第二章 刚体

一、选择题

第 115 题

【0148】几个力同时作用在一个具有光滑固定转轴的刚体上，如果这几个力的矢量和为零，则此刚体

(A) 必然不会转动　　(B) 转速必然不变

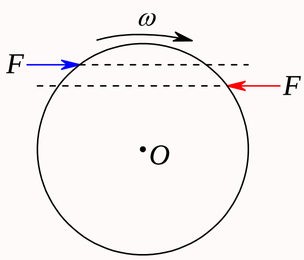
(C) 转速必然改变　　(D) 转速可能不变，也可能改变

第 116 题

【0153】一圆盘绕过盘心且与盘面垂直的光滑固定轴 O 以角速度 ω 按图示方向转动。若如图所示的情况那样，将两个大小相等方向相反但不在同一条直线的力 F 沿盘面同时作用到圆盘上，则圆盘的角速度 ω

(A) 必然增大　　(B) 必然减少

(C) 不会改变　　(D) 如何变化，不能确定

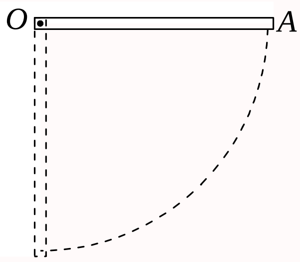


第 117 题

【0165】均匀细棒 OA 可绕通过其一端 O 而与棒垂直的水平固定光滑轴转动，如图所示。今使棒从水平位置由静止开始自由下落，在棒摆动到竖直位置的过程中，下述说法哪一种是正确的？

(A) 角速度从小到大，角加速度从大到小　　(B) 角速度从小到大，角加速度从小到大

(C) 角速度从大到小，角加速度从大到小　　(D) 角速度从大到小，角加速度从小到大



第 118 题

【0289】关于刚体对轴的转动惯量，下列说法中正确的是

(A) 只取决于刚体的质量，与质量的空间分布和轴的位置无关

(B) 取决于刚体的质量和质量的空间分布，与轴的位置无关

(C) 取决于刚体的质量、质量的空间分布和轴的位置

(D) 只取决于转轴的位置，与刚体的质量和质量的空间分布无关

第 119 题

【0292】一轻绳绕在有水平轴的定滑轮上，滑轮的转动惯量为 J，绳下端挂一物体。物体所受重力为 P，滑轮的角加速度为 α。若将物体去掉而以与 P 相等的力直接向下拉绳子，滑轮的角加速度 α 将

(A) 不变 (B) 变小

(C) 变大 (D) 如何变化无法判断

第 120 题

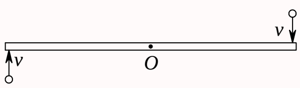
【0126】花样滑冰运动员绕通过自身的竖直轴转动，开始时两臂伸开，转动惯量为 J_0，角速度为 ω_0。然后她将两臂收回，使转动惯量减少为 $\frac{1}{3}J_0$。这时她转动的角速度变为

(A) $\frac{1}{3}\omega_0$ (B) $\frac{1}{\sqrt{3}}\omega_0$ (C) $\sqrt{3}\omega_0$ (D) $3\omega_0$

第 121 题

【0132】光滑的水平桌面上，有一长为 $2L$、质量为 m 的匀质细杆，可绕过其中点且垂直于杆的竖直光滑固定轴 O 自由转动，其转动惯量为 $\frac{1}{3}mL^2$，起初杆静止。桌面上有两个质量均为 m 的小球，各自在垂直于杆的方向上，正对着杆的一端，以相同速率 v 相向运动，如图所示。当两小球同时与杆的两个端点发生完全非弹性碰撞后，就与杆粘在一起转动，则这一系统碰撞后的转动角速度应为

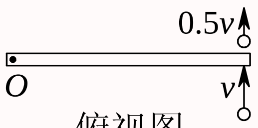
(A) $\frac{2v}{3L}$ (B) $\frac{4v}{5L}$ (C) $\frac{6v}{7L}$ (D) $\frac{8v}{9L}$ (E) $\frac{12v}{7L}$



第 122 题

【0133】如图所示，一静止的均匀细棒，长为 L、质量为 M，可绕通过棒的端点且垂直于棒长的光滑固定轴 O 在水平面内转动，转动惯量为 $\frac{1}{3}ML^2$。一质量为 m、速率为 v 的子弹在水平面内沿与棒垂直的方向射出并穿出棒的自由端，设穿过棒后子弹的速率为 $\frac{1}{2}v$，则此时棒的角速度应为

(A) $\frac{mv}{ML}$ (B) $\frac{3mv}{2ML}$ (C) $\frac{5mv}{3ML}$ (D) $\frac{7mv}{4ML}$



俯视图

第 123 题

【0197】一水平圆盘可绕通过其中心的固定竖直轴转动，盘上站着一个人。把人和圆盘取作系统，当此人在盘上随意走动时，若忽略轴的摩擦，此系统

(A) 动量守恒 (B) 机械能守恒

(C) 对转轴的角动量守恒 (D) 动量、机械能和角动量都守恒

(E) 动量、机械能和角动量都不守恒

第 124 题

【0228】质量为 m 的小孩站在半径为 R 的水平平台边缘上。平台可以绕通过其中心的竖直光滑固定轴自由转动，转动惯量为 J。平台和小孩开始时均静止。当小孩突然以相对于地面为 v 的速率在台边缘沿逆时针转向走动时，则此平台相对地面旋转的角速度和旋转方向分别为

(A) $\omega = \frac{mR^2}{J}\left(\frac{v}{R}\right)$，顺时针 (B) $\omega = \frac{mR^2}{J}\left(\frac{v}{R}\right)$，逆时针

(C) $\omega = \frac{mR^2}{J+mR^2}\left(\frac{v}{R}\right)$，顺时针 (D) $\omega = \frac{mR^2}{J+mR^2}\left(\frac{v}{R}\right)$，逆时针

第 125 题

【0294】刚体角动量守恒的充分且必要的条件是

(A) 刚体不受外力矩的作用 (B) 刚体所受合外力矩为零

(C) 刚体所受的合外力和合外力矩均为零 (D) 刚体的转动惯量和角速度均保持不变

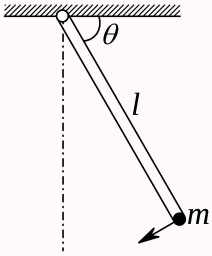
二、填空题

第 126 题

【0290】半径为 $r = 1.5$ m 的飞轮，初角速度 $\omega_0 = 10$ rad/s，角加速度 $\alpha = -5$ rad/s^2，则在 $t =$______ 时角位移为零，而此时边缘上点的线速度 $v =$______。

第 127 题

【0149】一长为 l，质量可以忽略的直杆，可绕通过其一端的水平光滑轴在竖直平面内作定轴转动，在杆的另一端固定着一质量为 m 的小球，如图所示。现将杆由水平位置无初转速地释放。则杆刚被释放时的角加速度 $\alpha_0 =$_____，杆与水平方向夹角为 60° 时的角加速度 $\alpha =$_____。



第 128 题

【0240】一飞轮以 600 rev/min 的转速旋转，转动惯量为 $2.5\ \mathrm{kg\cdot m^2}$，现加一恒定的制动力矩使飞轮在 1 s 内停止转动，则该恒定制动力矩的大小 $M =$_____。

第 129 题

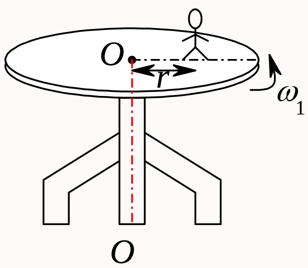
【0551】一作定轴转动的物体，对转轴的转动惯量 $J = 3.0\ \mathrm{kg\cdot m^2}$，角速度 $\omega_0 = 6.0\ \mathrm{rad/s}$。现对物体加一恒定的制动力矩 $M = -12\ \mathrm{N\cdot m}$，当物体的角速度减慢到 $\omega = 2.0\ \mathrm{rad/s}$ 时，物体已转过了角度 $\Delta\theta =$_____。

第 130 题

【0125】一飞轮以角速度 ω_0 绕光滑固定轴旋转，飞轮对轴的转动惯量为 J_1；另一静止飞轮突然和上述转动的飞轮啮合，绕同一转轴转动，该飞轮对轴的转动惯量为前者的二倍。啮合后整个系统的角速度 $\omega =$_____。

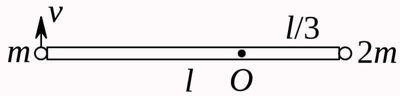
第 131 题

【0229】有一半径为 R 的匀质圆形水平转台，可绕通过盘心 O 且垂直于盘面的竖直固定轴 OO' 转动，转动惯量为 J。台上有一人，质量为 m。当他站在离转轴 r 处时（$r < R$），转台和人一起以 ω_1 的角速度转动，如图。若转轴处摩擦可以忽略，问当人走到转台边缘时，转台和人一起转动的角速度 $\omega_2 =$_____。



第 132 题

【0542】质量分别为 m 和 $2m$ 的两物体 (都可视为质点)，用一长为 l 的轻质刚性细杆相连，系统绕通过杆且与杆垂直的竖直固定轴 O 转动，已知 O 轴离质量为 $2m$ 的质点的距离为 $\frac{1}{3}l$，质量为 m 的质点的线速度为 v 且与杆垂直，则该系统对转轴的角动量 (动量矩) 大小为______。

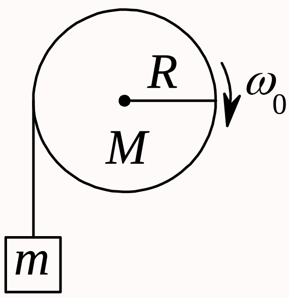


俯视图

三、计算题

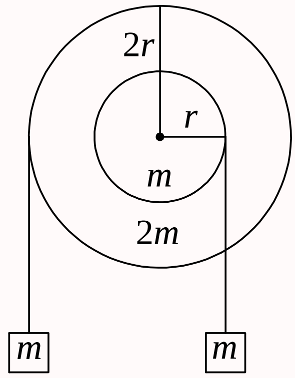
第 133 题

【0241】一轴承光滑的定滑轮，质量为 $M = 2.00$ kg，半径为 $R = 0.100$ m，一根不能伸长的轻绳，一端固定在定滑轮上，另一端系有一质量为 $m = 5.00$ kg 的物体，如图所示。已知定滑轮的转动惯量为 $J = \frac{1}{2}MR^2$，其初角速度 $\omega_0 = 10.0$ rad/s，方向垂直纸面向里。求：(1) 定滑轮的角加速度的大小和方向；(2) 定滑轮的角速度变化到 $\omega = 0$ 时，物体上升的高度；(3) 当物体回到原来位置时，定滑轮的角速度的大小和方向。



第 134 题

【0561】质量分别为 m 和 $2m$、半径分别为 r 和 $2r$ 的两个均匀圆盘，同轴地粘在一起，可以绕通过盘心且垂直盘面的水平光滑固定轴转动，对转轴的转动惯量为 $9mr^2/2$，大小圆盘边缘都绕有绳子，绳子下端都挂一质量为 m 的重物，如图所示。求盘的角加速度的大小。



第 135 题

【0211】质量为 $M = 0.03$ kg，长为 $l = 0.2$ m 的均匀细棒，在一水平面内绕通过棒中心并与棒垂直的光滑固定轴自由转动。细棒上套有两个可沿棒滑动的小物体，每个质量都为 $m = 0.02$ kg。开始时，两小物体分别被固定在棒中心的两侧且距棒中心各为 $r = 0.05$ m，此系统以 $n_1 = 15$ rev/min 的转速转动。若将小物体松开，设它们在滑动过程中受到的阻力正比于它们相对棒的速度，(已知棒对中心轴的转动惯量为 $Ml^2/12$) 求：(1) 当两小物体到达棒端时，系统的角速度是多少？(2) 当两小物体飞离棒端，棒的角速度是多少？

第二章 刚体

一、选择题

第 115 题

【0148】几个力同时作用在一个具有光滑固定转轴的刚体上，如果这几个力的矢量和为零，则此刚体

(A) 必然不会转动

(B) 转速必然不变

(C) 转速必然改变

(D) 转速可能不变，也可能改变

解析

【答案】D

【解析】定轴转动。

决定刚体定轴转动角加速度的物理量是刚体所受到的总的力矩

$$M=\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}=I\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=I\alpha$$

几个力的矢量和为零，力矩可能为零，也可能不为零。

第 116 题

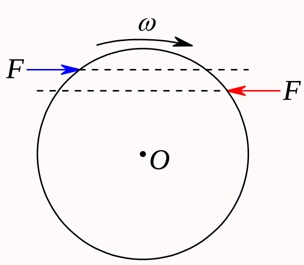
【0153】一圆盘绕过盘心且与盘面垂直的光滑固定轴 O 以角速度 ω 按图示方向转动。若如图所示的情况那样，将两个大小相等方向相反但不在同一条直线的力 F 沿盘面同时作用到圆盘上，则圆盘的角速度 ω

(A) 必然增大

(B) 必然减少

(C) 不会改变

(D) 如何变化，不能确定



解析

【答案】A

【解析】定轴转动。

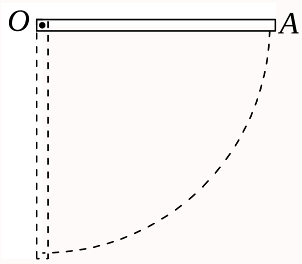
图中向右的力到固定轴的力臂大于向左的力到固定轴的力臂，因此前者对固定轴的力矩大于后者的力矩，而前者的力矩方向与圆盘转动方向相同，所以圆盘所受合外力矩的方向与转动方向相同，产生的角加速度与角速度的方向相同，所以角速度将增大。

第 117 题

【0165】均匀细棒 OA 可绕通过其一端 O 而与棒垂直的水平固定光滑轴转动，如图所示。今使棒从水平位置由静止开始自由下落，在棒摆动到竖直位置的过程中，下述说法哪一种是正确的？

(A) 角速度从小到大，角加速度从大到小　　(B) 角速度从小到大，角加速度从小到大

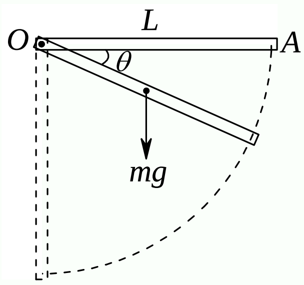
(C) 角速度从大到小，角加速度从大到小　　(D) 角速度从大到小，角加速度从小到大



解析

【答案】A

【解析】定轴转动，角动量定理，机械能守恒定律。



棒对转轴的转动惯量 I 是个常数，在整个过程中，棒受到两个力的作用，重力和轴的支持力，其中支持力通过转轴且不作功，对转轴的力矩为零，所以机械能守恒。而在不同位置，重力对转轴的力矩不同。如图中任意 θ 角处，有

$$0 = \frac{1}{2}I\omega^2 - mg\frac{L}{2}\sin\theta$$

$$mg\frac{L}{2}\cos\theta = I\alpha$$

所以

$$\omega = \sqrt{\frac{mgL\sin\theta}{I}}$$

$$\alpha = \frac{mgL}{2I}\cos\theta$$

所以，随着 θ 的增大，ω 增大，α 减小。

第 118 题

【0289】关于刚体对轴的转动惯量，下列说法中正确的是

(A) 只取决于刚体的质量，与质量的空间分布和轴的位置无关

(B) 取决于刚体的质量和质量的空间分布，与轴的位置无关

(C) 取决于刚体的质量、质量的空间分布和轴的位置

(D) 只取决于转轴的位置，与刚体的质量和质量的空间分布无关

解析

【答案】C

【解析】转动惯量的定义。

根据刚体转动惯量的定义

$$\mathrm{d}I = r_{\perp}^2 \mathrm{d}m$$
$$I = \int r_{\perp}^2 \mathrm{d}m$$

刚体对轴的转动惯量与刚体的质量、质量的分布以及转轴的位置都有关系。

第 119 题

【0292】一轻绳绕在有水平轴的定滑轮上，滑轮的转动惯量为 J，绳下端挂一物体。物体所受重力为 P，滑轮的角加速度为 α。若将物体去掉而以与 P 相等的力直接向下拉绳子，滑轮的角加速度 α 将

(A) 不变 (B) 变小

(C) 变大 (D) 如何变化无法判断

解析

【答案】C

【解析】定轴转动的转动定律。

绳下挂物体时，物体具有向下的加速度，所以绳子的拉力小于物体的重力；拉力对转轴的力臂保持不变，滑轮对转轴的转动惯量保持不变，绳子拉力变大，对转轴的力矩变大，根据定轴转动的转动定律，滑轮的角加速度将变大。

第 120 题

【0126】花样滑冰运动员绕通过自身的竖直轴转动，开始时两臂伸开，转动惯量为 J_0，角速度为 ω_0。然后她将两臂收回，使转动惯量减少为 $\frac{1}{3}J_0$。这时她转动的角速度变为

(A) $\frac{1}{3}\omega_0$　(B) $\frac{1}{\sqrt{3}}\omega_0$　(C) $\sqrt{3}\omega_0$　(D) $3\omega_0$

解析

【答案】D

【解析】角动量守恒定律。

运动员在转动的过程中角动量守恒，所以有

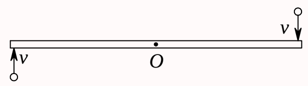
$$L = J_0\omega_0 = J\omega$$

$$\omega = \frac{J_0\omega_0}{J} = \frac{J_0\omega_0}{\frac{1}{3}J_0} = 3\omega_0$$

第 121 题

【0132】光滑的水平桌面上，有一长为 $2L$、质量为 m 的匀质细杆，可绕过其中点且垂直于杆的竖直光滑固定轴 O 自由转动，其转动惯量为 $\frac{1}{3}mL^2$，起初杆静止。桌面上有两个质量均为 m 的小球，各自在垂直于杆的方向上，正对着杆的一端，以相同速率 v 相向运动，如图所示。当两小球同时与杆的两个端点发生完全非弹性碰撞后，就与杆粘在一起转动，则这一系统碰撞后的转动角速度应为

(A) $\frac{2v}{3L}$　(B) $\frac{4v}{5L}$　(C) $\frac{6v}{7L}$　(D) $\frac{8v}{9L}$　(E) $\frac{12v}{7L}$



解析

【答案】C

【解析】角动量守恒定律。

以两个小球和细杆为研究对象，在碰撞过程中，系统受到转轴施加的不可忽略的作用力，因此系统的动量不守恒，但这个作用力通过转轴，对转轴的力矩为零，所以系统对转轴的角动量守恒，所以有

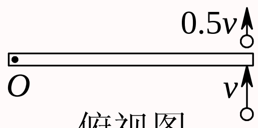
$$mvL + mvL = \left(\frac{1}{3}mL^2 + mL^2 + mL^2\right)\omega$$

$$\omega = \frac{2mvL}{\frac{7}{3}mL^2} = \frac{6v}{7L}$$

第 122 题

【0133】如图所示，一静止的均匀细棒，长为 L、质量为 M，可绕通过棒的端点且垂直于棒长的光滑固定轴 O 在水平面内转动，转动惯量为 $\frac{1}{3}ML^2$。一质量为 m、速率为 v 的子弹在水平面内沿与棒垂直的方向射出并穿出棒的自由端，设穿过棒后子弹的速率为 $\frac{1}{2}v$，则此时棒的角速度应为

(A) $\dfrac{mv}{ML}$ (B) $\dfrac{3mv}{2ML}$ (C) $\dfrac{5mv}{3ML}$ (D) $\dfrac{7mv}{4ML}$



俯视图

解析

【答案】B

【解析】角动量守恒定律。

以子弹和细棒为研究对象，在子弹射穿细棒的过程中，系统受到转轴施加的不可忽略的作用力，因此系统的动量不守恒，但这个作用力通过转轴，对转轴的力矩为零，所以系统对转轴的角动量守恒，所以有

$$mvL = m\frac{1}{2}vL + \frac{1}{3}ML^2\omega$$
$$\omega = \frac{\frac{1}{2}mvL}{\frac{1}{3}ML^2} = \frac{3mv}{2ML}$$

第 123 题

【0197】一水平圆盘可绕通过其中心的固定竖直轴转动，盘上站着一个人。把人和圆盘取作系统，当此人在盘上随意走动时，若忽略轴的摩擦，此系统

(A) 动量守恒
(B) 机械能守恒
(C) 对转轴的角动量守恒
(D) 动量、机械能和角动量都守恒
(E) 动量、机械能和角动量都不守恒

解析

【答案】C

【解析】角动量守恒定律。

以人和圆盘为研究对象，在人在盘上走动的过程中，系统受到转轴施加的作用力，因此系统的动量不守恒，但这个作用力通过转轴，对转轴的力矩为零，所以系统对转轴的角动量守恒，另外，人与转盘之间还有摩擦力存在，人与转盘有相对位移，这个摩擦力有做功，所以系统的机械能不守恒。

第 124 题

【0228】质量为 m 的小孩站在半径为 R 的水平平台边缘上。平台可以绕通过其中心的竖直光滑固定轴自由转动，转动惯量为 J。平台和小孩开始时均静止。当小孩突然以相对于地面为 v 的速率在台边缘沿逆时针转向走动时，则此平台相对地面旋转的角速度和旋转方向分别为

(A) $\omega=\dfrac{mR^2}{J}\left(\dfrac{v}{R}\right)$，顺时针 (B) $\omega=\dfrac{mR^2}{J}\left(\dfrac{v}{R}\right)$，逆时针

(C) $\omega=\dfrac{mR^2}{J+mR^2}\left(\dfrac{v}{R}\right)$，顺时针 (D) $\omega=\dfrac{mR^2}{J+mR^2}\left(\dfrac{v}{R}\right)$，逆时针

解析

【答案】A

【解析】角动量守恒定律。

以小孩和平台为研究对象，在小孩在平台上走动的过程中，系统受到转轴施加的作用力，因此系统的动量不守恒，但这个作用力通过转轴，对转轴的力矩为零，所以系统对转轴的角动量守恒，所以小孩逆时针走动时，平台必定顺时针转动。假定平台转动的角速度为 ω，则有

$$0=mvR+J\omega$$

$$\omega=\frac{mvR}{J}=\frac{mR^2}{J}\left(\frac{v}{R}\right)$$

第 125 题

【0294】刚体角动量守恒的充分且必要的条件是

(A) 刚体不受外力矩的作用 (B) 刚体所受合外力矩为零

(C) 刚体所受的合外力和合外力矩均为零 (D) 刚体的转动惯量和角速度均保持不变

解析

【答案】B

【解析】角动量守恒定律。

由刚体定轴转动的转动定律

$$M=\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}$$

其中 M 为刚体所受到的相对转轴的合外力矩，当 $M=0$ 时，即刚体所受合外力矩为零时，刚体的角动量守恒。

二、填空题

第 126 题

【0290】半径为 $r=1.5\ \mathrm{m}$ 的飞轮，初角速度 $\omega_0=10\ \mathrm{rad/s}$，角加速度 $\alpha=-5\ \mathrm{rad/s^2}$，则在 $t=$______ 时角位移为零，而此时边缘上点的线速度 $v=$______。

解析

【答案】4 s；-15 m/s

【解析】已知角加速度，求角速度和角位移。

由角速度和初角速度，通过积分可以求得任意时刻的角速度

$$\alpha = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$$
$$\mathrm{d}\omega = \alpha \mathrm{d}t$$
$$\int_{\omega_0}^{\omega} \mathrm{d}\omega = \int_0^t \alpha \mathrm{d}t$$
$$\omega = \omega_0 + \alpha t = 10 - 5t \text{ rad/s}$$

继而再次积分，可以求得任意时间段的角位移

$$\omega = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$$
$$\mathrm{d}\theta = \omega \mathrm{d}t$$
$$\int_{\theta_0}^{\theta} \mathrm{d}\theta = \int_0^t \omega \mathrm{d}t$$
$$\Delta\theta = \theta - \theta_0 = \int_0^t (10 - 5t)\mathrm{d}t = (10t - 2.5t^2)_0^t = 10t - 2.5t^2$$

让上述角位移等于零，即可求得时间

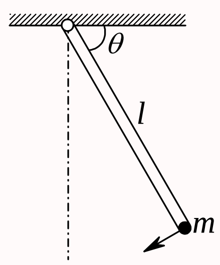
$$\Delta\theta = 10t - 2.5t^2 = 0$$
$$t_1 = 0, t_2 = 4 \text{ s}$$

把上述时间代入角速度表达式，可求得该时刻的角速度，再利用线速度和角速度的关系，即可求得此时刻边缘上点的线速度

$$\omega = 10 - 5 \times 4 = -10 \text{ rad/s}$$
$$v = \omega R = -10 \times 1.5 = -15 \text{ m/s}$$

第 127 题

【0149】一长为 l，质量可以忽略的直杆，可绕通过其一端的水平光滑轴在竖直平面内作定轴转动，在杆的另一端固定着一质量为 m 的小球，如图所示。现将杆由水平位置无初转速地释放。则杆刚被释放时的角加速度 $\alpha_0 =$______，杆与水平方向夹角为 60° 时的角加速度 $\alpha =$______。



解析

【答案】$\dfrac{g}{l}$；$\dfrac{g}{2l}$

【解析】定轴转动的转动定律，力矩，转动惯量。

以小球为研究对象，在运动过程中受到两个力的作用，竖直向下的重力 mg，沿杆方向的拉力 T，其中 T 通过转轴，所以它对转轴的力矩为零，而重力在图示 θ 角位置时对转轴的力矩为

$$M = mgl\cos\theta$$

而小球对转轴的转动惯量为 $I = ml^2$，所以根据定轴转动的转动定律

$$M = \frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = I\alpha$$

可得，任意 θ 角时，小球（所以含轻杆）绕转轴转动的角加速度为

$$\alpha = \frac{M}{I} = \frac{mgl\cos\theta}{ml^2} = \frac{g\cos\theta}{l}$$

当 $\theta = 0$ 时，

$$\alpha_0 = \frac{g}{l}$$

当 $\theta = 60^\circ$ 时，

$$\alpha = \frac{g}{2l}$$

第 128 题

【0240】一飞轮以 600 rev/min 的转速旋转，转动惯量为 $2.5\ \mathrm{kg\cdot m^2}$，现加一恒定的制动力矩使飞轮在 1 s 内停止转动，则该恒定制动力矩的大小 $M =$______。

解析

【答案】$50\pi\ \mathrm{N\cdot m}$

【解析】角动量定理。

根据角动量定理的积分形式

$$M = \frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}$$

$$M\mathrm{d}t = \mathrm{d}L$$

$$\int M\mathrm{d}t = \int \mathrm{d}L$$

$$M\Delta t = \Delta L$$

$$M = \frac{\Delta L}{\Delta t} = \frac{I\Delta\omega}{\Delta t} = 2.5 \times \frac{10 \times 2\pi}{1} = 50\pi\ \mathrm{N\cdot m}$$

第 129 题

【0551】一作定轴转动的物体，对转轴的转动惯量 $J = 3.0\ \mathrm{kg \cdot m^2}$，角速度 $\omega_0 = 6.0\ \mathrm{rad/s}$。现对物体加一恒定的制动力矩 $M = -12\ \mathrm{N \cdot m}$，当物体的角速度减慢到 $\omega = 2.0\ \mathrm{rad/s}$ 时，物体已转过了角度 $\Delta\theta =$______。

解析

【答案】4 rad

【解析】角动量定理，动能定理。

根据角动量定理

$$M = \frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = J\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$$
$$\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \frac{M}{J} = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\theta} \times \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \omega\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\theta}$$
$$\omega\mathrm{d}\omega = \frac{M}{J}\mathrm{d}\theta$$
$$\int_{\omega_0}^{\omega}\omega\mathrm{d}\omega = \int_{\theta_0}^{\theta}\frac{M}{J}\mathrm{d}\theta$$
$$\frac{1}{2}(\omega^2 - \omega_0^2) = \frac{M}{J}\Delta\theta$$
$$\Delta\theta = \frac{J(\omega^2 - \omega_0^2)}{2M} = \frac{3 \times (2^2 - 6^2)}{2 \times (-12)} = 4\ \mathrm{rad}$$

这题也可以根据转动的动能定理来求解。力矩所做的功等于动能的变化量。

$$W = \int M\mathrm{d}\theta = M\Delta\theta = \Delta E_k = \frac{1}{2}J(\omega^2 - \omega_0^2)$$
$$\Delta\theta = \frac{J(\omega^2 - \omega_0^2)}{2M}$$

因为这里力矩是个恒力矩，所以可以直接提到积分号外。

第 130 题

【0125】一飞轮以角速度 ω_0 绕光滑固定轴旋转，飞轮对轴的转动惯量为 J_1；另一静止飞轮突然和上述转动的飞轮啮合，绕同一转轴转动，该飞轮对轴的转动惯量为前者的二倍。啮合后整个系统的角速度 $\omega =$______。

解析

【答案】$\frac{1}{3}\omega_0$

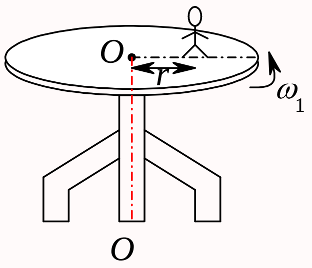
【解析】角动量守恒定律。

以两个飞轮为研究对象，系统在啮合过程中对转轴的角动量守恒，所以有

$$L = J_1\omega_0 = (J_1 + J_2)\omega$$
$$\omega = \frac{J_1\omega_0}{J_1 + J_2} = \frac{J_1\omega_0}{J_1 + 2J_1} = \frac{1}{3}\omega_0$$

第 131 题

【0229】有一半径为 R 的匀质圆形水平转台，可绕通过盘心 O 且垂直于盘面的竖直固定轴 OO' 转动，转动惯量为 J。台上有一人，质量为 m。当他站在离转轴 r 处时（$r < R$），转台和人一起以 ω_1 的角速度转动，如图。若转轴处摩擦可以忽略，问当人走到转台边缘时，转台和人一起转动的角速度 $\omega_2 =$______。



解析

【答案】$\dfrac{J+mr^2}{J+mR^2}\omega_1$

【解析】角动量守恒定律。

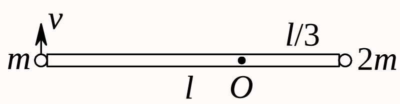
以人和转台为研究对象，在人走动过程中系统对转轴的角动量守恒，所以有

$$L=(J+mr^2)\omega_1=(J+mR^2)\omega_2$$

$$\omega_2=\frac{J+mr^2}{J+mR^2}\omega_1$$

第 132 题

【0542】质量分别为 m 和 $2m$ 的两物体 (都可视为质点)，用一长为 l 的轻质刚性细杆相连，系统绕通过杆且与杆垂直的竖直固定轴 O 转动，已知 O 轴离质量为 $2m$ 的质点的距离为 $\frac{1}{3}l$，质量为 m 的质点的线速度为 v 且与杆垂直，则该系统对转轴的角动量 (动量矩) 大小为______。



俯视图

解析

【答案】mvl

【解析】角动量的概念。

已知 m 的线速度为 v，则可求系统绕转轴转动的角速度为

$$\omega=\frac{v}{\frac{2}{3}l}=\frac{3v}{2l}$$

而系统对转轴的转动惯量为

$$I = m\left(\frac{2}{3}l\right)^2 + (2m)\left(\frac{1}{3}l\right)^2 = \frac{2}{3}ml^2$$

所以整个系统对转轴的角动量的大小为

$$L = I\omega = \frac{2}{3}ml^2 \times \frac{3v}{2l} = mvl$$

本题还可以分别求出两个物体对转轴的角动量，再求整个系统对转轴的角动量

$$L_1 = m_1v_1r_1 = mv \times \left(\frac{2}{3}l\right) = \frac{2}{3}mvl$$

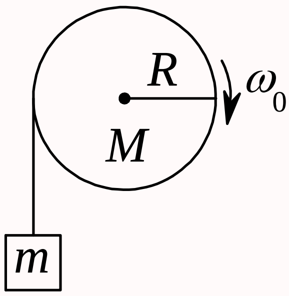
$$L_2 = m_2v_2r_2 = (2m) \times \left(\frac{1}{2}v\right) \times \left(\frac{1}{3}l\right) = \frac{1}{3}mvl$$

$$L = L_1 + L_2 = mvl$$

三、计算题

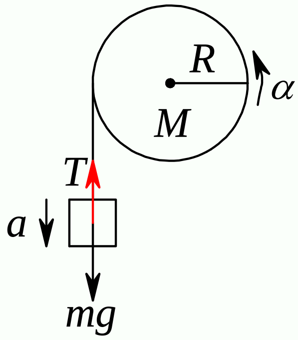
第 133 题

【0241】一轴承光滑的定滑轮，质量为 $M = 2.00$ kg，半径为 $R = 0.100$ m，一根不能伸长的轻绳，一端固定在定滑轮上，另一端系有一质量为 $m = 5.00$ kg 的物体，如图所示。已知定滑轮的转动惯量为 $J = \frac{1}{2}MR^2$，其初角速度 $\omega_0 = 10.0$ rad/s，方向垂直纸面向里。求：(1) 定滑轮的角加速度的大小和方向；(2) 定滑轮的角速度变化到 $\omega = 0$ 时，物体上升的高度；(3) 当物体回到原来位置时，定滑轮的角速度的大小和方向。



解析

【解析】定轴转动的转动定律，已知角加速度求角速度和角位移，角位移和位移，机械能守恒。
分别对物体和滑轮进行受力分析，如下图。



物体共受到两个力的作用：竖直向下的重力 mg，竖直向上的绳子的拉力 T，在这两个力作用下，物体具有向下的加速度 a；滑轮则受到三个力的作用：竖直向下的重力 Mg，竖直向下的绳子的拉力 T，竖直向上的轴承的支持力 N，其中 Mg 和 N 都通过转轴，所以对转轴没有力矩，只有绳子的拉力对转轴有力矩，在这个力矩作用下，滑轮具有逆时针的角加速度 α。因此，根据牛顿第二定律和定轴转动的角动量定理，有

$$mg - T = ma$$
$$TR = J\alpha$$

由于绳子不可伸长，所以物体的加速度和滑轮的角加速度之间存在关系

$$a = R\alpha$$

联立以上三式，可以解得

$$T = mg - ma = mg - mR\alpha$$
$$(mg - mR\alpha)R = J\alpha = mgR - mR^2\alpha$$
$$\alpha = \frac{mgR}{J + mR^2} = \frac{mgR}{\frac{1}{2}MR^2 + mR^2} = \frac{2mg}{(M+2m)R} = \frac{2\times 5\times 9.8}{(2+2\times 5)\times 0.1} \approx 81.7\ \mathrm{rad/s^2}$$

所以滑轮做的是角加速度恒定的匀变速转动（因为角加速度的方向与初始角速度的方向相反，所以滑轮刚开始做匀减速转动，到静止之后开始做匀加速转动），物体做的是匀变速直线运动（物体其实做的是竖直上抛运动，只是加速度的大小不是重力加速度而已）。以顺时针方向为转动的正方向，则竖直向上为物体移动的正方向，依题意，滑轮的初角速度为 ω_0，则物体的初速度为 $v_0 = R\omega_0$，所以任意时刻，滑轮的角速度为

$$\omega = \omega_0 - \alpha t$$

物体的速度为

$$v = v_0 - at = R\omega_0 - R\alpha t = R\omega$$

所以滑轮的角位移为

$$\Delta\theta = \omega_0 t - \frac{1}{2}\alpha t^2 = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2(-\alpha)}$$

物体的位移为

$$\Delta x = v_0 t - \frac{1}{2}at^2 = R\Delta\theta = \frac{v^2 - v_0^2}{2(-a)}$$

所以，当 $\omega = 0$ 时，

$$\Delta\theta = \frac{0 - 10^2}{2 \times (-81.7)} \approx 0.612 \text{ rad}$$

$$\Delta x = R\Delta\theta = 0.1 \times 0.612 = 0.0612 \text{ m}$$

由于整个过程只有重力做功，所以由物体和滑轮组成的系统的机械能守恒，因此当物体回到原来位置的时候，物体的速度与初速度等值反向，滑轮的角速度也与初角速度等值反向，当然也可以通过上面的速度和角速度的表达式求出这个结论。

$$\alpha = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \omega\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\theta} \Rightarrow \omega\mathrm{d}\omega = \alpha\mathrm{d}\theta$$

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} \Rightarrow v\mathrm{d}v = a\mathrm{d}x$$

物体回到原来位置，$\Delta x = 0$，可求出时间 t，代入速度与时间的表达式求出该时刻的速度。

$$\Delta x = v_0 t - \frac{1}{2}at^2 = 0 \Rightarrow t = \frac{2v_0}{a}$$

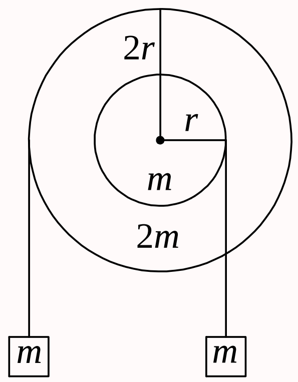
$$v = v_0 - at = v_0 - a\frac{2v_0}{a} = -v_0$$

$$\Delta\theta = \omega_0 t - \frac{1}{2}\alpha t^2 = 0 \Rightarrow t = \frac{2\omega_0}{\alpha}$$

$$\omega = \omega_0 - \alpha t = \omega_0 - \alpha\frac{2\omega_0}{\alpha} = -\omega_0$$

第 134 题

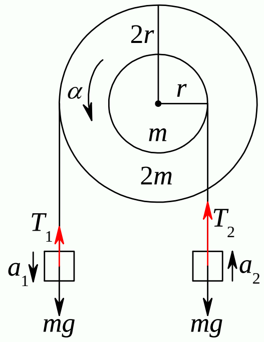
【0561】质量分别为 m 和 $2m$、半径分别为 r 和 $2r$ 的两个均匀圆盘，同轴地粘在一起，可以绕通过盘心且垂直盘面的水平光滑固定轴转动，对转轴的转动惯量为 $9mr^2/2$，大小圆盘边缘都绕有绳子，绳子下端都挂一质量为 m 的重物，如图所示。求盘的角加速度的大小。



解析

【解析】定轴转动的转动定律，已知角加速度求角速度和角位移，角位移和位移，机械能守恒。

分别对物体和滑轮进行受力分析，如下图。



左边物体共受到两个力的作用：竖直向下的重力 mg，竖直向上的绳子的拉力 T_1，在这两个力作用下，物体具有向下的加速度 a_1；右边物体共受到两个力的作用：竖直向下的重力 mg，竖直向上的绳子的拉力 T_2，在这两个力作用下，物体具有向上的加速度 a_2；滑轮则受到五个力的作用：竖直向下的重力 mg 和 $2mg$，竖直向上的轴承的支持力 N，竖直向下的绳子的拉力 T_1 和 T_2，其中 mg、$2mg$ 和 N 都通过转轴，所以对转轴没有力矩，只有绳子的拉力 T_1 和 T_2 对转轴有力矩，在这些力矩作用下，滑轮具有逆时针的角加速度 α。因此，根据牛顿第二定律和定轴转动的角动量定理，有

$$mg - T_1 = ma_1$$
$$T_2 - mg = ma_2$$
$$T_1(2r) - T_2 r = J\alpha$$

由于绳子不可伸长，所以物体的加速度和滑轮的角加速度之间存在关系

$$a_1 = 2r\alpha$$
$$a_2 = r\alpha$$

联立以上五式，可以解得

$$T_1 = mg - ma_1 = mg - 2mr\alpha$$
$$T_2 = mg + ma_2 = mg + mr\alpha$$
$$2(mg - 2mr\alpha)r - (mg + mr\alpha)r = J\alpha = mgr - 5mr^2\alpha$$
$$\alpha = \frac{mgr}{J + 5mr^2} = \frac{mgr}{\frac{9}{2}mr^2 + 5mr^2} = \frac{2g}{19r}$$

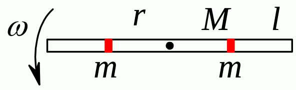
第 135 题

【0211】质量为 $M = 0.03$ kg，长为 $l = 0.2$ m 的均匀细棒，在一水平面内绕通过棒中心并与棒垂直的光滑固定轴自由转动。细棒上套有两个可沿棒滑动的小物体，每个质量都为 $m = 0.02$ kg。开始时，两小物体分别被固定在棒中心的两侧且距棒中心各为 $r = 0.05$ m，此系统以 $n_1 = 15$ rev/min 的转速转动。若将小物体松开，设它们在滑动过程中受到的阻力正比于它们相对棒的速度，(已知棒对中

心轴的转动惯量为 $Ml^2/12$) 求：(1) 当两小物体到达棒端时，系统的角速度是多少？(2) 当两小物体飞离棒端，棒的角速度是多少？

解析

【解析】角动量守恒定律。



俯视图

以小物体和细棒组成的系统在整个运动过程中，所受合外力的力矩为零，所以系统的角动量守恒，在任意时刻，有

$$L = (I + 2mR_0^2)\omega_0 = (I + 2mR^2)\omega$$

$$\omega = \frac{I + 2mR_0^2}{I + 2mR^2}\omega_0 = \frac{\frac{Ml^2}{12} + 2m\left(\frac{l}{4}\right)^2}{\frac{Ml^2}{12} + 2m\left(\frac{l}{2}\right)^2}\omega_0 = \frac{2M + 3m}{2M + 12m}\omega_0$$

$$= \frac{2 \times 0.03 + 3 \times 0.02}{2 \times 0.03 + 12 \times 0.02} \times \frac{15}{60} \times 2\pi = 0.2\pi \text{ rad/s}$$

而在物体飞离棒端的过程中，物体对棒的作用力沿着棒的方向，通过转轴，所以对棒的力矩为零，因此并不会改变棒本身的角动量，所以棒的角速度不会发生变化，仍然是物体在棒端时的角速度。