

第四章 刚体转动

一、质点运动与刚体转动相应量对照

质量 m	转动惯量 $J = \int r^2 dm$
位矢 \vec{r}	角位置 θ
速度 \vec{v}	角速度 $\vec{\omega}$
加速度 \vec{a}	角加速度 $\vec{\alpha}$
质点受力 \vec{F}	刚体受力矩 $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$
力做功 $W = \int \vec{F} \cdot d\vec{s}$	力矩做功 $W = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M d\theta$
平动动能 $E_k = \frac{1}{2}mv^2$	转动动能 $E_k = \frac{1}{2}J\omega^2$
动能定理 $W = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$	转动动能定理 $W = \frac{1}{2}J\omega_2^2 - \frac{1}{2}J\omega_1^2$
牛顿定律 $\vec{F} = m\vec{a}$	转动定律 $\vec{M} = J\vec{\alpha}$
动量 $\vec{p} = m\vec{v}$	角动量 $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = J\vec{\omega}$
冲量 $\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt$	冲量矩 $\int_{t_1}^{t_2} \vec{M} dt$
动量定理 $\int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1$	角动量定理 $\int_{t_1}^{t_2} \vec{M} dt = J\vec{\omega}_2 - J\vec{\omega}_1$

二、常见刚体的转动惯量 J

1. 细棒: 转轴在中心: $J = \frac{1}{12}ml^2$
2. 细棒: 转轴在一端: $J = \frac{1}{3}ml^2$
3. 圆柱体: $J = \frac{1}{2}mR^2$
4. 薄圆环: $J = mR^2$
5. 球体: $J = \frac{2}{5}mR^2$

第五章 静电场

1. 电荷是量子化的

带电体的电荷是 te 的整数倍, 电子电荷的绝对值 e 称为元电荷 $e = 1.6 \times 10^{-19} \text{C}$

2. 电荷守恒定律

孤立系统的电荷的代数和始终保持不变

3. 库仑定律

两个真空静止点电荷间的作用力 $\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{e}_r$

其中: \vec{F} 为 q_1 对 q_2 作用力, 则 \vec{e}_r 为 q_1 指向 q_2 的单位矢量

ϵ_0 为真空电容率 $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{C}^2 \cdot \text{N}^{-1} \cdot \text{m}^{-2} = 8.85 \times 10^{-12} \text{F} \cdot \text{m}^{-1}$

同号电荷相斥, 异号电荷相吸

4. 静电场: (相对于观察者) 静止的电荷在其周围产生的电场

5. 电场强度: $\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$

电场中某点处的电场强度 \vec{E} 等于位于该点处的单位试验电荷所受的电场力

电场强度是空间位置的函数

若某点处电场强度为 \vec{E} , 则电荷 q 在该点处受电场力 $\vec{F} = q\vec{E}$

6. 点电荷的电场强度

在真空中, 点电荷 Q 所产生的电场的场强为 $\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2} \vec{e}_r$

其中: \vec{e}_r 为源电荷指向电场中一点 (距源为 r) 的单位矢量; 若 Q 为正电荷, \vec{E} 与 \vec{e}_r 同向, 否则 \vec{E} 与 \vec{e}_r 反向

7. 电场强度的叠加原理

点电荷系所激发的电场中某点的场强等于各个点电荷单独存在时对该点所激发的场强的矢量和 ★

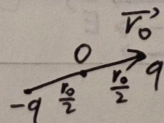
$$\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{Q_i}{r_i^2} \vec{e}_i$$

8. 电偶极子的电场强度

电偶极子: 由两个电荷量相等, 符号相反, 相距为 r_0 (定值) 的点电荷 $+q, -q$ ($q > 0$) 所构成的电荷系

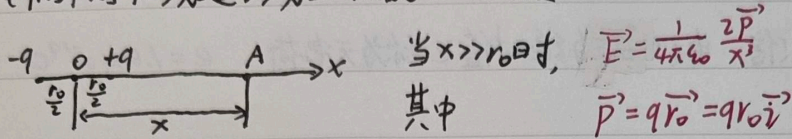
电偶极子的轴: 从 $-q$ 指向 $+q$ 的矢量 \vec{r}_0

电偶极子的电偶极距: $\vec{p} = q\vec{r}_0$

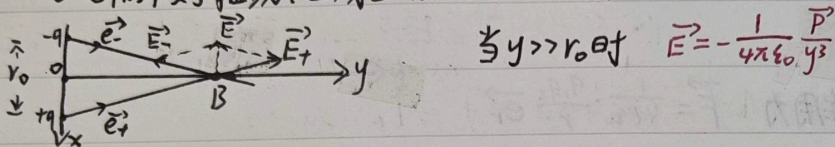


例: 根据电场叠加原理, 可以得出

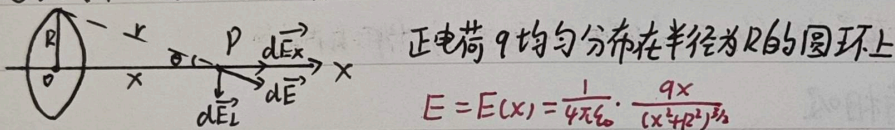
① 电偶极子轴线延长线上一点的电场强度



② 电偶极子轴线中垂线上一点的电场强度

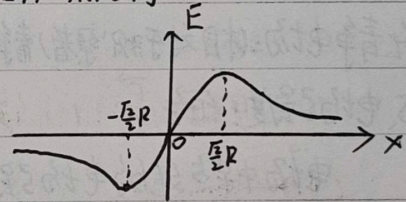


③ 均匀带电圆环对轴线上一点的电场强度

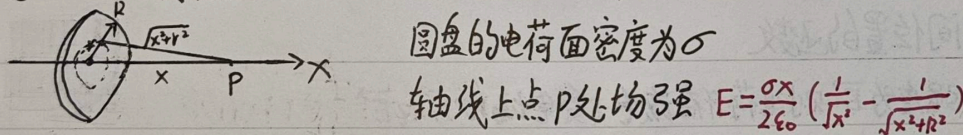


i 距圆环较远处, $x \gg R$, 此时 $E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{x^2}$, 可将带电圆环看作一点电荷

ii $x \rightarrow 0$ 时 $E \rightarrow 0$, iii $\frac{dE}{dx} = 0$ 时 $x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} R$



④ 均匀带电薄圆盘对过盘心的轴线上一点的电场强度



若 $x \ll R$, 带电圆盘可视为“无限大”均匀带电平面, 此时 $E = \begin{cases} \frac{\sigma}{2\epsilon_0}, & x > 0 \\ -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}, & x < 0 \end{cases}$

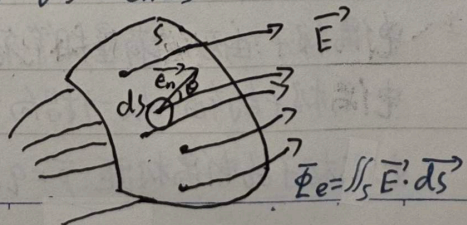
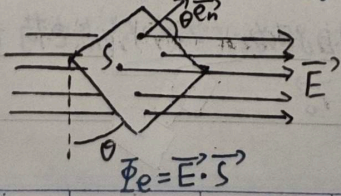
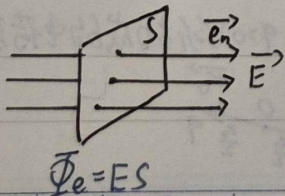
9. 电场线

静电场的电场线的特点 ① 总是始于正电荷(或无穷远), 终止于负电荷(或无穷远) ② 电场线不能相交

规定: 通过电场中某点处垂直于 E 的单位面积的电场线数等于该点处场强的大小 $\frac{dN}{dS} = E$

定义: 通过电场中某个面的电场线数目称为这个面的电场强度通量 $\Phi_e = \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{s}$

$d\vec{s}$ 为面积矢量, 大小为面积元 ds , 方向为 ds 的法线方向 $d\vec{s} = \vec{e}_n ds$



10. 真空静电场中高斯定理 $\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum q_i$

真空静电场中, 穿过任意闭合曲面(称为高斯面)的电场强度通量

= 该闭合曲面(高斯面)所包围的所有电荷的代数和除以 ϵ_0 .

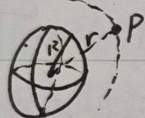
应用: 利用高斯定理求电场强度

步骤: ① 对称性分析

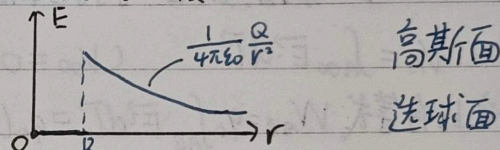
② 根据对称性选择合适高斯面

- (1) 使得所选高斯面上各点的场强大小相等且有 $\vec{E} \parallel d\vec{S}$
- (2) 或使得所选高斯面的部分点满足(1), 而其余点满足 $\vec{E} \perp d\vec{S}$ 或 $E=0$

例: ① 半径为 R 均匀带电荷量为 Q 的球面, 其内、外部任一点的电场强度

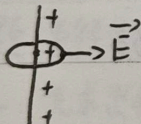


$$E = \begin{cases} 0 & r < R \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} & r > R \end{cases}$$



即: 均匀带电球面内部场强为零, 在其外部相当于其电荷全部集中于球心一点所产生的电场强度

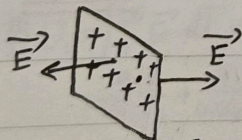
② 无限长均匀带电直线的电荷线密度为 λ , 距线 r 处某点的电场强度



$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$$

高斯面选以带电直线为轴线的圆柱面 $\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = E \cdot 2\pi r h = \frac{\lambda h}{\epsilon_0}$

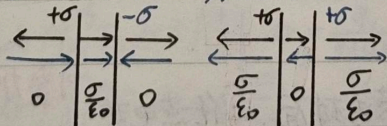
③ 无限大均匀带电平面的电荷面密度为 σ , 距面 r 处某点的电场强度



$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \quad \text{与距离 } r \text{ 无关, 是均匀电场}$$

高斯面选轴线垂直于带电平面, 穿过带电平面并且关于平面对称的圆柱面

由电场强度叠加原理 \Rightarrow



$$2E \cdot S = \frac{\sigma S}{\epsilon_0}$$

11. 静电场是保守场, 静电电力是保守力

- 试验电荷 q_0 在静电场中运动, 电场力对它所做的功仅与 q_0 始末位置有关, 与路径无关

\Leftrightarrow 将试验电荷绕一闭合曲线运动一周, 电场力的功为零 $q_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$

静电场的环路定理: 在静电场中, 电场强度 \vec{E} 的环流为零 $\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$

12. 电势能

- 电势能是属于电荷-电场系统的
- 静电场力对电荷所做的功等于电荷电势能增量的负值

试验电荷从电场中A移到B, 有 $W_{AB} = q_0 \int_{AB} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -(E_{PB} - E_{PA})$

- 试验电荷在电场中某点处的电势能, 等于把它从该点移到零电势能处静电场力做的功

$E_{PA} = q_0 \int_{AB} \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (E_{PB} = 0)$

13. 电势

定义 $V = \frac{E_p}{q_0}$ 有 $\int_{AB} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -(V_B - V_A) = U_{AB} = V_A - V_B$

- 电场中某点A电势 V_A , 数值上等于把单位正试验电荷从点A移到无穷远处, 静电场力做的功

$V_A = \int_{A\infty} \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (V_{\infty} = 0)$

- 综上, 有等式 $W_{AB} = q_0 \int_{AB} \vec{E} \cdot d\vec{l} = q_0 U_{AB} = q_0 (V_A - V_B) = -(qV_B - qV_A) = -(E_{PB} - E_{PA})$

14. 点电荷电场的电势

- 在点电荷 q 的电场中, 距 q 为 r 处的电势为 $V = \int_r^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}$

对于正电荷, $q > 0$, 电场中各处电势均为正; 对于负电荷, $q < 0$, 电场中各处电势都为负

15. 电势的叠加原理

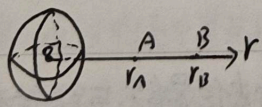
点电荷系所激发的电场中某点的电势, 等于各点电荷单独存在时在该点处的电势的代数和

$V_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum \frac{q_i}{r_i} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r}$

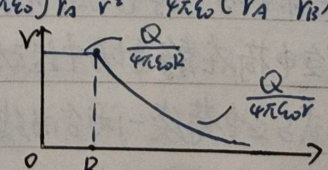
应用: 求电势

例① 真空中一电荷为 Q , 半径为 R 的均匀带电球面, 求任一点电势

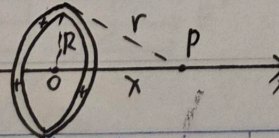
可叠加为多个同心球壳

☆  $r > R, U_{AB} = V_A - V_B = \int_{r_A}^{r_B} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_A}^{r_B} \frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right)$

$V(r) = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} & r < R \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} & r \geq R \end{cases}$

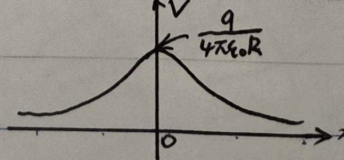


② 真空中一电荷为 $+Q$, 半径为 R 的均匀带电细圆环, 求轴线上任一点的电势



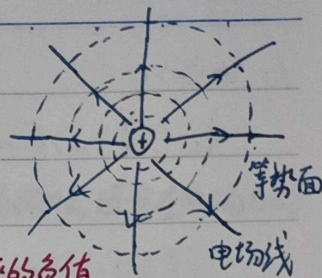
$V_p(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\sqrt{x^2 + R^2}}$

$\Rightarrow E(x) = -\nabla V(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qx}{(x^2 + R^2)^{3/2}}$



16. 等势面

电场中电势相等的点所构成的面, 某点处电场线方向与等势面垂直



17. 电场强度与电势梯度

电场中任一点的电场强度 \vec{E} , 等于该点处电势沿等势面法线方向的变化率的负值

$$\vec{E} = -\frac{dV}{dn} \vec{e}_n = -\left(\frac{\partial V}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial V}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial V}{\partial z} \vec{k}\right) = -\nabla V$$

即电场强度等于电势梯度的负值

其中 \vec{e}_n 是等势面的单位法向量, 方向由低电势指向高电势

综上, 求真空中电场强度有三种方法

① 利用电场强度叠加原理

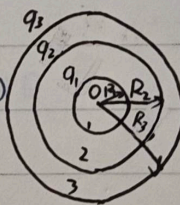
② 利用高斯定理

③ 利用场强与电势梯度的关系 求电势 $V \rightarrow$ 求电场 $\vec{E} = -\nabla V$

例: 半径分别为 R_1, R_2, R_3 的三个均匀带电同心球壳, 电量分别为 q_1, q_2, q_3 , 求空间电势分布

法一: 先求出电场分布, 再由定义求电势

$$E_1 = 0 \quad (r < R_1) \quad E_2 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (R_1 < r < R_2) \quad E_3 = \frac{q_1 + q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (R_2 < r < R_3) \quad E_4 = \frac{q_1 + q_2 + q_3}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (r > R_3)$$



$$U_1 = \int_r^\infty \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_r^{R_1} E_1 dr + \int_{R_1}^{R_2} E_2 dr + \int_{R_2}^{R_3} E_3 dr + \int_{R_3}^\infty E_4 dr$$

$$= \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 R_1} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 R_2} + \frac{q_3}{4\pi\epsilon_0 R_3} \quad (r < R_1)$$

$$U_2 = \int_r^\infty \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_r^{R_2} E_2 dr + \int_{R_2}^{R_3} E_3 dr + \int_{R_3}^\infty E_4 dr = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 R_2} + \frac{q_3}{4\pi\epsilon_0 R_3} \quad (R_1 < r < R_2)$$

$$U_3 = \int_r^\infty \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_r^{R_3} E_3 dr + \int_{R_3}^\infty E_4 dr = \frac{q_1 + q_2}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{q_3}{4\pi\epsilon_0 R_3} \quad (R_2 < r < R_3)$$

$$U_4 = \int_r^\infty \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_r^\infty E_4 dr = \frac{q_1 + q_2 + q_3}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (r > R_3)$$

法二: 根据单个球壳的电势分布, 用叠加原理求

第六章 静电场中的导体与电介质

一、静电场中的导体

1. 静电感应现象: 当把金属导体放在外电场中, 导体中自由电子在电场力的作用下作宏观定向运动的过程

该过程持续到导体内场强为零, 此时导体内没有电荷定向运动, 导体处于静电平衡状态

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}' = 0 \quad \vec{E}_0 \text{ 为外电场强度, } \vec{E}' \text{ 为感应电场强度}$$

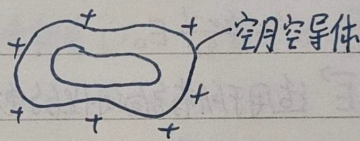
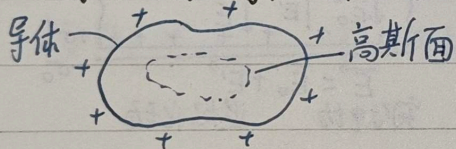
2. 导体处于静电平衡状态

① 导体内任一点场强为零 $\vec{E}_{内} = 0$ ② 导体表面处场强的方向均与导体表面垂直 $\vec{E}_{表} = \vec{E}_{外}$

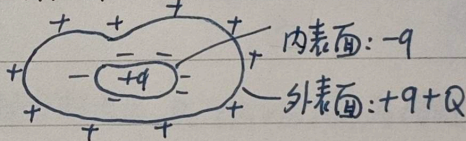
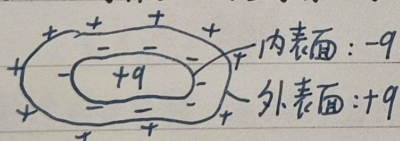
③ 整个导体包括其表面为一等势体

3. 静电平衡时导体上电荷的分布

(1) 静电平衡时, 导体所带电荷只能分布在导体的外表面上, 导体内没有电荷



(2) 若空心导体的空腔内有电荷 $+q$, 空心导体不带电 / 带 $+Q$, 则

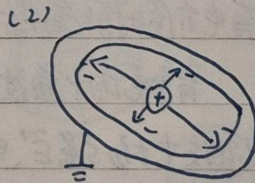
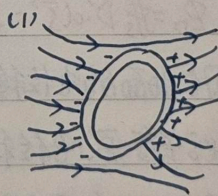


(3) 带电导体表面曲率半径较小处电场较强, 尖端处电场最强

4. 静电屏蔽

(1) 空心导体能使空腔内不受外电场的影晌

(2) 接地空心导体能使空腔外不受内电场的影晌



二、静电场中的电介质 (绝缘体)

1. 真空电容率 ϵ_0 相对电容率 ϵ_r 电容率 $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$

真空中两无限大电荷面密度为 $+\sigma$ 、 $-\sigma$ 的平行板间电场强度

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

在电介质中

$$E = \frac{E_0}{\epsilon_r} = \frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon_r}$$

2. 电介质的极化

指在外电场作用下, 电介质表面产生极化电荷的现象 无极分子: 位移极化 有极分子: 取向极化

3. 电极化强度

用单位体积中分子电偶极矩矢量的矢量和来表示电介质的极化程度

$$\text{电极化强度 } \vec{P}' = \frac{\sum \vec{P}}{\Delta V} \quad \begin{matrix} \text{C}\cdot\text{m} \\ \text{m}^3 \end{matrix} \quad P' = q\vec{r}$$

两平行平板间充满均匀电介质, 电介质的电极化强度大小等于电介质表面极化电荷的面密度

$$\vec{P}' = \frac{\sum \vec{P}}{\Delta V} = \frac{\sigma' \Delta S l}{\Delta S l} = \sigma'$$

4. 极化电荷与自由电荷的关系

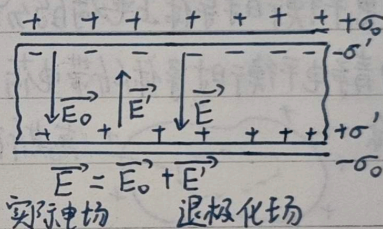
两无限大平行平板中, 放入均匀电介质, 由

$$E = E_0 - E' = \frac{E_0}{\epsilon_r}, \quad E_0 = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0}, \quad E' = \frac{\sigma'}{\epsilon_0}$$

$$\text{得 } \sigma' = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \sigma_0, \quad E' = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} E_0$$

$$\Rightarrow \vec{P}' = (\epsilon_r - 1) \epsilon_0 \vec{E}' \quad \text{适用于所有各向同性的电介质}$$

- 其中 $\chi_e = \epsilon_r - 1$ 称为电极化率



三、电位移

1. 电位移定义: $\vec{D}' = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E}' = \epsilon \vec{E}'$ 单位 $\text{C}\cdot\text{m}^{-2}$

2. 有电介质时的高斯定理 $\oint \vec{D}' \cdot d\vec{S}' = \sum Q_{oi}$

静电场中通过任意闭合曲面的电位移通量(单位 C) = 该闭合曲面包围的(自由电荷)的代数和

3. 电介质中场强 \vec{E}' 、电极化强度 \vec{P}' 、电位移 \vec{D}' 间的关系 $\vec{D}' = \vec{P}' + \epsilon_0 \vec{E}'$

应用: 用有电介质时的高斯定理求电场强度

步骤: 分析对称性 \rightarrow 作高斯面 \rightarrow 求出电位移 \vec{D}' \rightarrow 求出场强 $\vec{E}' = \frac{\vec{D}'}{\epsilon}$

注: 对于平行板电容器, 有 $D = \epsilon_0 \epsilon_r E = \epsilon_0 E_0 = \sigma_0$ (自由电荷电荷面密度)

四. 电容

1. 孤立导体的电容

定义: 孤立导体的电容为所带电荷 Q 与其电势 V 的比值 $C = \frac{Q}{V}$ $1F = 1C/1V$

例: 已知一半径为 R 电荷为 Q 的球形孤立导体的电势为 $V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R}$

则其电容为 $C = 4\pi\epsilon_0 R$

2. 电容器

指两个彼此绝缘的, 带等值异号电荷的导体所组成的系统

两个导体为两个等势体, 称为电容器的两个极板

设极板 A, B 带电 $+Q, -Q$, 其电势为 V_1, V_2 则电势差 $U = V_1 - V_2$

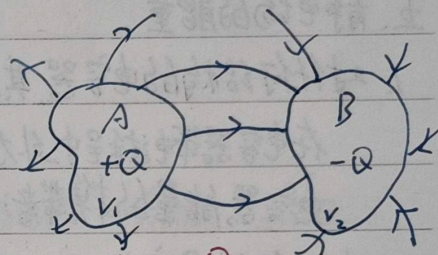
电容器电容的定义: 两极板中任一极板所带电荷与两极板电势差的比值 $C = \frac{Q}{U}$

电容器电容的计算: ① 设两极板分别带电 $Q, -Q$, ② 求两极板间的电场强度 E

$Q \rightarrow E \rightarrow U \rightarrow C$

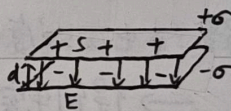
③ 求两极板间的电势差 U

④ 求 $C = \frac{Q}{U}$



例: 1. 平行板电容器, 两极板面积 S , 间距 d , 极板间充满 ϵ_r 的电介质

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r S}{d}$$

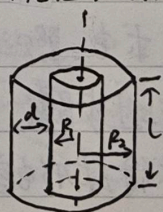


2. 圆柱形电容器, 两极板为长度 l , 半径分别为 R_1, R_2 ($R_1 < R_2$) 的两同轴圆柱导体面, ($l \gg R_2$)

两极板间充满 ϵ_r 的电介质, 间距 $d = R_2 - R_1$

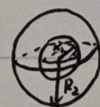
$$C = \frac{Q}{U} = \frac{2\pi\epsilon_0\epsilon_rl}{\ln \frac{R_2}{R_1}}$$

当 $d \ll R_1$ 时, 有 $C \approx \frac{\epsilon_0 \epsilon_r S}{d}$



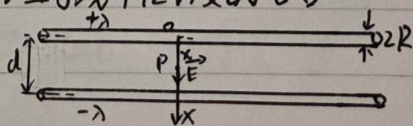
3. 球形电容器, 两极板为半径分别为 R_1, R_2 ($R_1 < R_2$) 的两个同心导体球壳, 间距 $d = R_2 - R_1$

$$C = \frac{Q}{U} = 4\pi\epsilon_0 \left(\frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} \right)$$



4. 两根半径为 R , 中心距为 d 的平行长直导线, $d \gg R$, 求长直导线单位长度的电容

$$C_l = \frac{\lambda}{U} = \frac{\pi\epsilon_0}{\ln \frac{d}{R}}$$

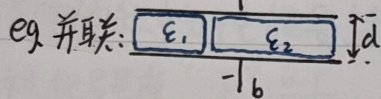


注: $x \in (0, R), (d-R, d)$ 时 $E=0$

3. 电容器的串并联

① 电容器串联: 每个电容器的极板上所带电荷都相等, 且 $\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots$

② 电容器并联: 每个电容器上的电压是相等的, 且 $C = C_1 + C_2 + \dots$



五. 静电场的能量

1. 对任何结构的电容器, 其贮存的电能为 $W_e = \frac{Q^2}{2C} = \frac{QU}{2} = \frac{CU^2}{2}$

在电容器带电过程中, 外力通过克服静电力做功, 把非静电能转化为电容器的电能

电容器能量的携带者: 电场 $W_e = \frac{1}{2} CU^2 = \frac{1}{2} \epsilon E^2 Sd$

2. 电场的能量密度: 单位体积电场所具有的电场能量

对任意电场, 有 $w_e = \frac{dW_e}{dV} = \frac{1}{2} \epsilon E^2$

应用: 求电容器贮存的电场能量

步骤: 求电场强度 E \rightarrow 求能量密度 $w_e = \frac{1}{2} \epsilon E^2 \rightarrow$ 得到体积元内电场能量 $dW_e = w_e dV$

\rightarrow 得到电容器内电场总能量 $W_e = \int dW_e = \iiint_V \frac{1}{2} \epsilon E^2 dV$

例: 球形电容器的内、外半径为 R_1, R_2 ($R_1 < R_2$), 两极板带电荷 $\pm Q$, 球壳间充 ϵ 的电介质

求电容器贮存的电场能量

法一: 按上述步骤, 其中 $E = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{Q}{r^2} \vec{e}_r$ ($R_1 < r < R_2$), 得 $W_e = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{4\pi\epsilon} \frac{R_2 R_1}{R_2 - R_1}$

法二: 先求得球形电容器的电容 $C = 4\pi\epsilon \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}$, 再用 $W_e = \frac{Q^2}{2C}$ 求得 W_e

第七章 恒定磁场

一、恒定电流

1. 电流的定义: 通过导体截面 S 的电荷随时间的变化率 $I = \frac{dq}{dt}$

一个电子做匀速圆周运动时, 等效圆电流 $I = \frac{q}{T} = \frac{e}{T}$

电流的微观解释: $I = v_d n q S$

$$I = \frac{Q_{总}}{T}$$

其中 v_d 为自由电子定向运动的平均速度, 即漂移速度, n 为导体内自由电子的数密度 (单位体积内的数量)

$q = e$ 为电子的电荷的绝对值, S 为导体截面积

2. 电流密度 \vec{j}

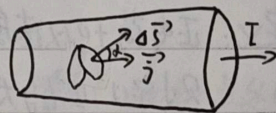
定义: 方向: 导体中正电荷的运动方向

大小: 单位时间内, 通过垂直于正电荷运动方向的单位面积的电荷 $j = \frac{\Delta Q}{\Delta t \Delta S \cos \alpha} = \frac{\Delta I}{\Delta S \cos \alpha}$

$\Delta S \cos \alpha$ 为面积元 ΔS 在垂直于电流密度方向上的投影, 故 $\Delta I = \vec{j} \cdot \Delta \vec{S}$

通过导体任一截面 S 的电流 $I = \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$

电流密度的微观解释 $j = v_d n q$



* 3. 电流的连续性方程

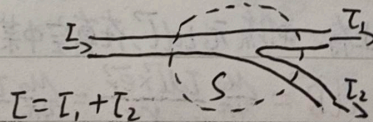
电流的连续性: 单位时间内, 通过闭合曲面向外流出的电荷, 等于该时间内闭合曲面内电荷的减少量, 即 $\oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = -\frac{dq}{dt}$

$$\oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = -\frac{dq}{dt}$$

* 4. 恒定电流条件

恒定电流: 导体中电流 I 不随时间而变化, 即闭合曲面内没有电荷的积累

$$\oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = 0$$



* 5. 欧姆定律微分形式 $\vec{j} = \rho \vec{E} = \gamma \vec{E}$

其中 ρ 为导体电阻率, γ 为电导率, 电阻定律: $R = \rho \frac{l}{S}$

通过导体中任一点的电流密度 j 与电场强度 E 成正比

在恒定电流条件下, 电导率均匀的导体 $\oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = \gamma \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0$

内部没有净电荷, 电荷只分布在导体表面处。

二、电源

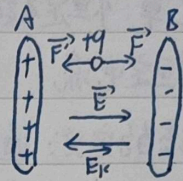
提供非静电力, 维持小恒定电势差, 形成小恒定电流

$$\text{电源电动势: } \mathcal{E} = \frac{W}{q} = \int_{-}^{+} \vec{E}_r \cdot d\vec{l}$$

大小: 把单位正电荷从负极经电源内部移至正极时非静电力所做的功

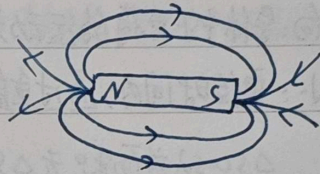
方向: 从负极经电源内部到正极的方向

单位: 伏 V \vec{E}_r 为非静电场强度, 是一种等效说法, 指作用在单位正电荷上的非静电力



三、磁场

1. 磁铁的磁场: N、S极同时存在, 同名相斥, 异名相吸



2. 磁感应强度 \vec{B} 用于定量描述磁场

定义: 正电荷 +q 以速度 \vec{v} 经过磁场中某点, 当速度为某一方向时, 电荷所受磁场力最大, 记为 F_1

则定义 \vec{B} 的大小为 $B = \frac{F_1}{qv}$, \vec{B} 的方向为 $\vec{F}_1 \times \vec{v}$ 的方向

四、毕奥-萨伐尔定律

恒定电流激发磁场的规律

1. 电流元 流过某一线元矢量 $d\vec{l}$ 的电流为 I , 电流流向即为 $d\vec{l}$ 的方向, 则电流元为 $I d\vec{l}$

2. 毕奥-萨伐尔定律

导线上有一电流元 $I d\vec{l}$, 在真空中某点 P 处的磁感应强度:

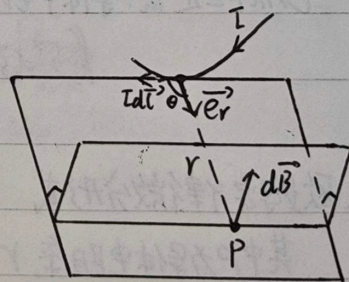
$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{l} \times \vec{e}_r}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$$

其中电流元到点 P 的矢量为 \vec{r} , 单位矢量 $\vec{e}_r = \frac{\vec{r}}{r}$, μ_0 为真空磁导率

磁感应强度的大小为 $dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dl \sin\theta}{r^2}$ $\theta = \langle d\vec{l}, \vec{e}_r \rangle$

由磁感应强度叠加原理, 任意载流导线在点 P 处的磁感应强度 \vec{B} 为

$$\vec{B} = \int d\vec{B} = \int \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{l} \times \vec{e}_r}{r^2}$$



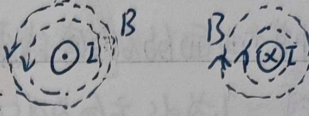
应用: 求载流导线所激起的磁场

若 $d\vec{B}$ 方向均相同, 则求 dB 的数量和 $B = \int dB$; 若 $d\vec{B}$ 的方向不同, 则先正交分解再求数量和, 并观察有无对称性

例 1. 无限长载流直导线的磁场, 导线通有电流 I , 附近一点 P (距导线 r) 处的磁感强度 B

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

方向: 右手螺旋关系



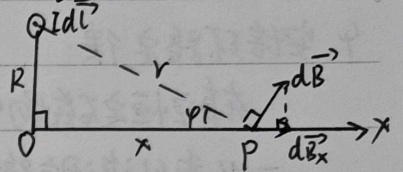
若为“半无限长”载流导线, 即点 P 与导线一端平齐,

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi r}$$

例 2. 圆形载流导线轴线上的磁场, 导线半径 R , 电流 I , 轴线上任一点 P 距圆心为 x 处的磁感强度

$$B = \int dB_x = \frac{\mu_0 R^2 I}{2(R^2 + x^2)^{3/2}}$$

圆心处, $x=0$ 时 $B = \frac{\mu_0 I}{2R}$



推广: ① $B_0 = \frac{\mu_0 I}{4R}$ 向里 ② $B_0 = \frac{\mu_0 I}{8R}$ 向里

③ $B_A = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}$ 向里 ④ 设 B_0 向里为正, $B_0 = \frac{\mu_0 I}{4R} - \frac{\mu_0 I}{4R} - \frac{\mu_0 I}{4\pi R}$

例 3. 载流密绕直螺线管内部的磁场, 长为 l , 半径 R , 总匝数 N , 电流 I , 管内轴线上一点处的磁感强度

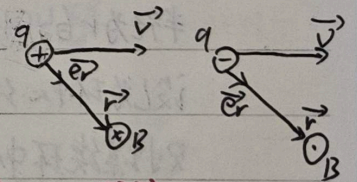
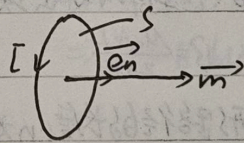
$l \gg R$, 无限长的螺线管轴线中点处: $B = \mu_0 n I$ n 为单位长度的匝数 $n = \frac{N}{l}$

半无限长的螺线管的一端: $B = \frac{1}{2} \mu_0 n I$

3. 磁矩

平面电流的磁矩 $\vec{m} = I S \vec{e}_n$

\vec{e}_n 为平面电流平面的正向法线的单位矢量



4. 运动电荷产生的磁场

一个电荷 q 以速度 \vec{v} 运动, 距它 r 处的磁感强度: $\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\vec{v} \times \vec{e}_r}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\vec{v} \times \vec{r}}{r^3}$

大小: $B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{qv \sin\theta}{r^2}$, $\theta = (\vec{v}, \vec{e}_r)$

五. 磁通量

1. 载流导线周围的磁感线

特点: 都是围绕电流的闭合曲线, 没有起点, 也没有终点

\Rightarrow 磁场是一种涡旋场, 无源场

2. 规定: 磁场中某点处垂直于 \vec{B} 的单位面积上通过的磁感线条数等于该点处 B 的值

定义: 通过磁场中某个曲面的磁感线条数称为通过此曲面的磁通量 $\Phi = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$

$d\vec{S}$ 为面积矢量, 大小为 ds , 方向为 ds 的正法线方向, $d\vec{S} = \vec{e}_n ds$

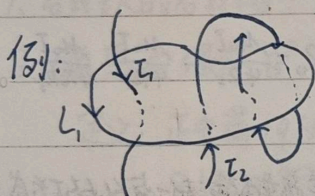
3. 磁场的高斯定理 $\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$

通过任意闭合曲面的磁通量恒为 0

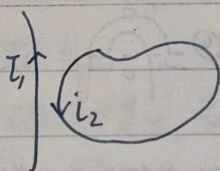
4. 安培环路定理 $\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum I_i$

在真空恒定磁场中, \vec{B} 沿任一闭合路径的积分 (即 \vec{B} 的环流) 的值

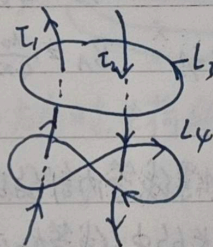
= μ_0 乘以该闭合路径所包围的各电流的代数和, 若电流与回路呈右手螺旋关系, 则电流取正值



$$\oint_{L_1} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 (2I_2 - I_1)$$



$$\oint_{L_2} \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0$$



$$\oint_{L_3} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 (I_1 - I_2)$$

$$\oint_{L_4} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 (I_1 + I_2)$$

应用: 应用安培环路定理求具有对称性分布电流的磁感强度

例 1. 载流螺绕环内的磁场, 环上均匀密绕 N 匝线圈, 线圈电流为 I

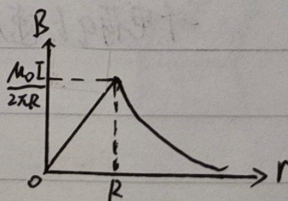
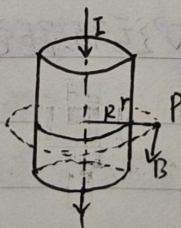
半径为 r 的圆形路径上 $B = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r}$

设 L 为环中心线所在圆形路径的长度, n 为环上单位长度线圈的匝数

则螺绕环中心线上一点处 $B = \mu_0 n I$

2. 无限长载流圆柱体的磁场 圆柱体半径为 R ,

距圆柱轴线 r 处 $B = \begin{cases} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} & (r > R) \\ \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2} & (r < R) \end{cases}$



六 带电粒子在电场、磁场中的运动

1. 带电粒子在电场、磁场中所受的力 电场力 $\vec{F}_e = q\vec{E}$ 洛伦兹力 $\vec{F}_m = q\vec{v} \times \vec{B}$

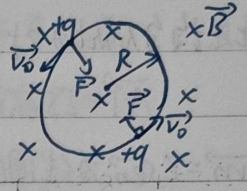
$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}$$

2. 运动举例

① 在磁场 \vec{B} 中, 粒子 $+q, m$ 仅受洛伦兹力作用时, 作匀速圆周运动

回旋半径 $R = \frac{mv_0}{qB}$

回旋周期 $T = \frac{2\pi m}{qB}$ 回旋频率 $f = \frac{1}{T} = \frac{qB}{2\pi m}$



② 质谱仪

速度选择器 $qVB = qE \quad v = \frac{E}{B}$

磁场区域 $qVB' = m \frac{v^2}{R} \quad m = \frac{qBR^2}{v}$

③ 回旋加速器

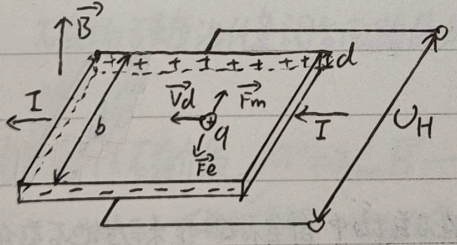
由回旋频率 $f = \frac{qB}{2\pi m}$ 与圆轨道半径、粒子速率无关

到达半径 R_0 的盒的边缘时, 粒子 $v = \frac{qBR_0}{m} \quad E_k = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{q^2 B^2 R_0^2}{2m}$

④ 霍尔效应

一块宽为 b 厚为 d 的导体/半导体放在磁场 B 中, 并通以纵向电流 I , 此时在板横向两侧面出现一定电势差 U_H . 这一现象称为霍尔效应, 其中霍尔电压 $U_H = k \frac{IB}{d}$ 霍尔系数 $k = \frac{1}{nq}$

载流子带正电时, 所得 U_H, k 均为正, 若载流子带负电, 则 U_H, k 均为负 n 为载流子数密度
 q 为载流子电荷

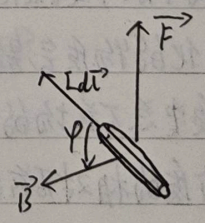


$qE = qVB, \quad U = Eb = V B b, \quad I = n v q b d$
 $\Rightarrow U = B \cdot b v = B \cdot \frac{I}{n q d} = k \frac{IB}{d}$

七. 载流导线在磁场中所受的力

1. 安培定律 磁场对电流元的作用力称为安培力 $d\vec{F} = I d\vec{l} \times \vec{B}$

安培力的方向可由右手螺旋定则或左手定则确定

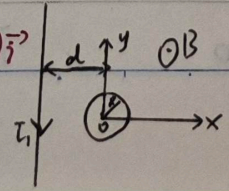


有限长载流导线所受安培力 $\vec{F} = \int d\vec{F} = \int I d\vec{l} \times \vec{B}$ 作用在整个导线上, 而不是作用于一

点
有结论 任意平面载流导线在均匀磁场中所受的力, 等于与其始点和终点相同的载流直导线所受的磁场力

例: 载流导线间的磁场力

圆电流受磁场力 $\vec{F} = \vec{F}_x = \mu_0 I_1 I_2 (1 - \frac{d}{\sqrt{d^2 + R^2}}) \hat{i}$



2. 磁场作用载流线圈的磁力矩

— 磁力 $F=0$

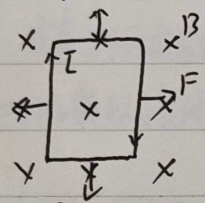
任意均匀磁场对通过恒定电流的任意形状平面(闭合线圈)的磁力矩

$$\vec{M} = I S \vec{e}_n \times \vec{B} = \vec{m} \times \vec{B}$$

$\vec{m} = I S \vec{e}_n$ 为线圈的磁矩, 若线圈不是1匝而是N匝, 则 $\vec{M} = N I S \vec{e}_n \times \vec{B}$

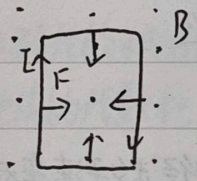
分情况讨论 \vec{e}_n 与 \vec{B} 的方向

① 同向 稳定平衡



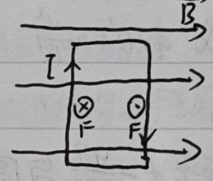
$$\theta = 0 \quad M = 0$$

② 反向 不稳定平衡



$$\theta = \pi \quad M = 0$$

③ 垂直 力矩最大



$$\theta = \frac{\pi}{2} \quad M = M_{max}$$

3. 磁力做功

结论: 在均匀磁场中, 对任意形状的闭合电流回路, 当其运动或发生形变而使穿过回路的磁通量改变时, 磁力或磁力矩做的功都等于回路电流与回路中磁通量增量之积

$$W = I \Delta \Phi = I (\Phi_{末} - \Phi_{初})$$

八. 磁场中的磁介质

1. 磁介质

在磁场中能被磁化的物质叫磁介质, 一切实物在磁场中都会在一定程度上磁化

被磁化的物质会激起附加磁场 \vec{B}' 影响原磁场 \vec{B}_0

$$\text{磁介质中总磁场的磁感强度 } \vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}'$$

$$\text{定义介质的相对磁导率 } \mu_r = \frac{B}{B_0}$$

2. 磁介质分类

① 顺磁质: 弱磁性 $\mu_r > 1$ 且 $\mu_r \sim 1$ B' 与 B_0 同向但 $B' \ll B_0 \Rightarrow B > B_0$ 但 $B \approx B_0$

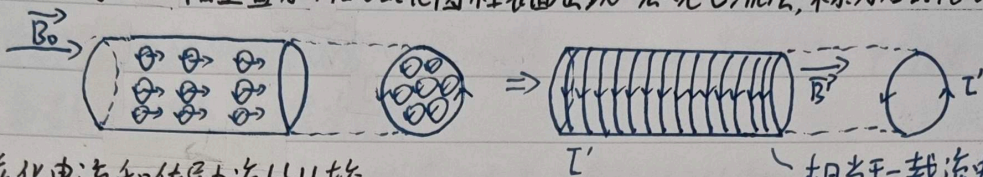
② 抗磁质: 弱磁性 $\mu_r < 1$ 且 $\mu_r \sim 1$ B' 与 B_0 反向但 $B' \ll B_0 \Rightarrow B < B_0$ 但 $B \approx B_0$

③ 铁磁质: 强磁性 $\mu_r \gg 1$ B' 与 B_0 同向且 $B' \gg B_0 \Rightarrow B \gg B_0$

④ 完全抗磁体: $\mu_r = 0$ $B' = -B_0 \Rightarrow B = 0$

3. 磁化强度: 磁介质中某点单位体积内分子磁矩的矢量和 $\vec{M} = \frac{\sum \vec{m}_i}{\Delta V}$ $\frac{A \cdot m^2}{m^3}$

4. 磁化电流: 对于各向同性的均匀介质, 其内部分子电流相互抵消, 其表面分子电流相互叠加, 在磁化圆柱表面出现一宏观电流层, 称为磁化电流



磁化电流和传导电流的比较

- 传导电流是电荷宏观定向迁移的结果; 磁化电流是分子电流规则排列的宏观反映, 与电荷定向移动无关
- 磁化电流不能传导, 称为束缚电流
- 传导电流产生焦耳热, 磁化电流不产生焦耳热
- 相同点: 都可以产生磁场, 都遵从电流产生磁场的基本规律

5. 磁化电流面密度 i_s : 柱体磁介质表面上沿柱体母线方向单位长度的磁化电流

磁化电流面密度 = 磁化强度 $i_s = M$

6. 定义: 磁场强度 $\vec{H} = \frac{\vec{B}_0}{\mu_0} - \vec{M}$

磁介质中的安培环路定理 $\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = I$

磁场强度沿任意闭合回路的线积分 = 回路所包围的传导电流的代数和
与磁介质中的磁化电流无关

对于线性磁介质, $\vec{M} = \chi_m \vec{H}$ — 磁场强度

磁化强度 \quad 磁化率

相对磁导率 $\mu_r = 1 + \chi_m$ $\vec{M} = (\mu_r - 1) \vec{H}$

有 $\vec{B} = \mu \vec{H} = \mu_0 \mu_r \vec{H}$

应用: 处理磁介质中的磁场问题

7. 磁介质中的高斯定理 $\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0$

无论由何电流产生, 磁场均为无源有旋场

第八章 电磁感应

一、电磁感应定律

1. 当穿过闭合回路所围面积的磁通量发生变化时, 不论这种变化是什么原因引起的, 回路中都会建立起感应电动势 $\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt}$ for $\Phi = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$, $\Psi = N\Phi$

2. 负号的物理意义: 楞次定律

闭合的导线回路中所出现的感应电流, 总是使它所激发的磁场反抗任何引发电磁感应的原因
增反减同, 来拒去留, 增缩减扩

设闭合回路电阻为 R , 则回路中感应电流 $I_i = -\frac{1}{R} \frac{d\Phi}{dt}$

在任意一段时间内, 流过回路的感应电荷的绝对值 $q = \frac{\Delta\Phi}{R}$

感应电流与回路中磁通量随时间的变化率有关, 感应电荷只与回路中磁通量的变化量有关

注: 电动势的方向是电势升高的方向, 电势差的方向是电势降落的方向

例: 交流发电机 在均匀磁场中, 有一面积为 S 的绕中心轴以 ω 角速度转动的 N 匝线圈, 则

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_m \sin \omega t \quad \mathcal{E}_m = NBS\omega$$

$$i = i_m \sin \omega t \quad i_m = \frac{\mathcal{E}_m}{R}$$

二、动生电动势

在均匀强磁场 B 中, 长为 l 的导线以速度 v 运动, 则 $\mathcal{E}_i = \int_l \vec{v} \times \vec{B} \cdot d\vec{l}$

若 \vec{v} 与 \vec{B} 垂直, 且 $\vec{v} \times \vec{B}$ 与 $d\vec{l}$ 方向相同, 则 $\mathcal{E}_i = Blv$

在均匀磁场中, 任意闭合导体回路因平动而产生的动生电动势为零

任意曲线型导线上的动生电动势等于首尾相连直导线上的电动势

三、感生电动势

随时间变化的磁场在空间产生感生电场 E_k , 感生电场对电荷有力的作用, 从而形成感生电动势

感生电场 E_k : 不是保守场, 其电场线是闭合的, 是一种无源有旋场

$$\text{感生电动势: } \mathcal{E}_i = \oint_l \vec{E}_k \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = -\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

四. 自感

对于一个闭合回路, 设其中的电流为 I , 则穿过回路本身所围面积的磁通量与 I 成正比

$$\Psi = LI - A$$

比例系数 L 称为自感, 只与回路的形状、大小、周围介质的磁导率有关

自感有维持原电路状态的能力, L 的大小表征回路电感的惯性的大小

$$\text{自感电动势 } \mathcal{E}_L = -L \frac{dI}{dt}$$

应用: 求自感 通电流 $I \rightarrow$ 算磁场 B $\left\{ \begin{array}{l} \text{毕奥-萨伐尔} \\ \text{安培环路} \end{array} \right. \rightarrow$ 算磁通 $\Psi \rightarrow L = \frac{\Psi}{I} = \frac{N\Psi}{I}$

$IB\psi L$

五. 互感

设有两个邻近的线圈 1 和 2, 则

线圈 1 中电流 I_1 所激发磁场穿过线圈 2 的磁通量 Ψ_{21} , 应与 I_1 成正比 $\Psi_{21} = M I_1$

同理

$$\Psi_{12} = M I_2$$

$$\text{互感电动势 } \mathcal{E}_{21} = -M \frac{dI_1}{dt} \quad \mathcal{E}_{12} = -M \frac{dI_2}{dt}$$

互感是表明两个电路耦合程度的物理量

应用: 求互感 $IB\psi M \quad I_1 \rightarrow B \rightarrow \Psi_{21} \rightarrow M = \frac{N_2 \Psi_{21}}{I_1}$

$$I_2 \rightarrow B \rightarrow \Psi_{12} \rightarrow M = \frac{N_1 \Psi_{12}}{I_2}$$

六. 磁场的能量 $W_m = \frac{1}{2} LI^2$

$$\text{磁场的能量密度 } w_m = \frac{1}{2} MH^2 = \frac{1}{2} BH$$

计算磁场能量的方式

$$\left\{ \begin{array}{l} W_m = \frac{1}{2} LI^2 \\ W_m = \iiint_V w_m dV = \iiint_V \frac{1}{2} MH^2 dV \end{array} \right.$$

第九章 振动

一、简谐振动

1. 振动: 描述物质运动状态的物理量, 在某一定值附近作周期性的变化

eg. 机械振动, 电磁振荡

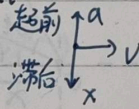
2. 简谐振动

振动可以用时间的单一谐和函数, 即一个余弦/正弦函数来描述

$$\star \text{等价定义: } a = -\omega^2 x \Leftrightarrow \frac{d^2 x}{dt^2} = -\omega^2 x \Leftrightarrow x = A \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\text{求导后得到: } v = \frac{dx}{dt} = -\omega A \sin(\omega t + \varphi) \quad a = \frac{dv}{dt} = -\omega^2 A \cos(\omega t + \varphi)$$

$$= \omega A \cos(\frac{\pi}{2} + \omega t + \varphi)$$



3. 简谐振动的物理量

① 振幅 A A 一定是正的

简谐振动物体离开平衡位置最大位移的绝对值 A , 反映振动的强弱

② 周期 T 频率 ν

物体作一次完全振动所经历的时间称周期 T

单位时间内物体所作的完全振动的次数称频率 ν

$$T = \frac{1}{\nu} = \frac{2\pi}{\omega}$$

周期和频率只和振动系统本身的物理性质有关, 称振动的固有周期和固有频率

eg. (1) 弹簧振子: $F = -kx \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

单摆: $\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\theta \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$ 注: l 为摆长

复摆: $\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{mgl}{J}\theta \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{mgl}{J}}$ 注: l 为复摆质心与轴的距离
 J 为复摆对轴的转动惯量

③ 相位: $(\omega t + \varphi)$

$(\omega t + \varphi)$ 称为振动的相位, 是决定简谐振动物体运动状态的物理量

φ 称初相,

注: 振动方程必须写成标准形式, 才能称相位

4. 常量 A , φ 的确定

A , φ 由初始条件决定

$$\text{若给定 } \begin{cases} x|_{t=0} = x_0 \\ v|_{t=0} = v_0 \end{cases} \text{ 由 } \begin{cases} x_0 = A \cos \varphi \\ v_0 = -\omega A \sin \varphi \end{cases} \text{ 得 } \begin{cases} A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}} \\ \tan \varphi = \frac{-v_0}{\omega x_0} \end{cases}$$

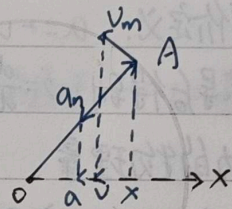
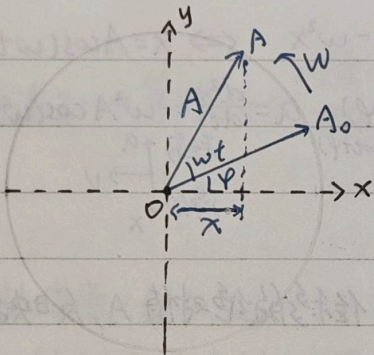
二、旋转矢量

作法: 自 Ox 轴的原点 O 作 \vec{OA} , 使 $|\vec{OA}| = A$, 使 \vec{OA} 在 Oxy 面内绕点 O 作逆时针方向, ω 大小的匀角速转动, 则称 \vec{OA} 为旋转矢量

用途: ① \vec{OA} 的端点 A 在 Ox 轴上的投影点 P 的运动即为简谐振动, 方程为 $x = A \cos(\omega t + \varphi)$

② 端点 A 的速度 $v_m = \omega A$ 在 Ox 轴上的投影即为简谐振动的速度, $v = -\omega A \sin(\omega t + \varphi)$

③ 端点 A 的向心加速度 $a_n = \omega^2 A$ 在 Ox 轴上的投影即为简谐振动的加速度...



注: 1. 旋转矢量一定是逆时针 ω 大小转动

2. 做简谐振动题时多画旋转矢量

三、简谐振动的能量

定性: 在简谐振动过程中, 只有系统的保守内力 (如弹性力) 做功, 总能量守恒,

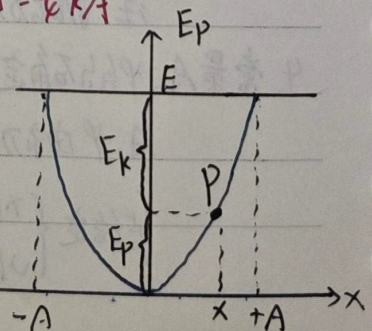
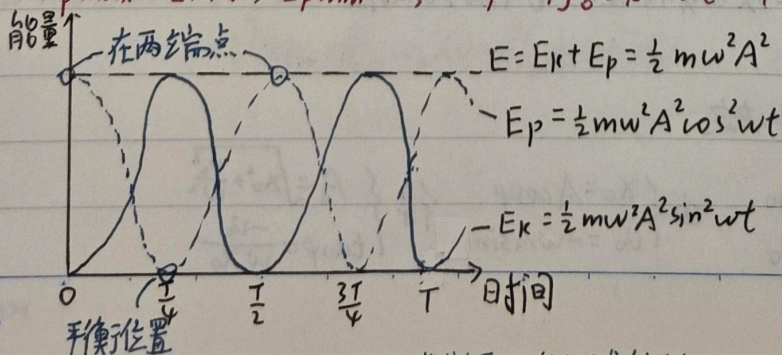
只有系统的动能 E_k 和势能 E_p 相互转化 E_k, E_p 的周期为 $\frac{T}{2}$

定量: $E = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 = \frac{1}{2} k A^2$

通用表达式 弹簧振子表达式

$$E_{k \max} = \frac{1}{2} k A^2, E_{k \min} = 0, \bar{E}_k = \frac{1}{T} \int_0^T E_k(t) dt = \frac{1}{4} m \omega^2 A^2 = \frac{1}{4} k A^2$$

$$E_{p \max} = \frac{1}{2} k A^2, E_{p \min} = 0, \bar{E}_p = \frac{1}{T} \int_0^T E_p(t) dt = \frac{1}{4} m \omega^2 A^2 = \frac{1}{4} k A^2$$



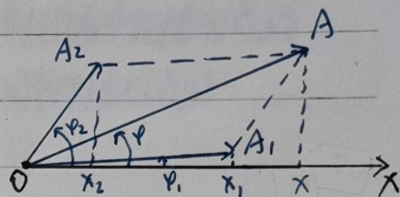
推论: 若某振动的机械能守恒, 则必为简谐振动

四. 简谐振动的合成

对同一个质点而言, 多个简谐振动可合成

1. 两个同方向同频率简谐振动的合成

$$\text{分振动} \begin{cases} x_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) \\ x_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2) \end{cases} \Rightarrow \text{合振动} x = x_1 + x_2$$



有 $x = A \cos(\omega t + \varphi)$, 即

合运动仍是简谐振动, 其角频率与分振动的相同

且有 $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}$, $|A_1 - A_2| \leq A \leq A_1 + A_2$

$$\tan \varphi = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2} \quad (\text{即 } \frac{A_{1y} + A_{2y}}{A_{1x} + A_{2x}})$$

特别地, 若相位差 $\Delta \varphi = \varphi_2 - \varphi_1$, 满足:

(1) $\Delta \varphi = 2k\pi$, 则 $A = A_1 + A_2$, $\varphi = \varphi_1 = \varphi_2$

(2) $\Delta \varphi = (2k+1)\pi$, 则 $A = |A_1 - A_2|$, $\varphi = \begin{cases} \varphi_1 & A_1 > A_2 \\ \varphi_2 & A_1 < A_2 \end{cases}$

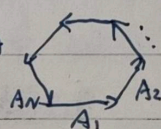
2. 多个同方向同频率简谐振动的合成

合振动仍是简谐振动

特别地, 当 N 个简谐振动振幅均为 A_0 , 依次间的相位差恒为 $\Delta \varphi$

(1) $\Delta \varphi = 2k\pi$, 则 $A = NA_0$

(2) $N\Delta \varphi = 2k\pi$ (但 k 不为 N 的整数倍) 则 $A = 0$



3. 两个同方向不同频率简谐振动的合成——拍

拍: 频率较大而频率之差较小 $|v_2 - v_1| \ll (v_2 + v_1)$ 的两个同方向简谐振动合成时,

其合振动的振幅时而加强时而减弱的现象

$$\text{分振动} \begin{cases} x_1 = A \cos \omega_1 t = A \cos 2\pi \nu_1 t \\ x_2 = A \cos \omega_2 t = A \cos 2\pi \nu_2 t \end{cases} \Rightarrow \text{合振动} x = (2A \cos 2\pi \frac{\nu_2 - \nu_1}{2} t) (\cos 2\pi \frac{\nu_2 + \nu_1}{2} t)$$

(合振动振幅) 合振动频率
低频振动 高频振动

从而: 振动周期 $T = \frac{1}{\nu_2 + \nu_1}$ 振幅变化的周期, 即拍动周期 $T_A = \frac{1}{\nu_2 - \nu_1}$

合振幅变化的频率, 即拍频 $\nu = \nu_2 - \nu_1$

拍频为两个分振动的频率之差

注: 若两分振动的振幅不同, 则仍能产生拍现象, 但此时合振幅的最小值不为 0

第十章 波动

一、概念

1. 波动: 振动在空间中的传播过程

- 机械波: 机械振动在弹性介质中传播形成的
- 电磁波: 交变电磁场在空间中传播形成的

2. 机械波的形成条件

- 波源: 作机械振动的物体
- 弹性介质: 能传播机械振动的介质

3. 横波: 质元振动方向与波的传播方向垂直 手甩绳子 只能在固体中传播

纵波: 平行 手推拉弹簧 能在固、液、气体中传播

4. 波动的特点

① 弹性介质中各质元仅在自身的平衡位置附近振动, 并没有随振动的传播而移走

② "上游"质元依次带动"下游"质元振动

③ 某时刻某质元的振动状态将在较晚时刻于"下游"某处出现

eg. 地震波

- 纵波: 速度较快, 上下振动, 破坏性较弱
- 横波: 速度较慢, 左右振动, 破坏性较强

5. 波的物理量

波长 λ 周期 T 频率 ν 波速 u 满足 $\nu = \frac{1}{T}$, $u = \frac{\lambda}{T} = \lambda \nu$

且有: ① 机械波的周期/频率等于波源振动的周期/频率, 与介质无关

② 机械波的波速只取决于介质的性质, 而与振源无关 固体横波 $u = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$ 纵波 $u = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$

③ 机械波的波长由波源和介质共同决定 $\lambda = uT$ G : 切变模量 E : 弹性模量

超前 滞后
波线

二、平面简谐波的波函数

设在原点 O 处有一质元作简谐振动 $y_0 = A \cos(\omega t + \varphi)$

则 Ox 轴正向上距原点 x 的点 P 在 t 时刻的位移, 即沿 Ox 轴正向传播的平面简谐波的波函数

$$y = A \cos[\omega(t - \frac{x}{u}) + \varphi] \quad \text{or} \quad y = A \cos[2\pi(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}) + \varphi] \quad \text{or} \quad y = A \cos[\omega t + \varphi - \frac{2\pi x}{\lambda}]$$

若波沿 Ox 轴负向传播, 则

$$y = A \cos[\omega(t + \frac{x}{u}) + \varphi] \quad \text{or} \quad y = A \cos[2\pi(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda}) + \varphi]$$

同一时刻, 波程差与相位差的关系(数值上) $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta x$

注: 空间中的波源发出的波都为"-"号

三、波的能量

1. 对波传播过程中的一体积元:

单位体积介质中的波动能量在一个周期内的平均值, 即平均能量密度 $\bar{w} = \frac{1}{2} \rho \omega^2 A^2$

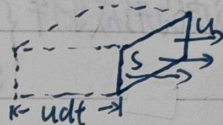
特点: 体积元的动能和势能同相位, 平衡位置处, 动能和势能均达到最大值; 最大位移处都为 0

2. 能流: 单位时间内垂直通过某一面积的能量 $P = wus$

(对时间取平均值, 得平均能流 $\bar{P} = \bar{w}us$ 单位 W)

(若通过的是单位面积, 得能流密度 $I = \frac{\bar{P}}{S} = \bar{w}u = \frac{1}{2} \rho \omega^2 A^2 u$)

又称波的强度, 单位 W/m^2 , u 为波速

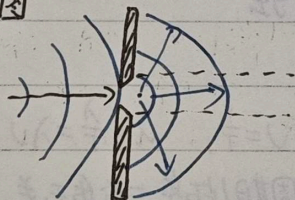


四、惠更斯原理

1. 介质中波动传播到的各点都可以看作发射子波的波源, (对于各向同性的介质, 子波为球面波), 而在其后的任意时刻, 这些子波的包络就是新的波前 —— 惠更斯原理

2. 所有的波动必有干涉、衍射现象

3. 波的衍射: 如图



五、波的干涉

1. 波的叠加原理:

波传播的独立性: 几列波相遇之后, 它们仍保持各自的原有的性质 (频率、波长、振幅、振动方向等) 不变, 并按原来的方向继续前进, 就好像没有遇到过其他波一样

波的叠加性: 在相遇区域内的任一点处的位移等于各列波单独存在时在该点所引起的振动位移的矢量和

2. 波的干涉

① 干涉条件: 频率相同, 振动方向平行, 相位相同或相位差恒定

为了保证波源不移动

② 波的干涉: 满足干涉条件的两列波相遇时, 使得某些地方振动始终加强, 而另一些地方振动始终减弱的现象

③ 产生了干涉现象的两列波称相干波, 其波源称为相干波源

定量分析: 宏观上是波的干涉, 微观上是简谐振动的合成

相干波源 $S_1: y_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) \rightarrow P: y_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1 - \frac{2\pi r_1}{\lambda})$

$S_2: y_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2) \rightarrow P: y_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2 - \frac{2\pi r_2}{\lambda})$

点 P 同时参与两个同方向、同频率简谐振动的合成, 其中 $A = \dots \tan \varphi = \dots$

$$\Delta \varphi = (\varphi_2 - \frac{2\pi r_2}{\lambda}) - (\varphi_1 - \frac{2\pi r_1}{\lambda}) = \varphi_2 - \varphi_1 - 2\pi \frac{r_2 - r_1}{\lambda}$$

$$\Delta \varphi = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \text{ 时, 合振幅最大 } A = A_1 + A_2$$

$$\Delta \varphi = (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z} \text{ 时, 合振幅最小 } A = |A_1 - A_2|$$

特别地, 在 $\varphi_2 = \varphi_1$ 时 (一般为两列波由同一个波源产生), 令波程差 $\delta = r_2 - r_1$,

有 $\Delta \varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \delta, \delta = k\lambda, k \in \mathbb{Z}$ 时, 合振幅最大

$\delta = \frac{2k+1}{2}\lambda, k \in \mathbb{Z}$ 时, 合振幅最小

六、驻波

1. 驻波: 是由振幅、频率、传播速度都相同的两列相干波在同一直线上沿相反方向传播时叠加形成的一种特殊形式的干涉现象

2. 驻波方程: 不妨设两列波在原点的初相皆为零

波动方程: $y_1 = A \cos 2\pi(\nu t - \frac{x}{\lambda})$ 由 $\cos(A+B) + \cos(A-B) = 2\cos A \cos B$

$y_2 = A \cos 2\pi(\nu t + \frac{x}{\lambda})$

$\Rightarrow y = y_1 + y_2 = (2A \cos 2\pi \frac{x}{\lambda}) \cos 2\pi \nu t$

即: 弦线上各点作振幅为 $|2A \cos 2\pi \frac{x}{\lambda}|$, 频率为 ν 的简谐振动

① 波节: 振幅为零的点, $|2A \cos 2\pi \frac{x}{\lambda}| = 0 \Rightarrow x = (2k+1) \frac{\lambda}{4}, k \in \mathbb{Z}$, 相邻波节间距 $\frac{\lambda}{2}$

② 波腹: 振幅最大的点, $|\cos 2\pi \frac{x}{\lambda}| = 1$ ^{注意绝对值} $\Rightarrow x = k \frac{\lambda}{2}, k \in \mathbb{Z}$, 相邻波腹间距 $\frac{\lambda}{2}$

相邻的波节与波腹间距 $\frac{\lambda}{4}$

①各点相位: 两波节间各点相位相同; 一个波节两边的相位相反

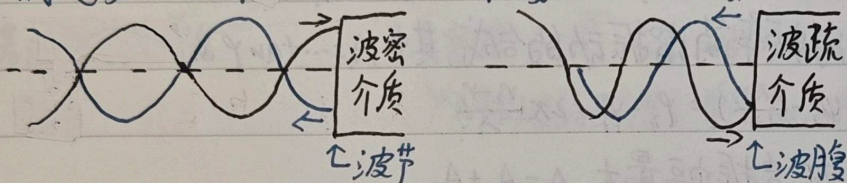
3. 相位跃变:

波阻: 介质的密度 ρ 和机械波的波速 u 的乘积 ρu

波阻较大的介质称为波密介质, 波阻较小的介质称为波疏介质

波从波疏介质垂直入射到波密介质, 反射波与入射波相比有相位跃变 π , 又称半波损失

反射处要么是波节 (波疏 \rightarrow 波密), 要么是波腹 (波密 \rightarrow 波疏, 不产生相位跃变)



4. 驻波的能量

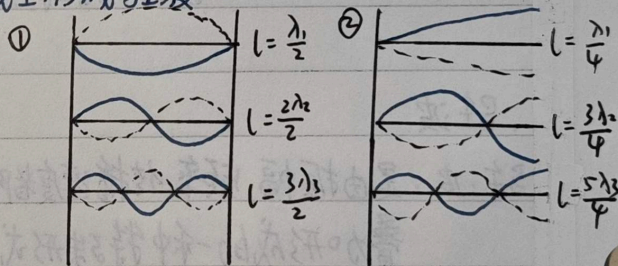
波腹 \leftrightarrow 波节, 驻波的能量不会作定向的传播

5. 弦线振动的简正模式

即论证只有特定的弦线长度 l , 才可能在弦线上形成驻波

① 两端固定: $l = n \frac{\lambda}{2}, n = 1, 2, \dots$

② 一端固定: $l = \frac{2n-1}{4} \lambda, n = 1, 2, \dots$



两端固定弦振动

7. 多普勒效应

约定介质是静止不动的, 作为基本参考系

$$v' = \frac{u \pm v_o}{u \mp v_s} v$$

其中 ① v 为波源频率 u 为介质中的波速

v_o 为观察者相对介质的速度 v_s 为波源相对介质的速度

v' 为观察者所接收到的频率

② 定性地说: 观察者和波源相互接近的速度, 会使接收到的频率变高

第十一章 几何光学

在几何光学中,把组成物体的物点看成几何点,把它所发出的光束看成是无数几何光线的集合,而光线(即波线)的方向代表了光能的传播方向

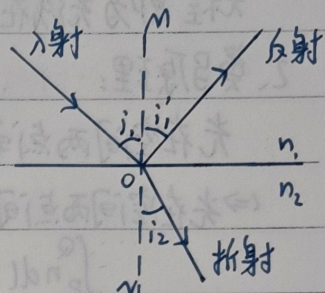
一、几何光学基本定律

1. 光的直线传播定律

光在均匀介质中沿直线传播

2. 反射定律

反射光线、入射光线和法线共面且居于法线两侧,反射角等于入射角 $i_1 = i_1'$



3. 折射定律

折射光线、入射光线和法线共面且居于法线两侧,且 $\frac{\sin i_1}{\sin i_2} = n_{12}$ or $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$

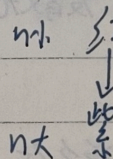
其中 n_{12} 为介质2对于介质1的相对折射率 $n_{12} = \frac{n_2}{n_1}$

任一介质对于真空的折射率称绝对折射率 $n = \frac{c}{v}$

两种介质中,折射率较大的称光密介质,较小的称光疏介质

介质的折射率不仅与介质种类有关,还与光波波长有关

一般只考虑色散现象



4. 光的独立传播定律 (和波动一样)

5. 光路可逆性

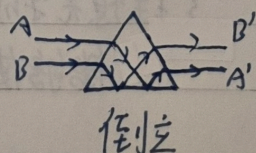
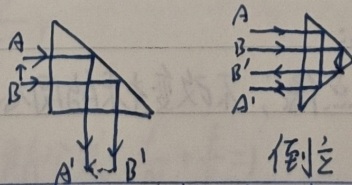
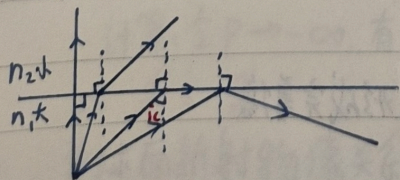
若反射光或折射光的方向反转,光线将按原路返回

二、全反射

光密介质 \rightarrow 光疏介质,且入射角大于临界角时,光线无折射而全部返回原介质中

临界角: 令 $i_2 = 90^\circ$ 得 $i_c = \arcsin \frac{n_2}{n_1}$

应用: 光导纤维传输, 三棱镜



三、费马原理

1. 光在折射率为 n 的介质中行进距离 l , 定义光程为 nl

"光程"即为光线在相同时间内在真空中传播的距离

2. 费马原理:

光在空间两点间的传播, 将沿着这样一条路径: 沿这条路径传播所需的时间为极值

⇒ 光在空间两点间的传播, 将沿着光程为极值的路径传播, 即

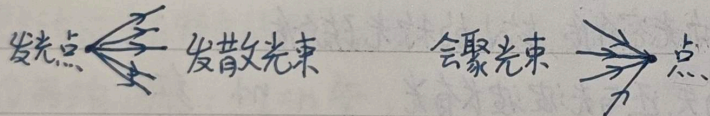
$$\int_{P_1}^{P_2} n dl = \text{极值 (极大值, 极小值或恒定值)}$$

由费马原理可以导出反射、折射定律

四、几何光学成像基本概念

1. 同心光束: 光束或其延长线交于一点

在各向同性均匀介质中, 同心光束与球面波相类比, 若发光点在无限远处, 则与平面波相类比



2. 物和像

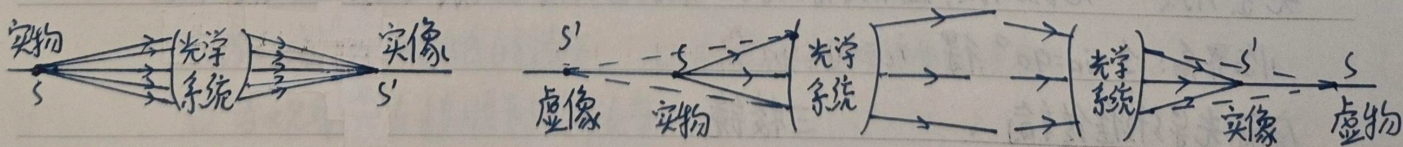
对于某光学系统:

① 若入射的同心光束是发散的, 则相应的发散中心称为实物

会聚 会聚中心 虚物

② 若出射的同心光束是会聚的, 则相应的会聚中心称为实像

发散 发散中心 虚像



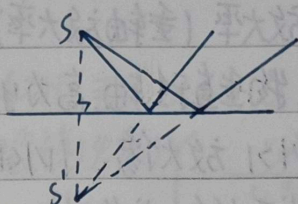
3. 理想光学成像系统:

能够使点物成点像, 不改变光束的同心性质, 能形成完善像

4. 光在平面上反射成像

成完善的虚像

平面镜对反射来说是理想光学系统



5. 计算、作图时对线段、角度的符号的规定

★① 线段: 定义入射光线的方向为正向, 如入射光线自左向右, 则当物点、像点、焦点和曲率中心若在顶点的右侧时, 其物距、像距、焦距和曲率半径均为正, 否则为负

在垂直方向上(如线像的长度), 以至光轴上方为正, 下方为负

② 角度: 由主光轴或界面法线为起始线, 转一锐角至光线,

顺时针旋转为正, 逆时针旋转为负

五、光在球面上折射、反射成像

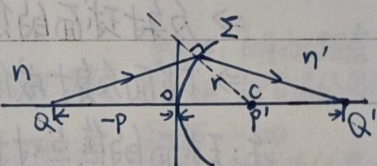
1. 近轴光线, 单球面折射、反射成像公式 $\frac{n'}{p'} - \frac{n}{p} = \frac{n' - n}{r}$

其中 n 为入射介质的折射率, n' 为球形介质折射率.

p 为物距, p' 为像距, r 为折射球面的曲率半径

$r > 0$ 表示凸球面, $r < 0$ 表示凹球面, 一般地, $n' > n$

定义光焦度 $\Phi = \frac{n' - n}{r}$



2. 焦点

① 物方焦点 F : 当物点 Q 处于这一位置时, 发射的同心光束经球面折射/反射后平行于主轴, 称 OF 为物方焦距 f

计算: 令 $p' \rightarrow \infty$ 有 $f = -\frac{n}{n' - n} r$

② 像方焦点 F' : 平行于主轴的入射光线, 经球面折射/反射后的出射光线都将会聚于该点, 称 OF' 为像方焦距 f'

计算: 令 $p \rightarrow -\infty$, 有 $f' = \frac{n'}{n' - n} r$

$\Rightarrow \frac{f'}{f} = -\frac{n'}{n}$

单球面折射物像关系式 高斯公式 $\frac{f'}{p'} + \frac{f}{p} = 1$

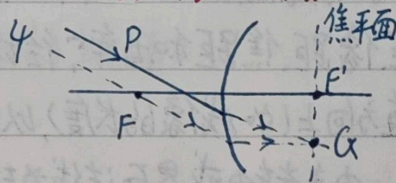
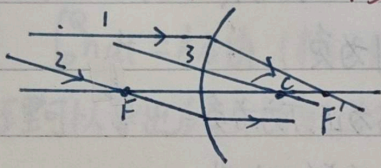
3. 横向放大率 (垂轴放大率)

设物垂直于光轴, 高为 y , 像高为 y' , 则 $V = \frac{y'}{y} = \frac{n'p'}{np}$

$|V| > 1$ 放大像 $|V| < 1$ 缩小像 $V > 0$ 正立像 $V < 0$ 倒立像

4. 单球面折射成像作图方法

- 1) 平行于光轴入射 \rightarrow 像方焦点 F'
- 2) 过物方焦点 F 入射 \rightarrow 平行于光轴
- 3) 过球面曲率中心 $C \rightarrow$ 不变
- 4) 平行的入射光线 \rightarrow 会聚于焦平面的一点



5. 光在球面上的反射成像

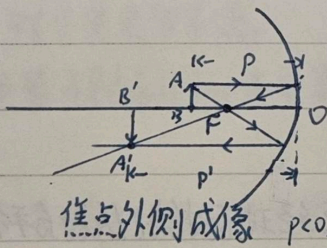
可将球面反射视为球面折射; 满足条件 $n' = -n$ 的特例

\Rightarrow 反射球面的焦距 $f' = f = \frac{1}{2}r$ 即点 F 与 F' 重合

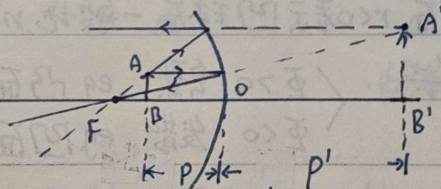
\Rightarrow 球面反射成像高斯公式 $\frac{1}{p'} + \frac{1}{p} = \frac{1}{f}$

注: 球面的焦点对于折射和反射来说是不一样的

6. 单球面反射作图方法 同上 (1) (2)



焦点外侧成像 $p < 0, f < 0, p' < 0$



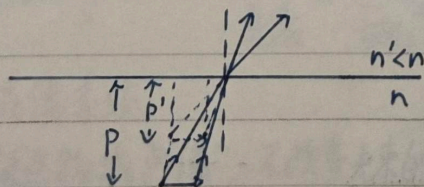
焦点内侧成像 $p < 0, f < 0, p' > 0$

注意: 计算 V 时 $n' = -n$

7. 光在平面上折射成像 $r \rightarrow \infty$

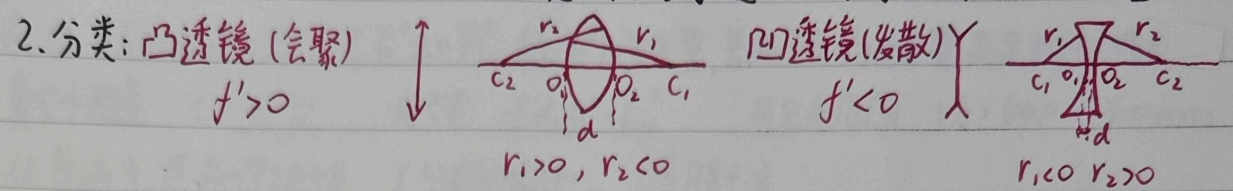
$$p' = \frac{n'}{n}p$$

一般地, $n > n'$ 故 $p' < p$, 在水面上看水中的鱼, 鱼的像的深度 p' 浅于实际深度 p



六. 薄透镜成像

1. 薄透镜: 透镜厚度 d 与球面曲率半径 r 相比可以忽略不计, 可认为 $d \rightarrow 0$, O_1, O_2 重合于 O



3. 薄透镜物像公式

① 求法: 逐次成像法, 左边球面的像即为右边球面的物

② 公式 $\frac{n'}{p'} - \frac{n}{p} = \Phi$ $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 = \frac{n_2 - n_1}{r_1} + \frac{n_1 - n_2}{r_2}$ 其中 $\frac{n}{p} \rightarrow \frac{n'}{p'}$

$\lim_{p \rightarrow -\infty} \Rightarrow$ 得像方焦距 $f' = \frac{n'}{\Phi}$

$\lim_{p' \rightarrow \infty} \Rightarrow$ 得物方焦距 $f = -\frac{n}{\Phi}$

4. 高斯公式: 形式同单球面折射 $\frac{f'}{p'} + \frac{f}{p} = 1$

5. 光焦度: $\Phi = \frac{n'}{f'} = -\frac{n}{f}$ 单位: 屈光度 D , $1D = 1m^{-1}$

当 $\Phi > 0$ 时 $f' > 0$, 有实焦点, 称会聚透镜 远视眼镜 物距: 明视距离
像距: 能看清的最近点

当 $\Phi < 0$ 时 $f' < 0$, 有虚焦点, 称发散透镜 近视眼镜 物距: $-\infty$
像距: 能看清的最远点

注: 眼镜的度数为 $100|\Phi|$

6. 薄透镜横向放大率 n' 为像方折射率

$V = \frac{y'}{y} = \frac{np'}{np}$ \Rightarrow 多个共轴薄透镜系统: $V = V_1 V_2 \dots V_n$

7. 特殊情况: 薄透镜置于空气中 $n = n' = 1$

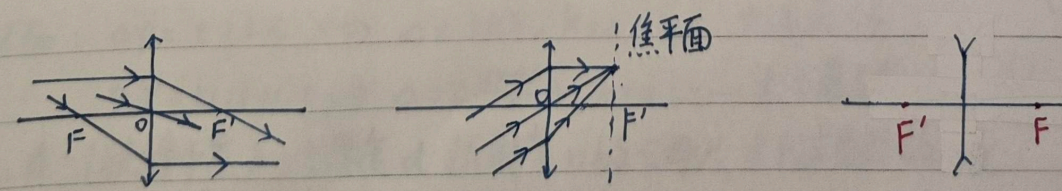
$\Rightarrow \frac{1}{p'} - \frac{1}{p} = \frac{n_2 - n_1}{r_1} + \frac{1 - n_2}{r_2} = \Phi$, $f' = -f = \frac{1}{(n_2 - 1)(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2})}$, $\frac{1}{p'} - \frac{1}{p} = \frac{1}{f'}$, $V = \frac{p'}{p}$

近远视问题
 \checkmark p', p 都为负, $n = n'$

8. 薄透镜成像作图法

法同单球面折射成像

注: 同一物点的任意两条特殊光线通过透镜折射后的交点便是对应的像点



第十一章 波动光学

一、相干光

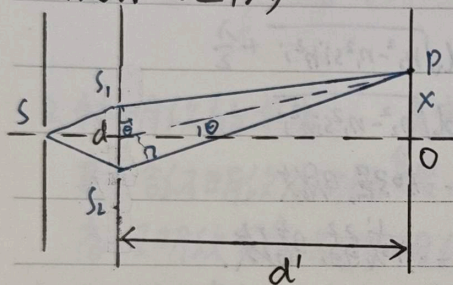
1. 光波: 振动的物理量是 \vec{E} 和 \vec{H} , 称 \vec{E} 为光矢量, 若两束光的光矢量满足相干条件, 则称相干光

2. 真空中光速 $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$ 光强 $I \propto A^2 = E^2$ 可见光范围 $\lambda: 400 \sim 760 \text{nm}$

3. 从普通光源获得相干光

- 分振幅法 薄膜干涉
- 分波阵面法 杨氏双缝干涉 劳埃德镜

二、杨氏双缝干涉



波程差 $\Delta r = d \sin \theta = d \frac{x}{d'}$

$\Delta r = d \frac{x}{d'} = \begin{cases} t k \lambda & \text{加强} \\ t(2k+1) \frac{\lambda}{2} & \text{减弱} \end{cases} \quad k=0, 1, 2, \dots$

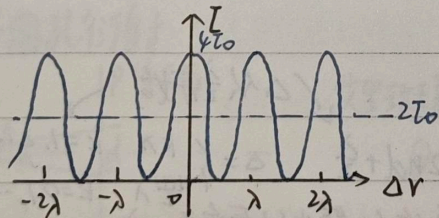
$\Rightarrow x = \begin{cases} t k \frac{d'}{\lambda} & \text{明纹} \\ t \frac{(2k+1)}{2} \frac{d'}{\lambda} & \text{暗纹} \end{cases} \quad k=0, 1, 2, \dots$

条纹间距 $\Delta x = \frac{d'}{d} \lambda \Rightarrow$ 条纹等间距

\Rightarrow 白光入射, 内紫外红

光强分布: 设狭缝 S_1, S_2 发出的光波单独达到屏上任意一点处的振幅为 A_0 , 光强为 I_0 , 则

相干叠加



非相干叠加: 无稳定相位差 \rightarrow 简单代数相加

3. 光程与光程差

光在介质中的波长 $\lambda_n = \frac{\lambda}{n}$ 光在介质中的速度 $v = \frac{c}{n}$ 定义光程 $L = nr$

从同一点光源发出的两相干光, 其光程差 Δ 与相位差 $\Delta \varphi$ 的关系 $\frac{\Delta \varphi}{2\pi} = \frac{\Delta}{\lambda}$

从而: $\Delta \varphi = t 2k\pi \Leftrightarrow \Delta = t k \lambda, k=0, 1, 2, \dots$ 干涉最强

$\Delta \varphi = t(2k+1)\pi \Leftrightarrow \Delta = t \frac{(2k+1)}{2} \lambda, k=0, 1, 2, \dots$ 干涉最弱

\uparrow 光在真空中波长

题型: 在一个狭缝中盖上一个厚度 d 折射率 n 的云母片, 求干涉条纹的变化

\Rightarrow 中央明纹会平移, 但条纹间距不会变

覆盖云母片前后, 光程差改变量为 $\Delta S = (n-1)e \triangleq k\lambda \xrightarrow{\text{非}} k$

干涉条纹整体移动了 k 条.

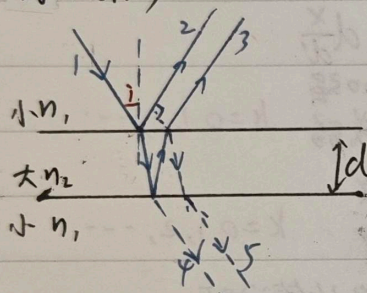
4. 劳埃德镜

定义：折射率较大的称光密介质，折射率较小的称光疏介质

- ① 光从光疏介质 → 光密介质的反射光有半波损失
- ② 光密 → 光疏 没有
- ③ 任何情况下，透射光（即折射）无半波损失

半波损失：反射光相比入射光，相位突变 π or 附加光程差 $\frac{\lambda}{2}$ ，注意是直接加在光程上

三. 薄膜干涉



反射光 2, 3 的光程差 $\Delta = 2d\sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 i} + \frac{\lambda}{2}$

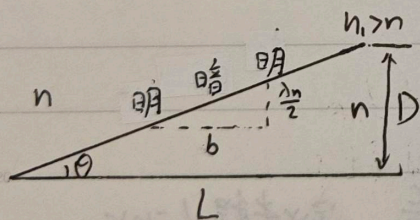
透射光 4, 5 的光程差 $\Delta = 2d\sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 i}$

$$\Delta r = \begin{cases} k\lambda & k=1, 2, 3, \dots \text{加强, 明纹} \\ \frac{2k+1}{2}\lambda & k=0, 1, 2, \dots \text{减弱, 暗纹} \end{cases}$$

⇒ 等倾干涉

注：透射光干涉加强与减弱条件恰好与反射光的相反 ⇒ 反射和透射的干涉图样互补 ⇒ 符合能量守恒定律

四. 劈尖

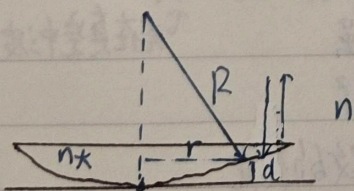


光程差 $\Delta = 2nd + \frac{\lambda}{2}$ $\Delta = \begin{cases} k\lambda & k=1, 2, \dots \text{明纹} \\ \frac{2k+1}{2}\lambda & k=0, 1, \dots \text{暗纹} \end{cases}$ ⇒ 等厚干涉

相邻两明条纹处劈尖的厚度差： $\frac{\lambda}{2n}$

设条纹间距 b ，有 $\theta = \frac{\lambda n}{2b} = \frac{D}{L} \Rightarrow b = \frac{\lambda}{2n\theta}$ ， $D = \frac{\lambda}{2n\theta} L$

五. 牛顿环



光程差 $\Delta = 2nd + \frac{\lambda}{2}$ 几何关系： $R^2 = r^2 + (R-d)^2$

⇒ $r^2 = 2dR \Rightarrow r = \sqrt{(k - \frac{1}{2})\frac{\lambda R}{n}}$

结合 $\Delta = \begin{cases} k\lambda \\ \frac{2k+1}{2}\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r = \sqrt{(k - \frac{1}{2})\frac{\lambda R}{n}} & k=1, 2, \dots \text{明环半径} \\ r = \sqrt{\frac{k\lambda R}{n}} & k=0, 1, 2, \dots \text{暗环半径} \end{cases}$

注：中心点：零级暗点 条纹间距不等距， $k \propto r_k^2$ 内疏外密

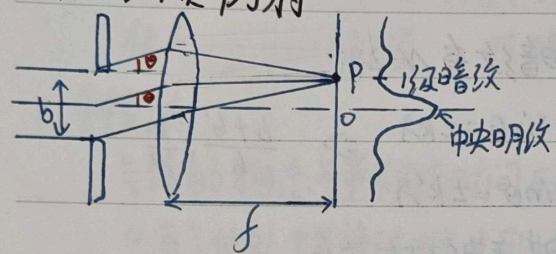
五、迈克耳孙干涉仪

设两反射镜垂直, 插入厚度 d , 折射率 n 的介质光, 光程差变化量 $\Delta S = 2(n-1)d$

若干涉条纹移动级数 Δk , 则 $2(n-1)d = \Delta k \lambda$

干涉条纹移动一条, 说明光程差改变一个波长

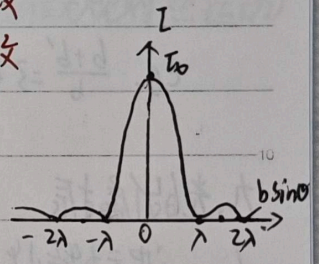
六、夫琅禾费衍射



沿 θ 方向衍射的光的最大光程差为 $b \sin \theta$

等分为 N 个半波长 $b \sin \theta = N \frac{\lambda}{2}$

$$N = \begin{cases} 2k, & k=1, 2, \dots \text{暗纹} \\ 2(\frac{k+1}{2}), & k=1, 2, \dots \text{明纹} \end{cases}$$



2. 中央明纹的宽度: 角宽度 $\Delta \theta = 2 \frac{\lambda}{b}$, 线宽度 $\Delta x = 2f \frac{\lambda}{b}$

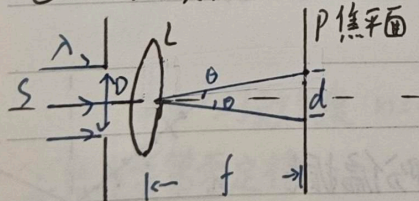
其余各级明纹之间的宽度: $\frac{\lambda}{b}$ $f \frac{\lambda}{b}$

各级明纹宽度为中央明纹宽度的一半

注: 白光入射: 中央明纹为白光, 其它各级内紫外红

3. 单缝上下移动: 干涉条纹在屏上的位置分布不变, 中央明纹的中心位于透镜中心的对应点

七、夫琅禾费圆孔衍射



艾里斑直径 d , 透镜焦距 f , 圆孔直径 D , 单色光波长 λ

$$\theta = \frac{d}{f} = 1.22 \frac{\lambda}{D}$$

光学仪器的分辨率须 最小分辨角 $\theta_0 = 1.22 \frac{\lambda}{D}$

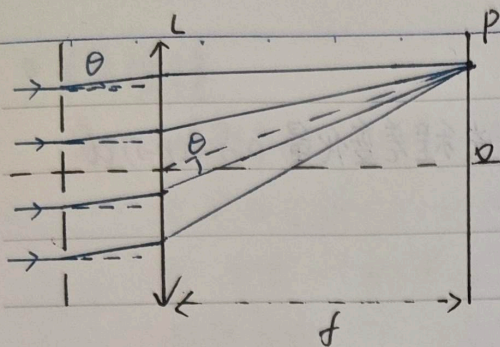
八、衍射光栅

1. 光栅: 等宽度、等距离的狭缝排列起来的光学元件

b : 透光部分的宽度 b' : 不透光部分的宽度

相邻两缝间的距离: 光栅常量 $(b+b')$

相邻两缝间的光程差: $\Delta = (b+b') \sin \theta$



光栅方程: $(b+b') \sin \theta = t k \lambda$, $k=0, 1, 2, \dots$

决定各级主明纹的位置

条纹最高级数: let $\sin \theta = 1$: $k_{max} = [\frac{b+b'}{\lambda}]$

光栅中狭缝系数 N 越多, 明纹就越亮越窄

设有 N 条狭缝, 则在相邻两个主明纹间有 $N-1$ 个暗纹, 有 $N-2$ 个次明纹

缺级现象: 同时满足: 光栅方程

$$(b+b') \sin \theta = t k \lambda \Rightarrow \frac{b+b'}{b} = \frac{k}{k'}$$

单缝衍射第 k' 级暗纹条件 $b \sin \theta = t k' \lambda$

eg. $\frac{b+b'}{b} = 3$ 时, 缺级 $t3, t6, \dots$ $\frac{b+b'}{b} = \frac{5}{4}$ 时, 缺级 $t5, t10, \dots$

九. 光的偏振

- 波动特性 { 所有波: 干涉, 衍射
横波: 干涉, 衍射 + 偏振

偏振: 波的振动方向对于波传播方向的不对称性, 是横波所特有的性质

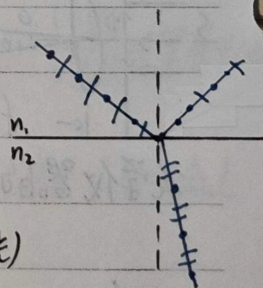
2. 马吕斯定律

强度为 I_0 的线偏振光透过偏振片后, 出射偏振光的强度 I 为 $I = I_0 \cos^2 \alpha$

其中 α 为入射光偏振方向与偏振片透振方向之间的夹角

3. 反射光和折射光的偏振

当自然光入射于两种介质的界面时, 反射光和折射光都是部分偏振光



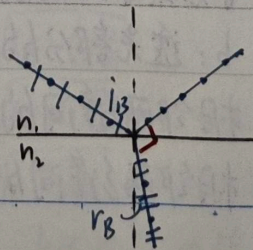
4. 布儒斯特定律:

当入射角 i 满足下式时, 反射光是线偏振光 (折射光仍是部分偏振光)

$$\tan i_B = \frac{n_2}{n_1}$$

此时, 反射光与折射光相互垂直, 即 $i_B + r_B = 90^\circ$

称此 i_B 为布儒斯特角或起偏角



第十二章 气体动理论

统计力学: 从宏观物体由大量微观粒子(分子、原子等)所构成, 粒子不停地作热运动的角度出发, 运用概率论和统计方法研究大量微观粒子的热运动规律

一、平衡态

1. 气体的物态参量 —— 研究整个气体的宏观状态

体积 V —— 几何量 压强 P —— 力学量 温度 T —— 热学量

2. 平衡态

气体的物态参量不随时间而变化的状态。(但从微观上, 分子仍作无规则热运动)

只有气体处于平衡态时, 才可以用 P - V 图上的一个点来表示其状态。

3. 理想气体物态方程 注意国际单位制 — $\text{kg}, \text{m}, \text{s}, \text{mol}$

理想气体: 遵守三条实验定律和玻尔兹曼定律的气体

温度不太低、压强不太大的一般气体可近似看作理想气体

平衡态时理想气体的物态方程 $pV = NkT$

其中 k 为玻尔兹曼常量, 又 N_A 阿伏伽德罗常量, 有摩尔气体常量 $R = N_A k$

$$pV = \nu RT \quad pV = \frac{m'}{M} RT$$

其中物质的量 $\nu = \frac{N}{N_A} = \frac{mN}{mN_A} = \frac{m'}{M}$ m 为单个分子的质量 kg , m' 为气体总质量 kg , M 为摩尔质量 kg/mol
 分子 $M = 1 \times 10^{-3} \text{kg/mol}$

$$p = nkT$$

其中分子数密度 $n = \frac{N}{V}$ 单位 m^{-3}

4. 热力学第零定律

若物体 A 和 B 分别与处于确定状态的物体 C 处于热平衡状态, 则 A 与 B 之间也热平衡。

二、理想气体压强公式

$$p = \frac{1}{3} nm \bar{v}^2$$

其中 $n = \frac{N}{V}$ 为分子数密度, m 为单个分子的质量, \bar{v}^2 为分子速度平方的平均

+ 分子平均平动动能 $\bar{\epsilon}_k = \frac{1}{2} m \bar{v}^2$ $p = \frac{2}{3} n \bar{\epsilon}_k$

+ 气体的密度 $\rho = nm$ $p = \frac{1}{3} \rho \bar{v}^2$

ρ 是单位体积内气体的质量

常用公式: $\nu = \frac{N}{N_A} = \frac{m'}{M}$

三. 理想气体分子的平均平动动能与温度的关系

$$p = nkT + p = \frac{2}{3} n \bar{\epsilon}_k \Rightarrow \bar{\epsilon}_k = \frac{3}{2} kT$$

注: 一定是平均“平动”动能, 多原子分子不只有平动

说明: 温度是表征大量分子热运动激烈程度的宏观物理量, (与物体整体的运动无关)

处于平衡态的两种气体: 温度相等 \Leftrightarrow 气体分子平均平动动能相等

四. 能量均分定理

1. 自由度: 分子能量自由度的数目, 即分子能量中速度和坐标的二次方项数目

2. 能量均分定理: 平衡态的气体分子的任何一个自由度的平均能量都相等, 均为 $\frac{kT}{2}$

分子平均能量 $\bar{\epsilon} = (t+r+v) \frac{1}{2} kT = \frac{i}{2} kT$

$t \rightarrow$ 平动 $r \rightarrow$ 转动 $v \rightarrow$ 振动 自由度 $i = t+r+v$

3. 理想气体的内能

= 气体内所有分子的动能 + 分子内原子间的势能

物质的量为 ν 的理想气体的内能 $E = \nu N_A \frac{i}{2} kT = \nu \frac{i}{2} RT$

说明: 对给定的理想气体, 其内能仅是温度的单值函数 $E = f(T)$

分子类型	双原子分子		一般三原子分子 (非 CO_2)		
	单原子分子	刚性	非刚性	刚性	非刚性
分子自由度 i	3平	3平+2转	3平+2转+2振	3平+3转	3平+3转+6振
分子平均能量 $\bar{\epsilon}$	$\frac{3}{2} kT$	$\frac{5}{2} kT$	$\frac{7}{2} kT$	$3kT$	$6kT$
1mol 理想气体的内能	$\frac{3}{2} RT$	$\frac{5}{2} RT$	$\frac{7}{2} RT$	$3RT$	$6RT$

(N 个分子处于速率 $v \sim v+dv$ 区间内的概率)

五. 麦克斯韦气体分子速率分布律

速率分布函数 $f(v)$ 满足 $\frac{dv}{v} = f(v) dv$ 归一化条件 $\int_0^{\infty} f(v) dv = 1$

平衡态下, 三种统计速率:

最概然速率 $v_p = \sqrt{\frac{2kT}{m}} = \sqrt{\frac{2RT}{M}}$; 平均速率 $\bar{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}$; 方均根速率 $v_{rms} = \sqrt{v^2} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$

求法 $\frac{df(v)}{dv} \Big|_{v=v_p} = 0$ $\bar{v} = \frac{\int_0^{\infty} v f(v) dv}{\int_0^{\infty} f(v) dv}$ $v^2 = \int_0^{\infty} v^2 f(v) dv$

利用 $k \cdot N_A = R$, $m \cdot N_A = M$

Campus 数值上: $v_p < \bar{v} < v_{rms}$

六、玻耳兹曼能量分布律

在重力场中 $n = n_0 e^{-\frac{mgz}{kT}}$ $p = p_0 e^{-\frac{mgz}{kT}}$

其中 n_0, n 分别为海平面 $z=0$ 和 z 处分子数密度; p_0, p 分别为海平面 $z=0$ 和 z 处大气压强

$$\Rightarrow z = \frac{kT}{mg} \ln \frac{p_0}{p} = \frac{RT}{mg} \ln \frac{p_0}{p} \quad \text{用于计算海拔高度}$$

七、分子平均碰撞频率和平均自由程

1. 分子平均碰撞频率 \bar{z} : 单位时间内某分子与其他分子碰撞的平均次数

$$\bar{z} = \frac{\bar{v}}{\lambda}$$

分子平均自由程 λ : 某分子在连续两次与其他分子碰撞所经过的平均路程

2. 计算式: $\bar{z} = \sqrt{2} \pi d^2 \bar{v} n$ $\lambda = \frac{1}{\sqrt{2} \pi d^2 n} = \frac{kT}{\sqrt{2} \pi d^2 p}$ 其中 \bar{v} 为平均速率

$$\Rightarrow \bar{z} \propto \bar{v}, \bar{z} \propto n, \bar{z} \propto d^2, \lambda \propto \frac{1}{n}, \lambda \propto \frac{1}{d^2}, \lambda \text{ 与 } \bar{v} \text{ 无关}$$

第十三章 热力学

一、基本概念

1. 热力学中将所研究的宏观物体称为系统, 主要指理想气体; 与系统相互作用的环境称为外界
2. 当一系统的状态随时间改变时, 系统经历了一个过程, 若系统经历的每一个中间态都是平衡态, 则称系统的这一状态变化的过程为准静态过程. 可以用 p - V 图上的一条曲线来表示该准静态过程, 称为过程曲线

二、功与热量

1. 单位相同, 均为 J , 都不仅与系统始末状态有关, 还与路径(传递方式)有关, 是过程量
2. 气体对外做功等于 p - V 图上过程曲线的下面的面积 $W = \int_{V_1}^{V_2} p dV$ $\Delta W = p \Delta V$
3. 热量是系统与外界之间由于存在温度差而传递的能量 Q

三、热力学第一定律

$$Q = W + \Delta E$$

系统从外界吸收的热量, 一部分用于对外做功, 另一部分用于增加系统的内能

主语是系统, $Q > 0$ 表示系统从外界吸收热量, $W > 0$ 表示系统对外界做正功, $\Delta E > 0$ 表示系统内能增加

注: 系统内能是状态量, 内能的增量只与系统的始末状态有关, 与系统所经历的过程无关

$$E = \nu \frac{1}{2} RT \quad \Delta E = \nu \frac{1}{2} R \Delta T$$

四、热容

1. 热容: 一个系统在某一过程中, 吸收热量 dQ , 温度升高 dT , 则热容 $C = \frac{dQ}{dT}$ 单位 $J \cdot K^{-1}$
2. 比热容: 单位质量物质的热容 $c = \frac{C}{m} = \frac{dQ}{m dT}$ 单位 $J \cdot K^{-1} \cdot kg^{-1}$
3. 摩尔热容: 单位物质的量物质的热容 $C_m = M c = \frac{dQ}{\nu dT}$ 单位 $J \cdot K^{-1} \cdot mol^{-1}$ $\nu = \frac{m'}{M}$

常用公式: $M = m N_A$, $\nu = \frac{m'}{M}$

$$\begin{cases} pV = \nu RT \\ Q = W + \Delta E \end{cases}$$

五、理想气体的过程

1. 等容过程 $dW_v = pdV = 0$

气体吸收的热量全部用来增加气体的内能, 即 $dQ_v = dE$

气体摩尔定容热容 $C_{v,m} = \frac{dQ_{v,m}}{dT} = \frac{i}{2}R$

物质的量为 ν 的气体等容过程内能增量 $Q_v = \Delta E = \nu C_{v,m} \Delta T$

2. 等压过程 $p = \text{const}$

气体吸收的热量一部分增加气体内能, 一部分对外做功 $dQ_p = pdV + dE$

气体摩尔定压热容 $C_{p,m} = \frac{dQ_{p,m}}{dT} = \frac{i+2}{2}R$

物质的量为 ν 的气体等压过程吸收热量 $Q_p = \nu C_{p,m} (T_2 - T_1)$

内能增量 $\Delta E = \nu C_{v,m} (T_2 - T_1)$

对外做功 $W = \nu [C_{p,m} - C_{v,m}] (T_2 - T_1) = p(V_2 - V_1)$

两种过程的关系: $C_{p,m} - C_{v,m} = R$

定义: 摩尔热容比: $\gamma = \frac{C_{p,m}}{C_{v,m}} = \frac{i+2}{i}$

3. 等温过程 $T = \text{const}$ $\Delta E = 0$

气体吸收的热量全部用来对外做功, 即 $dQ_T = dW_T = pdV$

物质的量为 ν 的气体等温过程对外做功 $Q_T = W_T = \nu RT \ln \frac{V_2}{V_1} = \nu RT \ln \frac{P_1}{P_2}$

4. 绝热过程 $dQ = 0$

绝热过程的 p - V 函数关系 $pV^\gamma = \text{const} \Rightarrow V^{\gamma-1} T = \text{const}, p^{\gamma-1} T^{-\gamma} = \text{const}$

物质的量为 ν 的气体绝热过程对外做功 $W_a = -\Delta E = -\nu C_{v,m} (T_2 - T_1)$

推 $W_a = \frac{p_1 V_1 - p_2 V_2}{\gamma - 1} = \frac{i}{2} (p_1 V_1 - p_2 V_2)$

5. 多方过程

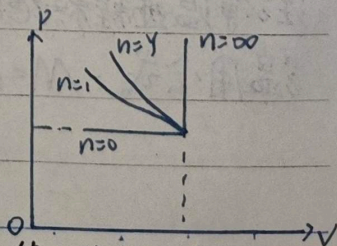
理想气体多方过程方程 $pV^n = C$, $n \in R$ 为多方指数 $\Rightarrow TV^{n-1} = C', p^{n-1} T^{-n} = C''$

多方过程中内能增量 $\Delta E = \nu C_{v,m} (T_2 - T_1)$

吸收热量 $Q = \nu C_{n,m} (T_2 - T_1)$, $C_{n,m}$ 为多方摩尔热容

$C_{n,m} = \left(\frac{n-\gamma}{n-1}\right) C_{v,m}$, $n = \frac{C_{n,m} - C_{p,m}}{C_{n,m} - C_{v,m}}$

对外做功 $W_a = \frac{p_1 V_1 - p_2 V_2}{n-1}$



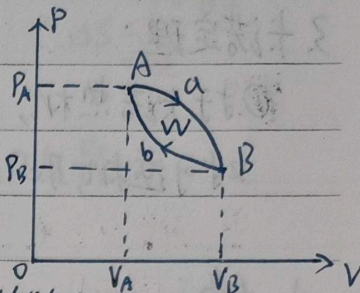
特殊情况 ① $n=0$ 时, $pV^0 = C$, 等压过程, $C_{n,m} = C_{p,m}$ ② $n=1$ 时, $pV = C$, 等温过程, $C_{n,m} = 0$

③ $n=\gamma$ 时, $pV^\gamma = C$, 绝热过程, $C_{n,m} = 0$ ④ $n=\infty$ 时, $V = C$, 等容过程 $C_{n,m} = C_{v,m}$

六、循环过程

1. 循环: 系统经过一系列状态变化后, 又回到原来状态的过程

特征: 系统经历一个循环过程后, 其内能没有改变, 系统对外所做的净功等于 p-V 图上循环所包围的面积



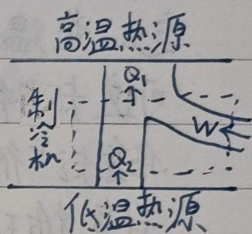
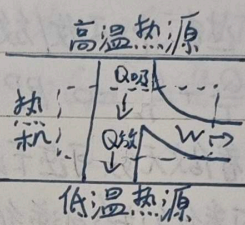
分类 ① 正循环: p-V 图上为顺时针方向, 称热机 (如蒸汽机, 内燃机)

② 逆循环: p-V 图上为逆时针方向, 称制冷机

2. 热机:

$$\text{热机效率 } \eta = \frac{W_{\text{净}}}{Q_{\text{吸}}} = \frac{Q_{\text{吸}} - |Q_{\text{放}}|}{Q_{\text{吸}}} = 1 - \frac{|Q_{\text{放}}|}{Q_{\text{吸}}}$$

η 一定小于 1



制冷机:

制冷系数 $e = \frac{Q_2}{|W|} = \frac{Q_2}{|Q_1 - Q_2|}$ 即做单位数量的功, 所能从低温热源提取的热量, e 一般大于 1

3. 卡诺循环

$$\text{卡诺热机效率 } \eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1}$$

只由高、低温热源的温度决定

是给定两个热源温度的条件下, 热机效率的理论极限值

$$\text{卡诺制冷机制冷系数 } e = \frac{T_2}{T_1 - T_2}$$

七、热力学第二定律

1. 可逆过程

定义: 在系统状态变化过程中, 逆过程若能重复正过程的每一状态, 且不引起其他变化, 则称

条件: ① 过程进行无限缓慢, 即属于准静态过程

② 没有摩擦力等做功, 无能量耗散

否则: 即为不可逆过程 — 自然界一切自发过程都是不可逆过程 — 一切过程都有方向性

2. 热力学第二定律

实质: 自然界一切与热现象有关的实际宏观过程都是不可逆的

表述: 开尔文表述 → 功变热的不可逆性 } 是等效的

克劳修斯表述 → 热传导的不可逆性

3. 卡诺定理

对于卡诺热机, $\eta = \frac{Q_1 - |Q_2|}{Q_1} \leq \frac{T_1 - T_2}{T_1}$

对可逆机, 取 "=", 对不可逆机, 取 "<"

八、熵

1. 克劳修斯公式

定义: 热温比 $\frac{Q}{T}$, 过程中吸收/放出的热量与热源温度的比值

可逆卡诺循环: $\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = 0$ 即 $\sum \frac{Q_i}{T_i} = 0$

任意可逆循环: 可看做无数可逆卡诺循环所组成

任意循环过程: 可看做许多可逆循环和不可逆循环过程所组成

克劳修斯公式: $\oint \frac{dQ}{T} \leq 0$ 克劳修斯等式 $\oint_{\text{可逆}} \frac{dQ}{T} = 0$

dQ 是系统从温度为 T 的热源中吸收的微分热量

→ 对任何物质, 热温比沿任意可逆循环的积分为零

→ 在可逆过程中, 热温比的线积分仅由初末状态决定, 与路径无关

2. 克劳修斯熵

定义 熵 S : $\Delta S = S_B - S_A = \int_A^B \frac{dQ}{T}$ 单位 J/K

系统熵的增量 ΔS 等于初态 A 和末态 B 之间任意一个可逆过程热温比 $\frac{dQ}{T}$ 的线积分

3. 熵增加原理

对于一个孤立系统 (绝热过程) $\Delta S \geq 0$

当为可逆过程时取等号, 不可逆过程时取 ">" ⇒ 一个孤立系统的熵永不减少

注: 熵增加原理只适用于孤立系统

对非孤立系统 (开放系统) $dS = dS_e + dS_i$

dS_e 为系统自身产生的熵, 恒为正值; dS_i 为系统与外界交换的熵流, 可正可负

4. 熵变的计算

利用 ΔS 定义式, 其中积分路径取 A, B 两态之间任意的 (已知的) 可逆过程

若系统分为几个部分, 则系统的熵是各部分的熵之和

(熵变)

(熵变)

① 当选 T, V 作状态参量时

$$\Delta S = \int_A^B \frac{dQ}{T} \text{ 可逆}$$

$$dQ = dE + pdV = \nu C_{V,m} dT + \frac{\nu RT}{V} dV$$

$$\Delta S = \int_A^B \frac{dQ}{T} = \int_{T_1}^{T_2} \frac{\nu C_{V,m}}{T} dT + \int_{V_1}^{V_2} \frac{\nu R}{V} dV = \nu C_{V,m} \ln \frac{T_2}{T_1} + \nu R \ln \frac{V_2}{V_1}$$

② 当选 T, p 作状态参量时

$$\text{由 } pV = \nu RT \text{ 得 } pdV = \nu R dT - V dp$$

$$dQ = dE + pdV = \nu C_{V,m} dT + \nu R dT - V dp = \nu C_{p,m} dT - \frac{\nu RT}{p} dp$$

$$\Delta S = \int_A^B \frac{dQ}{T} = \nu C_{p,m} \int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} - \nu R \int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{p} = \nu C_{p,m} \ln \frac{T_2}{T_1} - \nu R \ln \frac{p_2}{p_1}$$

从而: 理想气体的熵变

① 等温过程 $\Delta S_T = \nu R \ln \frac{V_2}{V_1} = \nu R \ln \frac{p_1}{p_2}$

② 等容过程 $\Delta S_V = \nu C_{V,m} \ln \frac{T_2}{T_1}$

③ 等压过程 $\Delta S_p = \nu C_{p,m} \ln \frac{T_2}{T_1}$

第十四章 相对论

一、伽利略变换式 经典力学的绝对时空观

1. 伽利略变换式：对两个不同的惯性系 $\vec{x}_{绝对} = \vec{x}_{相对} + \vec{x}_{牵连}$ $\vec{v}_{绝对} = \vec{v}_{相对} + \vec{v}_{牵连}$
 $\vec{a}' = \vec{a}$

2. 经典力学的绝对时空观：空间、时间的量度都是绝对的，与参考系无关，与物质的运动无关

二、狭义相对论的基本原理

1. 爱因斯坦相对性原理：物理定律在所有的惯性系中都具有相同的表达形式

即所有的惯性系对运动的描述都是等效的，不存在某一个惯性系更特殊

2. 光速不变原理 真空中光速是常量， $c = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0}$ ，与光源或观测者的运动状态无关，即不依赖于惯性系的选择

三、洛伦兹变换式

设惯性系 S' 沿 x 轴以速度 v 相对惯性系 S 运动

设某一事件发生在点 P ，从 S 系测得 $P(x, y, z, t)$ ，从 S' 系测得 $P(x', y', z', t')$

1. 时空坐标变换式

$$\text{正变换} \begin{cases} x' = \gamma(x - vt) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \gamma(t - \frac{vx}{c^2}) \end{cases} \quad \text{逆变换} \begin{cases} x = \gamma(x' + vt') \\ y = y' \\ z = z' \\ t = \gamma(t' + \frac{vx'}{c^2}) \end{cases} \quad \text{其中 } \beta = \frac{v}{c} \quad 0 \leq \beta < 1$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad \gamma \geq 1$$

2. 同时的相对性

设在惯性系 S' 中，不同地点 x_1' 、 x_2' 同时发生了两个事件，记 $\Delta t' = t_2' - t_1' = 0$ ， $\Delta x' = x_2' - x_1'$

对于惯性系 S 中的观察者来说 $\Delta t = t_2 - t_1 = \gamma \frac{v}{c^2} \Delta x' \neq 0$ 不是同时发生的

只有在 S' 系中同一地点 ($\Delta x' = 0$) 同时 ($\Delta t' = 0$) 发生的两件事， S 系才会认为该两事件是同时发生的

注：相互关联的事件之间的因果关系(时间顺序)不会因参考系改变而颠倒)

3. 尺缩效应 动尺变短

S' 系以速度 v 相对 S 系沿 Ox 轴运动，一细棒静止于 S' 系并沿 x 轴放置，设其固有长度 l_0

$$l = \frac{l_0}{\gamma}$$

从 S 系测得运动的细棒的长度，是从相对细棒静止的 S' 系中测得长度的 $\frac{1}{\gamma}$ 倍

注：只在相对运动方向上长度缩短，缩短为原来的 $\frac{1}{\gamma}$ 倍

4. 时间延缓 动钟变慢

① 固有时: 在 S' 系中静止的钟, 记录先后发生在同一地点的两个事件的时刻为 t_1', t_2'
时间间隔 $\Delta t' = t_2' - t_1' = \Delta t_0$ 称为固有时

② 运动时: 在相对 S' 系速度为 v 沿 x' 轴运动的 S 系中的钟所记录的时刻为 t_1, t_2
时间间隔 $\Delta t = t_2 - t_1$ 称为运动时

$$\Delta t = \gamma \Delta t_0$$

四. 相对论性动量和能量

1. 质速关系

称质点相对某惯性系静止时的质量为静质量 m_0 .

相对论性质量 $m = \gamma m_0$

$$\text{其中 } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \beta = \frac{v}{c}$$

质点的动量 $\vec{p} = m\vec{v} = \gamma m_0 \vec{v}$

$$\gamma \geq 1 \quad 0 \leq \beta < 1$$

2. 相对论力学的基本方程

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(\gamma m_0 \vec{v})}{dt} = m_0 \frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v} \frac{dm}{dt}$$

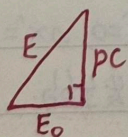
力的作用: 改变物体的速度与质量

3. 质能关系

质点的相对论性动能 E_k 等于质点总能量与静能量之差 $E_k = mc^2 - m_0c^2 = m_0c^2(\gamma - 1)$

质点总能量 $E = mc^2 = \gamma m_0c^2 \Rightarrow \Delta E = (\Delta m)c^2 \Rightarrow E = \gamma E_0$

4. 动量与能量的关系



$$E^2 = (pc)^2 + E_0^2$$

$$\Rightarrow m^2 c^4 = p^2 c^2 + m_0^2 c^4$$

$$\text{联立 } \begin{cases} E^2 = (pc)^2 + E_0^2 \\ E = E_0 + E_k \end{cases}$$

$$\Rightarrow p = \frac{\sqrt{E^2 - E_0^2}}{c} = \frac{\sqrt{E_k^2 + 2E_0 E_k}}{c}$$

注: 特殊情况: 光子 $E_0 = 0, E = pc$

不考虑相对论效应: $E_k = \frac{p^2}{2m}$

第十五章 量子物理

一、黑体辐射

1. 基本概念

热辐射: 任何一个物体, 在任何温度下都要向外发射电磁波

物体在接收外来电磁波时, 一般是一部分反射回外界, 一部分吸收

黑体: 把所有外来电磁波都接收而不反射 空腔壁上的小孔可作为黑体

2. 物理量

① 单色辐出度: 从热力学温度为 T 的黑体的单位面积上, 在单位时间内, 在波长 λ

附近单位波长范围内所辐射的电磁波能量, 记作 $M_\lambda(T)$ 单位 W/m^2

是热力学温度 T 和波长 λ 的函数

② 辐出度: 从 \sim , 所辐射出的各种波长的电磁波能量的总和 $M(T) = \int_0^{+\infty} M_\lambda(T) d\lambda$

只是黑体的热力学温度 T 的函数

单位 W/m^2

注: 由 $M_\lambda(T) d\lambda = -M_\nu(T) d\nu$, $\lambda\nu = c \cdot d\lambda = -\frac{c}{\nu^2} d\nu$ 知 $M_\nu(T) = M_\lambda(T) \frac{\lambda^2}{c}$

3. 定律

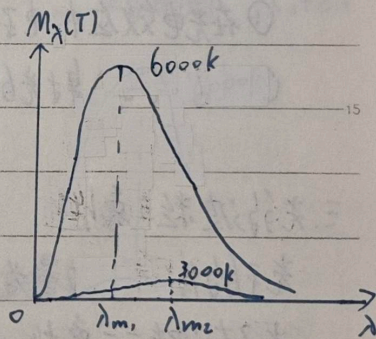
① 斯特藩-玻耳兹曼定律 $M(T) = \sigma T^4$ 其中 σ 为常量

② 维恩位移定律

记黑体的单色辐出度峰值所对应的电磁波波长为 λ_m

$\lambda_m T = b$ 其中 b 为常量

例: 如右图, $\lambda_{m2} = 2\lambda_{m1}$; $M(6000K) = 16M(3000K)$



二、光电效应

1. 概念

光电效应: 在光照射下, 电子从金属表面逸出现象; 逸出的电子称为光电子

遏止电势差 U_0 : 当反向电势差等于 U_0 时, 逸出的动能最大 $E_{k,max}$ 的电子恰好不能达到另一个

极板, 电路中没有电流 $E_{k,max} = \frac{1}{2} m v_{max}^2 = eU_0$

截止频率 ν_0 : 对某一种金属, 只有当入射光的频率大于 ν_0 时, 才有电子逸出, 电路中才有电流

2. 光子与爱因斯坦方程

光束可看成由微粒构成的粒子流, 这些微粒称光子, 光子的能量为 $\epsilon = h\nu$

频率 ν 越高的光束, 其光子的能量越大; 对给定频率的光束, 光的强度越大, 表示光子数目越多

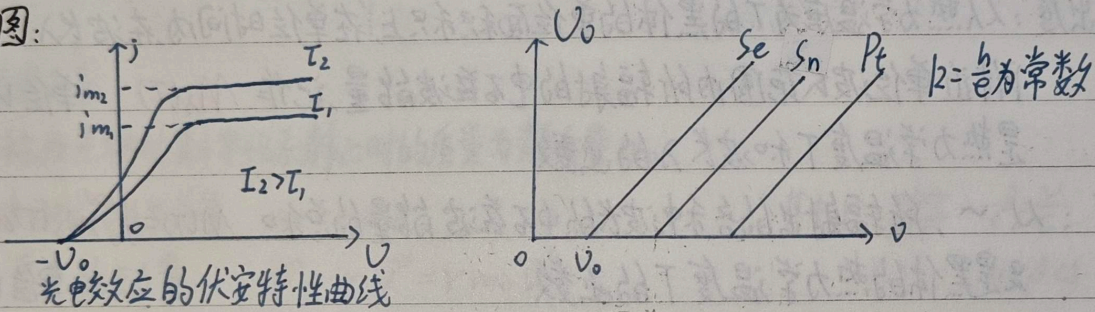
逸出功: 电子从金属表面逸出所需的能量, 与金属种类有关

光电效应的爱因斯坦方程: $h\nu = \frac{1}{2}m\nu^2 + W$

$\Rightarrow \frac{1}{2}m\nu^2 = h\nu - W \geq 0$ 即 $\nu \geq \frac{W}{h}$, 截止频率 $\nu_0 = \frac{W}{h}$

由 $h\nu = \frac{1}{2}m\nu^2 + W$ 与 $eU_0 = \frac{1}{2}m\nu^2$ 知 $U_0 = \frac{h}{e}\nu - \frac{W}{e}$

3. 图:



4. 说明

① 在光电效应中, 电子吸收光子时, 吸收一个光子的全部能量, 而不是一部分

② 光电流与入射光的强度成正比

5. 光的波粒二象性

光子的能量、动量为 $E = h\nu$ $p = \frac{h}{\lambda}$ $E = pc$ (只有光子才成立)

光具有波粒二象性 光在传播过程中 \rightarrow 波动性 光在与物质相互作用时 \rightarrow 粒子性

三. 康普顿效应

1. 在散射 X 射线中除有波长与入射波长相同的射线外, 还有波长比入射波长更长的射线

康普顿公式: $\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0 = \lambda_c (1 - \cos\theta)$

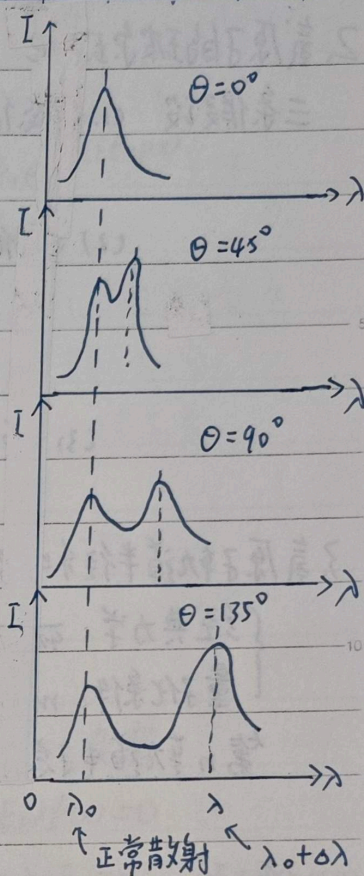
其中: 康普顿波长 $\lambda_c = \frac{h}{m_0c}$ m_0 为电子静质量

能量守恒: $h\nu_0 + m_0c^2 = h\nu + mc^2 \Rightarrow mc^2 - m_0c^2 = E_k = h(\nu_0 - \nu)$

动量守恒: $\frac{h\nu_0}{c} \vec{e}_0 = \frac{h\nu}{c} \vec{e} + m\vec{v}$ E_k 为碰撞后电子的动能

2. 实验结果

- ① 入射光子与原子中束缚很弱的电子发生碰撞，将一部分能量传给电子，散射光子能量减少，频率下降，**波长变大**
- ② 入射光子与原子中束缚很紧的电子发生碰撞，近似与整个原子的碰撞，光子能量不会显著减少，所以散射束中出现与入射光波长相同的射线。



3. 实验规律

- ① $\Delta\lambda$ 与入射波长和散射物质无关，与散射角有关
- ② M 小的散射物质的康普顿效应更明显

5. 康普顿效应和光电效应的比较

- ① 康：光子与静止自由电子碰撞，完全弹性碰撞
光：光子被束缚电子吸收，完全非弹性碰撞
- ② 康：X射线或γ射线，光子能量大，相对论效应

碰撞后电子动能 $E_k = mc^2 - m_0c^2$

光：可见光或紫外线，光子能量小，非相对论效应

吸收光子后电子动能 $E_k = \frac{1}{2}mv^2$

- ③ 康：X射线，波长约 0.01 nm ，最大波长改变量为

$\Delta\lambda_{\max} = 2\lambda_c = 0.0048 \text{ nm}$ 与 λ 相差不多，康普顿效应明显

光：光波长约 100 nm ， $\Delta\lambda$ 太小，不明显

四. 氢原子的玻尔理论

1. 近代氢原子观

里德伯给出氢原子光谱公式： $\sigma = \frac{1}{\lambda} = R_{\infty} \left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right)$ $n_f = 1, 2, 3, \dots$ $n_i = n_f + 1, n_f + 2, \dots$

其中 λ 为波长， $\sigma = \frac{1}{\lambda}$ 称波数， R_{∞} 为里德伯常量

汤姆孙：发现电子，提出原子的“葡萄干蛋糕模型”

卢瑟福： α 粒子散射实验，提出原子的有核模型（行星模型）

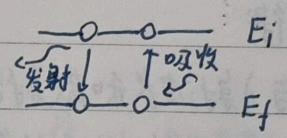
2. 氢原子的玻尔理论

三条假设 (1) 定态假设: 电子在原子中可以在一些特定的圆轨道上运动而不辐射电磁波, 这时原子处于稳定状态, 简称定态.

(2) 量子化条件: 电子以速度 v 在半径为 r 的圆周上绕核运动时, 只有电子的角动量满足下式的轨道才是稳定的 $L = mvr = nh$

h 为约化 \hbar , $n = 1, 2, 3, 4, \dots$ 称为主量子数, L 不能为 0, 可为无穷大

(3) 频率条件: $h\nu = E_i - E_f$



3. 氢原子轨道半径和能量的计算

经典力学: $\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_n^2} = m \frac{v_n^2}{r_n} \Rightarrow r_n = \frac{\epsilon_0 h^2}{\pi m e^2} n^2 = r_1 n^2 (n = 1, 2, 3, \dots)$

量子化条件: $m v_n r_n = nh$

$n=1$ 时, 玻尔半径 $r_1 = \frac{\epsilon_0 h^2}{\pi m e^2} \approx 5.29 \times 10^{-11} \text{m}$ 计算器: a_0

第 n 轨道电子总能量 $E_n = \frac{1}{2} m v_n^2 - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_n} \Rightarrow E_n = -\frac{m e^4}{8\epsilon_0^2 h^2} \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n^2} E_1 (n = 1, 2, 3, \dots)$

$n=1$ 时, 基态能量 $E_1 = -13.6 \text{eV}$

五. 德布罗意波

德布罗意假设: 所有实物粒子都具有波粒二象性

$$\begin{cases} E = mc^2 = h\nu \\ p = m v = \frac{h}{\lambda} \end{cases}$$

这种波称为德布罗意波或物质波

注: 若不考虑相对论效应, 即 $v \ll c$ 时, $m = m_0$. 此时 $E_k = \frac{1}{2} m_0 v^2$

若考虑, $m = \gamma m_0$, $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$, $\beta = \frac{v}{c}$. 此时 $E_k = mc^2 - m_0 c^2$

统计解释:

在某处德布罗意波的强度与粒子在该处附近出现的概率成正比.

六. 不确定关系

$\Delta x \Delta p_x \geq \hbar$ Δx 是 O_x 轴上坐标的不确定范围, Δp_x 是 O_x 轴方向动量分量的

Campus \Rightarrow 微观粒子不能同时用确定的位置和确定的动量来描述 不确定范围

七、量子力学

1. 波函数 Ψ 用于描述微观粒子的运动

自由粒子是一平面单色波其波函数为 $\Psi(x, t) = \Psi_0 e^{-i2\pi(\nu t - \frac{x}{\lambda})} = \Psi_0 e^{-\frac{i}{\hbar}(Et - p x)}$

粒子在空间某体积元 dV 内出现的概率 $d\omega = |\Psi|^2 dV = \Psi \Psi^* dV$

概率密度 $\rho = \frac{d\omega}{dV} = |\Psi|^2 = \Psi \Psi^*$

波函数的归一化条件 $\omega = \iiint |\Psi|^2 dV = 1$

2. 薛定谔方程

薛定谔方程—描述微观粒子运动规律的方程

即德布罗意波函数所满足的运动微分方程

⇒ 物质波的波函数 Ψ 就是薛定谔方程的解。

① 一维运动自由粒子的含时薛定谔方程 $-\frac{\hbar^2}{8\pi^2 m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = i \frac{\hbar}{2\pi} \frac{\partial \Psi}{\partial t}$

② 在势场中 $-\frac{\hbar^2}{8\pi^2 m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + E_p(x, t) \Psi = i \frac{\hbar}{2\pi} \frac{\partial \Psi}{\partial t}$

③ 恒定势场中, $E_p = E_p(x)$, 定态薛定谔方程 $\frac{d^2 \Psi}{dx^2} + \frac{8\pi^2 m}{\hbar^2} (E - E_p) \Psi = 0$

④ 三维恒定势场中粒子运动的薛定谔方程 $\nabla^2 \Psi + \frac{8\pi^2 m}{\hbar^2} (E - E_p) \Psi = 0 \quad \Psi = \Psi(x, y, z)$

其中拉普拉斯算子 $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

定态波函数 Ψ 的性质

① 能量 E 不随时间变化 ② 概率密度 $|\Psi|^2$ 不随时间变化

说明: ① 对某一势场一般只有某些特定的分立的 E 值才能使方程有解 → 能量量子化条件

使方程有解的 E 值称为本征能量, 对应的波函数 $\Psi(x)$ 称为本征函数

② 上述薛定谔方程只适用于非相对论情形 ($v \ll c$)

波函数的标准条件:

(1) Ψ 可以归一化, $\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi|^2 dx dy dz = 1$

(2) Ψ 和 $\frac{\partial \Psi}{\partial x}$, $\frac{\partial \Psi}{\partial y}$, $\frac{\partial \Psi}{\partial z}$ 连续

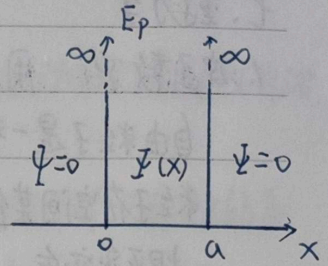
(3) $\Psi(x, y, z)$ 为有限单值的函数

3- 一维势阱问题

设一个粒子处在势能力 E_p 的力场中, 并沿 x 轴作一维运动.

粒子势能 E_p 满足边界条件:

$$E_p(x) = \begin{cases} 0 & 0 < x < a \\ E_p \rightarrow \infty & x \leq 0, x \geq a \end{cases}$$



利用边界条件 + 波函数的连续性 + 波函数的归一化条件得:

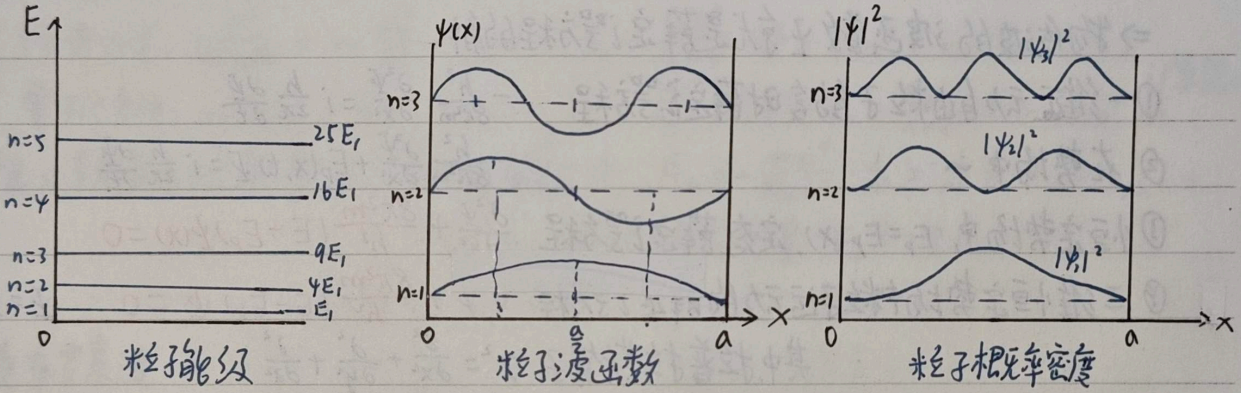
波动方程 $\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{8\pi^2mE}{h^2}\psi = 0$

波函数 $\psi(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0, x \geq a \\ \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{n\pi}{a} x, & 0 < x < a \end{cases}$

概率密度 $|\psi(x)|^2 = \frac{2}{a} \sin^2 \frac{n\pi}{a} x$

能量 $E_n = n^2 \frac{h^2}{8ma^2}$

一维无限深方势阱中粒子的能量是量化的, 基态能量 $E_1 = \frac{h^2}{8ma^2}$, 激发态 $4E_1, 9E_1, \dots$



\Rightarrow 波函数为驻波形式, 阱壁处为波节,

波腹的个数与量子数 n 相等

相邻能级间隔与势阱宽度的关系

$\Delta E_n = E_{n+1} - E_n = (2n+1) \frac{h^2}{8ma^2} \Rightarrow$ 粒子运动范围足够大时, (宏观尺度), 量子效应消失

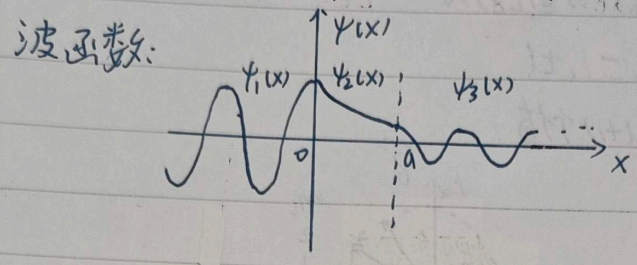
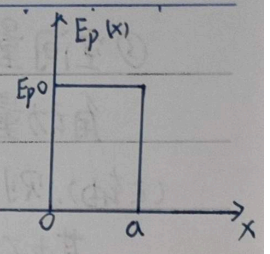
相邻能级间的相对间隔

$\frac{\Delta E_n}{E_n} = \frac{2n+1}{n^2} \approx \frac{2}{n} \quad (n \gg 1)$, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\frac{\Delta E_n}{E_n} \rightarrow 0$

\Rightarrow 经典理论是量子理论在 $n \rightarrow \infty$ 时的极限情况

4. 一维方势垒

势能分布 $E_p(x) = \begin{cases} 0 & x < 0, x > a \\ E_{p0} & 0 \leq x \leq a \end{cases}$ 开始时: 粒子处于 $x < 0$ 且能量 $E < E_{p0}$



粒子在一定概率率穿透势垒, 称为隧道效应

隧道效应的本质: 微观粒子的波粒二象性

应用: 扫描隧道显微镜 (STM)

5. 氢原子的量子理论

氢原子中电子的势能函数 $E_p = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$
 定态薛定谔方程 $\nabla^2 \Psi + \frac{8\pi^2 m}{h^2} (E + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}) \Psi = 0$
 + 球坐标 $\begin{cases} x = r \sin\theta \cos\varphi \\ y = r \sin\theta \sin\varphi \\ z = r \cos\theta \end{cases}$ $\begin{matrix} \Psi(x, y, z) \\ \downarrow \\ \Psi(r, \theta, \varphi) \end{matrix}$

分离变量, 设 $\Psi(r, \theta, \varphi) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi)$, 得到三个独立方程, 得:

① 能量量子化和主量子数

$E_n = \frac{1}{n^2} E_1$, $n = 1, 2, 3, \dots$ 为主量子数, $E_1 = -\frac{me^4}{8\epsilon_0^2 h^2} = -13.6 \text{ eV}$

② 角动量量子化和角量子数

$L = \sqrt{l(l+1)} \hbar$, $l = 0, 1, 2, \dots, (n-1)$ 为角量子数

eg. $n=2$ 时 $l=0, 1$ 对应的 $L=0, L=\sqrt{2}\hbar$

对应于同一个主量子数 n , 角量子数 l 可以取 $0, 1, \dots, (n-1)$ 同 n 种不同取值

即处于同一能级 E_n 的原子, 角动量可能有 n 种不同的取值

多个不同的稳定状态对应于同一个能级的情况称为能级的“简并”

常用 s, p, d, f, g, h 来表示 $l=0, 1, 2, \dots$ 等状态

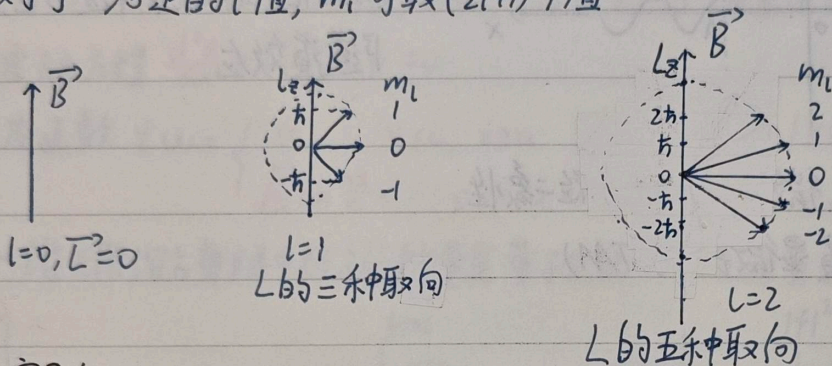
	$l=0$	$l=1$	$l=2$	$l=3$	$l=4$	$l=5$
	(s)	(p)	(d)	(f)	(g)	(h)
$n=1$	1s					
$n=2$	2s	2p				
$n=3$	3s	3p	3d			
$n=4$	4s	4p	4d	4f		
$n=5$	5s	5p	5d	5f	5g	
$n=6$	6s	6p	6d	6f	6g	6h

③ 空间量子化与磁量子数

角动量在空间中取向不是任意的,只能取某些特定方向,通常以外磁场方向为参考(z轴),则电子角动量L在z轴上的投影(分量) L_z 为 $L_z = m_l \hbar$

其中磁量子数 $m_l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l$

对于一给定的l值, m_l 可取(2l+1)个值

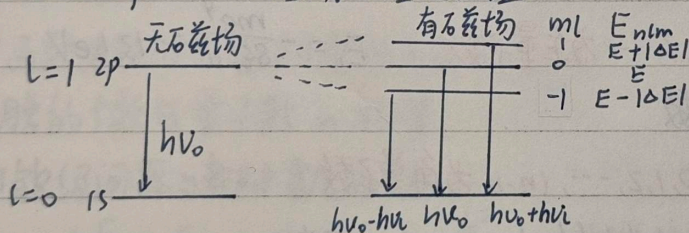


塞曼效应

在没有外磁场时的一条谱线加上强磁场后,分裂成三条谱线

用空间量子化解释: 在外磁场中,对一给定的n,l,有(2l+1)个不同的 m_l 值,即对应(2l+1)个不同量子态,产生不同的附加能量 ΔE

eg. 锂: $2p \rightarrow 1s$ 谱线的塞曼效应



氢原子的基态径向波函数 $R(r) = (\frac{4}{\pi})^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{r}{a_0}}$

电子出现在r处的概率密度 $p(r) = |R(r)|^2 r^2$

常用结论: n (l) 时,氢原子中电子出现的概率密度最大的r (即 $\frac{dp(r)}{dr} = 0$)

1 0 $r = a_0$

2 1 $r = 4a_0$

3 2 $r = 9a_0$

原子内电子的量子态由 n, l, m_l , m_s 四个量子数来表征

当 n, l 一定时,原子中电子可能的状态数 (4(2l+1))

n 一定时 $2n^2$

- n: 主量子数
- l: 角量子数
- m_l : 磁量子数
- s : 自旋量子数
- m_s : 自旋磁量子数