$\eta = \frac{W_1 + W_2}{Q_1} = \frac{W_1}{Q_1} + \frac{W_2}{Q_1} = \eta_1 + \eta_2 \frac{Q_2}{Q_1} \quad (1)$$

以  $Q_2 = Q_1 - W_1$  代入式(1), 可证得

$$\eta = \eta_1 + \eta_2(1 - \eta_1) \quad (2)$$

将  $\eta_1 = 1 - T_2/T_1$ ,  $\eta_2 = 1 - T_3/T_2$  代入式(2), 可证得

$$\eta = 1 - T_2/T_1 + (1 - T_3/T_2)T_2/T_1 = 1 - T_3/T_1$$

**13-34** 在夏季, 假定室外温度恒定为  $37.0^\circ\text{C}$ , 启动空调使室内温度始终保持在  $17.0^\circ\text{C}$ . 如果每天有  $2.51 \times 10^8 \text{ J}$  的热量通过热传导等方式自室外流入室内, 则空调一天耗电多少? (设该空调制冷机的制冷系数为同条件下的卡诺制冷机制冷系数的  $60\%$ .)

分析 耗电量的单位为  $\text{kW} \cdot \text{h}$ ,  $1 \text{ kW} \cdot \text{h} = 3.6 \times 10^6 \text{ J}$ . 图示是空调的工作过程示意图. 因为卡诺制冷机的制冷系数为  $e_{\text{卡}} = T_2/(T_1 - T_2)$ , 其中  $T_1$  为高温热源温度(室外环境温度),  $T_2$  为低温热源温度(室内温度). 所以, 空调的制冷系数为

$$e = e_{\text{卡}} \cdot 60\% = 0.6T_2/(T_1 - T_2)$$

另一方面, 由制冷系数的定义, 有

$$e = Q_2/(Q_1 - Q_2)$$

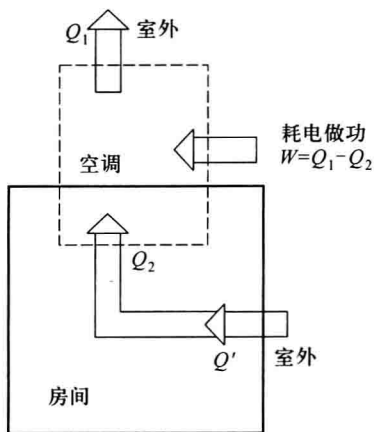
其中  $Q_1$  为空调传递给高温热源的热量, 即空调向室外排放的总热量;  $Q_2$  是空调从房间内吸取的总热量. 若  $Q'$  为室外传进室内的热量, 则在热平衡时  $Q_2 = Q'$ . 由此, 就可以求出空调的耗电做功总值  $W = Q_1 - Q_2$ .

解 根据上述分析, 空调的制冷系数为

$$e = \frac{T_2}{T_1 - T_2} \cdot 60\% = 8.7$$

在室内温度恒定时, 有  $Q_2 = Q'$ . 由  $e = Q_2/(Q_1 - Q_2)$  可得空调运行一天所耗电功

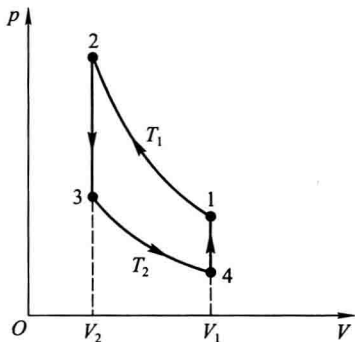
$$\begin{aligned} W &= Q_1 - Q_2 = Q_2/e = Q'/e = 2.89 \times 10^7 \text{ J} \\ &= 8.0 \text{ kW} \cdot \text{h} \end{aligned}$$



题 13-34 图



**13-35** 一定量的理想气体进行如图所示的逆向斯特林循环(回热式制冷机中的工作循环),其中 $1 \rightarrow 2$ 为等温( $T_1$ )压缩过程, $3 \rightarrow 4$ 为等温( $T_2$ )膨胀过程,其他两过程为等体过程.求证此循环的制冷系数和逆向卡诺循环制冷系数相等.(这一循环是回热式制冷机中的工作循环,具有较好的制冷效果.  $4 \rightarrow 1$ 过程从热库吸收的热量在 $2 \rightarrow 3$ 过程中又放回给了热库,故均不计入制冷系数计算.)



题 13-35 图

证  $1 \rightarrow 2$  过程气体放热

$$Q_1 = \nu RT_1 \ln \frac{V_1}{V_2}$$

$3 \rightarrow 4$  过程气体吸热

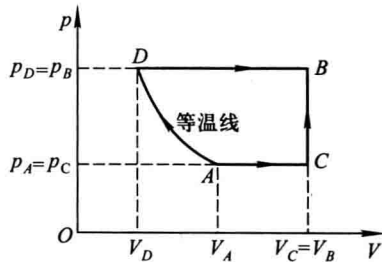
$$Q_2 = \nu RT_2 \ln \frac{V_1}{V_2}$$

则制冷系数为

$$e = Q_2 / (Q_1 - Q_2) = T_2 / (T_1 - T_2).$$

与逆向卡诺循环的制冷系数相同.

**13-36** 有物质的量为  $\nu$ , 摩尔定容热容  $C_{V,m} = 3R/2$  的理想气体, 从状态  $A(p_A, V_A, T_A)$  分别经如图所示的  $ADB$  过程和  $ACB$  过程, 到达状态  $B(p_B, V_B, T_B)$ . 试问在这两个过程中气体的熵变各为多少? 图中  $AD$  为等温线.



题 13-36 图

分析 熵是热力学的状态函数, 状态  $A$  与  $B$  之间的熵变  $\Delta S_{AB}$  不会因路径的不同而改变. 此外,  $ADB$  与  $ACB$  过程均由两个子过程组成. 总的熵变应等于各子过程熵变之和, 即  $\Delta S_{AB} = \Delta S_{AD} + \Delta S_{DB}$  或  $\Delta S_{AB} = \Delta S_{AC} + \Delta S_{CB}$ .

解 (1)  $ADB$  过程的熵变为

$$\begin{aligned} \Delta S_{ADB} &= \Delta S_{AD} + \Delta S_{DB} \\ &= \int_A^D dQ_T/T + \int_D^B dQ_p/T \\ &= \int_A^D dW_T/T + \int_D^B \nu C_{p,m} dT/T \\ &= \nu R \ln(V_D/V_A) + \nu C_{p,m} \ln(T_B/T_D) \end{aligned} \quad (1)$$

在等温过程  $AD$  中, 有  $T_D = T_A$ ; 等压过程  $DB$  中, 有  $V_B/T_B = V_D/T_D$ ; 而  $C_{p,m} = C_{V,m} + R$ , 故式(1)可改写为

$$\begin{aligned}\Delta S_{ADB} &= \nu R \ln(T_D V_B / T_B V_A) + \nu C_{p,m} \ln(T_B / T_A) \\ &= \nu R \ln(V_B / V_A) + \frac{3}{2} \nu R \ln(T_B / T_A)\end{aligned}$$

(2)  $ACB$  过程的熵变为

$$\begin{aligned}\Delta S_{ACB} &= \int_A^B dQ/T = \Delta S_{AC} + \Delta S_{CB} \\ &= \nu C_{p,m} \ln(T_C / T_A) + \nu C_{v,m} \ln(T_B / T_C)\end{aligned}\quad (2)$$

利用  $V_C = V_B$ ,  $p_C = p_A$ ,  $T_C / V_C = T_A / V_A$  及  $T_B / p_B = T_C / p_C$ , 则式(2)可写为

$$\begin{aligned}\Delta S_{ACB} &= \nu(C_{v,m} + R) \ln(V_B / V_A) + \nu C_{v,m} \ln(p_B / p_A) \\ &= \nu R \ln(V_B / V_A) + \nu C_{v,m} \ln(p_B V_B / p_A V_A) \\ &= \nu R \ln(V_B / V_A) + \frac{3}{2} \nu R \ln(T_B / T_A)\end{aligned}$$

通过上述计算可看出, 虽然  $ADB$  及  $ACB$  两过程不同, 但熵变相同. 因此, 在计算熵变时, 可选取比较容易计算的途径进行.

**13-37** 气缸内有 0.1 mol 的氧气 (视为刚性双原子分子理想气体), 作如图所示的循环过程, 其中  $ab$  为等温过程,  $bc$  为等体过程,  $ca$  为绝热过程. 已知  $V_b = 3V_a$ , 求: (1) 该循环的效率  $\eta$ ; (2) 从状态  $b$  到状态  $c$ , 氧气的熵变  $\Delta S$ .

**分析** (1) 该循环过程只有  $ab$  一个过程吸热  $Q_1$  和  $bc$  一个过程放热  $Q_2$ . 其中

$$Q_1 = \frac{m'}{M} RT_a \ln \frac{V_b}{V_a}, \quad Q_2 = \frac{m'}{M} C_{v,m} (T_c - T_b) = \frac{m'}{M} C_{v,m} (T_c - T_a)$$

将它们代入效率公式  $\eta = 1 - \frac{|Q_2|}{Q_1}$ , 并利用  $ca$  绝热过

程方程  $TV^{\gamma-1} = \text{常量}$ , 获得  $T_c$  与  $T_a$  的关系式, 就可求出效率值. (2)  $bc$  是等体过程, 每个微小过程的热量

变化为  $dQ = \frac{m'}{M} C_{v,m} dT$ , 其熵变为  $dS = \frac{m'}{M} C_{v,m} \frac{dT}{T}$ . 利用

熵的可加性 (积分) 就可求出  $\Delta S = \int dS$ .

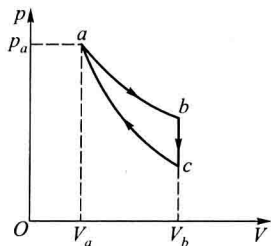
**解** (1) 由分析知效率为

$$\eta = 1 - \frac{C_{v,m} (T_a - T_c)}{RT_a \ln V_b / V_a} = 1 - \frac{\frac{5}{2} \left(1 - \frac{T_c}{T_a}\right)}{\ln 3}$$

利用  $T_a V_a^{\gamma-1} = T_c V_c^{\gamma-1}$  得

$$T_c / T_a = (V_a / V_c)^{\gamma-1} = (1/3)^{0.4}$$

代入上式可解出



题 13-37 图

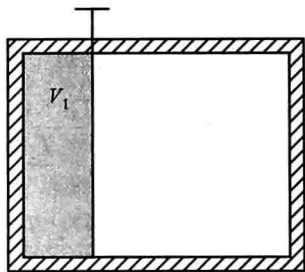
$$\eta = 19.0\%$$

(2) 由分析知  $bc$  过程熵变

$$\begin{aligned}\Delta S &= S_c - S_b = \frac{m'}{M} C_{V,m} \int_{T_b}^{T_c} \frac{dT}{T} = \frac{m'}{M} C_{V,m} \ln \frac{T_c}{T_b} = \frac{m'}{M} C_{V,m} \ln \frac{T_c}{T_a} \\ &= 0.1 \times \frac{5}{2} \times 8.31 \times \ln \left( \frac{1}{3} \right)^{0.4} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} = -0.91 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}\end{aligned}$$

**\* 13-38** 有一体积为  $2.0 \times 10^{-2} \text{ m}^3$  的绝热容器, 用一隔板将其分为两部分, 如图所示. 开始时在左边 (体积  $V_1 = 5.0 \times 10^{-3} \text{ m}^3$ ) 一侧充有  $1 \text{ mol}$  理想气体, 右边一侧为真空. 现打开隔板让气体自由膨胀而充满整个容器, 求熵变.

**分析** 在求解本题时, 要注意  $\Delta S = \int_A^B \frac{dQ}{T}$  的适用条件. 在绝热自由膨胀过程中,  $dQ = 0$ , 若仍运用上式计算熵变, 必然有  $\Delta S = 0$ . 显然, 这是错误的结果. 由于熵是状态的单值函数, 当初态与末态不同时, 熵变不应为零. 出现上述错误的原因就是忽视了公式的适用条件.  $\Delta S = \int_A^B \frac{dQ}{T}$  只适用于可逆过程, 而自由膨胀过程是不可逆的. 因此, 在求解不可逆过程的熵变时, 通常需要在初态与末态之间设计一个可逆过程, 然后再按可逆过程熵变的积分式进行计算. 在选取可逆过程时, 尽量使其积分便于计算.



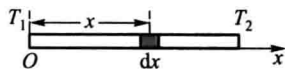
题 13-38 图

**解** 根据上述分析, 在本题中因初、末态时气体的体积  $V_1$ 、 $V_2$  均已知, 且温度相同, 故可选一可逆等温过程. 在等温过程中,  $dQ = dW = pdV$ , 而  $p = \frac{m'}{M} \frac{RT}{V}$ , 则熵变为

$$\begin{aligned}\Delta S &= \int \frac{dQ}{T} = \int \frac{pdV}{T} = \frac{m'}{M} R \int_{V_1}^{V_2} \frac{1}{V} dV \\ &= \frac{m'}{M} R \ln(V_2/V_1) = 11.52 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}\end{aligned}$$

**\* 13-39** 一均匀细杆长  $L$ , 单位长度的热容为  $C_l$ . 开始时沿细杆方向温度由低到高分布, 一端为  $T_1$ , 另一端为  $T_2$  ( $T_2 > T_1$ ). 在热传导作用下, 最后整个细杆达到均匀温度  $\frac{1}{2}(T_1 + T_2)$ , 求该过程中细杆的熵变.

**分析** 开始时细杆上各点温度均不相同, 是非平衡态. 为了计算整个细杆的熵变, 可以先求出杆上任一小段  $dx$  的熵变  $dS$ . 如图所示.  $dx$  处的温度为



题 13-39 图

$T = T_1 + \frac{T_2 - T_1}{L} x$ , 最后细杆达到热平衡后, 杆上各点温度均为  $\frac{1}{2}(T_1 + T_2)$ . 故  $dx$  段

的熵变为  $dS = \int \frac{dQ}{T} = \int \frac{C_l dx \cdot dT}{T} = C_l dx \int_{T_1 + \frac{T_2 - T_1}{L} x}^{\frac{1}{2}(T_1 + T_2)} \frac{dT}{T}$ . 求出任一段的  $dS$  后, 根据熵的可加性(广延性) 将各小段的熵相加即可(实际上是积分).

解 根据分析, 杆上任一小段  $dx$  的熵变为

$$dS = C_l dx \int_{T_1 + \frac{T_2 - T_1}{L} x}^{\frac{1}{2}(T_1 + T_2)} \frac{dT}{T} = C_l dx \left[ \ln \frac{1}{2}(T_1 + T_2) - \ln \left( T_1 + \frac{T_2 - T_1}{L} x \right) \right]$$

则整个杆熵变为

$$\begin{aligned} \Delta S &= \int dS = C_l \int_0^L \left[ \ln \frac{1}{2}(T_1 + T_2) - \ln \left( T_1 + \frac{T_2 - T_1}{L} x \right) \right] dx \\ &= C_l L \ln \frac{T_1 + T_2}{2} - \frac{C_l}{T_2 - T_1} \left[ \left( T_1 + \frac{T_2 - T_1}{L} x \right) \ln \left( T_1 + \frac{T_2 - T_1}{L} x \right) - \left( T_1 + \frac{T_2 - T_1}{L} x \right) \right] \Big|_0^L \\ &= C_l L \left( \ln \frac{T_1 + T_2}{2} - \frac{T_2 \ln T_2 - T_1 \ln T_1}{T_2 - T_1} + 1 \right) \end{aligned}$$

## 第五篇

# 近代物理基础

### 求解近代物理问题的基本思路和方法

工科大学物理范围内涉及的近代物理部分的内容面广而不深,要求定量计算的问题有限且较为基本.但由于近代物理展示的物理规律往往与经典物理格格不入,所以学习上和解题中遇到的困难往往表现为学习者在观念上的困惑和不解.明确以下几点,可能会对我们求解近代物理中的若干问题有所帮助.

#### 1. 在什么情况下用近代物理的规律求解问题

近代物理通常是指相对论和量子物理.前者揭示了运动物体的速度接近光速时所遵循的物理规律,后者显示了微观粒子的物理行为.按照对应原理,在极限条件下(低速、宏观)近代物理的一系列规律又能自然退化为经典规律.这说明两种理论并非完全不相容,只是适用对象和条件不同.

##### (1) 相对论判据(或非相对论近似条件)

一般来说只有当运动物体的速度接近于光速时才有明显的相对论效应,因此通常把  $v \ll c$  作为非相对论近似条件,对于微观粒子来说,当  $E_k \ll E_0$  或  $p \ll \frac{E_0}{c}$  时可用非相对论处理,两者接近时则必须用相对论规律,熟记常见粒子的静能数值有助于迅速判断,如电子静能  $E_{0e} = 0.51 \text{ MeV}$ ,质子静能  $E_{0p} = 937 \text{ MeV}$  等.由于微观粒子静能值往往相差较大,对于动能相同的两种粒子来说,往往会出现一种粒子可用非相对论,而另一种粒子必须用相对论处理.

##### (2) 量子物理的适用范围

由于微观粒子具有波粒二象性,大部分情况下只有用量子理论才能解释其行为,因此对原子、电子、质子等微观粒子必须用量子理论解释,而对分子系统来说,其中常温及高温下的气体可用经典理论,但对低温下的气体以及固体和液体则应用量子理论.

## 2. 对相对论中几个重要结论的思考

在相对论中时间和空间联系在一起构成了一个统一体,它们均与运动有关.为什么相对论的一些重要结论常使人感到困惑呢?这主要是源于它的基本观念与人们的“常识”不符,但这里所说的“常识”均是人们在宏观低速物理环境中所感受的,而“常识”又往往成为我们接受相对论的障碍.在相对论的一系列结论中,同时性的相对性是一个关键性概念,相对论中一系列时空特征都与这一基本概念有关.在学习中有人会问:既然相对论告诉我们动尺缩短,那么,在两个作相对运动的惯性系之中究竟哪个尺子缩短了?其实考虑同时的相对性,对于运动的尺,只有同时测量其两端才能得出其长度,对于静止的尺,则无须同时测量其两端,而不同惯性系中同时是相对的,由洛伦兹变换得出在不同惯性系中均为动尺缩短,在这里根本不存在“哪一根尺缩短了”,它是同时的相对性带来时空属性,而不是一种物质过程.对“动钟变慢”也可作同样的理解.至于质速关系,则应注意质量并非物质本身,它是对物体惯性的量度,这种量度与惯性系的选择有关,质量变化了,并非物质本身的量发生变化,也非一种物质过程.总之只要认同相对论的两个基础——相对性原理和光速不变原理,就能得到与现代物理理论和实验相符合的一系列重要结论,并用一种全新思维方式去认识它.当然,在低速( $v \ll c$ )的情况下,相对论力学趋同于牛顿力学,牛顿力学仍然是人们处理低速情况下物理问题的基础.

## 3. 如何实现微观粒子 $E_k$ 和 $p$ 之间的互求

在微观粒子的各种实验中,能够直接测得的往往是粒子动能  $E_k$  或动量  $p$ ,初学者往往先用相对论规律求出粒子的速度,与光速  $c$  比较后,再进行下一步计算,其实大可不必这样做.

当  $E_k$  与  $E_0$  或  $p$  与  $\frac{E_0}{c}$  接近时,直接用相对论规律实现  $E_k$  与  $p$  之间的互求.即

$$p = \frac{1}{c} \sqrt{E_k(E_k + 2E_0)}$$

或

$$E_k = E_0 \left[ \sqrt{1 + \left(\frac{pc}{E_0}\right)^2} - 1 \right]$$

而当  $E_k \ll E_0$  或  $p \ll \frac{E_0}{c}$  时,直接用经典规律实现互求,即

$$p = \sqrt{2m_0 E_k} \quad \text{或} \quad E_k = \frac{p^2}{2m_0}$$

以上操作避开了速度的求解,同时又能迅速判断用哪一种关系实现  $E_k$  和  $p$  之间互求,因而要简便得多。

#### 4. 对量子物理中若干基本概念的认识

近现代诸多实验表明,微观粒子的状态是量子化的,包括能量、动量、角动量以及空间取向等,量子化其实是自然界的本来面目,只是在经典条件下,无法觉察而已,而被人们认为它们是“连续”的罢了。

同样大量实验表明微观粒子具有波粒二象性,但二象性绝非是一个经典粒子+经典波的混合图像,因为两个图像在经典物理中是不相容的,前者在空间是局域的,有确定的轨道,后者在空间是广延的,非局域的,表现为时空周期性。这两种属性在微观粒子上同时具有又该如何理解呢?这只能用概率加以理解,微观粒子绝非经典粒子,我们不能同时确定其坐标和动量,其波动性体现为粒子在空间某个位置出现的概率上,或一个物理行为发生的概率上,实际上凡是在涉及原子过程的所有实验中,没有一个实验能够揭示原子过程发生的准确时间和位置,对于原子过程只能给出概率性的描述,因此微观粒子是一种概率波,既承认其粒子性又同时体现其波动性,这样微观粒子的波粒二象性就在概率论基础上被统一起来,认识到这一点对用波函数模的平方(即  $|\Psi|^2$ ) 来描述粒子空间概率分布的这种方法也就不难理解了。

#### 5. 不确定关系与估算方法

不确定关系式既表明了微观粒子的波粒二象性,同时又是对用经典方法描述微观粒子行为作出一种限制。利用不确定关系可直接对粒子坐标、动量或其他有关物理量不确定范围作出估计,其次也可以通过这些物理量的不确定范围对物理量本身的数量级进行估计,以上计算注重的是数量级,因而计算无需严格,例如经常认为  $\Delta p \approx p$ 、 $\Delta r \approx r$  等,此外  $\Delta x \Delta p \geq h$  (或  $\geq \frac{h}{4\pi}$ ) 是最基本的不确定关系式,由此还可演变出诸多不确定关系式,计算时也都只需用估算方法。

由于近代物理的基本概念远远超出了经典物理的框架,因此学好近代物理,首先要在思维和观念上不受已在经典物理中形成的牢固概念和思维定势的约束,而用一种全新的思维方式来思考和求解近代物理问题。

## 第十四章 相对论

14-1 有下列几种说法:

- (1) 两个相互作用的粒子系统对某一惯性系满足动量守恒,对另一个惯性系来说,其动量不一定守恒;  
 (2) 在真空中,光的速度与光的频率、光源的运动状态无关;  
 (3) 在任何惯性系中,光在真空中沿任何方向的传播速率都相同.

上述说法中正确的是( )

- (A) 只有(1)、(2)是正确的 (B) 只有(1)、(3)是正确的  
 (C) 只有(2)、(3)是正确的 (D) 三种说法都是正确的

**分析与解** 物理相对性原理和光速不变原理是相对论的基础.前者是理论基础,后者是实验基础.按照这两个原理,任何物理规律(含题述动量守恒定律)对某一惯性系成立,对另一惯性系也同样成立.而光在真空中的速度与光源频率和运动状态无关,从任何惯性系(相对光源静止还是运动)测得光速均为  $3 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .迄今为止,还没有实验能推翻这一事实.由此可见,(2)、(3)说法是正确的,故选(C).

14-2 按照相对论的时空观,判断下列叙述中正确的是( )

- (A) 在一个惯性系中,两个同时的事件,在另一惯性系中一定是同时事件  
 (B) 在一个惯性系中,两个同时的事件,在另一惯性系中一定是不同时事件  
 (C) 在一个惯性系中,两个同时又同地的事件,在另一惯性系中一定是同时同地事件  
 (D) 在一个惯性系中,两个同时不同地的事件,在另一惯性系中只可能同时不同地  
 (E) 在一个惯性系中,两个同时不同地事件,在另一惯性系中只可能同地不同时

**分析与解** 设在惯性系 S 中发生两个事件,其时间和空间间隔分别为  $\Delta t$  和  $\Delta x$ ,按照洛伦兹坐标变换,在 S' 系中测得两事件时间和空间间隔分别为

$$\Delta t' = \frac{\Delta t - \frac{v}{c^2} \Delta x}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad \text{和} \quad \Delta x' = \frac{\Delta x - v \Delta t}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

讨论上述两式,可对题述几种说法的正确性予以判断:说法(A)(B)是不正确的,这是因为在一个惯性系(如 S 系)发生的同时( $\Delta t = 0$ )事件,在另一个惯性



系(如  $S'$  系)中是否同时有两种可能,这取决于那两个事件在  $S$  系中发生的地点是同地( $\Delta x=0$ )还是不同地( $\Delta x \neq 0$ ).说法(D)(E)也是不正确的,由上述两式可知:在  $S$  系发生两个同时( $\Delta t=0$ )不同地( $\Delta x \neq 0$ )事件,在  $S'$  系中一定是既不同时( $\Delta t' \neq 0$ )也不同地( $\Delta x' \neq 0$ ),但是在  $S$  系中的两个同时同地事件,在  $S'$  系中一定是同时同地的,故只有说法(C)正确.有兴趣的读者,可对上述两式详加讨论,以增加对相对论时空观的深入理解.

**14-3** 有一细棒固定在  $S'$  系中,它与  $Ox'$  轴的夹角  $\theta' = 60^\circ$ ,如果  $S'$  系以速度  $u$  沿  $Ox$  方向相对于  $S$  系运动, $S$  系中观察者测得细棒与  $Ox$  轴的夹角( )

(A) 等于  $60^\circ$       (B) 大于  $60^\circ$       (C) 小于  $60^\circ$

(D) 当  $S'$  系沿  $Ox$  正方向运动时大于  $60^\circ$ ,而当  $S'$  系沿  $Ox$  负方向运动时小于  $60^\circ$

**分析与解** 按照相对论的长度收缩效应,静止于  $S'$  系的细棒在运动方向的分量(即  $Ox$  轴方向)相对  $S$  系观察者来说将会缩短,而在垂直于运动方向上的分量不变,因此  $S$  系中观察者测得细棒与  $Ox$  轴夹角将会大于  $60^\circ$ ,此结论与  $S'$  系相对  $S$  系沿  $Ox$  轴正向还是负向运动无关.由此可见应选(C).

**14-4** 一飞船的固有长度为  $L$ ,相对于地面以速度  $v_1$  作匀速直线运动,从飞船中的后端向飞船中的前端的一个靶子发射一颗相对于飞船的速度为  $v_2$  的子弹.在飞船上测得子弹从射出到击中靶的时间间隔是( )( $c$  表示真空中光速.)

(A)  $\frac{L}{v_1+v_2}$       (B)  $\frac{L}{v_2-v_1}$       (C)  $\frac{L}{v_2}$       (D)  $\frac{L}{v_1\sqrt{1-(v_1/c)^2}}$

**分析与解** 固有长度是指相对测量对象静止的观察者所测,则题中  $L$ 、 $v_2$  以及所求时间间隔均为同一参考系(此处指飞船)中的三个相关物理量,求解时与相对论的时空观无关.故选(C).

**讨论** 从地面测得的上述时间间隔为多少?建议读者自己求解.注意此处要用到相对论时空观方面的规律了.

**14-5** 设  $S'$  系以速率  $v=0.60c$  相对于  $S$  系沿  $xx'$  轴运动,且在  $t=t'=0$  时,  $x=x'=0$ .(1)若有一事件,在  $S$  系中发生于  $t=2.0 \times 10^{-7}$  s,  $x=50$  m 处,则该事件在  $S'$  系中发生于何时刻?(2)如有另一事件发生于  $S$  系中  $t=3.0 \times 10^{-7}$  s,  $x=10$  m 处,在  $S'$  系中测得这两个事件的时间间隔为多少?

**分析** 在相对论中,可用一组时空坐标  $(x, y, z, t)$  表示一个事件.因此,本题可直接利用洛伦兹变换把两事件从  $S$  系变换到  $S'$  系中.

**解** (1)由洛伦兹变换可得  $S'$  系的观察者测得第一事件发生的时刻为

$$t'_1 = \frac{t_1 - \frac{v}{c^2}x_1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = 1.25 \times 10^{-7} \text{ s}$$

(2) 同理,第二个事件发生的时刻为

$$t'_2 = \frac{t_2 - \frac{v}{c^2}x_2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = 3.5 \times 10^{-7} \text{ s}$$

所以,在  $S'$  系中两事件的时间间隔为

$$\Delta t' = t'_2 - t'_1 = 2.25 \times 10^{-7} \text{ s}$$

**14-6** 设有两个参考系  $S$  和  $S'$ , 它们的原点在  $t=0$  和  $t'=0$  时重合在一起. 有一事件, 在  $S'$  系中发生在  $t'=8.0 \times 10^{-8} \text{ s}$ ,  $x'=60 \text{ m}$ ,  $y'=0$ ,  $z'=0$  处, 若  $S'$  系相对于  $S$  系以速率  $v=0.60c$  沿  $xx'$  轴运动, 问该事件在  $S$  系中的时空坐标为多少?

**分析** 本题可直接由洛伦兹逆变换将该事件从  $S'$  系转换到  $S$  系.

**解** 由洛伦兹逆变换得该事件在  $S$  系的时空坐标分别为

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = 93 \text{ m}$$

$$y = y' = 0$$

$$z = z' = 0$$

$$t = \frac{t' + \frac{vx'}{c^2}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = 2.5 \times 10^{-7} \text{ s}$$

**14-7** 一列火车长  $0.30 \text{ km}$  (火车上观察者测得), 以  $100 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$  的速度行驶, 地面上观察者发现有两个闪电同时击中火车的前后两端. 问火车上的观察者测得两闪电击中火车前后两端的时间间隔为多少?

**分析** 首先应确定参考系, 如设地面为  $S$  系, 火车为  $S'$  系, 把两闪电击中火车前后端视为两个事件 (即两组不同的时空坐标). 地面观察者看到两闪电同时击中, 即两闪电在  $S$  系中的时间间隔  $\Delta t = t_2 - t_1 = 0$ . 火车的长度是相对火车静止的观察者测得的长度 (注: 物体长度在不指明观察者的情况下, 均指相对其静止参考系测得的长度), 即两事件在  $S'$  系中的空间间隔  $\Delta x' = x'_2 - x'_1 = 0.30 \times 10^3 \text{ m}$ .  $S'$  系相对  $S$  系的速度即为火车速度 (对初学者来说, 完成上述基本分析是十分必要的). 由洛伦兹变换可得两事件时间间隔之间的关系式为

$$t_2 - t_1 = \frac{(t'_2 - t'_1) + \frac{v}{c^2}(x'_2 - x'_1)}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \quad (1)$$

$$t'_2 - t'_1 = \frac{(t_2 - t_1) - \frac{v}{c^2}(x_2 - x_1)}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \quad (2)$$

将已知条件代入式(1)可直接解得结果. 也可利用式(2)求解, 此时应注意, 式中

$x_2 - x_1$  为地面观察者测得两事件的空间间隔, 即 S 系中测得的火车长度, 而不是火车原长. 根据相对论, 运动物体 (火车) 有长度收缩效应, 即  $x_2 - x_1 = (x'_2 - x'_1) \sqrt{1 - v^2/c^2}$ . 考虑这一关系方可利用式(2)求解.

**解 1** 根据分析, 由式(1)可得火车 (S'系) 上的观察者测得两闪电击中火车前后端的时间间隔为

$$t'_2 - t'_1 = -\frac{v}{c^2}(x'_2 - x'_1) = -9.26 \times 10^{-14} \text{ s}$$

负号说明火车上的观察者测得闪电先击中车头  $x'_2$  处.

**解 2** 根据分析, 把关系式  $x_2 - x_1 = (x'_2 - x'_1) \sqrt{1 - v^2/c^2}$  代入式(2)亦可得与解 1 相同的结果. 相比之下解 1 较简便, 这是因为解 1 中直接利用了  $x'_2 - x'_1 = 0.30 \text{ km}$  这一已知条件.

**14-8** 在惯性系 S 中, 某事件 A 发生于  $x_1$  处, 经过  $2.0 \times 10^{-6} \text{ s}$  后, 另一事件 B 发生于  $x_2$  处, 已知  $x_2 - x_1 = 300 \text{ m}$ . 问: (1) 能否找到一个相对 S 系作匀速直线运动的参考系 S', 在 S' 系中, 两事件发生在同一地点? (2) 在 S' 系中, 上述两事件之间的时间间隔为多少?

**分析** 在相对论中, 从不同惯性系测得两事件的空间间隔和时间间隔有可能是不同的. 它与两惯性系之间的相对速度有关. 设惯性系 S' 以速度  $v$  相对 S 系沿  $x$  轴正向运动, 因在 S 系中两事件的时空坐标已知, 由洛伦兹时空变换式, 可得

$$x'_2 - x'_1 = \frac{(x_2 - x_1) - v(t_2 - t_1)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (1)$$

$$t'_2 - t'_1 = \frac{(t_2 - t_1) - \frac{v}{c^2}(x_2 - x_1)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (2)$$

两事件在 S' 系中发生在同一地点, 即  $x'_2 - x'_1 = 0$ , 代入式(1)可求出  $v$  值, 以此作匀速直线运动的 S' 系, 即为所寻找的参考系. 然后由式(2)可得两事件在 S' 系中的时间间隔. 对于本题第二问, 也可从相对论时间延缓效应来分析. 因为如果两事件在 S' 系中发生在同一地点, 则  $\Delta t'$  为固有时间间隔 (原时), 由时间延缓效应关系式  $\Delta t' = \Delta t \sqrt{1 - v^2/c^2}$  可直接求得结果.

**解** (1) 令  $x'_2 - x'_1 = 0$ , 由式(1)可得

$$v = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = 1.50 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 0.50c$$

(2) 将  $v$  值代入式(2), 可得

$$t'_2 - t'_1 = \frac{(t_2 - t_1) \left( 1 - \frac{v}{c^2} \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} \right)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = (t_2 - t_1) \sqrt{1 - v^2/c^2}$$

$$= 1.73 \times 10^{-6} \text{ s}$$

这表明在  $S'$  系中事件 A 先发生。

**14-9** 设在正负电子对撞机中,电子和正电子以速度  $0.90c$  相向飞行,它们之间的相对速度为多少?

**分析** 设对撞机为  $S$  系,沿  $x$  轴正向飞行的正电子为  $S'$  系. $S'$  系相对  $S$  系的速度  $v=0.90c$ ,则另一电子相对  $S$  系速度  $u_x = -0.90c$ ,该电子相对  $S'$  系(即沿  $x$  轴正向飞行的电子)的速度  $u'_x$  即为题中所求的相对速度.在明确题目所述已知条件及所求量的物理含义后,即可利用洛伦兹速度变换式进行求解.

**解** 按分析中所选参考系,电子相对  $S'$  系的速度为

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \frac{v}{c^2} u_x} = -0.994c$$

式中负号表示该电子沿  $x'$  轴负向飞行,正好与正电子相向飞行.

**讨论** 若按照伽利略速度变换,它们之间的相对速度为多少?

**14-10** 设想有一粒子以  $0.050c$  的速率相对实验室参考系运动.此粒子衰变时发射一个电子,电子的速率为  $0.80c$ ,电子速度的方向与粒子运动方向相同.试求电子相对实验室参考系的速度.

**分析** 这是相对论的速度变换问题.取实验室为  $S$  系,运动粒子为  $S'$  系,则  $S'$  系相对  $S$  系的速度  $v=0.050c$ .题中所给的电子速率是电子相对衰变粒子的速率,故  $u'_x = 0.80c$ .

**解** 根据分析,由洛伦兹速度逆变换式可得电子相对  $S$  系的速度为

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + \frac{v}{c^2} u'_x} = 0.817c$$

**14-11** 设在宇宙飞船中的观察者测得脱离它而去的航天器相对它的速度为  $1.2 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \mathbf{i}$ .同时,航天器发射一枚空间火箭,航天器中的观察者测得此火箭相对它的速度为  $1.0 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \mathbf{i}$ .问:(1)此火箭相对宇宙飞船的速度为多少?(2)如果以激光光束来替代空间火箭,此激光光束相对宇宙飞船的速度又为多少?请将上述结果与伽利略速度变换所得结果相比较,并理解光速是物体速度的极限.

**分析** 该题仍是相对论速度变换问题.(2)中用激光束来替代火箭,其区别在于激光束是以光速  $c$  相对航天器运动,因此其速度变换结果应该与光速不变

原理相一致.

解 设宇宙飞船为 S 系, 航天器为 S' 系, 则 S' 系相对 S 系的速度  $v = 1.2 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ , 空间火箭相对航天器的速度为  $u'_x = 1.0 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ , 激光束相对航天器的速度为光速  $c$ . 由洛伦兹变换可得:

(1) 空间火箭相对 S 系的速度为

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + \frac{v}{c^2} u'_x} = 1.94 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

(2) 激光束相对 S 系的速度为

$$u_x = \frac{c + v}{1 + \frac{v}{c^2} c} = c$$

即激光束相对宇宙飞船的速度仍为光速  $c$ , 这是光速不变原理所预料的. 如用伽利略变换, 则有  $u_x = c + v > c$ . 这表明对伽利略变换而言, 运动物体没有极限速度, 但对相对论的洛伦兹变换来说, 光速是运动物体的极限速度.

**14-12** 以速度  $v$  沿  $x$  方向运动的粒子, 在  $y$  方向上发射一光子, 求地面观察者所测得的光子的速度.

分析 设地面为 S 系, 运动粒子为 S' 系. 与上题不同之处在于, 光子的运动方向与粒子运动方向不一致, 因此应先求出光子相对 S 系速度  $\boldsymbol{u}$  的分量  $u_x$ 、 $u_y$  和  $u_z$ , 然后才能求  $\boldsymbol{u}$  的大小和方向. 根据所设参考系, 光子相对 S' 系的速度分量分别为  $u'_x = 0, u'_y = c, u'_z = 0$ .

解 由洛伦兹速度的逆变换式可得光子相对 S 系的速度分量分别为

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + \frac{v}{c^2} u'_x} = v$$
$$u_y = \frac{u'_y \sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + \frac{v}{c^2} u'_x} = c \sqrt{1 - v^2/c^2}$$
$$u_z = 0$$

所以, 光子相对 S 系速度  $\boldsymbol{u}$  的大小为

$$u = \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2} = c$$

速度  $\boldsymbol{u}$  与  $x$  轴的夹角为

$$\theta = \arctan \frac{u_y}{u_x} = \arctan \frac{\sqrt{c^2 - v^2}}{v}$$

讨论 地面观察者所测得光子的速度仍为  $c$ , 这也是光速不变原理的必然

结果.但在不同惯性参考系中其速度的方向却发生了变化.

**14-13** 火箭相对于地面以  $v=0.6c$  ( $c$  为真空中光速) 的匀速度向上飞离地球.在火箭发射  $\Delta t'=10\text{ s}$  后(火箭上的钟),该火箭向地面发射一导弹,其速度相对于地面为  $v_1=0.3c$ ,问火箭发射后多长时间(地球上的钟),导弹到达地球?计算中假设地面不动.

**分析** 求解时应考虑两部分时间.一是火箭发射到对地球发射导弹所经历的时间  $\Delta t_1$  (按地球上的钟有  $\Delta t_1 \neq \Delta t'$ ),二是导弹飞向地球所需时间  $\Delta t_2$ ,则  $\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2$ .计算  $\Delta t_1$  时用到时间延缓效应,计算  $\Delta t_2$  所涉及速度、距离和时间都必须相对同一参考系而言(本题应为地球).这也是处理相对论问题必须时刻提醒自己的一点.

**解** 按地球的钟,导弹发射的时间是在火箭发射后,则根据时间延缓效应有

$$\Delta t_1 = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = 12.5\text{ s}$$

这段时间火箭相对地球的飞行距离为

$$s = v \cdot \Delta t_1$$

则导弹飞到地球的时间是

$$\Delta t_2 = \frac{s}{v_1} = \frac{v}{v_1} \Delta t_1 = 25\text{ s}$$

那么从火箭发射后到导弹到达地面的时间是

$$\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2 = (12.5 + 25)\text{ s} = 37.5\text{ s}$$

**14-14** 设想地球上有一观察者测得一宇宙飞船以  $0.60c$  的速率向东飞行,  $5.0\text{ s}$  后该飞船将与一个以  $0.80c$  的速率向西飞行的彗星相碰撞.试问:(1)飞船中的人测得彗星将以多大的速率向它运动?(2)以飞船中的钟来看,还有多少时间容许它离开航线,以避免与彗星碰撞?

**分析** (1)这是一个相对论速度变换问题.取地球为  $S$  系,飞船为  $S'$  系,向东为  $x$  轴正向.则  $S'$  系相对  $S$  系的速度  $v=0.60c$ ,彗星相对  $S$  系的速度  $u_x = -0.80c$ ,由洛伦兹速度变换可得所求结果.

(2)可从下面两个角度考虑:

①以地球为  $S$  系,飞船为  $S'$  系.设  $x_0 = x'_0 = 0$  时  $t_0 = t'_0 = 0$ ,飞船与彗星相碰这一事件在  $S$  系中的时空坐标为  $t=5.0\text{ s}$ ,  $x=vt$ .利用洛伦兹时空变换式可求出  $t'$ ,则  $\Delta t' = t' - t'_0$  表示飞船与彗星相碰所经历的时间.

②把  $t_0 = t'_0 = 0$  时的飞船状态视为一个事件,把飞船与彗星相碰视为第二个事件.这两个事件都发生在  $S'$  系中的同一地点(即飞船上),飞船上的观察者测得这两个事件的时间间隔  $\Delta t'$  为固有时,而地面观察者所测得上述两事件的时间间隔  $\Delta t = 5.0\text{ s}$  比固有时要长,根据时间延缓效应可求出  $\Delta t'$ .

解 (1) 由洛伦兹速度变换得彗星相对 S' 系的速度为

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \frac{v}{c^2} u_x} = -0.946c$$

即彗星以  $0.946c$  的速率向飞船靠近.

(2) 飞船与彗星相碰这一事件在 S' 系中的时刻为

$$t' = \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = 4.0 \text{ s}$$

即在飞船上看,飞船与彗星相碰发生在时刻  $t' = 4.0 \text{ s}$ .

也可以根据时间延缓效应  $\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = 5.0 \text{ s}$ , 解得  $\Delta t' = 4.0 \text{ s}$ , 即从飞船

上的钟来看,尚有  $4.0 \text{ s}$  时间允许它离开原来的航线.

**14-15** 在惯性系 S 中观察到有两个事件发生在同一地点,其时间间隔为  $4.0 \text{ s}$ ,从另一惯性系 S' 中观察到这两个事件的时间间隔为  $6.0 \text{ s}$ ,试问从 S' 系测量到这两个事件的空间间隔是多少? 设 S' 系以恒定速率相对 S 系沿  $xx'$  轴运动.

**分析** 这是相对论中同地不同时的两事件的时空转换问题. 可以根据时间延缓效应的关系式先求出 S' 系相对 S 系的运动速度  $v$ , 进而得到两事件在 S' 系中的空间间隔  $\Delta x' = v\Delta t'$  (由洛伦兹时空变换同样可得到此结果).

**解** 由题意知在 S 系中的时间间隔为固有的, 即  $\Delta t = 4.0 \text{ s}$ , 而  $\Delta t' = 6.0 \text{ s}$ . 根据时间延缓效应的关系式  $\Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$ , 可得 S' 系相对 S 系的速度为

$$v = \left[ 1 - \left( \frac{\Delta t}{\Delta t'} \right)^2 \right]^{1/2} c = \frac{\sqrt{5}}{3} c$$

两事件在 S' 系中的空间间隔为

$$\Delta x' = v\Delta t' = 1.34 \times 10^9 \text{ m}$$

**14-16** 在惯性系 S 中, 有两个事件同时发生在  $xx'$  轴上相距为  $1.0 \times 10^3 \text{ m}$  的两处, 从惯性系 S' 观测到这两个事件相距为  $2.0 \times 10^3 \text{ m}$ , 试问由 S' 系测得此两事件的时间间隔为多少?

**分析** 这是同时不同地的两事件之间的时空转换问题. 由于本题未给出 S' 系相对 S 系的速度  $v$ , 故可由不同参考系中两事件空间间隔之间的关系求得  $v$ , 再由两事件时间间隔的关系求出两事件在 S' 系中的时间间隔.

**解** 设此两事件在 S 系中的时空坐标为  $(x_1, 0, 0, t_1)$  和  $(x_2, 0, 0, t_2)$ , 且有  $|x_2 - x_1| = 1.0 \times 10^3 \text{ m}$ ,  $t_2 - t_1 = 0$ . 而在 S' 系中, 此两事件的时空坐标为  $(x'_1, 0, 0, t'_1)$

和  $(x'_2, 0, 0, t'_2)$ , 且  $|x'_2 - x'_1| = 2.0 \times 10^3 \text{ m}$ , 根据洛伦兹变换, 有

$$x'_2 - x'_1 = \frac{(x_2 - x_1) - v(t_2 - t_1)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (1)$$

$$t'_2 - t'_1 = \frac{(t_2 - t_1) - \frac{v}{c^2}(x_2 - x_1)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (2)$$

由式(1)可得

$$v = \left[ 1 - \frac{(x_2 - x_1)^2}{(x'_2 - x'_1)^2} \right]^{1/2} c = \frac{\sqrt{3}}{2} c$$

将  $v$  值代入式(2), 可得

$$|t'_2 - t'_1| = 5.77 \times 10^{-6} \text{ s}$$

**14-17** 在  $S$  系中有一长为  $l_0$  的棒沿  $x$  轴放置, 并以速率  $u$  沿  $xx'$  轴运动. 若有一  $S'$  系以速率  $v$  相对  $S$  系沿  $xx'$  轴运动, 试问在  $S'$  系中测得此棒的长度为多少?

**分析** 当棒相对观察者(为  $S'$  系)存在相对运动时, 观察者测得棒的长度要比棒的固有长度  $l_0$  短, 即  $l = l_0 \sqrt{1 - u'^2/c^2}$ . 式中  $u'$  是棒相对观察者的速度, 而不要误认为一定是  $S'$  系和  $S$  系之间的相对速度  $v$ . 在本题中, 棒并非静止于  $S$  系, 因而  $S'$  系与  $S$  系之间的相对速度  $v$  并不是棒与  $S'$  系之间的相对速度  $u'$ . 所以本题应首先根据洛伦兹速度变换式求  $u'$ , 再代入长度收缩公式求  $l$ .

**解** 根据分析, 有

$$u' = \frac{u - v}{1 - \frac{uv}{c^2}} \quad (1)$$

$$l = l_0 \sqrt{1 - u'^2/c^2} \quad (2)$$

解上述两式, 可得

$$l = \frac{l_0}{c^2 - uv} [(c^2 - u^2)(c^2 - v^2)]^{1/2}$$

**14-18** 若从一惯性系中测得宇宙飞船的长度为其固有长度的一半, 试问宇宙飞船相对此惯性系的速度为多少(以光速  $c$  表示)?

**解** 设宇宙飞船的固有长度为  $l_0$ , 它相对于惯性系的速率为  $v$ , 而从此惯性系测得宇宙飞船的长度为  $l_0/2$ , 根据洛伦兹长度收缩公式, 有

$$l_0/2 = l_0 \sqrt{1 - v^2/c^2}$$

可解得

$$v = 0.866c$$

**14-19** 一固有长度为  $4.0 \text{ m}$  的物体, 若以速率  $0.60c$  沿  $x$  轴相对某惯性系



运动,试问从该惯性系来测量,此物体的长度为多少?

解 由洛伦兹长度收缩公式

$$l = l_0 \sqrt{1 - v^2/c^2} = 3.2 \text{ m}$$

**14-20** 两艘飞船相向运动,它们相对地面的速率都是  $v$ . 在 A 船中有一根米尺,米尺顺着飞船的运动方向放置. 问 B 船中的观察者测得该米尺的长度是多少?

分析 由于米尺(即 A 船)和观察者(即 B 船)均在相对地球运动. 故首先由速度变换公式求得米尺相对观察者的速度  $v_{12}$ ,再由长度收缩公式求解.

解 设地球为 S 系,飞船 B 为 S' 系. 飞船 A 中的尺则为运动物体. 若  $u = v$  为 S' 系相对 S 系的速率,则  $v_x = -v$  是尺相对地球的速率,尺在 S' 系中的速率为

$$u'_x = \frac{v_x - u}{1 - (uv_x/c^2)} = \frac{-v - v}{1 + (v^2/c^2)} = \frac{-2v}{1 + (v^2/c^2)}$$

这就是尺相对 B 船的速率,用  $v_{12}$  表示之,则

$$v_{12} = \frac{-2v}{1 + (v^2/c^2)}$$

则 B 中观察者测得 A 中米尺的长度是

$$l = l_0 \sqrt{1 - v_{12}^2/c^2} = l_0 \sqrt{1 - \frac{4v^2}{[1 + (v^2/c^2)]^2 c^2}} = \frac{c^2 - v^2}{c^2 + v^2} l_0$$

上式中令  $l_0 = 1 \text{ m}$  可得米尺长度(以米为单位).

**14-21** 设一宇航飞船相对地球以  $a = 9.8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$  的恒加速度,沿地球径向背离地球而去,试估计由于谱线的红移,经多少时间,飞船的宇航员用肉眼观察不到地球上的霓虹灯发出的红色信号.

分析 霓虹灯发出的红色信号所对应的红光波长范围一般为  $620 \text{ nm} \sim 760 \text{ nm}$ ,当飞船远离地球而去时,由光的多普勒效应可知,宇航员肉眼观察到的信号频率  $\nu < \nu_0$ ,即  $\lambda > \lambda_0$ ,其中  $\nu_0$  和  $\lambda_0$  为霓虹灯的发光频率和波长. 很显然,当  $\lambda_0 = 620 \text{ nm}$ ,而对应的红限波长  $\lambda = 760 \text{ nm}$  时,霓虹灯发出的红色信号,其波长刚好全部进入非可见光范围,即宇航员用肉眼观察不到红色信号. 因此,将上述波长的临界值代入多普勒频移公式,即可求得宇航员观察不到红色信号时飞船的最小速率  $v$ ,再由运动学关系,可求得飞船到达此速率所需的时间  $t$ .

解 当光源和观察者背向运动时,由光的多普勒效应频率公式

$$\nu = \nu_0 \left( \frac{c - v}{c + v} \right)^{1/2}$$

得波长公式

$$\lambda = \lambda_0 \left( \frac{c + v}{c - v} \right)^{1/2}$$

式中  $v$  为飞船相对地球的速率. 令  $\lambda_0 = 620 \text{ nm}$ ,  $\lambda = 760 \text{ nm}$ , 得宇航员用肉眼观察不到地球上红色信号时飞船的最小速率为

$$v = \frac{\lambda^2 - \lambda_0^2}{\lambda^2 + \lambda_0^2} c = 0.60 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

飞船达此速率所需的时间为

$$t = \frac{v}{a} = 6.1 \times 10^6 \text{ s} \approx 0.20 \text{ a}$$

**14-22** 若一电子的总能量为  $5.0 \text{ MeV}$ , 求该电子的静能、动能、动量和速率.

**分析** 粒子静能  $E_0$  是指粒子在相对静止的参考系中的能量,  $E_0 = m_0 c^2$ , 式中  $m_0$  为粒子在相对静止的参考系中的质量. 就确定粒子来说,  $E_0$  和  $m_0$  均为常量 (对于电子, 有  $m_0 = 9.1 \times 10^{-31} \text{ kg}$ ,  $E_0 = 0.512 \text{ MeV}$ ). 本题中由于电子总能量  $E > E_0$ , 因此, 该电子相对观察者所在的参考系还应具有动能, 也就具有相应的动量和速率. 由相对论动能定义、动量与能量关系式以及质能关系式, 即可解出结果.

**解** 电子静能为

$$E_0 = m_0 c^2 = 0.512 \text{ MeV}$$

电子动能为

$$E_k = E - E_0 = 4.488 \text{ MeV}$$

由  $E^2 = p^2 c^2 + E_0^2$ , 得电子动量为

$$p = \frac{1}{c} (E^2 - E_0^2)^{1/2} = 2.66 \times 10^{-21} \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

由  $E = E_0 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}$  可得电子速率为

$$v = c \left( \frac{E^2 - E_0^2}{E^2} \right)^{1/2} = 0.995c$$

**14-23** 一被加速器加速的电子, 其能量为  $3.00 \times 10^9 \text{ eV}$ . 试问: (1) 这个电子的质量是其静质量的多少倍? (2) 这个电子的速率为多少?

**解** (1) 由相对论质能关系  $E = mc^2$  和  $E_0 = m_0 c^2$  可得电子的动质量  $m$  与静质量  $m_0$  之比为

$$\frac{m}{m_0} = \frac{E}{E_0} = \frac{E}{m_0 c^2} = 5.86 \times 10^3$$

(2) 由相对论质速关系式  $m = m_0 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}$  可解得

$$v = \left[ 1 - \left( \frac{m_0}{m} \right)^2 \right]^{1/2} c = 0.999999985c$$

可见此时的电子速率已十分接近光速了。

**14-24** 在美国费米实验室中能产生  $1.0 \times 10^{12}$  eV 的高能质子,问该质子的速度约为多大?

**分析** 在相对论动能表达式  $E_k = mc^2 - m_0c^2$  中,若粒子动能  $E_k$  或总能  $mc^2$  (本题质子的能量高达  $1.0 \times 10^{12}$  eV) 远大于粒子静能(质子静能  $m_0c^2 = 0.938 \times 10^9$  eV),可将  $m_0c^2$  略去作近似计算。

**解** 因  $E$  (或  $E_k$ )  $\gg m_0c^2$ , 有

$$E_k = mc^2 - m_0c^2 = mc^2 = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

即

$$1 - \frac{v^2}{c^2} = \left( \frac{m_0c^2}{E_k} \right)^2$$

则

$$v = c \sqrt{1 - \left( \frac{m_0c^2}{E_k} \right)^2} = 0.999\ 999\ 6c$$

可见此高能质子的速度已非常接近光速了。

**14-25** 在电子的湮没过程中,一个电子和一个正电子相碰撞而消失,并产生电磁辐射.假定正负电子在湮没前均静止,由此估算辐射的总能量  $E$ 。

**分析** 在相对论中,粒子的相互作用过程仍满足能量守恒定律,因此辐射总能量应等于电子偶湮没前两电子总能之和.按题意电子偶湮没前的总能只是它们的静能之和。

**解** 由分析可知,辐射总能量为

$$E = 2m_0c^2 = 1.64 \times 10^{-13} \text{ J} = 1.02 \text{ MeV}$$

**14-26** 若把能量  $0.50 \times 10^6$  eV 给予电子,且电子垂直于磁场运动,则其运动径迹是半径为 2.0 cm 的圆.问:(1)该磁场的磁感强度  $B$  有多大?(2)这电子的动质量为静质量的多少倍?

**分析** (1) 电子在匀强磁场中作匀速圆周运动时,其向心力为洛伦兹力  $F = evB$ ,在轨道半径  $R$  确定时,  $B = B(p)$ ,即磁感强度是电子动量的函数.又由相对论的动能公式和动量与能量的关系可知电子动量  $p = p(E_0, E_k)$ ,题中给予电子的能量即电子的动能  $E_k$ ,在电子静能  $E_0 = m_0c^2$  已知的情况下,由上述关系可解得结果。

(2) 由相对论的质能关系可得动质量和静质量之比。

本题中电子的动能  $E_k = 0.50 \text{ MeV}$  与静能  $E_0 = 0.512 \text{ MeV}$  接近,已不能用经典力学的方法计算电子的动量或速度,而必须用相对论力学.事实上当  $E_k = 0.50E_0$  时,用经典力学处理已出现不可忽略的误差。

解 (1) 根据分析,有

$$E = E_0 + E_k \quad (1)$$

$$E^2 = E_0^2 + p^2 c^2 \quad (2)$$

$$evB = m \frac{v^2}{R} \quad (3)$$

联立求解上述三式,可得

$$B = \frac{\sqrt{E_k^2 + 2E_0 E_k}}{eRc} = 0.146 \text{ T}$$

(2) 由相对论质能关系,可得

$$\frac{m}{m_0} = \frac{E}{E_0} = 1 + \frac{E_k}{E_0} = 1.98$$

本题也可以先求得电子速率  $v$  和电子动质量  $m$ ,但求解过程较繁.

**14-27** 如果将电子由静止加速到速率为  $0.10c$ ,需对它做多少功? 如将电子由速率为  $0.80c$  加速到  $0.90c$ ,又需对它做多少功?

**分析** 在相对论力学中,动能定理仍然成立,即  $W = \Delta E_k = E_{k2} - E_{k1}$ ,但需注意动能  $E_k$  不能用  $\frac{1}{2}mv^2$  表示.

**解** 由相对论性的动能表达式和质速关系可得当电子速率从  $v_1$  增加到  $v_2$  时,电子动能的增量为

$$\begin{aligned} \Delta E_k &= E_{k2} - E_{k1} = (m_2 c^2 - m_0 c^2) - (m_1 c^2 - m_0 c^2) \\ &= m_0 c^2 \left\{ \left[ 1 - \left( \frac{v_2}{c} \right)^2 \right]^{-1/2} - \left[ 1 - \left( \frac{v_1}{c} \right)^2 \right]^{-1/2} \right\} \end{aligned}$$

根据动能定理,当  $v_1 = 0, v_2 = 0.10c$  时,外力所做的功为

$$W = \Delta E_k = 2.58 \times 10^3 \text{ eV}$$

当  $v_1 = 0.80c, v_2 = 0.90c$  时,外力所做的功为

$$W' = \Delta E'_k = 3.21 \times 10^5 \text{ eV}$$

由计算结果可知,虽然同样将速率提高  $0.1c$ ,但后者所做的功比前者要大得多,这是因为随着速率的增大,电子的质量也增大.

**14-28** 在惯性系中,有两个静止质量都是  $m_0$  的粒子 A 和 B,它们以相同的速率  $v$  相向运动,碰撞后合成一个粒子,求这个粒子的静止质量  $m'_0$ .

**分析** 对微观粒子而言,经典物理中的守恒定律仍然成立.但注意为相对论性守恒.如对同一参考系,粒子作用前(或后)相对参考系运动,则其质量,动量和能量分别用  $m, mv$  和  $mc^2$  表示.若粒子作用后(或前)相对参考系静止,则上述三量分别用  $m_0, 0$  和  $m_0 c^2$  表示.不存在静质量或静能守恒概念.本题可由相对论动量守恒判断合成粒子的情况,再用相对论能量守恒求合成粒子的静质量.

解 设粒子 A 的速度的大小为  $v_A$ , 粒子 B 的速度的大小为  $v_B$ , 合成粒子的运动速度大小为  $v$ . 由动量守恒得

$$\frac{m_0 v_A}{\sqrt{1-v_A^2/c^2}} - \frac{m_0 v_B}{\sqrt{1-v_B^2/c^2}} = \frac{m'_0 v}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

因  $v_A = v_B = v$ , 所以

$$v = 0$$

即合成粒子是静止的. 由能量守恒得

$$\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = m'_0 c^2$$

解出

$$m'_0 = \frac{2m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

## 第十五章 量子物理

15-1 下列物体中属于绝对黑体的是( )

- (A) 不辐射可见光的物体                      (B) 不辐射任何光线的物体  
(C) 不能反射可见光的物体                      (D) 不能反射任何光线的物体

**分析与解** 一般来说, 任何物体对外来辐射同时会有三种反应: 反射、透射和吸收, 各部分的比例与材料、温度、波长有关. 同时任何物体在任何温度下会同时对外辐射, 实验和理论证明: 一个物体辐射能力正比于其吸收能力. 做为一种极端情况, 绝对黑体(一种理想模型) 能将外来辐射(可见光或不可见光) 全部吸收, 自然也就不会反射任何光线, 同时其对外辐射能力最强. 综上所述应选(D).

15-2 光电效应和康普顿效应都是光子和物质原子中的电子相互作用的过程, 其区别何在? 在下面几种理解中, 正确的是( )

- (A) 两种效应中电子与光子组成的系统都服从能量守恒定律和动量守恒定律  
(B) 光电效应是由于电子吸收光子能量而产生的, 而康普顿效应则是由于电子与光子的弹性碰撞过程  
(C) 两种效应都相当于电子与光子的弹性碰撞过程  
(D) 两种效应都属于电子吸收光子的过程

**分析与解** 两种效应都属于电子与光子的作用过程, 不同之处在于: 光电效应是由于电子吸收光子而产生的, 光子的能量和动量会在电子以及束缚电子的

原子、分子或固体之间按照适当的比例分配,但仅就电子和光子而言,两者之间并不是一个弹性碰撞过程,也不满足能量和动量守恒.而康普顿效应中的电子属于“自由”电子,其作用相当于一个弹性碰撞过程,作用后的光子并未消失,两者之间满足能量和动量守恒.综上所述,应选(B).

**15-3** 关于光子的性质,有以下说法:

- (1) 不论真空中或介质中的速度都是  $c$ ; (2) 它的静止质量为零;  
 (3) 它的动量为  $h\nu/c$ ; (4) 它的总能量就是它的动能;  
 (5) 它有动量和能量,但没有质量.

其中正确的是( )

- (A) (1)(2)(3) (B) (2)(3)(4)  
 (C) (3)(4)(5) (D) (3)(5)

**分析与解** 光不但具有波动性还具有粒子性,一个光子在真空中速度为  $c$  (与惯性系选择无关),在介质中速度为  $\frac{c}{n}$ ,它有质量、能量和动量,一个光子的静止质量  $m_0=0$ ,运动质量  $m=\frac{h\nu}{c^2}$ ,能量  $E=h\nu$ ,动量  $p=\frac{h}{\lambda}=\frac{h\nu}{c}$ ,由于光子的静止质量为零,故它的静能  $E_0$  为零,所以其总能量表现为动能.综上所述,说法(2)、(3)、(4)都是正确的,故选(B).

**15-4** 关于不确定关系  $\Delta x \Delta p_x \geq h$ ,有以下几种理解:

- (1) 粒子的动量不可能确定,但坐标可以被确定;  
 (2) 粒子的坐标不可能确定,但动量可以被确定;  
 (3) 粒子的动量和坐标不可能同时确定;  
 (4) 不确定关系不仅适用于电子和光子,也适用于其他粒子.

其中正确的是( )

- (A) (1)、(2) (B) (2)、(4)  
 (C) (3)、(4) (D) (4)、(1)

**分析与解** 由于一切实物粒子具有波粒二象性,因此粒子的动量和坐标(即位置)不可能同时被确定,在这里不能简单误认为动量不可能被确定或位置不可能被确定.这一关系式在理论上适用于一切实物粒子(当然对于宏观物体来说,位置不确定量或动量的不确定量都微不足道,故可以认为可以同时被确定).由此可见(3)、(4)说法是正确的.故选(C).

**15-5** 已知粒子在一维无限深方势阱中运动,其波函数为

$$\psi(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{3\pi}{a}x \quad (0 \leq x \leq a)$$

那么粒子在  $x=a/6$  处出现的概率密度为( )

- (A)  $\sqrt{2}/\sqrt{a}$       (B)  $1/a$       (C)  $2/a$       (D)  $1/\sqrt{a}$

**分析与解** 我们通常用波函数  $\Psi$  来描述粒子的状态,虽然波函数本身并无确切的物理含义,但其模的平方  $|\Psi|^2$  表示粒子在空间各点出现的概率.因此题述粒子在  $0 \leq x \leq a$  区间的概率密度函数应为  $|\psi(x)|^2 = \frac{2}{a} \sin^2 \frac{3\pi}{a} x$ . 将  $x = a/6$  代入即可得粒子在此处出现的概率为  $2/a$ . 故选(C).

**15-6** 下述说法中,正确的是( )

(A) 本征半导体是电子与空穴两种载流子同时参与导电,而杂质半导体(n型或p型)只有一种载流子(电子或空穴)参与导电,所以本征半导体导电性能比杂质半导体好

(B) n型半导体的导电性能优于p型半导体,因为n型半导体是负电子导电,p型半导体是正离子导电

(C) n型半导体中杂质原子所形成的局部能级靠近导带的底部,使局部能级中多余的电子容易被激发跃迁到导带中去,大大提高了半导体导电性能

(D) p型半导体的导电机构完全取决于满带中空穴的运动

**分析与解** 按照能带理论,半导体的导电性能取决于其能带结构和载流子的浓度,本征半导体虽有二种载流子,但其浓度远远低于杂质半导体,故导电性能较杂质半导体差.而杂质半导体中的n型和p型半导体的区别在于多数载流子的种类不同,导电性能并无优劣之分.故(A)(B)说法不正确.对掺杂半导体而言,掺杂使载流子的浓度大为增加,n型半导体的多数载流子为电子,5价杂质原子形成的局部能级(施主能级)靠近导带底部,热激发很容易使施主能级中的多余电子激发跃迁到导带(基本上为空带)中去,从而提高导电性能.p型半导体多数载流子为空穴,3价杂质原子形成的局部能级(受主能级)靠近价带顶部,热激发同样容易使价带(基本上为满带)中的电子跃迁到受主能级上,从而使价带成为非满带,增加了p型半导体的导电性,由此可见说法(C)表述是完全正确的.

**15-7** 在激光器中利用光学谐振腔,则( )

(A) 可提高激光束的方向性,而不能提高激光束的单色性

(B) 可提高激光束的单色性,而不能提高激光束的方向性

(C) 可同时提高激光束的方向性和单色性

(D) 既不能提高激光束的方向性也不能提高其单色性

**分析与解** 在光学谐振腔中,凡是与腔轴方向不一致的激光会通过腔壁发散,剩下仅与腔轴同向的激光,因此可大大提高激光束的方向性.同时在振荡过程中,参与振荡的激光又在不断诱发高能原子产生新的激光,这种由受激辐射出的光子与外来光子同频率、同偏振状态,因此振荡过程在提高激光束能量的同时

还能提高其单色性,由此可见应选(C).

**15-8** 天狼星的温度大约是  $11\,000\text{ }^\circ\text{C}$ . 试由维恩位移定律计算其辐射峰值的波长.

**解** 由维恩位移定律可得天狼星单色辐射度的峰值所对应的波长

$$\lambda_m = \frac{b}{T} = 2.57 \times 10^{-7} \text{ m} = 257 \text{ nm}$$

该波长属紫外区域,所以天狼星呈紫色.

**15-9** 用辐射高温计测得炼钢炉口的辐射出射度为  $22.8 \text{ W} \cdot \text{cm}^{-2}$ , 试求炉内温度.

**分析与解** 炼钢炉口可视作绝对黑体,其辐射出射度为

$$M(T) = 22.8 \text{ W} \cdot \text{cm}^{-2} = 22.8 \times 10^4 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$$

由斯特藩-玻耳兹曼定律

$$M(T) = \sigma T^4$$

得

$$T = 1.42 \times 10^3 \text{ K}$$

**15-10** 太阳可看作半径为  $7.0 \times 10^8 \text{ m}$  的球形黑体,试计算太阳表面的温度. 设太阳射到地球表面上的辐射能量为  $1.4 \times 10^3 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$ , 地球与太阳间的距离为  $1.5 \times 10^{11} \text{ m}$ .

**分析** 以太阳为中心,地球与太阳之间的距离  $d$  为半径作一球面,地球处在该球面的某一位置上. 太阳在单位时间内对外辐射的总能量将均匀地通过该球面,因而可根据地球表面单位面积在单位时间内接收的太阳辐射能量  $E$ , 计算出太阳单位时间单位面积辐射的总能量  $M(T)$ , 再由公式  $M(T) = \sigma T^4$ , 计算太阳表面的温度.

**解** 根据分析有

$$M(T) = \frac{4\pi d^2 E}{4\pi R^2} \quad (1)$$

$$M(T) = \sigma T^4 \quad (2)$$

由式(1)、(2)可得

$$T = \left( \frac{d^2 E}{R^2 \sigma} \right)^{1/4} = 5\,800 \text{ K}$$

**15-11** 钨的逸出功是  $4.52 \text{ eV}$ , 钡的逸出功是  $2.50 \text{ eV}$ , 分别计算钨和钡的截止频率. 哪一种金属可以用作可见光范围内的光电管阴极材料?

**分析** 由光电效应方程  $h\nu = \frac{1}{2}mv^2 + W$  可知, 当入射光频率  $\nu = \nu_0$  (式中  $\nu_0 = W/h$ ) 时, 电子刚能逸出金属表面, 其初动能  $\frac{1}{2}mv^2 = 0$ . 因此  $\nu_0$  是能产生光电效应的入射光的最低频率(即截止频率), 它与材料的种类有关. 由于可见光频率处



在  $0.395 \times 10^{15} \sim 0.75 \times 10^{15}$  Hz 的狭小范围内,因此不是所有的材料都能作为可见光范围内的光电管材料的(指光电管中发射电子用的阴极材料)。

**解** 钨的截止频率为

$$\nu_{01} = \frac{W_1}{h} = 1.09 \times 10^{15} \text{ Hz}$$

钡的截止频率为

$$\nu_{02} = \frac{W_2}{h} = 0.603 \times 10^{15} \text{ Hz}$$

对照可见光的频率范围可知,钡的截止频率  $\nu_{02}$  正好处于该范围内,而钨的截止频率  $\nu_{01}$  大于可见光的最大频率,因而钡可以用于可见光范围内的光电管材料。

**15-12** 钾的截止频率为  $4.62 \times 10^{14}$  Hz,今以波长为 435.8 nm 的光照射,求钾放出的光电子的初速度。

**解** 根据光电效应的爱因斯坦方程

$$h\nu = \frac{1}{2}mv^2 + W$$

其中

$$W = h\nu_0, \quad \nu = c/\lambda$$

可得电子的初速度

$$v = \left[ \frac{2h}{m} \left( \frac{c}{\lambda} - \nu_0 \right) \right]^{1/2} = 5.74 \times 10^5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

由于逸出金属的电子的速度  $v \ll c$ ,故式中  $m$  取电子的静止质量。

**15-13** 在康普顿效应中,入射光子的波长为  $3.0 \times 10^{-3}$  nm,反冲电子的速度为光速的 60%,求散射光子的波长及散射角。

**分析** 首先由康普顿效应中的能量守恒关系式  $h \frac{c}{\lambda_0} + m_0 c^2 = h \frac{c}{\lambda} + mc^2$ ,可求出散射光子的波长  $\lambda$ ,式中  $m$  为反冲电子的运动质量,即  $m = m_0(1 - v^2/c^2)^{-1/2}$ 。再根据康普顿散射公式  $\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0 = \lambda_c(1 - \cos\theta)$ ,求出散射角  $\theta$ ,式中  $\lambda_c$  为康普顿波长 ( $\lambda_c = 2.43 \times 10^{-12}$  m)。

**解** 根据分析有

$$h \frac{c}{\lambda_0} + m_0 c^2 = h \frac{c}{\lambda} + mc^2 \quad (1)$$

$$m = m_0(1 - v^2/c^2)^{-1/2} \quad (2)$$

$$\lambda - \lambda_0 = \lambda_c(1 - \cos\theta) \quad (3)$$

由式(1)和式(2)可得散射光子的波长

$$\lambda = \frac{4h\lambda_0}{4h - \lambda_0 m_0 c} = 4.35 \times 10^{-3} \text{ nm}$$

将  $\lambda$  值代入式(3),得散射角

$$\theta = \arccos\left(1 - \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_c}\right) = \arccos 0.444 = 63^\circ 36'$$

**15-14** 一具有  $1.0 \times 10^4$  eV 能量的光子,与一静止自由电子相碰撞,碰撞后,光子的散射角为  $60^\circ$ . 试问:(1) 光子的波长、频率和能量各改变多少?(2) 碰撞后,电子的动能、动量和运动方向又如何?

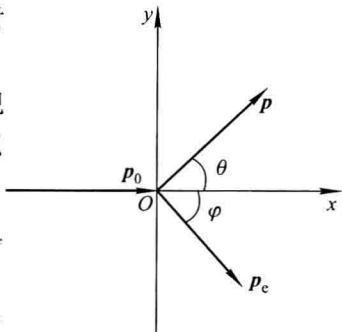
**分析** (1) 可由光子能量  $E = h\nu$  及康普顿散射公式直接求得光子波长、频率和能量的改变量.

(2) 应全面考虑康普顿效应所服从的基本规律,包括碰撞过程中遵循能量和动量守恒定律,以及相对论效应. 求解时应注意以下几点:

① 由能量守恒可知,反冲电子获得的动能  $E_{ke}$  就是散射光子失去的能量,即  $E_{ke} = h\nu_0 - h\nu$ .

② 由相对论中粒子的能量动量关系式,即  $E_c^2 = E_{0e}^2 + p_e^2 c^2$  和  $E_c = E_{0e} + E_{ke}$ ,可求得电子的动量  $p_e$ . 注意式中  $E_{0e}$  为电子静能,其值为  $0.512$  MeV.

③ 如图所示,反冲电子的运动方向可由动量守恒定律在  $y$  轴上的分量式求得,即  $\frac{h\nu}{c} \sin \theta - p_e \sin \varphi = 0$ .



题 15-14 图

**解** (1) 入射光子的频率和波长分别为

$$\nu_0 = \frac{E}{h} = 2.41 \times 10^{18} \text{ Hz}, \quad \lambda_0 = \frac{c}{\nu_0} = 0.124 \text{ nm}$$

散射前后光子波长、频率和能量的改变量分别为

$$\Delta\lambda = \lambda_c (1 - \cos \theta) = 1.22 \times 10^{-3} \text{ nm}$$

$$\Delta\nu = \frac{c}{\lambda} - \frac{c}{\lambda_0} = c \left( \frac{1}{\lambda + \Delta\lambda} - \frac{1}{\lambda} \right) = -2.30 \times 10^{16} \text{ Hz}$$

$$\Delta E = h\nu - h\nu_0 = h\Delta\nu = -1.525 \times 10^{-17} \text{ J} = -95.3 \text{ eV}$$

式中负号表示散射光子的频率要减小,与此同时,光子也将失去部分能量.

(2) 根据分析,可得电子动能

$$E_{ke} = h\nu_0 - h\nu = |\Delta E| = 95.3 \text{ eV}$$

电子动量

$$p_e = \frac{\sqrt{E_{ke}^2 + 2E_{0e}E_{ke}}}{c} = 5.27 \times 10^{-24} \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

电子运动方向

$$\varphi = \arcsin\left(\frac{h\nu}{p_e c} \sin \theta\right) = \arcsin\left[\frac{h(\nu_0 + \Delta\nu)}{p_e c} \sin \theta\right] = 59^\circ 32'$$

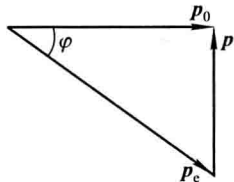
**15-15** 波长为 0.10 nm 的辐射射在碳上,从而产生康普顿效应.从实验中测量到,散射辐射的方向与入射辐射的方向相垂直.求:(1) 散射辐射的波长;(2) 反冲电子的动能和运动方向.

解 (1) 由散射公式得

$$\lambda = \lambda_0 + \Delta\lambda = \lambda + \lambda_c(1 - \cos \theta) = 0.1024 \text{ nm}$$

(2) 反冲电子的动能等于光子失去的能量,因此有

$$E_k = h\nu_0 - h\nu = hc\left(\frac{1}{\lambda_0} - \frac{1}{\lambda}\right) = 4.66 \times 10^{-17} \text{ J}$$



根据动量守恒的矢量关系(如图所示),可确定反冲电子的方向

题 15-15 图

$$\varphi = \arctan\left(\frac{h/\lambda}{h/\lambda_0}\right) = \arctan\left(\frac{\lambda_0}{\lambda}\right) = 44^\circ 18'$$

**15-16** 试求波长为下列数值的光子的能量、动量及质量:(1) 波长为 1 500 nm 的红外线;(2) 波长为 500 nm 的可见光;(3) 波长为 20 nm 的紫外线;(4) 波长为 0.15 nm 的 X 射线;(5) 波长为  $1.0 \times 10^{-3}$  nm 的  $\gamma$  射线.

解 由能量  $E = h\nu$ , 动量  $p = h/\lambda$  以及质能关系式  $m = E/c^2$ , 可得

(1) 当  $\lambda_1 = 1\,500 \text{ nm}$  时

$$E_1 = h\nu_1 = \frac{hc}{\lambda_1} = 1.33 \times 10^{-19} \text{ J}$$

$$p_1 = \frac{h}{\lambda_1} = 4.42 \times 10^{-28} \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$m_1 = \frac{E_1}{c^2} = \frac{h}{c\lambda_1} = 1.47 \times 10^{-36} \text{ kg}$$

(2) 当  $\lambda_2 = 500 \text{ nm}$  时, 因  $\lambda_2 = \frac{1}{3}\lambda_1$ , 故有

$$E_2 = 3E_1 = 3.99 \times 10^{-19} \text{ J}$$

$$p_2 = 3p_1 = 1.33 \times 10^{-27} \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$m_2 = 3m_1 = 4.41 \times 10^{-36} \text{ kg}$$

(3) 当  $\lambda_3 = 20 \text{ nm}$  时, 因  $\lambda_3 = \frac{1}{75}\lambda_1$ , 故有

$$E_3 = 75E_1 = 9.97 \times 10^{-18} \text{ J}$$

$$p_3 = 75p_1 = 3.31 \times 10^{-26} \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$m_3 = 75m_1 = 1.10 \times 10^{-34} \text{ kg}$$

(4) 当  $\lambda_4 = 0.15 \text{ nm}$  时, 因  $\lambda_4 = 10^{-4}\lambda_1$ , 故有

$$E_4 = 10^4 E_1 = 1.33 \times 10^{-15} \text{ J}$$

$$p_4 = 10^4 p_1 = 4.42 \times 10^{-24} \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$m_4 = 10^4 m_1 = 1.47 \times 10^{-32} \text{ kg}$$

(5) 当  $\lambda_5 = 1 \times 10^{-3} \text{ nm}$  时

$$E_5 = \frac{hc}{\lambda_5} = 1.99 \times 10^{-13} \text{ J}$$

$$p_5 = \frac{h}{\lambda_5} = 6.63 \times 10^{-22} \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$m_5 = \frac{h}{c\lambda_5} = 2.21 \times 10^{-30} \text{ kg}$$

**15-17** 计算氢原子光谱中莱曼系的最短和最长波长,并指出是否为可见光.

**分析** 氢原子光谱规律为

$$\frac{1}{\lambda} = R \left( \frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right)$$

式中  $n_f = 1, 2, 3, \dots, n_i = n_f + 1, n_f + 2, \dots$ . 若把氢原子的众多谱线按  $n_f = 1, 2, 3, \dots$  归纳为若干谱线系,其中  $n_f = 1$  为莱曼系,  $n_f = 2$  就是最早被发现的巴耳末系,所谓莱曼系的最长波长是指  $n_i = 2$  所对应的光谱线的波长,最短波长是指  $n_i \rightarrow \infty$  所对应的光谱线的波长,莱曼系的其他谱线均分布在上述波长范围内. 式中  $R$  的实验值常取  $1.097 \times 10^7 \text{ m}^{-1}$ . 此外本题也可由频率条件  $h\nu = E_i - E_f$  计算.

**解** 莱曼系的谱线满足

$$\frac{1}{\lambda} = R \left( \frac{1}{1^2} - \frac{1}{n_i^2} \right), \quad n_i = 2, 3, 4, \dots$$

令  $n_i = 2$ , 得该谱系中最长的波长

$$\lambda_{\max} = 121.5 \text{ nm}$$

令  $n_i \rightarrow \infty$ , 得该谱系中最短的波长

$$\lambda_{\min} = 91.2 \text{ nm}$$

对照可见光波长范围 (400 ~ 760 nm), 可知莱曼系中所有的谱线均不是可见光, 它们处在紫外线部分.

**15-18** 在玻尔氢原子理论中, 当电子由量子数  $n_i = 5$  的轨道跃迁到  $n_f = 2$  的轨道上时, 对外辐射光的波长为多少? 若再将该电子从  $n_f = 2$  的轨道跃迁到游离状态, 外界需要提供多少能量?

**分析** 当原子中的电子在高能量  $E_i$  的轨道与低能量  $E_f$  的轨道之间跃迁时, 原子对外辐射或吸收外界的能量, 可用公式  $\Delta E = E_i - E_f$  或  $\Delta E = E_f - E_i$  计算. 对氢

原子来说,  $E_n = \frac{E_1}{n^2}$ , 其中  $E_1$  为氢原子中基态 ( $n = 1$ ) 的能量, 即  $E_1 = -Rhc =$

$-13.6 \text{ eV}$ , 电子从  $n_f = 2$  的轨道到达游离状态时所需的能量, 就是指电子由轨道

$n_i=2$  跃迁到游离态  $n_i \rightarrow \infty$  时所需能量,它与电子由基态 ( $n_i=1$ ) 跃迁到游离态  $n_i = \infty$  时所需的能量(称电离能)是有区别的,后者恰为 13.6 eV.

**解** 根据氢原子辐射的波长公式,电子从  $n_i=5$  跃迁到  $n_f=2$  轨道状态时对外辐射光的波长满足

$$\frac{1}{\lambda} = R \left( \frac{1}{2^2} - \frac{1}{5^2} \right)$$

则  $\lambda = 4.34 \times 10^{-7} \text{ m} = 434 \text{ nm}$

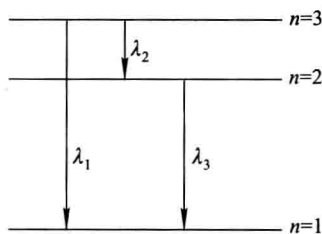
而电子从  $n_i=2$  跃迁到游离态  $n_i \rightarrow \infty$  所需的能量为

$$\Delta E = E_2 - E_\infty = \frac{E_1}{2^2} - \frac{E_1}{\infty} = -3.4 \text{ eV}$$

负号表示电子吸收能量.

**15-19** 如用能量为 12.6 eV 的电子轰击氢原子,将产生哪些谱线?

**分析** 氢原子可以从对它轰击的高能粒子上吸收能量而使自己从较低能级(一般在不指明情况下均指基态)激发到较高的能级,但吸收的能量并不是任意的,而是必须等于氢原子两个能级间的能量差.据此,可算出被激发氢原子可跃迁到的最高能级为  $n_i=3$ .但是,激发态都是不稳定的,其后,它又会自发跃迁回基态,如图所示,可以有  $3 \rightarrow 1$ ,  $3 \rightarrow 2$  和  $2 \rightarrow 1$  三种可能的辐射.



题 15-19 图

**解** 根据分析有

$$\Delta E = E_f - E_i = \frac{E_1}{n_f^2} - \frac{E_1}{n_i^2} \quad (1)$$

$$\frac{1}{\lambda} = R \left( \frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right) \quad (2)$$

将  $E_1 = -13.6 \text{ eV}$ ,  $n_f=1$  和  $\Delta E = -12.6 \text{ eV}$  (这是受激氢原子可以吸收的最多能量)代入式(1),可得  $n_i = 3.69$ ,取整  $n_i = 3$  (想一想为什么?),即此时氢原子处于  $n=3$  的状态.

由式(2)可得氢原子回到基态过程中的三种可能辐射(见分析)所对应的谱线波长分别为 102.6 nm、657.9 nm 和 121.6 nm.

**15-20** 试证在基态氢原子中,电子运动时的等效电流为  $1.05 \times 10^{-3} \text{ A}$ .在氢原子核处,这个电流产生的磁场的磁感强度为多大?

**分析** 根据经典的原子理论,基态氢原子中的电子在玻尔半径  $a_0$  上绕核作圆周运动 ( $a_0 = 0.529 \times 10^{-10} \text{ m}$ ),绕核运动的频率  $f = \frac{v_1}{2\pi a_0}$  (式中  $v_1$  为基态时电子

绕核运动的速度,  $v_1 = \frac{h}{2\pi m a_0}$ ), 由此可得电子运动的等效电流  $I = ef$  以及它在核处激发的磁感强度  $B = \frac{\mu_0 I}{2a_0}$ .

解 根据分析, 电子绕核运动的等效电流为

$$I = ef = \frac{ev_1}{2\pi a_0} = \frac{eh}{4\pi^2 m a_0^2} = 1.05 \times 10^{-3} \text{ A}$$

该圆形电流在核处的磁感强度为

$$B = \frac{\mu_0 I}{2a_0} = 12.5 \text{ T}$$

上述过程中电子的速度  $v \ll c$ , 故式中  $m$  取电子的静止质量.

**15-21** 已知  $\alpha$  粒子的静质量为  $6.68 \times 10^{-27} \text{ kg}$ , 求速率为  $5000 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$  的  $\alpha$  粒子的德布罗意波长.

分析 在本题及以后几题求解的过程中, 如实物粒子运动速率远小于光速 (即  $v \ll c$ ) 或动能远小于静能 (即  $E_k \ll E_0$ ), 均可利用非相对论方法处理, 即认为  $m \approx m_0$  和  $p^2 = 2m_0 E_k$ .

解 由于  $\alpha$  粒子运动速率  $v \ll c$ , 故有  $m = m_0$ , 则其德布罗意波长为

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{m_0 v} = 1.99 \times 10^{-5} \text{ nm}$$

**15-22** 求动能为  $1.0 \text{ eV}$  的电子的德布罗意波的波长.

解 由于电子的静能  $E_0 = m_0 c^2 = 0.512 \text{ MeV}$ , 而电子动能  $E_k \ll E_0$ , 故有  $p = (2m_0 E_k)^{1/2}$ , 则其德布罗意波长为

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{(2m_0 E_k)^{1/2}} = 1.23 \text{ nm}$$

**15-23** 求温度为  $27^\circ \text{C}$  时, 对应于方均根速率的氧气分子的德布罗意波的波长.

解 理想气体分子的方均根速率  $\sqrt{v^2} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$ . 对应的氧分子的德布罗意波长

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{m \sqrt{v^2}} = \frac{N_A h}{\sqrt{3MRT}} = 2.58 \times 10^{-2} \text{ nm}$$

**15-24** 考虑到相对论效应, 试求实物粒子的德布罗意波长的表达式. 设  $E_k$  为粒子的动能,  $m_0$  为粒子的静止质量.

分析 本题应首先根据相对论动能公式求得用动能  $E_k$  和静质量  $m_0$  来表达质点速度和质量, 再代入德布罗意公式求波长  $\lambda$ .

解 据 
$$E_k = mc^2 - m_0c^2 = [m_0c^2 / \sqrt{1 - (v/c)^2}] - m_0c^2$$

得 
$$m = (E_k + m_0c^2) / c^2$$

$$v = c \sqrt{E_k^2 + 2E_k m_0c^2} / (E_k + m_0c^2)$$

将  $m, v$  代入德布罗意公式得

$$\lambda = h/mv = hc / \sqrt{E_k^2 + 2E_k m_0c^2}$$

讨论 若粒子速度很小 ( $v \ll c$ ), 则相应动能  $E_k \ll m_0c^2$  (静能), 则上式可退化为  $\lambda$  的非相对论表达式

$$\lambda = \frac{hc}{\sqrt{E_k^2 + 2E_k m_0c^2}} = \frac{hc}{\sqrt{2E_k m_0c^2}} = \frac{h}{\sqrt{2m_0E_k}}$$

式中  $\sqrt{2m_0E_k} = p = m_0v$  为经典物理中动能和动量间的关系式.

**15-25** 若电子和光子的波长均为 0.20 nm, 则它们的动量和动能各为多少?

分析 光子的静止质量  $m_0 = 0$ , 静能  $E_0 = 0$ , 其动能、动量均可由德布罗意关系式  $E = h\nu, p = \frac{h}{\lambda}$  求得. 而对电子来说, 动能  $E_k = E - E_0 = \sqrt{p^2c^2 + m_0^2c^4} - m_0c^2 < pc$ . 本题中因电子的  $pc$  (6.22 keV)  $\ll E_0$  (0.512 MeV), 所以  $E_k \ll E_0$ , 因而可以不考虑相对论效应, 电子的动能可用公式  $E_k = \frac{p^2}{2m_0}$  计算.

解 由于光子与电子的波长相同, 它们的动量均为

$$p = \frac{h}{\lambda} = 3.22 \times 10^{-24} \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

光子的动能为

$$E_k = E = pc = 6.22 \text{ keV}$$

电子的动能为

$$E_k = \frac{p^2}{2m_0} = 37.8 \text{ eV}$$

讨论 用电子束代替可见光做成的显微镜叫电子显微镜. 由上述计算可知, 对于波长相同的光子与电子来说, 电子的动能小于光子的动能. 很显然, 在分辨率相同的情况下 (分辨率  $\propto 1/\lambda$ ), 电子束对样品损害较小, 这也是电子显微镜优于光学显微镜的一个方面.

**15-26** 用德布罗意波仿照弦振动的驻波公式, 来求解一维无限深方势阱中自由粒子的能量与动量表达式.

分析 设势阱宽度为  $a$ , 当自由粒子在其间运动时, 根据德布罗意假设, 会形成两列相向而行的物质波. 由于波的强度、波长相同, 最终会形成驻波, 相当于

两端固定的弦驻波,且有  $a = n \frac{\lambda}{2}$ , 其中  $n = 1, 2, 3, \dots$ . 由德布罗意关系式  $\lambda = \frac{h}{p}$  和非相对论情况下的动能的关系式  $E_k = \frac{p^2}{2m}$  即可求解. 其结果与用量子力学求得的结果相同. 虽然推导不甚严格,但说明上述处理方法有其内在的合理性与科学性,是早期量子论中常用的一种方法,称为“驻波法”.

**解** 根据分析,势阱的自由粒子来回运动,就相当于物质波在区间  $a$  内形成了稳定的驻波,由两端固定弦驻波的条件可知,必有  $a = n\lambda/2$ , 即

$$\lambda = \frac{2a}{n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

由德布罗意关系式  $\lambda = \frac{h}{p}$ , 可得自由粒子的动量表达式

$$p = \frac{h}{\lambda} = \frac{nh}{2a} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

由非相对论的动量与动能表达式  $E = \frac{p^2}{2m}$ , 可得自由粒子的能量表达式

$$E = \frac{n^2 h^2}{8ma^2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

从上述结果可知,此时自由粒子的动量和能量都是量子化的.

**15-27** 电子位置的不确定量为  $5.0 \times 10^{-2}$  nm 时,其速率的不确定量为多少?

**分析** 量子论改变了我们对于自然现象的传统认识,即我们不可能对粒子的行为作出绝对性的断言. 不确定关系式  $\Delta x \Delta p_x \geq h$  (严格的表述应为  $\Delta x \Delta p_x \geq \frac{h}{4\pi}$ ) 就是关于不确定性的一种量子规律. 由上述基本关系式还可引出其他的不确定关系式,如  $\Delta L_\varphi \Delta \varphi \geq h$  ( $\Delta \varphi$  为粒子角位置的不确定量,  $\Delta L_\varphi$  为粒子角动量的不确定量),  $\Delta E \Delta t \geq h$  ( $\Delta t$  为粒子在能量状态  $E$  附近停留的时间,又称平均寿命,  $\Delta E$  为粒子能量的不确定量,又称能级的宽度)等,不论是对粒子行为作定性分析,还是定量估计(一般指数量级),不确定关系式都很有用.

**解** 因电子位置的不确定量  $\Delta x = 5 \times 10^{-2}$  nm, 由不确定关系式以及  $\Delta p_x = m \Delta v_x$  可得电子速率的不确定量为

$$\Delta v_x = \frac{h}{m \Delta x} = 1.46 \times 10^7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

**15-28** 铀核的线度为  $7.2 \times 10^{-15}$  m, 求其中一个质子的动量和速度的不确定量.



**分析** 粒子的线度一般是指它的直径,由于质子处于铀核内,因此铀核的半径  $r$  可视为质子位置的不确定量,由不确定关系式可得质子动量和速度的不确定量.

**解** 对质子来说,其位置的不确定量  $\Delta r = \frac{7.2 \times 10^{-15}}{2} \text{ m} = 3.6 \times 10^{-15} \text{ m}$ ,由不确定关系式  $\Delta r \Delta p \geq h$  以及  $\Delta p = m \Delta v$ ,可得质子动量和速度的不确定量分别为

$$\Delta p = \frac{h}{\Delta r} = 1.84 \times 10^{-19} \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\Delta v = \frac{\Delta p}{m} = 1.10 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

**15-29** 一质量为  $40 \text{ g}$  的子弹以  $1.0 \times 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  的速率飞行,求:(1) 其德布罗意波的波长;(2) 若测量子弹位置的不确定量为  $0.10 \text{ mm}$ ,求其速率的不确定量.

**解** (1) 子弹的德布罗意波长为

$$\lambda = \frac{h}{mv} = 1.66 \times 10^{-35} \text{ m}$$

(2) 由不确定关系式以及  $\Delta p_x = m \Delta v_x$  可得子弹速率的不确定量为

$$\Delta v = \frac{\Delta p_x}{m} = \frac{h}{m \Delta x} = 1.66 \times 10^{-28} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

**讨论** 由于  $h$  值极小,其数量级为  $10^{-34}$ ,故不确定关系式只对微观粒子才有实际意义,对于宏观物体,其行为可以精确地预言.

**15-30** 在电子单缝衍射实验中,若缝宽为  $b = 0.1 \text{ nm}$ ,电子束垂直射在单缝面上,求衍射电子横向动量的最小不确定量  $\Delta P_y$ .

**分析与解** 缝宽

$$b = \Delta y = 0.1 \text{ nm} = 1.0 \times 10^{-10} \text{ m}$$

由不确定关系式

$$\Delta y \Delta p_y \geq h$$

则 
$$\Delta p_y \geq \frac{h}{\Delta y} = 6.63 \times 10^{-24} \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

若采用更严格的不确定关系式  $\Delta y \Delta p_y \geq \frac{h}{4\pi}$ ,所得结果与上不同,但数量级基本相同,都能大致描绘衍射电子的活动范围.

**15-31** 试证:如果粒子位置的不确定量等于其德布罗意波长,则此粒子速度的不确定量大于或等于其速度.

**证** 由题意知,位置不确定量  $\Delta x = \lambda$ ,由不确定关系式可得  $\Delta p \geq \frac{h}{\Delta x} = \frac{h}{\lambda}$ ,而

$\Delta v = \frac{\Delta p}{m}$ , 故速度的不确定量

$$\Delta v \geq \frac{h}{m\lambda} = \frac{p}{m}, \quad \text{即 } \Delta v \geq v$$

\*15-32 氦氖激光器所发红光波长为  $\lambda = 6328 \times 10^{-10} \text{ m}$ , 谱线宽度  $\Delta\lambda = 10^{-18} \text{ m}$ , 求: 当这种光子沿  $x$  轴方向传播时, 它的  $x$  坐标的不确定量有多大?

分析 光子亦具有波粒二象性, 所以也应满足不确定关系, 本题首先应根据不确定关系式导出一个光子坐标的不确定量与其状态 ( $\lambda$  和  $\Delta\lambda$ ) 之间的关系式.

解 沿  $x$  轴方向传播的激光的动量为

$$p_x = \frac{h}{\lambda}$$

两边微分可得动量不确定量大小为

$$|\Delta p_x| = \frac{h}{\lambda^2} \Delta\lambda$$

式中  $\Delta\lambda$  即为谱线宽度, 根据不确定关系得

$$\Delta x = \frac{h}{\Delta p_x} = \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda}$$

代入已知数据可得其坐标的不确定量  $\Delta x = 4 \times 10^5 \text{ m} = 400 \text{ km}$ . 式中  $\frac{\lambda^2}{\Delta\lambda}$  为相干长度 (即波列长度), 该式说明激光光子坐标的不确定量就是波列长度. 由于波列长度很大, 因而激光是相干性极好的新型光源.

\*15-33 已知一维运动粒子的波函数为

$$\psi(x) = \begin{cases} Ax e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

式中  $\lambda > 0$ . 试求: (1) 归一化常量  $A$  和归一化波函数; (2) 该粒子位置坐标的概率分布函数 (又称概率密度); (3) 在何处找到粒子的概率最大.

分析 描述微观粒子运动状态的波函数  $\psi(x)$ , 并不像经典波那样代表什么实在的物理量, 而是刻画粒子在空间的概率分布, 我们用  $|\psi(x)|^2$  表示粒子在空间某一点附近单位体积元内出现的概率, 又称粒子位置坐标的概率分布函数, 由于粒子在空间所有点出现的概率之和恒为 1, 即  $\int_V |\psi(x)|^2 dV = 1$  (本题为  $\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx = 1$ ), 称为归一化条件. 由此可确定波函数中的待定常量  $A$  和被归一化后的波函数, 然后针对概率分布函数  $|\psi(x)|^2$ , 采用高等数学中常用的求极值的方法, 可求出粒子在空间出现的概率最大或最小的位置.

解 (1) 由归一化条件  $\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx = 1$ , 有

$$\int_{-\infty}^0 0^2 dx + \int_0^{+\infty} A^2 x^2 e^{-2\lambda x} dx = \int_0^{\infty} A^2 x^2 e^{-2\lambda x} dx = \frac{A^2}{4\lambda^3} = 1$$

$$A = 2\lambda^{3/2} \quad \left( \text{注: 利用积分公式 } \int_0^{\infty} y^2 e^{-by} dy = \frac{2}{b^3} \right)$$

经归一化后的波函数为

$$\psi(x) = \begin{cases} 2\lambda\sqrt{\lambda} x e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

(2) 粒子的概率分布函数为

$$|\psi(x)|^2 = \begin{cases} 4\lambda^3 x^2 e^{-2\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

(3) 令  $\frac{d[|\psi(x)|^2]}{dx} = 0$ , 有  $4\lambda^3 (2x e^{-2\lambda x} - 2\lambda x^2 e^{-2\lambda x}) = 0$ , 得  $x = 0$ ,  $x = \frac{1}{\lambda}$  和

$x \rightarrow \infty$  时, 函数  $|\psi(x)|^2$  有极值. 由二阶导数  $\left. \frac{d^2[|\psi(x)|^2]}{dx^2} \right|_{x=\frac{1}{\lambda}} < 0$  可知, 在  $x = \frac{1}{\lambda}$

处,  $|\psi(x)|^2$  有最大值, 即粒子在该处出现的概率最大.

**15-34** 设有一电子在宽为 0.20 nm 的一维无限深方势阱中. (1) 计算电子在最低能级的能量; (2) 当电子处于第一激发态时, 在势阱何处出现的概率最小, 其值为多少?

解 (1) 一维无限深势阱中粒子的可能能量  $E_n = n^2 \frac{h^2}{8ma^2}$ , 式中  $a$  为势阱宽度, 当量子数  $n=1$  时, 粒子处于基态, 能量最低. 因此, 电子在最低能级的能量为

$$E_1 = \frac{h^2}{8ma^2} = 1.51 \times 10^{-18} \text{ J} = 9.43 \text{ eV}$$

(2) 粒子在无限深方势阱中的波函数为

$$\psi(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{n\pi}{a} x, \quad n = 1, 2, \dots$$

当它处于第一激发态 ( $n=2$ ) 时, 波函数为

$$\psi(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{2\pi}{a} x, \quad 0 \leq x \leq a$$

相应的概率密度函数为

$$|\psi(x)|^2 = \frac{2}{a} \sin^2 \frac{2\pi}{a} x, \quad 0 \leq x \leq a$$

令  $\frac{d|\psi(x)|^2}{dx} = 0$ , 得

$$\frac{8\pi}{a^2} \sin \frac{2\pi x}{a} \cos \frac{2\pi x}{a} = 0$$

在  $0 \leq x \leq a$  的范围内讨论可得, 当  $x=0, \frac{a}{4}, \frac{a}{2}, \frac{3}{4}a$  和  $a$  时, 函数  $|\psi(x)|^2$  取得极值. 由  $\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} > 0$  可知, 函数在  $x=0, x=\frac{a}{2}$  和  $x=a$  (即  $x=0, 0.10 \text{ nm}, 0.20 \text{ nm}$ ) 处概率最小, 其值均为零.

**15-35** 在线度为  $1.0 \times 10^{-5} \text{ m}$  的细胞中有许多质量为  $m = 1.0 \times 10^{-17} \text{ kg}$  的生物粒子, 若将生物粒子作为微观粒子处理, 试估算该粒子的  $n=100$  和  $n=101$  的能级和能级差各是多大.

**分析** 一般情况下, 该粒子被限制在细胞内运动, 可把粒子视为无限深势阱中的粒子. 作为估算, 可按一维无限深方势阱粒子处理, 势阱宽度  $a = 1.0 \times 10^{-5} \text{ m}$ .

**解** 由分析可知, 按一维无限深方势阱这一物理模型计算, 可得

$$n=100 \text{ 时, } E_1 = n^2 \frac{h^2}{8ma^2} = 5.49 \times 10^{-37} \text{ J}$$

$$n=101 \text{ 时, } E_2 = n^2 \frac{h^2}{8ma^2} = 5.60 \times 10^{-37} \text{ J}$$

它们的能级差为

$$\Delta E = E_2 - E_1 = 0.11 \times 10^{-37} \text{ J}$$

**15-36** 一电子被限制在宽度为  $1.0 \times 10^{-10} \text{ m}$  的一维无限深方势阱中运动, (1) 欲使电子从基态跃迁到第一激发态需给它多少能量? (2) 在基态时, 电子处于  $x_1 = 0.090 \times 10^{-10} \text{ m}$  与  $x_2 = 0.110 \times 10^{-10} \text{ m}$  之间的概率为多少? (3) 在第一激发态时, 电子处于  $x'_1 = 0$  与  $x'_2 = 0.25 \times 10^{-10} \text{ m}$  之间的概率为多少?

**分析** 设一维粒子的波函数为  $\psi(x)$ , 则  $|\psi(x)|^2$  表示粒子在一维空间内的概率密度,  $|\psi(x)|^2 dx$  则表示粒子在  $x \sim x+dx$  间隔内出现的概率, 而  $\int_{x_1}^{x_2} |\psi(x)|^2 dx$  则表示粒子在  $x_1 \sim x_2$  区间内出现的概率. 如  $x_1 \sim x_2$  区间的间隔  $\Delta x$  较小, 上述积分可近似用  $|\psi(x)|^2 \Delta x$  代替, 其中  $|\psi(x)|^2$  取  $x_1$  和  $x_2$  之间中点位置  $C$  处的概率密度作为上述区间内的平均概率密度. 这是一种常用的近似计算的方法.

**解** (1) 电子从基态 ( $n=1$ ) 跃迁到第一激发态 ( $n=2$ ) 所需能量为

$$\Delta E = E_2 - E_1 = n_2^2 \frac{h^2}{8ma^2} - n_1^2 \frac{h^2}{8ma^2} = 112 \text{ eV}$$

(2) 当电子处于基态 ( $n=1$ ) 时, 电子在势阱中的概率密度为  $|\psi(x)|^2 =$

$\frac{2}{a} \sin^2 \frac{\pi}{a} x$ , 所求区间宽度  $\Delta x = x_2 - x_1$ , 区间的中心位置  $x_c = \frac{x_1 + x_2}{2}$ , 则电子在所求区间的概率近似为

$$\begin{aligned} P_1 &= \int_{x_1}^{x_2} |\psi(x)|^2 dx \approx |\psi_1(x_c)|^2 \Delta x \\ &= \frac{2}{a} \sin^2 \left( \frac{\pi}{a} \cdot \frac{x_1 + x_2}{2} \right) (x_2 - x_1) \\ &= 3.8 \times 10^{-3} \end{aligned}$$

(3) 同理, 电子在第一激发态 ( $n=2$ ) 的概率密度为  $|\psi_2(x)|^2 = \frac{2}{a} \sin^2 \left( \frac{2\pi}{a} x \right)$ , 则电子在所求区间的概率近似为

$$P_2 = \frac{2}{a} \sin^2 \left( \frac{2\pi}{a} \frac{x'_1 + x'_2}{2} \right) (x'_2 - x'_1) = 0.25$$

**15-37** 在描述原子内电子状态的量子数  $n, l, m_l$  中: (1) 当  $n=5$  时,  $l$  的可能值是多少? (2) 当  $l=5$  时,  $m_l$  的可能值是多少? (3) 当  $l=4$  时,  $n$  的最小可能值是多少? (4) 当  $n=3$  时, 电子可能状态数是多少?

**分析** 微观粒子状态的描述可用能量、角动量、角动量的空间取向、自旋角动量和自旋角动量的空间取向所对应的量子数来表示, 即用一组量子数  $(n, l, m_l, s, m_s)$  表示一种确定状态. 由于电子自旋量子数  $s$  恒为  $1/2$ , 故区别电子状态时只需用 4 个量子数即  $n, l, m_l$  和  $m_s$ , 其中  $n$  可取大于零的任何整数值, 而  $l, m_l$  和  $m_s$  的取值则受到一定的限制, 如  $n$  取定后,  $l$  只能为  $0, 1, \dots, (n-1)$ , 共可取  $n$  个值;  $l$  取定后,  $m_l$  只能为  $0, \pm 1, \dots, \pm l$ , 共可取  $2l+1$  个值; 而  $m_s$  只可取  $\pm \frac{1}{2}$  两个值. 上述 4 个量子数中只要有一个不同, 则表示的状态就不同, 因此, 对于能量确定 (即  $n$  一定) 的电子来说, 其可能的状态数为  $2n^2$  个.

**解** (1)  $n=5$  时,  $l$  的可能值为 5 个, 它们是  $l=0, 1, 2, 3, 4$ ;

(2)  $l=5$  时,  $m_l$  的可能值为 11 个, 它们是  $m_l=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5$ ;

(3)  $l=4$  时, 因为  $l$  的最大可能值为  $(n-1)$ , 所以  $n$  的最小可能值为 5;

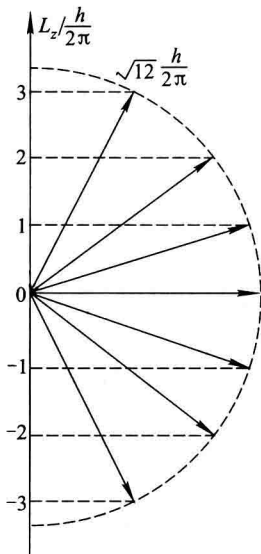
(4)  $n=3$  时, 电子的可能状态数为  $2n^2=18$ .

**15-38** 氢原子中的电子处于  $n=4, l=3$  的状态. 问: (1) 该电子角动量  $L$  的值为多少? (2) 这角动量  $L$  在  $z$  轴的分量有哪些可能的值? (3) 角动量  $L$  与  $z$  轴的夹角的可能值为多少?

**解** (1)  $n=4, l=3$  时, 电子角动量为

$$L = \sqrt{l(l+1)} \frac{h}{2\pi} = \sqrt{12} \frac{h}{2\pi}$$

(2) 轨道角动量在  $z$  轴上的分量  $L_z = m_l \frac{h}{2\pi}$ , 对于  $n=4, l=3$  的电子来说  $m_l = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$ , 则  $L_z$  的可能取值为  $0, \pm \frac{h}{2\pi}, \pm \frac{2h}{2\pi}, \pm \frac{3h}{2\pi}$ .



题 15-38 图

(3) 角动量  $L$  与  $z$  轴的夹角  $\theta = \arccos \frac{L_z}{L} = \arccos \frac{m_l}{\sqrt{l(l+1)}}$ , 如图所示, 当  $m_l$  分别取 3, 2, 1, 0, -1, -2, -3 时, 相应夹角  $\theta$  分别为  $30^\circ, 55^\circ, 73^\circ, 90^\circ, 107^\circ, 125^\circ, 150^\circ$ .

**\* 15-39** 氢介子原子是由一质子和一绕质子旋转的介子组成的. 求介子处于第一轨道 ( $n=1$ ) 时离质子的距离. (介子的电荷量和电子电荷量相等, 其质量为电子质量的 210 倍.)

**分析** 由题意可知, 氢介子原子在结构上与氢原子相似, 故可采用玻尔氢原子理论的有关公式求解.

**解** 氢介子原子第一轨道半径  $r'_1 = \frac{\epsilon_0 \hbar^2}{\pi m' e^2}$ , 与氢原子第一轨道半径

$r_1 = \frac{\epsilon_0 \hbar^2}{\pi m e^2} = 0.529 \times 10^{-10} \text{ m}$  相比较, 可得

$$r'_1 = \frac{m}{m'} r_1 = \frac{r_1}{210} = 2.52 \times 10^{-13} \text{ m}$$

**\* 15-40** 已知氢原子基态的径向波函数为  $R(r) = (4a_0^{-3})^{1/2} e^{-r/a_0}$ , 式中  $a_0$  为玻尔半径. 求电子处于玻尔第二轨道半径 ( $r_2 = 4a_0$ ) 和玻尔半径处的概率密度的

比值.

**分析** 在球坐标系中氢原子的波函数  $\psi(r, \theta, \varphi) = R(r)\Theta(\theta)\phi(\varphi)$ , 其中  $R(r)$  称为径向波函数. 电子在核外  $r$  处的径向概率密度  $P(r) = |R(r)|^2 r^2$ . 将不同的  $r$  值代入后, 可得电子在相应  $r$  处的径向概率密度.

**解** 电子处于玻尔第二轨道和玻尔第一轨道的概率密度的比值为

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{R^2(r_2)r_2^2}{R^2(a_0)a_0^2} = \frac{e^{-\frac{8a_0}{a_0}} 16a_0^2}{e^{-\frac{2a_0}{a_0}} a_0^2} = 16e^{-6} = 3.97 \times 10^{-2}$$

## 第十六章 原子核与粒子物理简介

**16-1** 若  $^{238}\text{U}$  的质量为  $237.5558 \text{ u}$ , 试求  $^{238}\text{U}$  的平均结合能. 如果近似假定中等质量原子核的平均结合能为  $8.5 \text{ MeV}$ , 试估算一个  $^{238}\text{U}$  核分裂成两个相同的中等原子核时放出的能量.

**分析** 对于重核裂变或轻核聚变, 由于生成核的结合能都大于反应前的核的结合能, 因而这两个反应都有能量放出. 释放的能量与本题第一问一样, 可用  $\Delta E = \Delta mc^2$  计算. 但若已知反应前后各原子的结合能, 则可直接用公式  $\Delta E = \sum E_{\text{Bi}} - \sum E_{\text{B}0}$  求解 (此式可由  $\Delta E = \Delta mc^2$  推导).

**解** (1) 核子结合为  $^{238}\text{U}$  时的质量亏损为

$$\Delta m = (92 \times 1.007825 + 146 \times 1.008665) - 237.5558 = 1.9292 \text{ u}$$

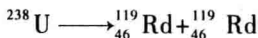
则结合能为

$$E_{\text{B}} = \Delta mc^2 = \frac{(1.9292 \times 1.6605 \times 10^{-27}) \times (3 \times 10^8)^2}{1.60 \times 10^{-19}} \text{ eV}$$
$$= 1801.91 \text{ MeV}$$

平均结合能为

$$\varepsilon = \frac{E_{\text{B}}}{A} = \frac{1801.91}{238} \text{ MeV} = 7.57 \text{ MeV}$$

(2) 一个  $^{238}\text{U}$  分裂为两个相同中等原子核反应如下:



由分析知, 放出的能量为

$$\Delta E = 2(E_{\text{B}})_{\text{Rd}} - (E_{\text{B}})_{\text{U}} = (2 \times 119 \times 8.5 - 238 \times 7.57) \text{ MeV}$$
$$= 221 \text{ MeV}$$

**16-2** 一个放射性核素的平均寿命为  $10 \text{ d}$ , 求经过  $5$  天衰变的数目以及在第  $5$  天内发生衰变的数目占原来的百分比.

**分析** 一个放射性核素初始时刻(计时时刻)数目为  $N_0$ ,  $t$  时的数目为  $N$  (亦即剩余数目), 此时已衰变数目为  $N_0 - N$ . 根据衰变规律,  $t$  时剩余数目所占百分比为  $\frac{N}{N_0} = e^{-\lambda t}$ , 已衰变数目所占百分比为  $\frac{N_0 - N}{N_0} = 1 - e^{-\lambda t}$ .

**解** (1) 由分析知, 第 5 天剩余数目所占百分比为

$$\frac{N}{N_0} = e^{-\lambda t} = e^{-\frac{t}{T}} = e^{-0.5} = 0.607$$

已衰变数目所占百分比为

$$\frac{N_0 - N}{N_0} = 1 - e^{-0.5} = 0.393 = 39.3\%$$

(2) 第 4 天剩余数目所占百分比为

$$\frac{N'}{N_0} = e^{-\frac{t}{T}} = e^{-0.4} = 0.670$$

则第 5 天内衰变数目所占百分比为

$$\frac{N' - N}{N_0} = e^{-0.4} - e^{-0.5} = 0.063 = 6.3\%$$

**16-3** 已知  $1 \text{ mg } ^{238}\text{U}$  每分钟放出 740 个  $\alpha$  粒子, 且半衰期  $T = 4.5 \times 10^9 \text{ a}$ , 计算  $1 \text{ g } ^{238}\text{U}$  的放射性活度.

**分析** 本题可有两种方法求解. 一是根据放射性活度自身的含义, 即每秒钟放出的粒子数; 二是考虑半衰期, 由  $-\frac{dN}{dt} = \lambda N = \frac{\ln 2}{T_0} N$ . 式中粒子数  $N = \frac{m}{m_0}$  和轴核质量  $m_0 = 237.5558 \text{ u}$ .

$$\begin{aligned} \text{解 1} \quad -\frac{dN}{dt} &= \frac{740}{60} \times 10^3 \text{ Bq} = 1.233 \times 10^4 \text{ Bq} \\ &= \frac{1.233 \times 10^4}{3.7 \times 10^{10}} \text{ Ci} = 0.33 \text{ } \mu\text{Ci} \end{aligned}$$

$$\text{解 2} \quad -\frac{dN}{dt} = \lambda N = \frac{\ln 2}{T_0} \frac{m}{m_0} = 0.33 \text{ } \mu\text{Ci}$$

**16-4** 活着的有机体中,  $^{14}\text{C}$  与  $^{12}\text{C}$  的比同在大气中的比是相同的, 约为  $1.3 \times 10^{-12}$ . 在有机体死亡后,  $^{14}\text{C}$  的含量就不断地减少, 因此测量  $^{14}\text{C}$  的衰变率, 即放射性活度就可估计出有机体的死亡时间. 现测得, 新疆古尸骸骨中 100 g 碳的  $\beta$  衰变率为  $900 \text{ min}^{-1}$ , 试问该古尸已有多少年历史? ( $^{14}\text{C}$  的半衰期为 5730 a.)

**分析** 古尸骸骨中 100 g 碳应含有两种成分, 即  $^{14}\text{C}$  和  $^{12}\text{C}$ , 由题意知  $^{14}\text{C}$  含量极少且因衰变持续减少. 故可近似认为 100 g 碳均为  $^{12}\text{C}$ , 由于  $^{12}\text{C}$  十分稳定, 其核数目可认为基本不变 (即  $N_{12} = N_{012}$ ). 如能求得 100 g 碳中的  $^{14}\text{C}$  的数目以及初始时刻 (指生物体死亡前)  $^{14}\text{C}$  的核数目  $N_{014}$ , 即可由放射性元素的衰变规律



$N_{14} = N_{014} e^{-\lambda t}$  求得古尸的年龄. 本题中  $N_{14}$  可由测得的  $\beta$  衰变率计算,  $N_{014}$  则可由活的有机体中  $^{14}\text{C}$  和  $^{12}\text{C}$  的比值求得. 按照这条思路, 再结合相关规律本题即可求解. 以上为现在测定古生物年代的一种常用方法.

解 100 g 碳中  $^{14}\text{C}$  的核数目为

$$\begin{aligned} N_{14} &= \frac{1}{\lambda} \left( -\frac{dN}{dt} \right) = \frac{T_{14}}{\ln 2} \left( -\frac{dN}{dt} \right) \\ &= \frac{5\,730 \times 365 \times 24 \times 3\,600}{0.693} \times \frac{900}{60} = 3.910 \times 10^{12} \end{aligned}$$

100 g 碳中  $^{12}\text{C}$  的核数目为

$$N_{12} \approx \frac{m}{M_{12}} \times N_A = \frac{100}{12} \times 6.023 \times 10^{23} = 5.02 \times 10^{24}$$

由题意知

$$\frac{N_{014}}{N_{012}} = 1.3 \times 10^{-12} \text{ 且 } N_{012} = N_{12}$$

由上可得初始时刻  $^{14}\text{C}$  的核数目

$$N_{014} = N_{12} \times 1.3 \times 10^{-12} = 6.525 \times 10^{12}$$

由衰变规律, 有

$$N_{14} = N_{014} e^{-\lambda t} = N_{014} e^{-\frac{\ln 2}{T_{14}} t}$$

整理后再取自然对数

$$\ln \frac{N_{14}}{N_{014}} = -\frac{\ln 2}{T_{14}} t$$

可得古尸年龄约为

$$t = -\frac{T_{14}}{\ln 2} \ln \frac{N_{14}}{N_{014}} = -\frac{5\,730 \text{ a}}{0.693} \times (-0.512) = 4\,233 \text{ a}$$

**16-5** 现从两种矿物质中测得  $^{226}\text{Ra}$  与  $^{238}\text{U}$  核素的数目比为常数  $3.51 \times 10^{-7}$ . 已知镭的半衰期为  $1\,620 \text{ a}$ , 试求  $^{238}\text{U}$  的半衰期.

分析 镭和铀均为放射性元素. 由题意知, 在衰变过程中两种核素的数目比不变, 这表明两种核素衰变的快慢程度一样, 有  $\left( -\frac{dN}{dt} \right)_{\text{Ra}} = \left( -\frac{dN}{dt} \right)_{\text{U}}$ , 即  $\lambda_{\text{Ra}} N_{\text{Ra}} = \lambda_{\text{U}} N_{\text{U}}$ . 据此可以求得  $^{238}\text{U}$  的半衰期.

解 由分析知

$$\lambda_{\text{Ra}} N_{\text{Ra}} = \lambda_{\text{U}} N_{\text{U}}$$

即

$$\frac{\ln 2}{T_{\text{Ra}}} N_{\text{Ra}} = \frac{\ln 2}{T_{\text{U}}} N_{\text{U}}$$

由上式可得

$$T_U = \frac{N_U}{N_{Ra}} T_{Ra} = \frac{1\ 620\ \text{a}}{3.51 \times 10^{-7}} = 4.6 \times 10^9\ \text{a}$$

**16-6** 已知 1 g 纯  $^{238}\text{U}$  在 1 个小时内自发裂变数目为 25, 试求自发裂变半衰期. 设  $^{238}\text{U}$  半衰期约为  $4.5 \times 10^9\ \text{a}$ , 则同样在 1 个小时内  $^{238}\text{U}$  发生多少次  $\alpha$  衰变?

**分析** 自发裂变和  $\alpha$  衰变为两个独立的物理现象. 之间并无多大关联. 本题两问可各自独立求解. 其计算结果可使读者感受到, 对铀来说,  $\alpha$  衰变为主要的, 而自发裂变通常可以忽略.

**解** (1) 由题意知

$$-\frac{dN}{dt} = \frac{25}{3\ 600\ \text{s}} = \lambda N = \frac{\ln 2}{T} N$$

式中

$$N = \frac{m}{m_U} = \frac{1 \times 10^{-3}}{237.555\ 8 \times 1.600\ 5 \times 10^{-27}} = 2.535 \times 10^{21}$$

将  $N$  代入, 得自发裂变半衰期

$$T = 2.530 \times 10^{23}\ \text{s} = 8.02 \times 10^{15}\ \text{a}$$

(2) 对  $\alpha$  衰变, 1 个小时内

$$\begin{aligned} -\frac{dN}{dt} &= \lambda N = \frac{\ln 2}{T} N = \frac{0.693}{4.5 \times 10^9 \times 365 \times 24\ \text{h}} \times 2.535 \times 10^{21} \\ &= 4.46 \times 10^7\ \text{h}^{-1} \end{aligned}$$

由此可见, 铀的  $\alpha$  衰变的次数要远大于自发裂变的次数.

**16-7** 已知  $^{15}_7\text{N}$ 、 $^{15}_8\text{O}$  和  $^{16}_8\text{O}$  的原子量分别为 15.000 1 u、15.003 0 u 和 15.994 9 u, 试计算:

- (1)  $^{16}_8\text{O}$  核的比结合能;
- (2) 从  $^{16}_8\text{O}$  核中获取一个质子所需要的最小能量;
- (3) 从  $^{16}_8\text{O}$  核中获取一个中子所需要的最小能量.

**分析** 此类问题中, 首先计算反应前后的质量变化量  $\Delta m$ , 再由  $\Delta mc^2$  求解反应中放出或吸收的能量.

**解** (1) 质量亏损为

$$\Delta m = 8 \times (1.007\ 276 + 1.008\ 665) - 15.994\ 9 = 0.132\ 63\ \text{u}$$

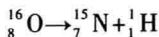
则结合能为

$$E_B = \Delta mc^2 = \frac{(0.132\ 63 \times 1.660\ 5 \times 10^{-27}) \times (3 \times 10^8)^2}{1.60 \times 10^{-19}}\ \text{MeV} = 123.879\ \text{MeV}$$

比结合能为

$$\varepsilon = \frac{E_B}{A} = \frac{E_B}{16} = 7.742\ \text{MeV}$$

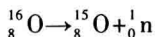
(2) 相应核反应为



$$\begin{aligned} \text{则 } \Delta E = \Delta mc^2 &= \frac{(15.994\ 9 - 15.000\ 1 - 1.007\ 825) \times 1.660\ 5 \times 10^{-27} \times (3 \times 10^8)^2}{1.60 \times 10^{-19}} \text{ eV} \\ &= -12.169 \text{ MeV} \end{aligned}$$

“-”表示吸收能量.

(3) 相应的核反应为



$$\begin{aligned} \text{则 } \Delta E = \Delta mc^2 &= \frac{(15.994\ 9 - 15.003\ 0 - 1.008\ 665) \times 1.660\ 5 \times 10^{-27} \times (3 \times 10^8)^2}{1.60 \times 10^{-19}} \text{ eV} \\ &= -15.659 \text{ MeV} \end{aligned}$$

“-”表示吸收能量.

**16-8** 已知 ${}^{238}\text{U}$ 核 $\alpha$ 衰变的半衰期为 $4.5 \times 10^9$  a,问:

(1) 它的衰变常量是多少?

(2) 要获得 1 Ci 的放射性活度,需要 ${}^{238}\text{U}$ 多少克?

(3) 1 g ${}^{238}\text{U}$ 每秒将放出多少 $\alpha$ 粒子?

分析 本题根据衰变规律进行计算即可.

解 (1) 衰变常量为

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T} = \frac{0.693}{4.5 \times 10^9 \times 365 \times 24 \times 3600 \text{ s}} = 4.88 \times 10^{-18} \text{ s}^{-1}$$

$$(2) \text{ 由 } \left(-\frac{dN}{dt}\right) = \lambda N = \lambda \frac{m}{m_u} = 1 \text{ Ci} = 3.7 \times 10^{10} \text{ s}^{-1}$$

$$\begin{aligned} \text{得 } m &= \frac{\left(-\frac{dN}{dt}\right) \times m_u}{\lambda} = \frac{3.7 \times 10^{10} \times 237.555\ 8 \times 1.660\ 5 \times 10^{-27}}{4.88 \times 10^{-18}} \text{ kg} \\ &= 2.99 \times 10^3 \text{ kg} = 2.99 \times 10^6 \text{ g} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \text{ 由 } \left(-\frac{dN}{dt}\right) &= \lambda N = \lambda \frac{m}{m_u} = 4.88 \times 10^{-18} \times \frac{1 \times 10^{-3}}{237.555\ 8 \times 1.660\ 5 \times 10^{-27}} \text{ s}^{-1} \\ &= 1.24 \times 10^4 \text{ s}^{-1} \end{aligned}$$

即 1 g ${}^{238}\text{U}$  每秒钟可放出  $1.24 \times 10^4$  个 $\alpha$ 粒子.

**16-9** 在考古工作中,可以从古生物遗骸中 ${}^{14}\text{C}$ 的含量推算古生物死亡到现在的时间 $t$ .设 $\rho$ 是古生物遗骸中 ${}^{14}\text{C}$ 和 ${}^{12}\text{C}$ 存量之比, $\rho_0$ 是空气中 ${}^{14}\text{C}$ 和 ${}^{12}\text{C}$ 存量之比,证明:

$$t = T \frac{\ln\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)}{\ln 2}$$

式中  $T$  为  $^{14}\text{C}$  的半衰期.

分析 设  $^{14}\text{C}$  和  $^{12}\text{C}$  在空气中核数目分别为  $N'_{14}$  和  $N'_{12}$ , 而在活的生物体 (即生物体死亡前) 中分别为  $N_{014}$  和  $N_{012}$ . 由习题 16-4 及其分析中知, 应有  $\frac{N'_{14}}{N'_{12}} = \frac{N_{014}}{N_{012}}$ , 即  $^{14}\text{C}$  和  $^{12}\text{C}$  在空气和活的生物体中的比值相同, 而在生物体死亡后体中  $^{14}\text{C}$  因衰变其核数目不断减少, 满足  $N_{14} = N_{014} e^{-\lambda t}$  这一规律, 但体中  $^{12}\text{C}$  由于稳定其核数目基本不变, 即  $N_{12} = N_{012}$ . 综合考虑以上关系及相关规律, 本题即可得证.

证 由题意及分析知:

$$\text{古尸遗骸中} \quad \rho = \frac{N_{14}}{N_{12}} = \frac{N_{014} e^{-\lambda t}}{N_{012}} \quad (1)$$

$$\text{空气中} \quad \rho_0 = \frac{N'_{14}}{N'_{12}} \quad (2)$$

由式(1)、(2)并考虑  $N_{12} = N_{012}$  及  $\frac{N'_{14}}{N'_{12}} = \frac{N_{014}}{N_{012}}$  可得

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \frac{1}{e^{-\lambda t}} = e^{\lambda t}$$

两边取自然对数

$$\ln\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right) = \lambda t = \frac{\ln 2}{T} t$$

$$\text{即} \quad t = T \frac{\ln\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)}{\ln 2}$$

**16-10** 每个  $^{235}\text{U}$  核裂变可放出 200 MeV 的能量, 若想获得功率为 1 kW 的能量输出, 那么每秒钟要发生多少次  $^{235}\text{U}$  裂变?

解 裂变次数为

$$n = \frac{Pt}{\Delta E} = \frac{1 \times 10^3 \times 1}{200 \times 10^6 \times 1.6 \times 10^{-19}} = 3.13 \times 10^3$$

**16-11** 已知  $^1_1\text{H}$  和  $^4_2\text{He}$  的原子核质量分别为 2.013 553 u 和 4.001 506 u, 试问:  $^1_1\text{H} + ^1_1\text{H} \rightarrow ^4_2\text{He} + \text{能量}$ , 这一反应可释放出多少 MeV 能量? 1 mol  $^1_1\text{H}$  完全按上式聚变可释放多少焦耳能量?

分析 本题第一问通过计算质量亏损来求解释放的能量, 对于第二问来说, 1 mol  $^1_1\text{H}$  的原子数为  $N_A$ , 但两两聚变的核反应次数为  $\frac{N_0}{2}$ .

$$\text{解} \quad (1) \quad \Delta E = \Delta mc^2 = \frac{(2 \times 2.013 553 - 4.001 506) \times 1.660 5 \times 10^{-27} \times (3 \times 10^8)^2}{1.60 \times 10^{-19}} \text{ eV}$$

$$= 23.911 \times 10^6 \text{ eV} = 23.911 \text{ MeV}$$

(2) 1 mol  ${}^2_1\text{H}$  的核聚变次数为

$$n = \frac{N_0}{2} = 3.011 \times 10^{23}$$

则

$$\begin{aligned} \Delta E' &= n \Delta E = 3.011 \times 10^{23} \times 23.911 \times 10^6 \times 1.60 \times 10^{-19} \text{ J} \\ &= 1.152 \times 10^{12} \text{ J} \end{aligned}$$