第一章　力学

一、选择题

第 1 题

【0018】某质点作直线运动的运动学方程为 $x = 3t - 5t^3 + 6(\mathrm{SI})$，则该质点作

(A) 匀加速直线运动，加速度沿 x 轴正方向　(B) 匀加速直线运动，加速度沿 x 轴负方向

(C) 变加速直线运动，加速度沿 x 轴正方向　(D) 变加速直线运动，加速度沿 x 轴负方向

第 2 题

【5003】一质点在平面上运动，已知质点位置矢量的表示式为 $\vec{r} = at^2\vec{e}_x + bt^2\vec{e}_y$（其中 a、b 为常量），则该质点作

(A) 匀速直线运动　(B) 变速直线运动　(C) 抛物线运动　(D) 一般曲线运动

第 3 题

【0015】一运动质点在某瞬时位于矢径 $\vec{r}(x, y)$ 的端点处，其速度大小为

(A) $\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$　(B) $\dfrac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$

(C) $\dfrac{\mathrm{d}|\vec{r}|}{\mathrm{d}t}$　(D) $\sqrt{\left(\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2}$

第 4 题

【0508】质点沿半径为 R 的圆周作匀速率运动，每 T 秒转一圈。在 $2T$ 时间间隔中，其平均速度大小与平均速率大小分别为

(A) $2\pi R/T$，$2\pi R/T$　(B) 0，$2\pi R/T$　(C) 0，0　(D) $2\pi R/T$，0

第 5 题

【0518】以下五种运动形式中，$\vec{a}$ 保持不变的运动是

(A) 单摆的运动　(B) 匀速率圆周运动　(C) 行星的椭圆轨道运动

(D) 抛体运动　(E) 圆锥摆运动

第 6 题

【0519】对于沿曲线运动的物体，以下几种说法中哪一种是正确的：

(A) 切向加速度必不为零

(B) 法向加速度必不为零（拐点处除外）

(C) 由于速度沿切线方向，法向分速度必为零，因此法向加速度必为零

(D) 若物体作匀速率运动，其总加速度必为零

(E) 若物体的加速度 $\vec{a}$ 为恒矢量，它一定作匀变速率运动

第 7 题

【0602】质点作曲线运动，$\vec{r}$ 表示位置矢量，$\vec{v}$ 表示速度，$\vec{a}$ 表示加速度，S 表示路程，a_τ 表示切向加速度，下列表达式中，(1) $\mathrm{d}v/\mathrm{d}t = a$，(2) $\mathrm{d}r/\mathrm{d}t = v$，(3) $\mathrm{d}S/\mathrm{d}t = v$，(4) $|\mathrm{d}\vec{v}/\mathrm{d}t| = a_\tau$

(A) 只有 (1)、(4) 是对的　　(B) 只有 (2)、(4) 是对的

(C) 只有 (2) 是对的　　(D) 只有 (3) 是对的

第 8 题

【0604】某物体的运动规律为 $\mathrm{d}v/\mathrm{d}t = -kv^2t$，式中的 k 为大于零的常量。当 $t = 0$ 时，初速为 v_0，则速度 v 与时间 t 的函数关系是

(A) $v = \dfrac{1}{2}kt^2 + v_0$　　(B) $v = -\dfrac{1}{2}kt^2 + v_0$　　(C) $\dfrac{1}{v} = \dfrac{1}{2}kt^2 + \dfrac{1}{v_0}$　　(D) $\dfrac{1}{v} = -\dfrac{1}{2}kt^2 + \dfrac{1}{v_0}$

第 9 题

【0014】在相对地面静止的坐标系内，A、B 二船都以 2 m/s 速率匀速行驶，A 船沿 x 轴正向，B 船沿 y 轴正向。今在 A 船上设置与静止坐标系方向相同的坐标系 (x、y 方向单位矢用 $\vec{e}_x$、$\vec{e}_y$ 表示)，那么在 A 船上的坐标系中，B 船的速度（以 m/s 为单位）为

(A) $2\vec{e}_x + 2\vec{e}_y$　　(B) $-2\vec{e}_x + 2\vec{e}_y$　　(C) $-2\vec{e}_x - 2\vec{e}_y$　　(D) $2\vec{e}_x - 2\vec{e}_y$

第 10 题

【5382】质点作半径为 R 的变速圆周运动时的加速度大小为（v 表示任一时刻质点的速率）

(A) $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$　　(B) $\dfrac{v^2}{R}$　　(C) $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \dfrac{v^2}{R}$　　(D) $\sqrt{\left(\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \dfrac{v^4}{R^2}}$

第 11 题

【0026】一飞机相对空气的速度大小为 200 km/h，风速为 56 km/h，方向从西向东。地面雷达站测得飞机速度大小为 192 km/h，方向是

(A) 南偏西 16.3°　　(B) 北偏东 16.3°　　(C) 向正南或向正北　　(D) 西偏北 16.3°

(E) 东偏南 16.3°

第 12 题

【0601】下列说法哪一条正确？

(A) 加速度恒定不变时，物体运动方向也不变

(B) 平均速率等于平均速度的大小

(C) 不管加速度如何，平均速率表达式总可以写成 (v_1、v_2 分别为初、末速率)$\bar{v} = (v_1 + v_2)/2$

(D) 运动物体速率不变时，速度可以变化

第 13 题

【0686】某人骑自行车以速率 v 向西行驶，今有风以相同速率从北偏东 30° 方向吹来，试问人感到风从哪个方向吹来？

(A) 北偏东 30°　(B) 南偏东 30°　(C) 北偏西 30°　(D) 西偏南 30°

第 14 题

【0338】质量为 m 的物体自空中落下，它除受重力外，还受到一个与速度平方成正比的阻力的作用，比例系数为 k，k 为正值常量。该下落物体的收尾速度 (即最后物体作匀速运动时的速度) 将是

(A) $\sqrt{\dfrac{mg}{k}}$　(B) $\dfrac{g}{2k}$　(C) gk　(D) $\sqrt{gk}$

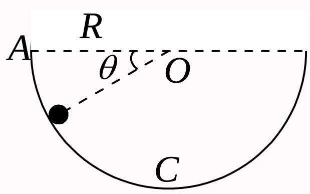
第 15 题

【0094】如图所示，假设物体沿着竖直面上圆弧形轨道下滑，轨道是光滑的，在从 A 至 C 的下滑过程中，下面哪个说法是正确的？

(A) 它的加速度大小不变，方向永远指向圆心　(B) 它的速率均匀增加

(C) 它的合外力大小变化，方向永远指向圆心　(D) 它的合外力大小不变

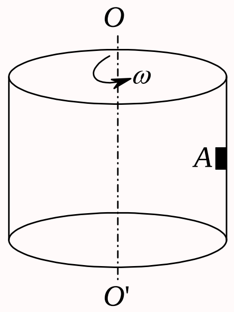
(E) 轨道支持力的大小不断增加



第 16 题

【0029】竖立的圆筒形转笼，半径为 R，绕中心轴 OO' 转动，物块 A 紧靠在圆筒的内壁上，物块与圆筒间的摩擦系数为 μ，要使物块 A 不下落，圆筒转动的角速度 ω 至少应为

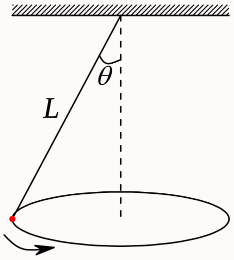
(A) $\sqrt{\dfrac{\mu g}{R}}$　(B) $\sqrt{\mu g}$　(C) $\sqrt{\dfrac{g}{\mu R}}$　(D) $\sqrt{\dfrac{g}{R}}$



第 17 题

【0334】一个圆锥摆的摆线长为 L，摆线与竖直方向的夹角恒为 θ，如图所示，则摆锤转动的周期为

(A) $\sqrt{\dfrac{L}{g}}$ (B) $\sqrt{\dfrac{L\cos\theta}{g}}$ (C) $2\pi\sqrt{\dfrac{L}{g}}$ (D) $2\pi\sqrt{\dfrac{L\cos\theta}{g}}$



第 18 题

【0367】质量为 20 g 的子弹沿 x 轴正向以 500 m/s 的速率射入一木块后，与木块一起仍沿 x 轴正向以 50 m/s 的速率前进，在此过程中木块所受冲量的大小为

(A) 9 N · s (B) −9 N · s (C) 10 N · s (D) −10 N · s

第 19 题

【0379】在水平冰面上以一定速度向东行驶的炮车，向东南（斜向上）方向发射一炮弹，对于炮车和炮弹这一系统，在此过程中（忽略冰面摩擦力及空气阻力）

(A) 总动量守恒

(B) 总动量在炮身前进的方向上的分量守恒，其它方向动量不守恒

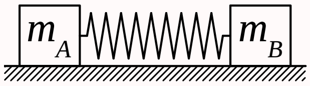
(C) 总动量在水平面上任意方向的分量守恒，竖直方向分量不守恒

(D) 总动量在任何方向的分量均不守恒

第 20 题

【0386】A、B 两木块质量分别为 m_A 和 m_B，且 $m_B = 2m_A$，两者用一轻弹簧连接后静止于光滑水平桌面上，如图所示。若用外力将两木块压近使弹簧被压缩，然后将外力撤去，则此后两木块运动动能之比 E_{kA}/E_{kB} 为

(A) 1/2　　(B) $\sqrt{2}/2$　　(C) $\sqrt{2}$　　(D) 2



第 21 题

【0659】一炮弹由于特殊原因在水平飞行过程中，突然炸裂成两块，其中一块作自由下落，则另一块着地点（飞行过程中阻力不计）

(A) 比原来更远　　(B) 比原来更近

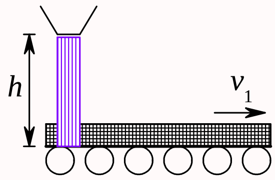
(C) 仍和原来一样远　　(D) 条件不足，不能判定

第 22 题

【0703】如图所示，砂子从 $h = 0.8$ m 高处下落到以 3 m/s 的速率水平向右运动的传送带上。取重力加速度 $g = 10$ m/s^2。传送带给予刚落到传送带上的砂子的作用力的方向为

(A) 与水平夹角 53° 向下　　(B) 与水平夹角 53° 向上

(C) 与水平夹角 37° 向上　　(D) 与水平夹角 37° 向下

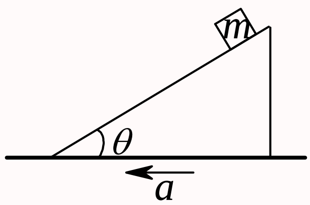


第 23 题

【0706】如图所示。一斜面固定在卡车上，一物块置于该斜面上。在卡车沿水平方向加速起动的过程中，物块在斜面上无相对滑动。此时斜面上摩擦力对物块的冲量的方向

(A) 是水平向前的　　(B) 只可能沿斜面向上

(C) 只可能沿斜面向下　　(D) 沿斜面向上或向下均有可能



第 24 题

【0406】人造地球卫星绕地球作椭圆轨道运动，卫星轨道近地点和远地点分别为 A 和 B。用 L 和 E_k 分别表示卫星对地心的角动量及其动能的瞬时值，则应有

(A) $L_A > L_B$，$E_{kA} > E_{kB}$　　(B) $L_A = L_B$，$E_{kA} < E_{kB}$

(C) $L_A = L_B$，$E_{kA} > E_{kB}$　　(D) $L_A < L_B$，$E_{kA} < E_{kB}$

第 25 题

【0350】一个质点同时在几个力作用下的位移为：$\Delta\vec{r} = 4\vec{e}_x - 5\vec{e}_y + 6\vec{e}_z$(SI)，其中一个力为恒力 $\vec{F} = -3\vec{e}_x - 5\vec{e}_y + 9\vec{e}_z$(SI)，则此力在该位移过程中所作的功为

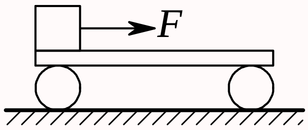
(A) -67 J (B) 17 J (C) 67 J (D) 91 J

第 26 题

【0413】如图，在光滑水平地面上放着一辆小车，车上左端放着一只箱子，今用同样的水平恒力 $\vec{F}$ 拉箱子，使它由小车的左端达到右端，一次小车被固定在水平地面上，另一次小车没有固定。试以水平地面为参照系，判断下列结论中正确的是

(A) 在两种情况下，$\vec{F}$ 做的功相等 (B) 在两种情况下，摩擦力对箱子做的功相等

(C) 在两种情况下，箱子获得的动能相等 (D) 在两种情况下，由于摩擦而产生的热相等



第 27 题

【5019】对功的概念有以下几种说法：(1) 保守力作正功时，系统内相应的势能增加；(2) 质点运动经一闭合路径，保守力对质点作的功为零；(3) 作用力和反作用力大小相等、方向相反，所以两者所作功的代数和必为零。在上述说法中：

(A) (1)、(2) 是正确的 (B) (2)、(3) 是正确的

(C) 只有 (2) 是正确的 (D) 只有 (3) 是正确的

第 28 题

【5020】有一劲度系数为 k 的轻弹簧，原长为 l_0，将它吊在天花板上。当它下端挂一托盘平衡时，其长度变为 l_1。然后在托盘中放一重物，弹簧长度变为 l_2，则由 l_1 伸长至 l_2 的过程中，弹性力所作的功为

(A) $-\int_{l_1}^{l_2} kx\mathrm{d}x$ (B) $\int_{l_1}^{l_2} kx\mathrm{d}x$ (C) $-\int_{l_1-l_0}^{l_2-l_0} kx\mathrm{d}x$ (D) $\int_{l_1-l_0}^{l_2-l_0} kx\mathrm{d}x$

第 29 题

【0073】质量为 m 的一艘宇宙飞船关闭发动机返回地球时，可认为该飞船只在地球的引力场中运动。已知地球质量为 M，万有引力恒量为 G，则当它从距地球中心 R_1 处下降到 R_2 处时，飞船增加的动能应等于

(A) $\dfrac{GMm}{R_2}$ (B) $\dfrac{GMm}{R_2^2}$ (C) $GMm\dfrac{R_1-R_2}{R_1R_2}$ (D) $GMm\dfrac{R_1-R_2}{R_1^2}$

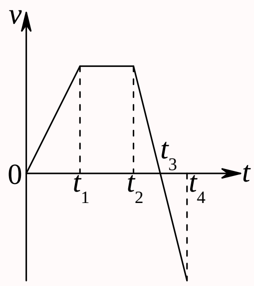
(E) $GMm\dfrac{R_1-R_2}{R_1^2R_2^2}$

第 30 题

【0074】一个作直线运动的物体，其速度 v 与时间 t 的关系曲线如图所示。设时刻 t_1 至 t_2 间外力作功为 W_1；时刻 t_2 至 t_3 间外力作功为 W_2；时刻 t_3 至 t_4 间外力作功为 W_3，则

(A) $W_1>0$，$W_2<0$，$W_3<0$ (B) $W_1>0$，$W_2<0$，$W_3>0$

(C) $W_1=0$，$W_2<0$，$W_3>0$ (D) $W_1=0$，$W_2<0$，$W_3<0$



第 31 题

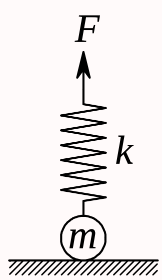
【0078】质量为 m 的质点在外力作用下，其运动方程为：$\vec{r}=A\cos\omega t\vec{e}_x+B\sin\omega t\vec{e}_y$，式中 A、B、ω 都是正的常量。由此可知外力在 $t=0$ 到 $t=\pi/(2\omega)$ 这段时间内所作的功为

(A) $\frac{1}{2}m\omega^2(A^2+B^2)$ (B) $m\omega^2(A^2+B^2)$ (C) $\frac{1}{2}m\omega^2(A^2-B^2)$ (D) $\frac{1}{2}m\omega^2(B^2-A^2)$

第 32 题

【0095】有一劲度系数为 k 的轻弹簧，竖直放置，下端悬一质量为 m 的小球，开始时使弹簧为原长而小球恰好与地接触，今将弹簧上端缓慢地提起，直到小球刚能脱离地面为止，在此过程中外力作功为

(A) $\frac{m^2g^2}{4k}$ (B) $\frac{m^2g^2}{3k}$ (C) $\frac{m^2g^2}{2k}$ (D) $\frac{2m^2g^2}{k}$ (E) $\frac{4m^2g^2}{k}$



第 33 题

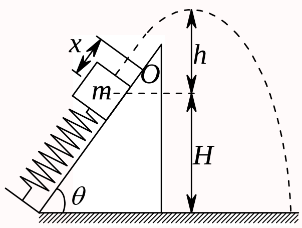
【0097】如图，劲度系数为 k 的轻弹簧在质量为 m 的木块和外力（未画出）作用下，处于被压缩的状态，其压缩量为 x。当撤去外力后弹簧被释放，木块沿光滑斜面弹出，最后落到地面上。

(A) 在此过程中，木块的动能与弹性势能之和守恒

(B) 木块到达最高点时，高度 h 满足 $\frac{1}{2}kx^2=mgh$

(C) 木块落地时的速度 v 满足 $\frac{1}{2}kx^2+mgH=\frac{1}{2}mv^2$

(D) 木块落地点的水平距离随 θ 的不同而异，θ 愈大，落地点愈远

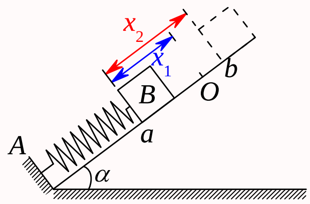


第 34 题

【0101】劲度系数为 k 的轻弹簧，一端与倾角为 α 的斜面上的固定档板 A 相接，另一端与质量为 m 的物体 B 相连。O 点为弹簧没有连物体、长度为原长时的端点位置，a 点为物体 B 的平衡位置。现在将物体 B 由 a 点沿斜面向上移动到 b 点（如图所示）。设 a 点与 O 点，a 点与 b 点之间距离分别为 x_1 和 x_2，则在此过程中，由弹簧、物体 B 和地球组成的系统势能的增加为

(A) $\frac{1}{2}kx_2^2+mgx_2\sin\alpha$ (B) $\frac{1}{2}k(x_2-x_1)^2+mg(x_2-x_1)\sin\alpha$

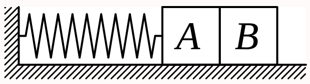
(C) $\frac{1}{2}k(x_2-x_1)^2-\frac{1}{2}kx_1^2+mgx_2\sin\alpha$ (D) $\frac{1}{2}k(x_2-x_1)^2+mg(x_2-x_1)\cos\alpha$



第 35 题

【0339】一水平放置的轻弹簧，劲度系数为 k，其一端固定，另一端系一质量为 m 的滑块 A，A 旁又有一质量相同的滑块 B，如图所示。设两滑块与桌面间无摩擦。若用外力将 A、B 一起推压使弹簧压缩量为 d 而静止，然后撤消外力，则 B 离开时的速度为

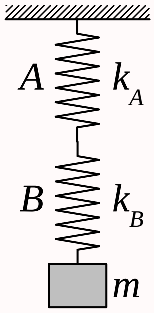
(A) 0 (B) $d\sqrt{\frac{k}{2m}}$ (C) $d\sqrt{\frac{k}{m}}$ (D) $d\sqrt{\frac{2k}{m}}$



第 36 题

【0408】A、B 二弹簧的劲度系数分别为 k_A 和 k_B，其质量均忽略不计。今将二弹簧连接起来并竖直悬挂，如图所示。当系统静止时，二弹簧的弹性势能 E_{PA} 与 E_{PB} 之比为

(A) $\frac{E_{PA}}{E_{PB}}=\frac{k_A}{k_B}$ (B) $\frac{E_{PA}}{E_{PB}}=\frac{k_A^2}{k_B^2}$ (C) $\frac{E_{PA}}{E_{PB}}=\frac{k_B}{k_A}$ (D) $\frac{E_{PA}}{E_{PB}}=\frac{k_B^2}{k_A^2}$



第 37 题

【0441】一特殊的轻弹簧，弹性力 $F=-kx^3$，k 为一常量系数，x 为伸长 (或压缩) 量。现将弹簧水平放置于光滑的水平面上，一端固定，一端与质量为 m 的滑块相连而处于自然长度状态。今沿弹簧长度方向给滑块一个冲量，使其获得一速度 v，压缩弹簧，则弹簧被压缩的最大长度为

(A) $\sqrt{\frac{m}{k}}v$ (B) $\sqrt{\frac{k}{m}}v$ (C) $\left(\frac{4mv}{k}\right)^{1/4}$ (D) $\left(\frac{2mv^2}{k}\right)^{1/4}$

第 38 题

【0442】对于一个物体系来说，在下列的哪种情况下系统的机械能守恒？

(A) 合外力为 0 (B) 合外力不作功

(C) 外力和非保守内力都不作功 (D) 外力和保守内力都不作功

第 39 题

【0479】一质点在几个外力同时作用下运动时，下述哪种说法正确？

(A) 质点的动量改变时，质点的动能一定改变

(B) 质点的动能不变时，质点的动量也一定不变

(C) 外力的冲量是零，外力的功一定为零

(D) 外力的功为零，外力的冲量一定为零

第 40 题

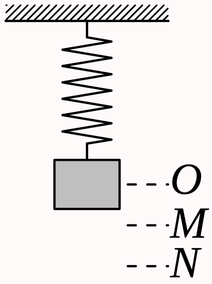
【5262】一物体挂在一弹簧下面，平衡位置在 O 点，现用手向下拉物体，第一次把物体由 O 点拉到 M 点，第二次由 O 点拉到 N 点，再由 N 点送回 M 点。则在这两个过程中

(A) 弹性力作的功相等，重力作的功不相等

(B) 弹性力作的功相等，重力作的功也相等

(C) 弹性力作的功不相等，重力作的功相等

(D) 弹性力作的功不相等，重力作的功也不相等



第 41 题

【5379】当重物减速下降时，合外力对它做的功

(A) 为正值 (B) 为负值

(C) 为零 (D) 先为正值，后为负值

第 42 题

【0020】一质点在力 $F = 5m(5-2t)(\mathrm{SI})$ 的作用下，$t=0$ 时从静止开始作直线运动，式中 m 为质点的质量，t 为时间，则当 $t = 5$ s 时，质点的速率为

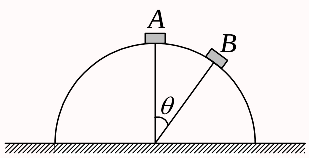
(A) 50 m/s (B) 25 m/s (C) 0 (D) -50 m/s

第 43 题

【0225】质点的质量为 m，置于光滑球面的顶点 A 处 (球面固定不动)，如图所示。当它由静止开始下滑到球面上 B 点时，它的加速度的大小为

(A) $a = 2g(1-\cos\theta)$ (B) $a = g\sin\theta$

(C) $a = g$ (D) $a = \sqrt{4g^2(1-\cos\theta)^2 + g^2\sin^2\theta}$



第 44 题

【0454】一船浮于静水中，船长 L，质量为 m，一个质量也为 m 的人从船尾走到船头。不计水和空气的阻力，则在此过程中船将

(A) 不动 (B) 后退 L (C) 后退 $L/2$ (D) 后退 $L/3$

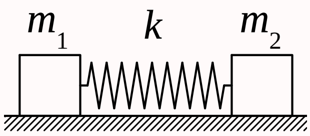
第 45 题

【0176】质量分别为 m_1、m_2 的两个物体用一劲度系数为 k 的轻弹簧相联，放在水平光滑桌面上，如图所示。当两物体相距 x 时，系统由静止释放。已知弹簧的自然长度为 x_0，则当物体相距 x_0 时，

m_1 的速度大小为

(A) $\sqrt{\dfrac{k(x-x_0)^2}{m_1}}$ (B) $\sqrt{\dfrac{k(x-x_0)^2}{m_2}}$ (C) $\sqrt{\dfrac{k(x-x_0)^2}{m_1+m_2}}$ (D) $\sqrt{\dfrac{km_2(x-x_0)^2}{m_1(m_1+m_2)}}$

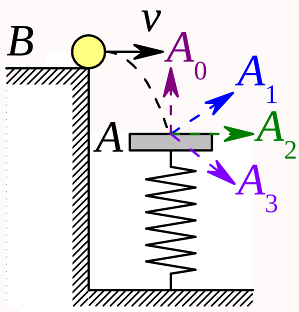
(E) $\sqrt{\dfrac{km_1(x-x_0)^2}{m_2(m_1+m_2)}}$



第 46 题

【0366】质量为 m 的平板 A，用竖立的弹簧支持而处在水平位置，如图。从平台上投掷一个质量也是 m 的球 B，球的初速为 v，沿水平方向。球由于重力作用下落，与平板发生完全弹性碰撞。假定平板是光滑的。则与平板碰撞后球的运动方向应为

(A) A_0 方向 (B) A_1 方向 (C) A_2 方向 (D) A_3 方向



第 47 题

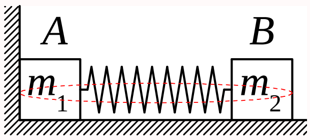
【0453】两木块 A、B 的质量分别为 m_1 和 m_2，用一个质量不计、劲度系数为 k 的弹簧连接起来。把弹簧压缩 x_0 并用线扎住，放在光滑水平面上，A 紧靠墙壁，如图所示，然后烧断扎线。判断下列说法哪个正确。

(A) 弹簧由初态恢复为原长的过程中，以 A、B、弹簧为系统，动量守恒

(B) 在上述过程中，系统机械能守恒

(C) 当 A 离开墙后，整个系统动量守恒，机械能不守恒

(D) A 离开墙后，整个系统的总机械能为 $\frac{1}{2}kx_0^2$，总动量为零



第 48 题

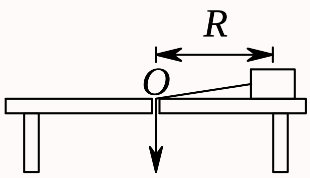
【0478】一子弹以水平速度 v_0 射入一静止于光滑水平面上的木块后，随木块一起运动。对于这一过程正确的分析是

(A) 子弹、木块组成的系统机械能守恒
(B) 子弹、木块组成的系统水平方向的动量守恒
(C) 子弹所受的冲量等于木块所受的冲量
(D) 子弹动能的减少等于木块动能的增加

第 49 题

【0128】如图所示，一个小物体，位于光滑的水平桌面上，与一绳的一端相连结，绳的另一端穿过桌面中心的小孔 O。该物体原以角速度 ω 在半径为 R 的圆周上绕 O 旋转，今将绳从小孔缓慢往下拉。则物体

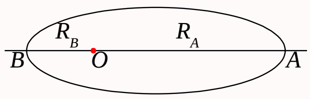
(A) 动能不变，动量改变
(B) 动量不变，动能改变
(C) 角动量不变，动量不变
(D) 角动量改变，动量改变
(E) 角动量不变，动能、动量都改变



第 50 题

【0193】一人造地球卫星到地球中心 O 的最大距离和最小距离分别是 R_A 和 R_B。设卫星对应的角动量分别是 L_A、L_B，动能分别是 E_{kA}、E_{kB}，则应有

(A) $L_A > L_B$，$E_{kA} > E_{kB}$
(B) $L_A > L_B$，$E_{kA} = E_{kB}$
(C) $L_A = L_B$，$E_{kA} = E_{kB}$
(D) $L_A < L_B$，$E_{kA} = E_{kB}$
(E) $L_A = L_B$，$E_{kA} < E_{kB}$



二、填空题

第 51 题

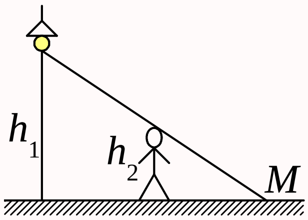
【0007】一质点沿 x 方向运动，其加速度随时间变化关系为 $a = 3 + 2t$(SI)，如果初始时质点的速度 v_0 为 5 m/s，则当 t 为 3 s 时，质点的速度 $v =$______。

第 52 题

【0255】一质点沿直线运动，其坐标 x 与时间 t 有如下关系：$x = Ae^{-\beta t}\cos\omega t$(SI)($A$、$\omega$ 皆为常数)，(1) 任意时刻 t 质点的加速度 $a =$_____；(2) 质点通过原点的时刻 $t =$_____。

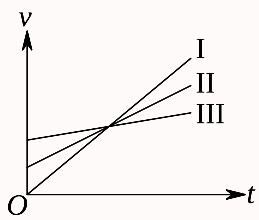
第 53 题

【0257】灯距地面高度为 h_1，一个人身高为 h_2，在灯下以匀速率 v 沿水平直线行走，如图所示。他的头顶在地上的影子 M 点沿地面移动的速度为 $v_M =$_____。



第 54 题

【0589】在 $v-t$ 图中所示的三条直线都表示同一类型的运动：(1) I、II、III 三条直线表示的是_____运动；(2)_____ 直线所表示的运动的加速度最大。

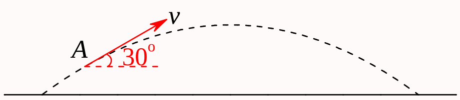


第 55 题

【0006】质点沿半径为 R 的圆周运动，运动学方程为 $\theta = 3 + 2t^2$(SI)，则 t 时刻质点的法向加速度大小为 $a_n =$_____；角加速度 $\beta =$_____。

第 56 题

【0017】一物体作如图所示的斜抛运动，测得在轨道 A 点处速度 $\vec{v}$ 的大小为 v，其方向与水平方向夹角成 30°。则物体在 A 点的切向加速度 $a_\tau =$_____，轨道的曲率半径 $\rho =$_____。



第 57 题

【0253】已知质点的运动学方程为：$\vec{r} = \left(5 + 2t - \frac{1}{2}t^2\right)\vec{e}_x + \left(4t + \frac{1}{3}t^3\right)\vec{e}_y$(SI)。当 $t = 2$ s 时，加速度的大小为 $a =$_____，加速度 $\vec{a}$ 与 x 轴正方向间夹角 $\alpha =$_____。

第 58 题

【0261】一质点从静止出发沿半径 $R=1$ m 的圆周运动，其角加速度随时间 t 的变化规律是 $\beta=12t^2-6t$(SI)，则质点的角速度 $\omega=$_____；切向加速度 $a_\tau=$_____。

第 59 题

【0262】一质点沿半径为 R 的圆周运动，其路程 S 随时间 t 变化的规律为 $S=bt-\frac{1}{2}ct^2$(SI)，式中 b、c 为大于零的常量，且 $b^2>Rc$。则此质点运动的切向加速度 $a_\tau=$_____；法向加速度 $a_n=$_____。

第 60 题

【0264】距河岸 (看成直线) 500 m 处有一艘静止的船，船上的探照灯以转速为 $n=1$ r/min 转动。当光束与岸边成 $60°$ 角时，光束沿岸边移动的速度 $v=$_____。

第 61 题

【0509】在半径为 R 的圆周上运动的质点，其速率与时间关系为 $v=ct^2$（式中 c 为常量），则从 $t=0$ 到 t 时刻质点走过的路程 $S(t)=$_____；t 时刻质点的切向加速度 $a_\tau=$_____；t 时刻质点的法向加速度 $a_n=$_____。

第 62 题

【0592】已知质点的运动学方程为 $\vec{r}=4t^2\vec{e}_x+(2t+3)\vec{e}_y$(SI)，则该质点的轨道方程为_____。

第 63 题

【0597】一质点在 Oxy 平面内运动。运动学方程为 $x=2t$(SI) 和 $y=19-2t^2$(SI)，则在第 2 秒内质点的平均速度大小 $|\bar{\vec{v}}|=$_____，2 秒末的瞬时速度大小 $v_2=$_____。

第 64 题

【0599】以初速率 v_0、抛射角 θ 抛出一物体，则其抛物线轨道最高点处的曲率半径为_____。

第 65 题

【0271】小船从岸边 A 点出发渡河，如果它保持与河岸垂直向前划，则经过时间 t_1 到达对岸下游 C 点；如果小船以同样速率划行，但垂直河岸横渡到正对岸 B 点，则需与 A、B 两点联成的直线成 α 角逆流划行，经过时间 t_2 到达 B 点。若 B、C 两点间距为 S，则：(1) 此河宽度 $L=$_____；(2) $\alpha=$_____。

第 66 题

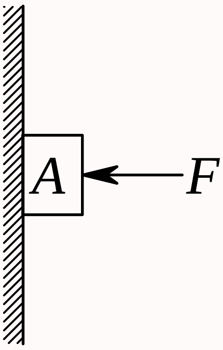
【0688】两条直路交叉成 α 角，两辆汽车分别以速率 v_1 和 v_2 沿两条路行驶，一车相对另一车的速度大小为_____。

第 67 题

【0691】当一列火车以 10 m/s 的速率向东行驶时，若相对于地面竖直下落的雨滴在列车的窗子上形成的雨迹偏离竖直方向 30°，则雨滴相对于地面的速率是_____；相对于列车的速率是_____。

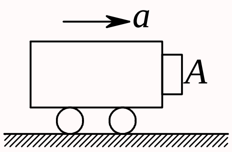
第 68 题

【0043】沿水平方向的外力 F 将物体 A 压在竖直墙上，由于物体与墙之间有摩擦力，此时物体保持静止，并设其所受静摩擦力为 f_0，若外力增至 $2F$，则此时物体所受静摩擦力为_____。



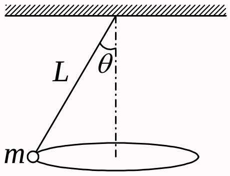
第 69 题

【5390】如图所示，一个小物体 A 靠在一辆小车的竖直前壁上，A 和车壁间静摩擦系数是 μ_s，若要使物体 A 不致掉下来，小车的加速度的最小值应为 $a=$_____。



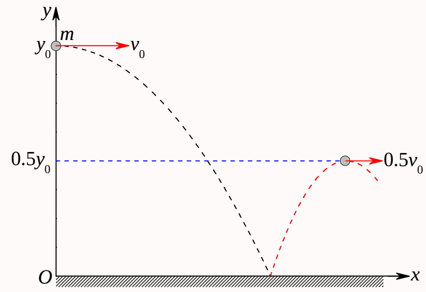
第 70 题

【0351】一圆锥摆摆长为 L、摆锤质量为 m，在水平面上作匀速圆周运动，摆线与铅直线夹角 θ，则：(1) 摆线的张力 $T=$_____；(2) 摆锤的速率 $v=$_____。



第 71 题

【0055】质量为 m 的小球自高为 y_0 处沿水平方向以速率 v_0 抛出，与地面碰撞后跳起的最大高度为 $\frac{1}{2}y_0$，水平速率为 $\frac{1}{2}v_0$，则碰撞过程中 (1) 地面对小球的竖直冲量的大小为_____；(2) 地面对小球的水平冲量的大小为_____。

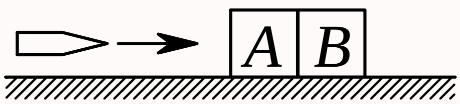


第 72 题

【0060】一质量为 m 的物体，原来以速率 v 向北运动，它突然受到外力打击，变为向西运动，速率仍为 v，则外力的冲量大小为_____，方向为_____。

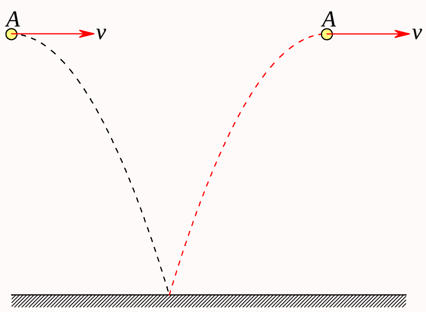
第 73 题

【0062】两块并排的木块 A 和 B，质量分别为 m_1 和 m_2，静止地放置在光滑的水平面上，一子弹水平地穿过两木块，设子弹穿过两木块所用的时间分别为 Δt_1 和 Δt_2，木块对子弹的阻力为恒力 F，则子弹穿出后，木块 A 的速度大小为_____，木块 B 的速度大小为_____。



第 74 题

【0068】一质量为 m 的小球 A，在距离地面某一高度处以速度 $\vec{v}$ 水平抛出，触地后反跳。在抛出 t 秒后小球 A 跳回原高度，速度仍沿水平方向，速度大小也与抛出时相同，如图。则小球 A 与地面碰撞过程中，地面给它的冲量的方向为_____，冲量的大小为_____。



第 75 题

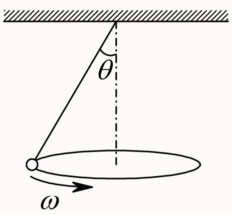
【0184】设作用在质量为 1 kg 的物体上的力 $F=6t+3$(SI)。如果物体在这一力的作用下，由静止开始沿直线运动，在 0 到 2.0 s 的时间间隔内，这个力作用在物体上的冲量大小 $I=$_____。

第 76 题

【0371】一颗子弹在枪筒里前进时所受的合力大小为 $F=400-\dfrac{4\times10^5}{3}t$(SI)，子弹从枪口射出时的速率为 300 m/s。假设子弹离开枪口时合力刚好为零，则：(1) 子弹走完枪筒全长所用的时间 $t=$_____，(2) 子弹在枪筒中所受力的冲量 $I=$_____，(3) 子弹的质量 $m=$_____。

第 77 题

【0374】图示一圆锥摆，质量为 m 的小球在水平面内以角速度 ω 匀速转动。在小球转动一周的过程中，(1) 小球动量增量的大小等于_____；(2) 小球所受重力的冲量的大小等于_____；(3) 小球所受绳子拉力的冲量大小等于_____。



第 78 题

【0708】一质量为 1 kg 的物体，置于水平地面上，物体与地面之间的静摩擦系数 $\mu_0=0.20$，滑动摩擦系数 $\mu=0.16$，现对物体施一水平拉力 $F=t+0.96$(SI)，则 2 秒末物体的速度大小 $v=$_____。

第 79 题

【0710】一吊车底板上放一质量为 10 kg 的物体，若吊车底板加速上升，加速度大小为 $a=3+5t$(SI)，则 2 秒内吊车底板给物体的冲量大小 $I=$_____；2 秒内物体动量的增量大小_____。

第 80 题

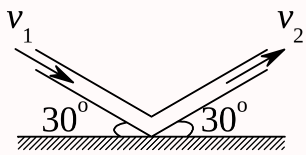
【0711】粒子 B 的质量是粒子 A 的质量的 4 倍，开始时粒子 A 的速度 $\vec{v}_{A0}=3\vec{e}_x+4\vec{e}_y$，粒子 B 的速度 $\vec{v}_{B0}=2\vec{e}_x-7\vec{e}_y$；在无外力作用的情况下两者发生碰撞，碰后粒子 A 的速度变为 $\vec{v}_A=7\vec{e}_x-4\vec{e}_y$，则此时粒子 B 的速度 $\vec{v}_B=$_____。

第 81 题

【0719】质量为 M 的车以速度 v_0 沿光滑水平地面直线前进，车上的人将一质量为 m 的物体相对于车以速度 u 竖直上抛，则此时车的速度 $v=$_____。

第 82 题

【0516】如图所示，流水以初速度 $\vec{v}_1$ 进入弯管，流出时的速度为 $\vec{v}_2$，且 $v_1 = v_2 = v$。设每秒流入的水质量为 q，则在管子转弯处，水对管壁的平均冲力大小是_____，方向_____。（管内水受到的重力不考虑）。



第 83 题

【5258】一质量为 m 的物体，以初速 $\vec{v}_0$ 从地面抛出，抛射角 $\theta = 30°$，如忽略空气阻力，则从抛出到刚要接触地面的过程中 (1) 物体动量增量的大小为_____，(2) 物体动量增量的方向为_____。

第 84 题

【5630】一个打桩机，夯的质量为 m_1，桩的质量为 m_2。假设夯与桩相碰撞时为完全非弹性碰撞且碰撞时间极短，则刚刚碰撞后夯与桩的动能是碰前夯的动能的_____ 倍。

第 85 题

【0404】地球的质量为 m，太阳的质量为 M，地心与日心的距离为 R，引力常量为 G，则地球绕太阳作圆周运动的轨道角动量为 $L =$_____。

第 86 题

【0667】将一质量为 m 的小球，系于轻绳的一端，绳的另一端穿过光滑水平桌面上的小孔用手拉住。先使小球以角速度 ω_1 在桌面上做半径为 r_1 的圆周运动，然后缓慢将绳下拉，使半径缩小为 r_2，在此过程中小球的动能增量是_____。

第 87 题

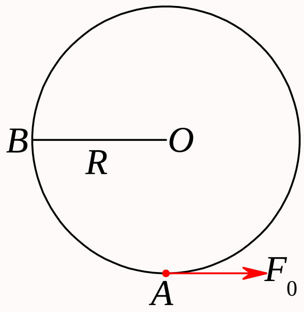
【0712】哈雷慧星绕太阳的轨道是以太阳为一个焦点的椭圆。它离太阳最近的距离是 $r_1 = 8.75 \times 10^{10}$ m，此时它的速率是 $v_1 = 5.46 \times 10^4$ m/s。它离太阳最远时的速率是 $v_2 = 9.08 \times 10^2$ m/s，这时它离太阳的距离是 $r_2 =$_____。

第 88 题

【0724】一质量为 m 的质点沿着一条曲线运动，其位置矢量在空间直角坐标系中的表达式为 $\vec{r} = a\cos\omega t\vec{e}_x + b\sin\omega t\vec{e}_y$，其中 a、b、ω 皆为常量，则此质点对原点的角动量 $\vec{L} =$_____；此质点所受对原点的力矩 $\vec{M} =$_____。

第 89 题

【0082】图中，沿着半径为 R 圆周运动的质点，所受的几个力中有一个是恒力 $\vec{F}_0$，方向始终沿 x 轴正向，即 $\vec{F}_0=F_0\vec{e}_x$。当质点从 A 点沿逆时针方向走过 3/4 圆周到达 B 点时，力 $\vec{F}_0$ 所作的功为 $W=$______。



第 90 题

【0100】已知地球质量为 M，半径为 R。一质量为 m 的火箭从地面上升到距地面高度为 $2R$ 处。在此过程中，地球引力对火箭作的功为______。

第 91 题

【0732】某质点在力 $\vec{F}=(4+5x)\vec{e}_x$(SI) 的作用下沿 x 轴作直线运动，在从 $x=0$ 移动到 $x=10$ m 的过程中，力 $\vec{F}$ 所做的功为______。

第 92 题

【0735】二质点的质量各为 m_1，m_2。当它们之间的距离由 a 缩短到 b 时，它们之间万有引力所做的功为______。

第 93 题

【0745】某人拉住在河水中的船，使船相对于岸不动，以地面为参考系，人对船所做的功______；以流水为参考系，人对船所做的功______。（填 >0，$=0$ 或 <0）

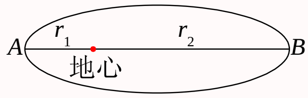
第 94 题

【5021】有一劲度系数为 k 的轻弹簧，竖直放置，下端悬一质量为 m 的小球。先使弹簧为原长，而小球恰好与地接触。再将弹簧上端缓慢地提起，直到小球刚能脱离地面为止。在此过程中外力所作的功为______。

第 95 题

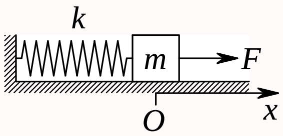
【0072】一人造地球卫星绕地球作椭圆运动，近地点为 A，远地点为 B。A、B 两点距地心分别为 r_1、r_2。设卫星质量为 m，地球质量为 M，万有引力常量为 G。则卫星在 A、B 两点处的万有引力势

能之差 $E_{PB}-E_{PA}=$______；卫星在 A、B 两点的动能之差 $E_{kB}-E_{kA}=$______。



第 96 题

【0093】如图所示，劲度系数为 k 的弹簧，一端固定在墙壁上，另一端连一质量为 m 的物体，物体在坐标原点 O 时弹簧长度为原长。物体与桌面间的摩擦系数为 μ。若物体在不变的外力 F 作用下向右移动，则物体到达最远位置时系统的弹性势能 $E_p=$______。



第 97 题

【0644】一质量为 m 的质点在指向圆心的平方反比力 $F=-k/r^2$ 的作用下，作半径为 r 的圆周运动。此质点的速度 $v=$______。若取距圆心无穷远处为势能零点，它的机械能 $E=$______。

第 98 题

【0733】一质点在二恒力共同作用下，位移为 $\Delta\vec{r}=3\vec{e}_x+8\vec{e}_y(\mathrm{SI})$；在此过程中，动能增量为 24 J，已知其中一恒力 $\vec{F}_1=12\vec{e}_x-3\vec{e}_y(\mathrm{SI})$，则另一恒力所作的功为______。

第 99 题

【0744】一长为 L，质量为 m 的匀质链条，放在光滑的桌面上，若其长度的 $1/5$ 悬挂于桌边下，将其慢慢拉回桌面，需做功______。

三、计算题

第 100 题

【0004】一质点沿 x 轴运动，其加速度 a 与位置坐标 x 的关系为：$a=2+6x^2(\mathrm{SI})$；如果质点在原点处的速度为零，试求其在任意位置处的速度。

第 101 题

【0037】质量为 m 的子弹以速度 v_0 水平射入沙土中，设子弹所受阻力与速度反向，大小与速度成正比，比例系数为 k，忽略子弹的重力，求：(1) 子弹射入沙土后，速度随时间变化的函数式；(2) 子弹进入沙土的最大深度。

第 102 题

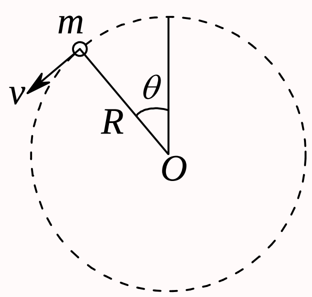
【0354】质量为 m 的雨滴下降时，因受空气阻力，在落地前已是匀速运动，其速率为 $v = 5.0$ m/s。设空气阻力大小与雨滴速率的平方成正比，问：当雨滴下降速率为 $v = 4.0$ m/s 时，其加速度 a 多大？

第 103 题

【0028】一水平放置的飞轮可绕通过中心的竖直轴转动，飞轮的辐条上装有一个小滑块，它可在辐条上无摩擦地滑动。一轻弹簧一端固定在飞轮转轴上，另一端与滑块联接。当飞轮以角速度 ω 旋转时，弹簧的长度为原长的 f 倍，已知 $\omega = \omega_0$ 时，$f = f_0$，求 ω 与 f 的函数关系。

第 104 题

【0044】质量为 m 的物体系于长度为 R 的绳子的一个端点上，在竖直平面内绕绳子另一端点（固定）作圆周运动。设 t 时刻物体瞬时速度的大小为 v，绳子与竖直向上的方向成 θ 角，如图所示。(1) 求 t 时刻绳中的张力 T 和物体的切向加速度 a_τ；(2) 说明在物体运动过程中 a_τ 的大小和方向如何变化？

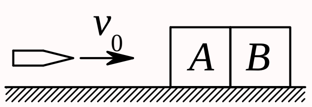


第 105 题

【0730】光滑水平面上有两个质量不同的小球 A 和 B。A 球静止，B 球以速度 $\vec{v}$ 和 A 球发生碰撞，碰撞后 B 球速度的大小为 $\frac{1}{2}v$，方向与 $\vec{v}$ 垂直，求碰后 A 球运动方向。

第 106 题

【0769】如图所示，有两个长方形的物体 A 和 B 紧靠着静止放在光滑的水平桌面上，已知 $m_A = 2$ kg，$m_B = 3$ kg。现有一质量 $m = 100$ g 的子弹以速率 $v_0 = 800$ m/s 水平射入长方体 A，经 $t = 0.01$ s，又射入长方体 B，最后停留在长方体 B 内未射出。设子弹射入 A 时所受的摩擦力为 $f = 3\times10^3$ N，求：(1) 子弹在射入 A 的过程中，B 受到 A 的作用力的大小。(2) 当子弹留在 B 中时，A 和 B 的速度大小。



第 107 题

【5009】一炮弹发射后在其运行轨道上的最高点 $h=19.6$ m 处炸裂成质量相等的两块。其中一块在爆炸后 1 秒钟落到爆炸点正下方的地面上。设此处与发射点的距离 $S_1=1000$ m，问另一块落地点与发射地点间的距离是多少？（空气阻力不计，$g=9.8\ \mathrm{m/s^2}$）

第 108 题

【0416】一物体按规律 $x=ct^3$ 在流体媒质中作直线运动，式中 c 为常量，t 为时间。设媒质对物体的阻力正比于速度的平方，阻力系数为 k，试求物体由 $x=0$ 运动到 $x=L$ 时，阻力所作的功。

第 109 题

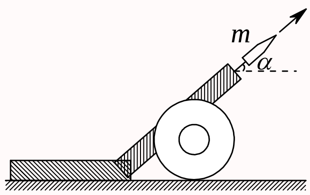
【0422】一质量为 m 的质点在 Oxy 平面上运动，其位置矢量为：$\vec{r}=a\cos\omega t\vec{e}_x+b\sin\omega t\vec{e}_y(\mathrm{SI})$，式中 a、b、ω 是正值常量，且 $a>b$。(1) 求质点在 A 点 $(a,0)$ 时和 B 点 $(0,b)$ 时的动能；(2) 求质点所受的合外力 $\vec{F}$ 以及当质点从 A 点运动到 B 点的过程中 $\vec{F}$ 的分力 F_x 和 F_y 分别作的功。

第 110 题

【0202】质量 $m=2$ kg 的物体沿 x 轴作直线运动，所受合外力 $F=10+6x^2(\mathrm{SI})$。如果在 $x=0$ 处时速度 $v_0=0$；试求该物体运动到 $x=4$ m 处时速度的大小。

第 111 题

【0452】如图，水平地面上一辆静止的炮车发射炮弹。炮车质量为 M，炮身仰角为 α，炮弹质量为 m，炮弹刚出口时，相对于炮身的速度为 u，不计地面摩擦：(1) 求炮弹刚出口时，炮车的反冲速度大小；(2) 若炮筒长为 L，求发炮过程中炮车移动的距离。



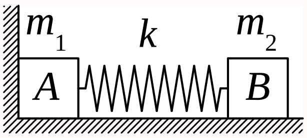
第 112 题

【0201】地球可看作是半径 $R=6400$ km 的球体，一颗人造地球卫星在地面上空 $h=800$ km 的圆形轨道上，以 7.5 km/s 的速度绕地球运动。在卫星的外侧发生一次爆炸，其冲量不影响卫星当时的绕地圆周切向速度 $v_\tau=7.5$ km/s，但却给予卫星一个指向地心的径向速度 $v_n=0.2$ km/s。求这次爆炸后使卫星轨道的最低点和最高点各位于地面上空多少公里？

第 113 题

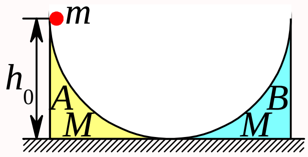
【0183】两个质量分别为 m_1 和 m_2 的木块 A 和 B，用一个质量忽略不计、劲度系数为 k 的弹簧联接起来，放置在光滑水平面上，使 A 紧靠墙壁，如图所示。用力推木块 B 使弹簧压缩 x_0，然后释

放。已知 $m_1=m$，$m_2=3m$，求：(1) 释放后，A、B 两木块速度相等时的瞬时速度的大小；(2) 释放后，弹簧的最大伸长量。



第 114 题

【0209】两个形状完全相同、质量都为 M 的弧形导轨 A 和 B，相向地放在地板上，今有一质量为 m 的小物体，从静止状态由 A 的顶端下滑，A 顶端的高度为 h_0，所有接触面均光滑。试求小物体在 B 轨上上升的最大高度 (设 A、B 导轨与地面相切)。



第一章 力学

一、选择题

第 1 题

【0018】某质点作直线运动的运动学方程为 $x=3t-5t^3+6$(SI)，则该质点作

(A) 匀加速直线运动，加速度沿 x 轴正方向 (B) 匀加速直线运动，加速度沿 x 轴负方向

(C) 变加速直线运动，加速度沿 x 轴正方向 (D) 变加速直线运动，加速度沿 x 轴负方向

解析

【答案】D

【解析】已知运动方程，求速度和加速度。

$$x=3t-5t^3+6$$
$$v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=3-15t^2$$
$$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-30t$$

加速度随时间变化，所以是变加速运动；$t>0$ 时，$a<0$，说明加速度的方向沿 x 轴负方向。

第 2 题

【5003】一质点在平面上运动，已知质点位置矢量的表示式为 $\vec{r}=at^2\vec{e}_x+bt^2\vec{e}_y$（其中 a、b 为常量），则该质点作

(A) 匀速直线运动 (B) 变速直线运动 (C) 抛物线运动 (D) 一般曲线运动

解析

【答案】B

【解析】已知位置矢量，求轨迹、速度和加速度。

$$\vec{r}=at^2\vec{e}_x+bt^2\vec{e}_y$$
$$x=at^2,y=bt^2\Rightarrow y=bx/a$$
$$\vec{v}=\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}=2at\vec{e}_x+2bt\vec{e}_y$$

$$\vec{a}=\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}=2a\vec{e}_x+2b\vec{e}_y$$

运动轨迹是一条直线，所以是直线运动；速度随时间变化，所以是变速运动；加速度是个常矢量，所以是匀变速运动；所以质点做匀变速直线运动。

第 3 题

【0015】一运动质点在某瞬时位于矢径 $\vec{r}(x,y)$ 的端点处，其速度大小为

(A) $\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$ (B) $\dfrac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$

(C) $\dfrac{\mathrm{d}|\vec{r}|}{\mathrm{d}t}$ (D) $\sqrt{\left(\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2}$

解析

【答案】D

【解析】速度的概念。

$r=|\vec{r}|$ 表示某点到坐标原点之间的距离；$\mathrm{d}r$ 表示上述距离的变化量；$\mathrm{d}\vec{r}$ 表示位移；所以 $\dfrac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$ 是速度矢量

$$\vec{r}=x\vec{e}_x+y\vec{e}_y$$
$$\vec{v}=\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}=v_x\vec{e}_x+v_y\vec{e}_y=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\vec{e}_x+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\vec{e}_y$$
$$v=|\vec{v}|=\sqrt{v_x^2+v_y^2}=\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2}$$
$$r=|\vec{r}|=\sqrt{x^2+y^2}$$
$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial r}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\frac{x}{r}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\frac{y}{r}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$$

第 4 题

【0508】质点沿半径为 R 的圆周作匀速率运动，每 T 秒转一圈。在 $2T$ 时间间隔中，其平均速度大小与平均速率大小分别为

(A) $2\pi R/T$，$2\pi R/T$ (B) 0，$2\pi R/T$ (C) 0，0 (D) $2\pi R/T$，0

解析

【答案】B

【解析】平均速度和平均速率的概念。

平均速度是指位移与时间的比值；平均速率是路程与时间的比值。

圆周运动，$2T$ 时间之内，质点完成了两圈，位移为 0，路程为 $2\times 2\pi R=4\pi R$，所以平均速度的大小为 0；平均速率的大小为 $4\pi R/(2T)=2\pi R/T$。

第 5 题

【0518】以下五种运动形式中，$\vec{a}$ 保持不变的运动是

(A) 单摆的运动 (B) 匀速率圆周运动 (C) 行星的椭圆轨道运动

(D) 抛体运动 (E) 圆锥摆运动

解析

【答案】D

【解析】加速度的概念。

加速度是个矢量，既有大小，又有方向。

单摆运动的过程中，速度大小一直变化，所以向心加速度（法向加速度）的大小和方向一直都是变化，切向加速度的大小和方向也一直在改变，所以加速度也一直在改变；

匀速率圆周运动，切向速度的大小保持不变，法向加速度的大小不变，方向一直在变化；没有切向加速度；所以总的加速度也一直在改变（大小不变，方向变化）；

行星的椭圆轨道运动，所受合力即为万有引力，大小和方向一直在改变，所以总的加速度的大小和方向也一直在改变；

抛体运动，物体只受到重力的作用，大小和方向保持不变，所以物体的加速度也保持不变，一直都是重力加速度，大小为 g，方向竖直向下；

圆锥摆运动，法向加速度的方向一直在改变，所以总的加速度也一直在改变。

第 6 题

【0519】对于沿曲线运动的物体，以下几种说法中哪一种是正确的：

(A) 切向加速度必不为零

(B) 法向加速度必不为零（拐点处除外）

(C) 由于速度沿切线方向，法向分速度必为零，因此法向加速度必为零

(D) 若物体作匀速率运动，其总加速度必为零

(E) 若物体的加速度 $\vec{a}$ 为恒矢量，它一定作匀变速率运动

解析

【答案】B

【解析】曲线运动的加速度。

在自然坐标系中，质点的速度为

$$\vec{v} = v\vec{e}_\tau$$

加速度为

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{e}_\tau + \frac{v^2}{R}\vec{e}_n$$

$$a_\tau = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}, a_n = \frac{v^2}{R}$$

R 是曲线某点的曲率半径。
所以，当物体做匀速率曲线运动时，速率不变，切向加速度为零，但法向加速度不为零，所以其总加速度不为零，因为虽然速度的大小不变，但速度的方向一直在改变，因此速度矢量在改变，所以必然有加速度；
除拐点外，物体的法向加速度永远大于零，因为法向单位矢量永远指向曲线凹的一侧；
物体的速度只有切向分量，法向分量永远为零，但并不说明加速度也只有切向分量，因为加速度是与速度的变化量有关，并不是与速度有关；
若物体的加速度 $\vec{a}$ 为恒矢量，那么有可能物体的切向加速度和法向加速度都在变化，比如抛体运动，其加速度为重力加速度，为恒矢量，但运动过程中的切向加速度和法向加速度一直是变化的，物体并不是作匀变速率运动（匀变速率即要求切向加速度的大小为常量）。

第 7 题

【0602】质点作曲线运动，$\vec{r}$ 表示位置矢量，$\vec{v}$ 表示速度，$\vec{a}$ 表示加速度，S 表示路程，a_τ 表示切向加速度，下列表达式中，(1) $\mathrm{d}v/\mathrm{d}t=a$，(2) $\mathrm{d}r/\mathrm{d}t=v$，(3) $\mathrm{d}S/\mathrm{d}t=v$，(4) $|\mathrm{d}\vec{v}/\mathrm{d}t|=a_\tau$

(A) 只有 (1)、(4) 是对的
(B) 只有 (2)、(4) 是对的
(C) 只有 (2) 是对的
(D) 只有 (3) 是对的

解析

【答案】D
【解析】曲线运动中速度和加速度的概念。
在自然坐标系中，质点的速度为

$$\vec{v}=v\vec{\mathrm{e}}_\tau$$
$$v=\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}$$

加速度为

$$\vec{a}=\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{\mathrm{e}}_\tau+\frac{v^2}{R}\vec{\mathrm{e}}_n$$
$$a_\tau=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t},a_n=\frac{v^2}{R},a=|\vec{a}|=\sqrt{a_\tau^2+a_n^2}$$

R 是曲线某点的曲率半径。
另外，一般地

$$\vec{v}=\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$$
$$v=|\vec{v}|=\left|\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\right|\neq\frac{\mathrm{d}|\vec{r}|}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$$

第 8 题

【0604】某物体的运动规律为 $\mathrm{d}v/\mathrm{d}t=-kv^2t$，式中的 k 为大于零的常量。当 $t=0$ 时，初速为 v_0，则速度 v 与时间 t 的函数关系是

(A) $v=\frac{1}{2}kt^2+v_0$　　(B) $v=-\frac{1}{2}kt^2+v_0$　　(C) $\frac{1}{v}=\frac{1}{2}kt^2+\frac{1}{v_0}$　　(D) $\frac{1}{v}=-\frac{1}{2}kt^2+\frac{1}{v_0}$

解析

【答案】C

【解析】已知加速度求速度，但要用到分离变量法。

依题意，有

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-kv^2t$$
$$-\frac{\mathrm{d}v}{v^2}=kt\mathrm{d}t$$
$$\int_{v_0}^{v}-\frac{\mathrm{d}v}{v^2}=\int_0^t kt\mathrm{d}t$$
$$\frac{1}{v}-\frac{1}{v_0}=\frac{1}{2}kt^2$$
$$\frac{1}{v}=\frac{1}{v_0}+\frac{1}{2}kt^2$$

第 9 题

【0014】在相对地面静止的坐标系内，A、B 二船都以 2 m/s 速率匀速行驶，A 船沿 x 轴正向，B 船沿 y 轴正向。今在 A 船上设置与静止坐标系方向相同的坐标系 (x、y 方向单位矢用 $\vec{e}_x$、$\vec{e}_y$ 表示)，那么在 A 船上的坐标系中，B 船的速度（以 m/s 为单位）为

(A) $2\vec{e}_x+2\vec{e}_y$　　(B) $-2\vec{e}_x+2\vec{e}_y$　　(C) $-2\vec{e}_x-2\vec{e}_y$　　(D) $2\vec{e}_x-2\vec{e}_y$

解析

【答案】B

【解析】相对运动，伽利略速度变换公式。

以地为静止参考系，A 船为运动参考系，B 船为研究对象，则依题意，有

$$\vec{v}=2\vec{e}_y,\vec{v}_0=2\vec{e}_x$$

根据伽利略速度相加公式

$$\vec{v}=\vec{v}_0+\vec{v}'$$

可得 B 船相对 A 船的运动速度为

$$\vec{v}'=\vec{v}-\vec{v}_0=2\vec{e}_y-2\vec{e}_x$$

第 10 题

【5382】质点作半径为 R 的变速圆周运动时的加速度大小为（v 表示任一时刻质点的速率）

(A) $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$　　(B) $\dfrac{v^2}{R}$　　(C) $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+\dfrac{v^2}{R}$　　(D) $\sqrt{\left(\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)^2+\dfrac{v^4}{R^2}}$

解析

【答案】D

【解析】曲线运动的加速度。

切向加速度

$$a_\tau=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

法向加速度

$$a_n=\frac{v^2}{R}$$

总加速度

$$\vec{a}=a_\tau\vec{e}_\tau+a_n\vec{e}_n$$

$$a=\sqrt{a_\tau^2+a_n^2}=\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)^2+\frac{v^4}{R^2}}$$

第 11 题

【0026】一飞机相对空气的速度大小为 200 km/h，风速为 56 km/h，方向从西向东。地面雷达站测得飞机速度大小为 192 km/h，方向是

(A) 南偏西 16.3°　　(B) 北偏东 16.3°　　(C) 向正南或向正北　　(D) 西偏北 16.3°

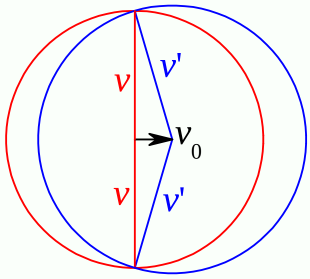
(E) 东偏南 16.3°

解析

【答案】C

【解析】相对运动。

以地面为静止参考系，风为运动参考系，飞机为研究对象，由西向东为 x 轴正方向，由南向北为 y 轴正方向。依题意，$\vec{v}_0=56\vec{e}_x$ km/h，$v=192$ km/h，$v'=200$ km/h，其中 $\vec{v}$ 和 $\vec{v}'$ 的方向均未知。但由于 $56^2+192^2=200^2$，由下图很容易得到，$\vec{v}$ 的方向为正南或正北。而 $\vec{v}'$ 的方向则为南偏西或北偏西 $\arcsin\dfrac{v_0}{v'}=\arcsin\dfrac{56}{200}\approx 0.2838\ \mathrm{rad}\approx 16.3°$。



第 12 题

【0601】下列说法哪一条正确？

(A) 加速度恒定不变时，物体运动方向也不变

(B) 平均速率等于平均速度的大小

(C) 不管加速度如何，平均速率表达式总可以写成 (v_1、v_2 分别为初、末速率)$\bar{v}=(v_1+v_2)/2$

(D) 运动物体速率不变时，速度可以变化

解析

【答案】D

【解析】速度、加速度的概念。

抛体运动，加速度恒为重力加速度，保持不变，但物体的运动方向一直在发生变化；

平均速率等于路程除以时间 $\bar{v}=\Delta s/\Delta t$，平均速度的大小等于位移的大小除以时间 $|\bar{\vec{v}}|=|\Delta\vec{r}/\Delta t|=|\Delta\vec{r}|/\Delta t$，一般情况下，位移的大小并不会等于路程 $|\Delta\vec{r}|\neq\Delta s$，所以一般情况下，平均速率并不会等于平均速度的大小；

$\bar{v}=(v_1+v_2)/2$ 这个只是匀变速直线运动中平均速率与始末速率之间的关系，并不适用于任意运动；

做匀速率圆周运动的物体的速率保持不变，但速度一直在变化，因为速度是个矢量，既有大小也有方向，大小不同方向改变时，速度矢量也发生变化。

第 13 题

【0686】某人骑自行车以速率 v 向西行驶，今有风以相同速率从北偏东 30° 方向吹来，试问人感到风从哪个方向吹来？

(A) 北偏东 30° (B) 南偏东 30° (C) 北偏西 30° (D) 西偏南 30°

解析

【答案】C

【解析】相对运动。

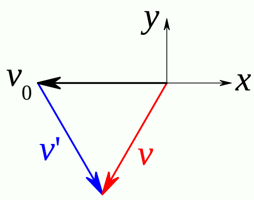
以地为静止参考系，人为运动参考系，风为研究对象，由西向东为 x 轴正方向，由南向北为 y 轴正方向，依题意，有

$$\vec{v}_0=-v\vec{e}_x$$

$$\vec{v} = v(-\sin 30°\vec{e}_x - \cos 30°\vec{e}_y)$$

所以，根据伽利略速度相加公式，有

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}'$$
$$\vec{v}' = \vec{v} - \vec{v}_0 = v(-\sin 30°\vec{e}_x - \cos 30°\vec{e}_y) - (-v\vec{e}_x)$$
$$= v\left[\left(1 - \frac{1}{2}\right)\vec{e}_x - \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{e}_y\right] = v\left(\frac{1}{2}\vec{e}_x - \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{e}_y\right)$$



第 14 题

【0338】质量为 m 的物体自空中落下，它除受重力外，还受到一个与速度平方成正比的阻力的作用，比例系数为 k，k 为正值常量。该下落物体的收尾速度 (即最后物体作匀速运动时的速度) 将是

(A) $\sqrt{\frac{mg}{k}}$ (B) $\frac{g}{2k}$ (C) gk (D) $\sqrt{gk}$

解析

【答案】A

【解析】质点动力学，牛顿第二定律。

物体受到两个力的作用：竖直向下的重力 mg，竖直向上的空气阻力 $-kv^2$，当物体作匀速运动时，它的加速度为零，所以它所受的合力为零，所以有

$$mg - kv^2 = 0$$
$$v = \sqrt{\frac{mg}{k}}$$

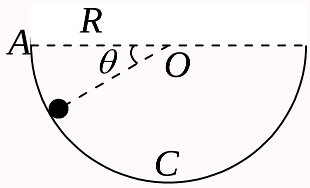
第 15 题

【0094】如图所示，假设物体沿着竖直面上圆弧形轨道下滑，轨道是光滑的，在从 A 至 C 的下滑过程中，下面哪个说法是正确的？

(A) 它的加速度大小不变，方向永远指向圆心 (B) 它的速率均匀增加

(C) 它的合外力大小变化，方向永远指向圆心 (D) 它的合外力大小不变

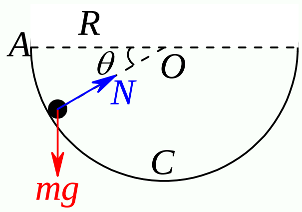
(E) 轨道支持力的大小不断增加



解析

【答案】E

【解析】质点动力学，牛顿第二定律，机械能守恒定律。



物体下滑过程中，轨道光滑，所以机械能守恒。在任意位置，物体共受到两个力的作用：竖直向下的重力 mg，指向圆心的轨道支持力 N。轨道支持力与重力的分力提供物体做圆周运动的向心力，重力的另一个分力使物体具有切向加速度，即物体即有切向加速度，也有法向加速度。所以 A、C 错误。

设在图示任意 θ 角处，物体的速度大小为 v，以 A 点处为重力势能的零点，由于题目没说明物体从 A 处由静止开始下滑，所以一般地假定物体在 A 处的速度大小为 v_0，则由机械能守恒定律，有

$$0+\frac{1}{2}mv_0^2=-mgR\sin\theta+\frac{1}{2}mv^2$$

$$v=\sqrt{v_0^2+2gR\sin\theta}$$

而由牛顿第二定律，有

$$N-mg\sin\theta=ma_n=m\frac{v^2}{R}$$

$$mg\cos\theta=ma_\tau=m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\Rightarrow\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=g\cos\theta$$

所以，切向加速度会随 θ 变化，速率的变化是不均匀的，所以 B 错误。而

$$N-mg\sin\theta=m\frac{v^2}{R}$$

$$N=mg\sin\theta+m\frac{v^2}{R}=mg\sin\theta+m\frac{v_0^2+2gR\sin\theta}{R}=3mg\sin\theta+m\frac{v_0^2}{R}$$

随着 θ 的增大，N 也增大。而合力的大小为

$$F=\sqrt{(N-mg\sin\theta)^2+(mg\cos\theta)^2}=\sqrt{m^2\left(\frac{v^2}{R}\right)^2+(mg\cos\theta)^2}$$

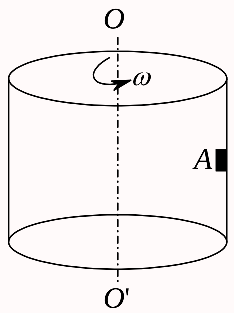
$$=m\sqrt{\left(\frac{v_0^2+2gR\sin\theta}{R}\right)^2+(g\cos\theta)^2}$$

显然，合力大小也会随着 θ 的变化而变化，所以 D 错误。

第 16 题

【0029】竖立的圆筒形转笼，半径为 R，绕中心轴 OO' 转动，物块 A 紧靠在圆筒的内壁上，物块与圆筒间的摩擦系数为 μ，要使物块 A 不下落，圆筒转动的角速度 ω 至少应为

(A) $\sqrt{\dfrac{\mu g}{R}}$ (B) $\sqrt{\mu g}$ (C) $\sqrt{\dfrac{g}{\mu R}}$ (D) $\sqrt{\dfrac{g}{R}}$



解析

【答案】C

【解析】质点动力学，牛顿第二定律，机械能守恒定律。

物块共受到三个力的作用：竖直向下的重力 mg，垂直圆筒内壁指向转轴的支持力 N，沿圆筒内壁方向竖直向上的摩擦力 f。其中 N 提供物块做圆周运动的向心力，即

$$N = m\frac{v^2}{R} = m\omega^2 R$$

而物块不下落，物块与圆筒之间的摩擦力为静摩擦力，所以

$$f \leqslant \mu N$$
$$f = mg$$

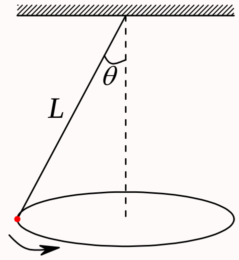
因此，有

$$mg \leqslant \mu N = \mu m\omega^2 R$$
$$\omega^2 \geqslant \frac{g}{\mu R}$$
$$\omega \geqslant \sqrt{\frac{g}{\mu R}}$$

第 17 题

【0334】一个圆锥摆的摆线长为 L，摆线与竖直方向的夹角恒为 θ，如图所示，则摆锤转动的周期为

(A) $\sqrt{\dfrac{L}{g}}$ (B) $\sqrt{\dfrac{L\cos\theta}{g}}$ (C) $2\pi\sqrt{\dfrac{L}{g}}$ (D) $2\pi\sqrt{\dfrac{L\cos\theta}{g}}$



解析

【答案】D
【解析】质点动力学，牛顿第二定律。
摆锤共受到两个力的作用：竖直向下的重力 mg，沿绳子方向的拉力 T，这两个力在竖直方向上合力为零，在水平面上的合力提供摆锤作圆周运动的向心力，设摆锤运动的速率为 v，则有

$$T\cos\theta = mg$$
$$T\sin\theta = m\frac{v^2}{L\sin\theta}$$
$$v^2 = \frac{TL\sin^2\theta}{m} = \frac{mgL\sin^2\theta}{m\cos\theta} = \frac{gL\sin^2\theta}{\cos\theta}$$
$$v = \sqrt{\frac{gL}{\cos\theta}}\sin\theta$$

所以摆锤转动的周期为

$$T = \frac{2\pi L\sin\theta}{v} = \frac{2\pi L\sin\theta}{\sqrt{\frac{gL}{\cos\theta}}\sin\theta} = 2\pi\sqrt{\frac{L\cos\theta}{g}}$$

第 18 题

【0367】质量为 20 g 的子弹沿 x 轴正向以 500 m/s 的速率射入一木块后，与木块一起仍沿 x 轴正向以 50 m/s 的速率前进，在此过程中木块所受冲量的大小为
(A) 9 N·s (B) −9 N·s (C) 10 N·s (D) −10 N·s

解析

【答案】A
【解析】动量定理，动量守恒定律。
子弹和木块组成的系统在过程中动量守恒，子弹受到的冲量与木块受到的冲量等值反向，因为二者受到的力是一对作用力与反作用力，二者作用的时间相同。依题意，子弹受到的冲量为

$$I = \Delta p = mv_2 - mv_1 = m(v_2 - v_1) = 0.02\times(50-500) = -9\ \text{N}\cdot\text{s}$$

所以木块受到的冲量为 9 N·s。

第 19 题

【0379】在水平冰面上以一定速度向东行驶的炮车，向东南（斜向上）方向发射一炮弹，对于炮车和炮弹这一系统，在此过程中（忽略冰面摩擦力及空气阻力）

(A) 总动量守恒
(B) 总动量在炮身前进的方向上的分量守恒，其它方向动量不守恒
(C) 总动量在水平面上任意方向的分量守恒，竖直方向分量不守恒
(D) 总动量在任何方向的分量均不守恒

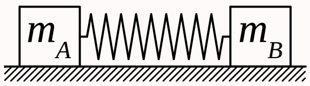
解析

【答案】C
【解析】动量定理，动量守恒定律。
由炮车和炮弹组成的系统，在发射炮弹的过程中，忽略重力、冰面摩擦力及空气阻力（重力与冲击力相比可以忽略），但冰面的支持力在这个过程中不能忽略，【系统发射炮弹前只在水平方向上有动量，发射炮弹之后，炮车仍然在水平方面上运动，炮弹的速度既有水平分量又有竖直分量】而这个支持力一定垂直于冰面，即沿竖直方向，所以系统在水平方向上的动量守恒，在竖直方向上的动量不守恒。

第 20 题

【0386】A、B 两木块质量分别为 m_A 和 m_B，且 $m_B=2m_A$，两者用一轻弹簧连接后静止于光滑水平桌面上，如图所示。若用外力将两木块压近使弹簧被压缩，然后将外力撤去，则此后两木块运动动能之比 E_{kA}/E_{kB} 为

(A) $1/2$　　(B) $\sqrt{2}/2$　　(C) $\sqrt{2}$　　(D) 2



解析

【答案】D
【解析】动量守恒定律。
由两木块和轻弹簧组成的系统，在运动过程中只受到弹簧的内力的作用，所以系统的动量守恒，而开始时系统静止，假定任意时刻二者的速度分别为 v_A 和 v_B，则有

$$0=m_Av_A+m_Bv_B\Rightarrow v_A=\frac{m_B}{m_A}v_B$$

因此，二者的动能之比为

$$\frac{E_{kA}}{E_{kB}}=\frac{\frac{1}{2}m_Av_A^2}{\frac{1}{2}m_Bv_B^2}=\frac{m_Av_A^2}{m_Bv_B^2}=\frac{m_A\frac{m_B^2}{m_A^2}v_B^2}{m_Bv_B^2}=\frac{m_Am_B^2}{m_Bm_A^2}=\frac{m_B}{m_A}=2$$

第 21 题

【0659】一炮弹由于特殊原因在水平飞行过程中，突然炸裂成两块，其中一块作自由下落，则另一块着地点（飞行过程中阻力不计）

(A) 比原来更远 (B) 比原来更近

(C) 仍和原来一样远 (D) 条件不足，不能判定

解析

【答案】A

【解析】动量守恒定律。

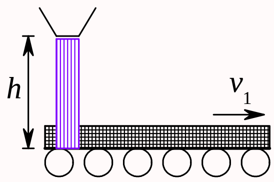
炮弹在爆炸过程中动量守恒，而依题意，爆炸前，炮弹的速度沿水平方向，爆炸后一块碎片作自由下落，所以其爆炸后的速度为零，所以另一块碎片的速度一定沿水平方向，且其速度大小一定大于原来炮弹的速度大小，相同高度，落地时间不变，速度变大，所以飞行的距离变远。

第 22 题

【0703】如图所示，砂子从 $h = 0.8$ m 高处下落到以 3 m/s 的速率水平向右运动的传送带上。取重力加速度 $g = 10$ m/s^2。传送带给予刚落到传送带上的砂子的作用力的方向为

(A) 与水平夹角 53° 向下 (B) 与水平夹角 53° 向上

(C) 与水平夹角 37° 向上 (D) 与水平夹角 37° 向下



解析

【答案】B

【解析】动能定理，机械能守恒定律，动量定理。

砂子自由下落，碰到传送带前机械能守恒，具有竖直向下的速度 v_0，

$$mgh = \frac{1}{2}mv_0^2$$
$$v_0 = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \times 10 \times 0.8} = 4 \text{ m/s}$$

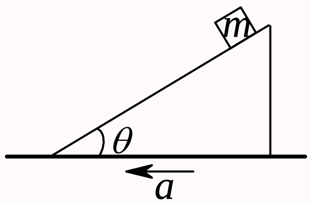
碰到传送带后，砂子具有与传送带相同的水平向右的速度 v_1，在这个过程中，受到了传送带施加给砂子的作用力（忽略这个过程中砂子重力的影响），这个作用力的冲量使得砂子的动量发生变化，以水平向右为 x 轴正方向，竖直向上为 y 轴正方向，则冲量为

$$\vec{I} = \vec{F}\Delta t = \Delta\vec{p} = m(\vec{v}_1 - \vec{v}_0) = m[3\vec{e}_x - (-4\vec{e}_y)] = m(3\vec{e}_x + 4\vec{e}_y)$$

第 23 题

【0706】如图所示。一斜面固定在卡车上，一物块置于该斜面上。在卡车沿水平方向加速起动的过程中，物块在斜面上无相对滑动。此时斜面上摩擦力对物块的冲量的方向

(A) 是水平向前的
(B) 只可能沿斜面向上
(C) 只可能沿斜面向下
(D) 沿斜面向上或向下均有可能



解析

【答案】D

【解析】牛顿运动定律，动量定理。

物块共受到三个力的作用：竖直向下的重力 mg，垂直斜面向上的支持力 N，沿斜面方向的静摩擦力 f，在这三个力的作用下，物块具有和卡车一样的水平向左的加速度 a，所以它所受的合力也是沿水平向左方向的，假定 f 沿斜面向上，则有

$$N\sin\theta - f\cos\theta = ma$$

$$N\cos\theta + f\sin\theta = mg$$

所以

$$N = m(a\sin\theta + g\cos\theta)$$

$$f = m(g\sin\theta - a\cos\theta)$$

显然，当 $g\sin\theta - a\cos\theta > 0$ 时，$f > 0$，沿斜面向上；当 $g\sin\theta - a\cos\theta < 0$ 时，$f < 0$，沿斜面向下。

第 24 题

【0406】人造地球卫星绕地球作椭圆轨道运动，卫星轨道近地点和远地点分别为 A 和 B。用 L 和 E_k 分别表示卫星对地心的角动量及其动能的瞬时值，则应有

(A) $L_A > L_B$，$E_{kA} > E_{kB}$
(B) $L_A = L_B$，$E_{kA} < E_{kB}$
(C) $L_A = L_B$，$E_{kA} > E_{kB}$
(D) $L_A < L_B$，$E_{kA} < E_{kB}$

解析

【答案】C

【解析】机械能守恒定律，角动量守恒定律。

人造地球卫星在绕地球运动的过程中，只受到地球万有引力的作用，万有引力是有心力，是保守力，

因此机械能守恒，对地球的角动量守恒。在近地点和远地点，速度方向刚好与卫星和地球的连线垂直，所以有

$$L_A = mv_A R_A = mv_B R_B = L_B \Rightarrow v_A = \frac{R_B}{R_A} v_B$$
$$E_{kA} = \frac{1}{2} mv_A^2 = \frac{1}{2} mv_B^2 \frac{R_B^2}{R_A^2} > \frac{1}{2} mv_B^2 = E_{kB}$$

如从机械能守恒角度来看，以无穷远处为万有引力势能零点，则有

$$E_{kA} + E_{pA} = E_{kB} + E_{pB}$$
$$E_{pA} = -\frac{GMm}{R_A}, E_{pB} = -\frac{GMm}{R_B}$$
$$E_{pA} < E_{pB}, E_{kA} > E_{kB}$$

第 25 题

【0350】一个质点同时在几个力作用下的位移为：$\Delta\vec{r} = 4\vec{e}_x - 5\vec{e}_y + 6\vec{e}_z$(SI)，其中一个力为恒力 $\vec{F} = -3\vec{e}_x - 5\vec{e}_y + 9\vec{e}_z$(SI)，则此力在该位移过程中所作的功为

(A) −67 J (B) 17 J (C) 67 J (D) 91 J

解析

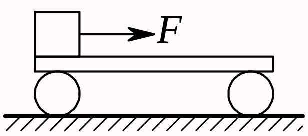
【答案】C
【解析】恒力做功。
根据恒力做功的定义

$$W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = (-3\vec{e}_x - 5\vec{e}_y + 9\vec{e}_z) \cdot (4\vec{e}_x - 5\vec{e}_y + 6\vec{e}_z) = (-3) \cdot 4 + (-5) \cdot (-5) + 9 \cdot 6 = 67 \text{ J}$$

第 26 题

【0413】如图，在光滑水平地面上放着一辆小车，车上左端放着一只箱子，今用同样的水平恒力 $\vec{F}$ 拉箱子，使它由小车的左端达到右端，一次小车被固定在水平地面上，另一次小车没有固定。试以水平地面为参照系，判断下列结论中正确的是

(A) 在两种情况下，$\vec{F}$ 做的功相等
(B) 在两种情况下，摩擦力对箱子做的功相等
(C) 在两种情况下，箱子获得的动能相等
(D) 在两种情况下，由于摩擦而产生的热相等



解析

【答案】D
【解析】恒力做功，动能定理，内力做功。
两种情况下，箱子和小车都有相对滑动，所以摩擦力都是滑动摩擦力，大小不变，因此箱子所受到的合力相同。两种情况下，箱子移动的距离不同，但箱子相对小车移动的距离相同。
力 $\vec{F}$ 不变，但力通过的位移变化，所以两种情况下 $\vec{F}$ 所做的功不同；
摩擦力不变，但位移变化，所以两种情况下，摩擦力所做的功不同；
箱子所受的合力不变，但位移变化，所以两种情况下，箱子获得的动能不同；
摩擦力不变，相对位移不变，所以两种情况下，由于摩擦而产生的热不变。

第 27 题

【5019】对功的概念有以下几种说法：(1) 保守力作正功时，系统内相应的势能增加；(2) 质点运动经一闭合路径，保守力对质点作的功为零；(3) 作用力和反作用力大小相等、方向相反，所以两者所作功的代数和必为零。在上述说法中：
(A) (1)、(2) 是正确的　　(B) (2)、(3) 是正确的
(C) 只有 (2) 是正确的　　(D) 只有 (3) 是正确的

解析

【答案】C
【解析】功，保守力，势能。
保守力做正功，势能减少；
保守力做功只与始末位置有关，与中间过程无关，换言之，经过任意闭合回路，保守力做功为零；
作用力与反作用力虽然大小相等、方向相反，但二力作用在不同物体上，通过的位移不一定相等，因此二者所做的功不一定等值反号。

第 28 题

【5020】有一劲度系数为 k 的轻弹簧，原长为 l_0，将它吊在天花板上。当它下端挂一托盘平衡时，其长度变为 l_1。然后在托盘中放一重物，弹簧长度变为 l_2，则由 l_1 伸长至 l_2 的过程中，弹性力所作的功为
(A) $-\int_{l_1}^{l_2} kx\mathrm{d}x$　　(B) $\int_{l_1}^{l_2} kx\mathrm{d}x$　　(C) $-\int_{l_1-l_0}^{l_2-l_0} kx\mathrm{d}x$　　(D) $\int_{l_1-l_0}^{l_2-l_0} kx\mathrm{d}x$

解析

【答案】C
【解析】弹性力做功。
胡克定律 $F=-kx$ 中的 x 是弹簧的形变量，所以依题意，弹簧原长为 l_0，当弹簧长度为 l 时，形变量为 $x=l-l_0$，因此弹簧的弹性力所做的功为

$$W=\int_{x_1}^{x^2} F\mathrm{d}x=\int_{l_1-l_0}^{l_2-l_0} -kx\mathrm{d}x=-\int_{l_1-l_0}^{l_2-l_0} kx\mathrm{d}x$$

第 29 题

【0073】质量为 m 的一艘宇宙飞船关闭发动机返回地球时，可认为该飞船只在地球的引力场中运动。已知地球质量为 M，万有引力恒量为 G，则当它从距地球中心 R_1 处下降到 R_2 处时，飞船增加的动能应等于

(A) $\dfrac{GMm}{R_2}$　(B) $\dfrac{GMm}{R_2^2}$　(C) $GMm\dfrac{R_1-R_2}{R_1R_2}$　(D) $GMm\dfrac{R_1-R_2}{R_1^2}$

(E) $GMm\dfrac{R_1-R_2}{R_1^2R_2^2}$

解析

【答案】C

【解析】机械能守恒定律，动能定理，万有引力势能，万有引力的功。

在宇宙飞船的运动过程中，只受到地球的万有引力的作用，万有引力是保守力，所以系统的机械能守恒，以无穷远处为万有引力势能的零点，则有

$$\frac{1}{2}mv_1^2-\frac{GMm}{R_1}=\frac{1}{2}mv_2^2-\frac{GMm}{R_2}$$

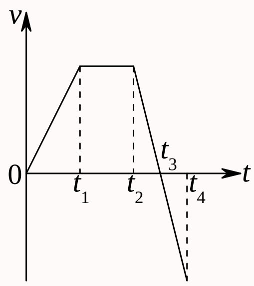
$$\Delta E_k=\frac{1}{2}mv_2^2-\frac{1}{2}mv_1^2=\frac{GMm}{R_2}-\frac{GMm}{R_1}=GMm\frac{R_1-R_2}{R_1R_2}$$

第 30 题

【0074】一个作直线运动的物体，其速度 v 与时间 t 的关系曲线如图所示。设时刻 t_1 至 t_2 间外力作功为 W_1；时刻 t_2 至 t_3 间外力作功为 W_2；时刻 t_3 至 t_4 间外力作功为 W_3，则

(A) $W_1>0$，$W_2<0$，$W_3<0$　(B) $W_1>0$，$W_2<0$，$W_3>0$

(C) $W_1=0$，$W_2<0$，$W_3>0$　(D) $W_1=0$，$W_2<0$，$W_3<0$



解析

【答案】C

【解析】动能定理，恒力的功。

t_1 时刻，物体的速度大小为 v_1，方向沿正方向；t_2 时刻，物体的速度大小为 $v_2=v_1$，方向沿正方向；t_3 时刻，物体的速度大小为 $v_3=0$；t_4 时刻，物体的速度大小为 v_4，方向沿负方向。根据动能定理

$$W_1=E_{k2}-E_{k1}=\frac{1}{2}m(v_2^2-v_1^2)=0$$

$$W_2 = E_{k3} - E_{k2} = \frac{1}{2}m(v_3^2 - v_2^2) < 0$$
$$W_3 = E_{k4} - E_{k3} = \frac{1}{2}m(v_4^2 - v_3^2) > 0$$

还可以根据力做功的公式来判断。在 t_1 到 t_2 时段，速度不变，所以加速度为零，物体所受合外力为零 $F_1 = 0$，虽然物体有通过一定的位移 $s_1 > 0$，但这个时间段外力所做的功 $W_1 = F_1 s_1 = 0$；在 t_2 到 t_3 时段，速度变小，所以加速度小于零，物体所受合外力小于零 $F_2 < 0$，但速度大于零，所以物体通过的位移 $s_2 > 0$，因此这个时间段外力所做的功 $W_2 = F_2 s_2 < 0$；在 t_3 到 t_4 时段，速度反向增大，所以加速度小于零，物体所受合外力小于零 $F_3 < 0$，但这段时间内速度小于零，所以物体通过的位移 $s_3 < 0$，因此这个时间段外力所做的功 $W_3 = F_3 s_3 > 0$。

第 31 题

【0078】质量为 m 的质点在外力作用下，其运动方程为：$\vec{r} = A\cos\omega t\vec{e}_x + B\sin\omega t\vec{e}_y$，式中 A、B、ω 都是正的常量。由此可知外力在 $t = 0$ 到 $t = \pi/(2\omega)$ 这段时间内所作的功为

(A) $\frac{1}{2}m\omega^2(A^2 + B^2)$ (B) $m\omega^2(A^2 + B^2)$ (C) $\frac{1}{2}m\omega^2(A^2 - B^2)$ (D) $\frac{1}{2}m\omega^2(B^2 - A^2)$

解析

【答案】C

【解析】动能定理，变力的功。已知运动方程求速度和加速度，再求力，再求功。

已知运动方程求速度

$$\vec{r} = A\cos\omega t\vec{e}_x + B\sin\omega t\vec{e}_y$$
$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = -A\omega\sin\omega t\vec{e}_x + B\omega\cos\omega t\vec{e}_y$$
$$\vec{v}_1 = B\omega\vec{e}_y, \vec{v}_2 = -A\omega\vec{e}_x$$

根据动能定理，可得这段时间内力所做的功为

$$W = \Delta E_k = \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2) = \frac{1}{2}m[(-A\omega)^2 - (B\omega)^2] = \frac{1}{2}m\omega^2(A^2 - B^2)$$

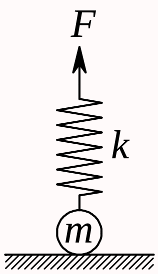
也可以通过求加速度和力再求功

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = -A\omega^2\cos\omega t\vec{e}_x - B\omega^2\sin\omega t\vec{e}_y$$
$$\vec{F} = m\vec{a} = -mA\omega^2\cos\omega t\vec{e}_x - mB\omega^2\sin\omega t\vec{e}_y$$
$$\mathrm{d}\vec{r} = (-A\omega\sin\omega t\vec{e}_x + B\omega\cos\omega t\vec{e}_y)\mathrm{d}t$$
$$\mathrm{d}W = \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = (-mA\omega^2\cos\omega t\vec{e}_x - mB\omega^2\sin\omega t\vec{e}_y)\cdot(-A\omega\sin\omega t\vec{e}_x + B\omega\cos\omega t\vec{e}_y)\mathrm{d}t$$
$$= (mA^2\omega^3\cos\omega t\sin\omega t - mB^2\omega^3\sin\omega t\cos\omega t)\mathrm{d}t = m\omega^3(A^2 - B^2)\cos\omega t\sin\omega t\mathrm{d}t$$
$$W = \int_{t_1}^{t_2} m\omega^3(A^2 - B^2)\cos\omega t\sin\omega t\mathrm{d}t = m\omega^3(A^2 - B^2)\int_{t_1}^{t_2}\cos\omega t\sin\omega t\mathrm{d}t$$
$$= m\omega^2(A^2 - B^2)\times\frac{1}{2}[\sin^2\omega t]_{t_1}^{t_2} = \frac{1}{2}m\omega^2(A^2 - B^2)[\sin^2\omega t_2 - \sin^2\omega t_1] = \frac{1}{2}m\omega^2(A^2 - B^2)$$

第 32 题

【0095】有一劲度系数为 k 的轻弹簧，竖直放置，下端悬一质量为 m 的小球，开始时使弹簧为原长而小球恰好与地接触，今将弹簧上端缓慢地提起，直到小球刚能脱离地面为止，在此过程中外力作功为

(A) $\dfrac{m^2g^2}{4k}$ (B) $\dfrac{m^2g^2}{3k}$ (C) $\dfrac{m^2g^2}{2k}$ (D) $\dfrac{2m^2g^2}{k}$ (E) $\dfrac{4m^2g^2}{k}$



解析

【答案】C

【解析】功能原理。

以轻弹簧和小球为研究系统，在整个过程中，外力做功，系统的机械能发生变化，而在整个过程中，只有弹性势能发生变化，重力势能和动能均保持不变。当小球刚好能脱离地面时，弹簧施加给小球的弹力刚好等于小球的重力，所以弹簧的形变量 x 满足

$$mg = kx \Rightarrow x = \frac{mg}{k}$$

此时弹性势能为

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}k\frac{m^2g^2}{k^2} = \frac{m^2g^2}{2k}$$

第 33 题

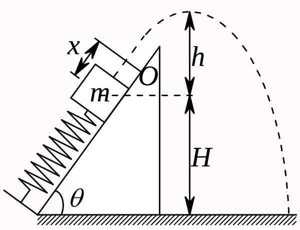
【0097】如图，劲度系数为 k 的轻弹簧在质量为 m 的木块和外力（未画出）作用下，处于被压缩的状态，其压缩量为 x。当撤去外力后弹簧被释放，木块沿光滑斜面弹出，最后落到地面上。

(A) 在此过程中，木块的动能与弹性势能之和守恒

(B) 木块到达最高点时，高度 h 满足 $\frac{1}{2}kx^2 = mgh$

(C) 木块落地时的速度 v 满足 $\frac{1}{2}kx^2 + mgH = \frac{1}{2}mv^2$

(D) 木块落地点的水平距离随 θ 的不同而异，θ 愈大，落地点愈远



解析

【答案】C

【解析】机械能守恒定律，抛体运动。

由于斜面光滑，忽略空气阻力，轻弹簧和木块的机械能守恒。以地面为重力势能零点，以弹簧自然伸展状态为弹性势能的零点，系统的机械能包括木块的动能、弹簧的弹性势能和木块的重力势能（严格来说，重力势能属于木块和地球共有）。初始状态下，木块静止，动能为零，弹性势能为 $\frac{1}{2}kx^2$，重力势能为 mgH，在最高点，木块具有水平方向的速度，所以具有一定的动能，弹性势能为零，重力势能为 $mg(H+h)$，所以在最高点的机械能为

$$mg(H+h)+\frac{1}{2}mv_x^2=\frac{1}{2}kx^2+mgH$$
$$mgh=\frac{1}{2}kx^2-\frac{1}{2}mv_x^2$$

在落地点，重力势能为零，弹性势能为零，只有木块的动能，所以

$$\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}kx^2+mgH$$

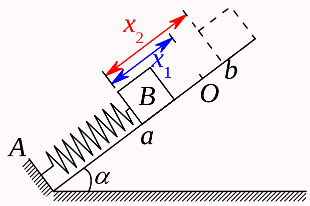
D 选项中，题目给出的条件无法写出落地点的具体表达式，但可以大概判断是错误的，当斜面倾角趋于 90° 时，落地点显然不会最远。

第 34 题

【0101】劲度系数为 k 的轻弹簧，一端与倾角为 α 的斜面上的固定档板 A 相接，另一端与质量为 m 的物体 B 相连。O 点为弹簧没有连物体、长度为原长时的端点位置，a 点为物体 B 的平衡位置。现在将物体 B 由 a 点沿斜面向上移动到 b 点（如图所示）。设 a 点与 O 点，a 点与 b 点之间距离分别为 x_1 和 x_2，则在此过程中，由弹簧、物体 B 和地球组成的系统势能的增加为

(A) $\frac{1}{2}kx_2^2+mgx_2\sin\alpha$ (B) $\frac{1}{2}k(x_2-x_1)^2+mg(x_2-x_1)\sin\alpha$

(C) $\frac{1}{2}k(x_2-x_1)^2-\frac{1}{2}kx_1^2+mgx_2\sin\alpha$ (D) $\frac{1}{2}k(x_2-x_1)^2+mg(x_2-x_1)\cos\alpha$



解析

【答案】C

【解析】重力势能和弹性势能。

以地面为重力势能的零点，以弹簧自然伸展位置为弹性势能的零点，则初态的重力势能为 mgh_a，弹性势能为 $\frac{1}{2}kx_1^2$；末态的重力势能为 mgh_b，弹性势能为 $\frac{1}{2}k(x_2-x_1)^2$；所以过程中系统势能的增加量为

$$\Delta E_p=\left[mgh_b+\frac{1}{2}k(x_2-x_1)^2\right]-\left[mgh_a+\frac{1}{2}kx_1^2\right]$$

$$= \frac{1}{2}k(x_2-x_1)^2 - \frac{1}{2}kx_1^2 + mg(h_b-h_a) = \frac{1}{2}k(x_2-x_1)^2 - \frac{1}{2}kx_1^2 + mgx_2\sin\alpha$$

第 35 题

【0339】一水平放置的轻弹簧，劲度系数为 k，其一端固定，另一端系一质量为 m 的滑块 A，A 旁又有一质量相同的滑块 B，如图所示。设两滑块与桌面间无摩擦。若用外力将 A、B 一起推压使弹簧压缩量为 d 而静止，然后撤消外力，则 B 离开时的速度为

(A) 0 (B) $d\sqrt{\frac{k}{2m}}$ (C) $d\sqrt{\frac{k}{m}}$ (D) $d\sqrt{\frac{2k}{m}}$

解析

【答案】B

【解析】机械能守恒定律。

弹簧恢复原长时 A、B 分离，设分离时的速度大小为 v。在此过程中，由 A、B 和弹簧组成的系统的机械能守恒。以弹簧自然伸展位置为弹性势能的零点，则有

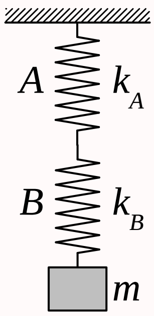
$$\frac{1}{2}kd^2 = \frac{1}{2}(2m)v^2$$

$$v = d\sqrt{\frac{k}{2m}}$$

第 36 题

【0408】A、B 二弹簧的劲度系数分别为 k_A 和 k_B，其质量均忽略不计。今将二弹簧连接起来并竖直悬挂，如图所示。当系统静止时，二弹簧的弹性势能 E_{PA} 与 E_{PB} 之比为

(A) $\frac{E_{PA}}{E_{PB}} = \frac{k_A}{k_B}$ (B) $\frac{E_{PA}}{E_{PB}} = \frac{k_A^2}{k_B^2}$ (C) $\frac{E_{PA}}{E_{PB}} = \frac{k_B}{k_A}$ (D) $\frac{E_{PA}}{E_{PB}} = \frac{k_B^2}{k_A^2}$



解析

【答案】C

【解析】胡克定律，弹性势能。

不计弹簧质量时，二者的弹力相等，都等于物体的重力，即

$$k_A x_A = k_B x_B = mg \Rightarrow \frac{x_A}{x_B} = \frac{k_B}{k_A}$$

而以弹簧自然伸展时的状态为弹簧弹性势能的零点，则两个弹簧的弹性势能分别为

$$E_{PA} = \frac{1}{2}k_A x_A^2$$
$$E_{PB} = \frac{1}{2}k_B x_B^2$$

所以二者之比为

$$\frac{E_{PA}}{E_{PB}} = \frac{\frac{1}{2}k_A x_A^2}{\frac{1}{2}k_B x_B^2} = \frac{k_A x_A^2}{k_B x_B^2} = \frac{k_A x_A}{k_B x_B} \times \frac{x_A}{x_B} = \frac{x_A}{x_B} = \frac{k_B}{k_A}$$

第 37 题

【0441】一特殊的轻弹簧，弹性力 $F = -kx^3$，k 为一常量系数，x 为伸长 (或压缩) 量。现将弹簧水平放置于光滑的水平面上，一端固定，一端与质量为 m 的滑块相连而处于自然长度状态。今沿弹簧长度方向给滑块一个冲量，使其获得一速度 v，压缩弹簧，则弹簧被压缩的最大长度为

(A) $\sqrt{\frac{m}{k}}v$　　(B) $\sqrt{\frac{k}{m}}v$　　(C) $\left(\frac{4mv}{k}\right)^{1/4}$　　(D) $\left(\frac{2mv^2}{k}\right)^{1/4}$

解析

【答案】D

【解析】胡克定律，弹性势能，机械能守恒定律，动能定理。

开始时滑块获得一定的速度，因此具有一定的动能，之后在弹簧弹力的作用下，当滑块速度降为零时，弹簧被压缩的最厉害，因此，由动能定理，得

$$W = -\Delta E_k = \frac{1}{2}m(0^2 - v^2) = -\frac{1}{2}mv^2 = \int_0^x F\mathrm{d}x = \int_0^x -kx^3\mathrm{d}x = -\frac{1}{4}kx^4$$
$$x = \left(\frac{2mv^2}{k}\right)^{1/4}$$

第 38 题

【0442】对于一个物体系来说，在下列的哪种情况下系统的机械能守恒？

(A) 合外力为 0　　(B) 合外力不作功

(C) 外力和非保守内力都不作功　　(D) 外力和保守内力都不作功

解析

【答案】C
【解析】机械能守恒定律。
由质点系的动能定理可知，质点系中所有内力和外力所做的功等于质点系动能的增加量，

$$\Delta E_k = W_{内力} + W_{外力} = W_{保守内力} + W_{非保守内力} + W_{外力}$$

其中所有保守内力所做的功又等于质点系势能的减少量，

$$W_{保守内力} = -\Delta E_p$$

而质点系的机械能等于质点系的动能和势能之和，

$$E = E_k + E_p$$

$$\Delta E = \Delta E_k + \Delta E_p = W_{非保守内力} + W_{外力}$$

所以，当外力和非保守内力不作功时，质点系的机械能守恒。

第 39 题

【0479】一质点在几个外力同时作用下运动时，下述哪种说法正确？
(A) 质点的动量改变时，质点的动能一定改变
(B) 质点的动能不变时，质点的动量也一定不变
(C) 外力的冲量是零，外力的功一定为零
(D) 外力的功为零，外力的冲量一定为零

解析

【答案】C
【解析】动量定理，动能定理。
匀速圆周运动中，质点的动量改变，但动能不变；所以 A、B 错误。
质点与固定的墙壁发生完全弹性碰撞，质点的动能保持不变，但动量发生变化，因此外力做功为零，但外力的冲量不为零；所以 D 错误。
从冲量和功的定义来看，在一个很小的时间段 $\mathrm{d}t$ 内，通常认为外力在这个很短的时间段内为恒力，因此如果外力的冲量 $\mathrm{d}\vec{I} = \vec{F}\mathrm{d}t$ 为零，则表示外力 $\vec{F}$ 为零，那么外力的功 $\mathrm{d}W = \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = \vec{F}\cdot\vec{v}\mathrm{d}t = \vec{v}\cdot\vec{F}\mathrm{d}t$ 也一定为零；但对于一个有限长度的时间段 Δt 内，力可以是一个变力，这时如果外力的冲量为零，则力一般情况下并不时时刻刻为零，因此一般情况下会认为该力的功不一定为零。
但从动量定理

$$\vec{I} = \Delta\vec{p} = m\Delta\vec{v} = m(\vec{v}_2 - \vec{v}_1)$$

可知，当冲量为零时，$\vec{v}_2 = \vec{v}_1$，即质点在始末状态的速度相等，那么根据动能定理

$$W = \Delta E_k = \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2) = 0$$

所以质点在始末状态的动能一定相等，因此力的功一定为零。

第 40 题

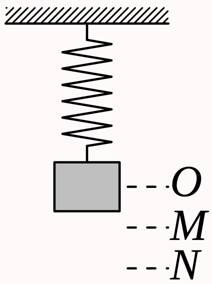
【5262】一物体挂在一弹簧下面，平衡位置在 O 点，现用手向下拉物体，第一次把物体由 O 点拉到 M 点，第二次由 O 点拉到 N 点，再由 N 点送回 M 点。则在这两个过程中

(A) 弹性力作的功相等，重力作的功不相等

(B) 弹性力作的功相等，重力作的功也相等

(C) 弹性力作的功不相等，重力作的功相等

(D) 弹性力作的功不相等，重力作的功也不相等



解析

【答案】B

【解析】保守力做功。

重力的弹性力都是保守力，保守力做功只与始末位置有关，与中间过程无关，所以二者的功都相等。

第 41 题

【5379】当重物减速下降时，合外力对它做的功

(A) 为正值 (B) 为负值

(C) 为零 (D) 先为正值，后为负值

解析

【答案】B

【解析】动能定理。

减速下降，速度越来越小，所以动能越来越小，根据动能定理，合外力所做的功等于动能的增加量，动能减小，所以外力的功为负值。这里的合外力包含了重力。

第 42 题

【0020】一质点在力 $F = 5m(5-2t)$(SI) 的作用下，$t=0$ 时从静止开始作直线运动，式中 m 为质点的质量，t 为时间，则当 $t = 5$ s 时，质点的速率为

(A) 50 m/s (B) 25 m/s (C) 0 (D) -50 m/s

解析

【答案】C

【解析】动量定理。

已知力随时间的变化关系，可以求得任意时间段的冲量，根据动量定理，已知初时刻的动量，可以求得末时刻的动量

$$I=\int_0^5 F\mathrm{d}t=\int_0^5 5m(5-2t)\mathrm{d}t=5m(5t-t^2)_0^5=0=\Delta p=m\Delta v=m(v-v_0)$$

$$v=v_0=0$$

本题也可以根据质点动力学和运动学来求解，知道力，求加速度，再求速度

$$F=5m(5-2t)$$

$$a=\frac{F}{m}=5(5-2t)=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

$$\mathrm{d}v=a\mathrm{d}t=5(5-2t)\mathrm{d}t$$

$$\int_{v_0}^{v}\mathrm{d}v=\int_0^t a\mathrm{d}t=\int_0^t 5(5-2t)\mathrm{d}t$$

$$v-v_0=5(5t-t^2)_0^t=5(5t-t^2)=5(5\times 5-5^2)=0$$

$$v=v_0=0$$

第 43 题

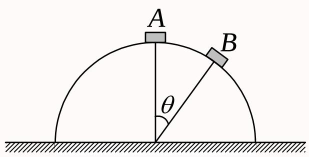
【0225】质点的质量为 m，置于光滑球面的顶点 A 处 (球面固定不动)，如图所示。当它由静止开始下滑到球面上 B 点时，它的加速度的大小为

(A) $a=2g(1-\cos\theta)$

(B) $a=g\sin\theta$

(C) $a=g$

(D) $a=\sqrt{4g^2(1-\cos\theta)^2+g^2\sin^2\theta}$



解析

【答案】D

【解析】机械能守恒定律，动能定理，加速度。

由于球面光滑，所以球面对质点的支持力一定垂直于球面，即从球心指向质点，此外质点还受到竖直向下的重力的作用，因此在质点运动过程中质点的机械能守恒，或者根据动能定理，均可求得质点在 B 处的速度大小

$$\frac{1}{2}mv^2=mgR(1-\cos\theta)$$

$$v^2=2gR(1-\cos\theta)$$

所以质点的法向加速度为

$$a_n = \frac{v^2}{R} = 2g(1-\cos\theta)$$

而沿切向方向，质点所受的合力就是重力沿切向的分力，因此质点的切向加速度为

$$a_\tau = \frac{F_\tau}{m} = \frac{mg\sin\theta}{m} = g\sin\theta$$

所以，质点的总的加速度的大小为

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{g^2\sin^2\theta + 4g^2(1-\cos\theta)^2}$$

第 44 题

【0454】一船浮于静水中，船长 L，质量为 m，一个质量也为 m 的人从船尾走到船头。不计水和空气的阻力，则在此过程中船将

(A) 不动　(B) 后退 L　(C) 后退 $L/2$　(D) 后退 $L/3$

解析

【答案】C

【解析】质心运动定理。

由人和船组成的系统，在过程中所受合外力为零，因此根据质心运动定理，质心加速度为零，而刚开始时人和船均静止，所以质心保持不动。以船头为 x 轴正方向，刚开始时船尾处为坐标原点，假定人走到船头时船尾的坐标为 x，则人的坐标为 $x+L$，根据质心的定义有

$$m\cdot 0 + m\cdot\frac{1}{2}L = m\cdot\left(x+\frac{L}{2}\right) + m\cdot(x+L)$$

$$\frac{1}{2}L = \left(x+\frac{L}{2}\right) + (x+L) = 2x+\frac{3}{2}L$$

$$x = -\frac{1}{2}L$$

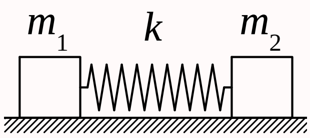
即船后退 $L/2$。

第 45 题

【0176】质量分别为 m_1、m_2 的两个物体用一劲度系数为 k 的轻弹簧相联，放在水平光滑桌面上，如图所示。当两物体相距 x 时，系统由静止释放。已知弹簧的自然长度为 x_0，则当物体相距 x_0 时，m_1 的速度大小为

(A) $\sqrt{\dfrac{k(x-x_0)^2}{m_1}}$　(B) $\sqrt{\dfrac{k(x-x_0)^2}{m_2}}$　(C) $\sqrt{\dfrac{k(x-x_0)^2}{m_1+m_2}}$　(D) $\sqrt{\dfrac{km_2(x-x_0)^2}{m_1(m_1+m_2)}}$

(E) $\sqrt{\dfrac{km_1(x-x_0)^2}{m_2(m_1+m_2)}}$



解析

【答案】D

【解析】机械能守恒定律，动量守恒定律。

由 m_1、m_2 和轻弹簧组成的系统，在过程中所受合外力为零，且内力为弹性的弹性力，是保守力，所以系统的动量守恒，机械能守恒。依题意，当两物体相距 x 时，弹簧的形变量为 $x-x_0$，两物体静止，所以系统只有弹性势能（系统的重力势能保持不变，选为零点）；当两物体相距 x_0 时，弹簧无形变，所以系统的弹性势能为零，设此时两物体的速度分别为 v_1 和 v_2，则有

$$m_1v_1+m_2v_2=0$$
$$\frac{1}{2}m_1v_1^2+\frac{1}{2}m_2v_2^2=\frac{1}{2}k(x-x_0)^2$$

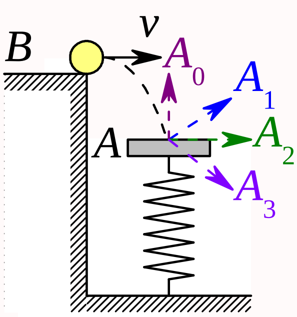
联立解得

$$v_2=-\frac{m_1}{m_2}v_1$$
$$m_1v_1^2+\frac{m_1^2}{m_2}v_1^2=\frac{m_1(m_1+m_2)}{m_2}=k(x-x_0)^2$$
$$v_1^2=\frac{km_2(x-x_0)^2}{m_1(m_1+m_2)}$$
$$|v_1|=\sqrt{\frac{km_2(x-x_0)^2}{m_1(m_1+m_2)}}$$

第 46 题

【0366】质量为 m 的平板 A，用竖立的弹簧支持而处在水平位置，如图。从平台上投掷一个质量也是 m 的球 B，球的初速为 v，沿水平方向。球由于重力作用下落，与平板发生完全弹性碰撞。假定平板是光滑的。则与平板碰撞后球的运动方向应为

(A) A_0 方向 (B) A_1 方向 (C) A_2 方向 (D) A_3 方向



解析

【答案】C

【解析】动量守恒定律。

以水平向右为 x 轴正方向，竖直向上为 y 轴正方向。球在碰到平板之前的速度可以记为 $\vec{v}_B = v_{Bx}\vec{e}_x + v_{By}\vec{e}_y$，其中 $v_{Bx} = v$，沿水平向右，$v_{By} < 0$，沿竖直向下；碰前平板 A 静止。由于平板光滑，所以 x 方向碰撞二者的速度分量保持不变，而 y 方向发生完全弹性碰撞，由于 A、B 质量相等，二者速度交换，所以碰后 B 沿竖直方向的速度为零，所以碰后 B 的总的速度方向为水平向右，即沿图中 A_2 方向。

第 47 题

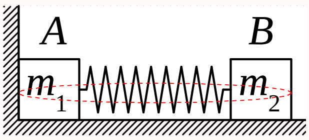
【0453】两木块 A、B 的质量分别为 m_1 和 m_2，用一个质量不计、劲度系数为 k 的弹簧连接起来。把弹簧压缩 x_0 并用线扎住，放在光滑水平面上，A 紧靠墙壁，如图所示，然后烧断扎线。判断下列说法哪个正确。

(A) 弹簧由初态恢复为原长的过程中，以 A、B、弹簧为系统，动量守恒

(B) 在上述过程中，系统机械能守恒

(C) 当 A 离开墙后，整个系统动量守恒，机械能不守恒

(D) A 离开墙后，整个系统的总机械能为 $\frac{1}{2}kx_0^2$，总动量为零



解析

【答案】B

【解析】动量定理，动量守恒定律，动能定理，机械能守恒定律。

弹簧由初态恢复为原长的过程中，墙壁对 A 有支持力，所以系统的动量不守恒，但这个支持力不作功，所以系统的机械能守恒；当 A 离开墙后，系统所受合外力为零，合外力做功也为零，所以系统的动量守恒，机械能也守恒。整个过程，系统的机械能都守恒，所以系统的总机械能等于初始状态的机械能，即弹簧的弹性势能 $\frac{1}{2}kx_0^2$【因为整个过程系统的重力势能保持不变，所以可以取为零】。A 离开墙后，系统的动量守恒，离开墙的瞬间，A 的速度为零，但 B 的速度不为零，所以系统的总动量不为零。

第 48 题

【0478】一子弹以水平速度 v_0 射入一静止于光滑水平面上的木块后，随木块一起运动。对于这一过程正确的分析是

(A) 子弹、木块组成的系统机械能守恒

(B) 子弹、木块组成的系统水平方向的动量守恒

(C) 子弹所受的冲量等于木块所受的冲量

(D) 子弹动能的减少等于木块动能的增加

解析

【答案】B

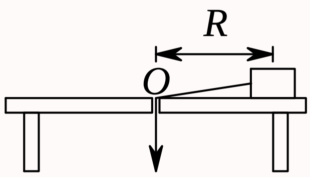
【解析】动量定理，动量守恒定律，动能定理，机械能守恒定律。

子弹与木块之间有摩擦力，这是一对内力；由于水平面光滑，所以外力（重力和水平面的支持力）都不作功，且互相平衡。运动过程中摩擦力有作功，所以系统的机械能不守恒，但动量守恒，因此子弹受到的冲量与木块受到的冲量等值反向；系统势能没有发生变化，机械能不守恒也代表动能不守恒，所以子弹动能的减少并不等于木块动能的增加，摩擦力做功部分转化为系统的内能（热能）。

第 49 题

【0128】如图所示，一个小物体，位于光滑的水平桌面上，与一绳的一端相连结，绳的另一端穿过桌面中心的小孔 O。该物体原以角速度 ω 在半径为 R 的圆周上绕 O 旋转，今将绳从小孔缓慢往下拉。则物体

(A) 动能不变，动量改变
(B) 动量不变，动能改变
(C) 角动量不变，动量不变
(D) 角动量改变，动量改变
(E) 角动量不变，动能、动量都改变



解析

【答案】E

【解析】有心力，动量定理，动能定理，角动量定理。

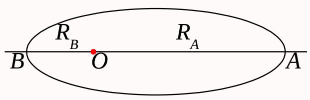
绳子对物体的作用力始终通过 O 点，在整个过程中，这个力始终不为零，所以物体的动量不守恒；物体沿绳子方向有位移，所以绳子的拉力有做功，动能有变化；但这个力始终通过 O 点，因此对 O 点的力矩为零，所以物体对 O 点的角动量守恒。

角动量守恒，半径越来越小，所以动量越来越大，速度大小越来越大，角速度越来越大，动能越来越大。

第 50 题

【0193】一人造地球卫星到地球中心 O 的最大距离和最小距离分别是 R_A 和 R_B。设卫星对应的角动量分别是 L_A、L_B，动能分别是 E_{kA}、E_{kB}，则应有

(A) $L_A > L_B$，$E_{kA} > E_{kB}$
(B) $L_A > L_B$，$E_{kA} = E_{kB}$
(C) $L_A = L_B$，$E_{kA} = E_{kB}$
(D) $L_A < L_B$，$E_{kA} = E_{kB}$
(E) $L_A = L_B$，$E_{kA} < E_{kB}$



解析

【答案】E

【解析】有心力，动量定理，动能定理，角动量定理。

人造卫星受到的地球的万有引力是有心力，是保守力，始终通过地球，所以这个力对地球的力矩为零，因此卫星对地球的角动量守恒，即 $L_A = L_B = mv_AR_A = mv_BR_B$，所以 $v_A < v_B$，因此 $E_{kA} = \frac{1}{2}mv_A^2 < \frac{1}{2}mv_B^2 = E_{kB}$。

二、填空题

第 51 题

【0007】一质点沿 x 方向运动，其加速度随时间变化关系为 $a = 3 + 2t(\mathrm{SI})$，如果初始时质点的速度 v_0 为 5 m/s，则当 t 为 3 s 时，质点的速度 $v =$_____。

解析

【答案】23 m/s

【解析】已知加速度求速度。

已知加速度随时间的变化关系和某初始时刻的速度，通过积分可以求得任意时刻的速度

$$a = 3 + 2t = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

$$\mathrm{d}v = a\mathrm{d}t = (3 + 2t)\mathrm{d}t$$

$$\int_{v_0}^{v} \mathrm{d}v = \int_{t_0}^{t} a\mathrm{d}t = \int_{t_0}^{t} (3 + 2t)\mathrm{d}t$$

$$v - v_0 = (3t + t^2)_{t_0}^{t}$$

$$v = v_0 + (3t + t^2)_{t_0}^{t} = 5 + (3t + t^2)_0^3 = 5 + (3 \times 3 + 3^2) = 23\ \mathrm{m/s}$$

第 52 题

【0255】一质点沿直线运动，其坐标 x 与时间 t 有如下关系：$x = A\mathrm{e}^{-\beta t}\cos\omega t(\mathrm{SI})$($A$、$\omega$ 皆为常数)，(1) 任意时刻 t 质点的加速度 $a =$_____；(2) 质点通过原点的时刻 $t =$_____。

解析

【答案】$A\mathrm{e}^{-\beta t}[(\beta^2 - \omega^2)\cos\omega t + 2\beta\omega\sin\omega t]$；$(2k + 1)\frac{\pi}{2\omega}, k = 0, \pm1, \pm2, \cdots$

【解析】已知运动方程求速度和加速度。

已知位置随时间的变化关系，通过求导可以求得任意时刻的速度和加速度

$$x = A\mathrm{e}^{-\beta t}\cos\omega t$$

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = A(-\beta)\mathrm{e}^{-\beta t}\cos\omega t + A\mathrm{e}^{-\beta t}(-\omega)\sin\omega t = -A\mathrm{e}^{-\beta t}(\beta\cos\omega t + \omega\sin\omega t)$$

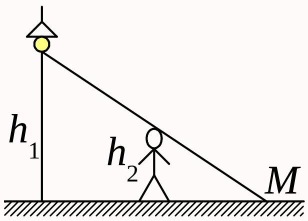
$$
\begin{aligned}
a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}&=-A(-\beta)\mathrm{e}^{-\beta t}(\beta\cos\omega t+\omega\sin\omega t)-A\mathrm{e}^{-\beta t}(-\beta\omega\sin\omega t+\omega^2\cos\omega t)\\
&=A\mathrm{e}^{-\beta t}(\beta^2\cos\omega t+\beta\omega\sin\omega t+\beta\omega\sin\omega t-\omega^2\cos\omega t)\\
&=A\mathrm{e}^{-\beta t}[(\beta^2-\omega^2)\cos\omega t+2\beta\omega\sin\omega t]
\end{aligned}
$$

而当质点通过原点，则 $x=0$，由运动方程，得

$$
\begin{gathered}
x=A\mathrm{e}^{-\beta t}\cos\omega t=0\\
\cos\omega t=0\\
\omega t=\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi=\frac{2k+1}{2}\pi, k=0,\pm1,\pm2,\cdots\\
t=(2k+1)\frac{\pi}{2\omega}, k=0,\pm1,\pm2,\cdots
\end{gathered}
$$

第 53 题

【0257】灯距地面高度为 h_1，一个人身高为 h_2，在灯下以匀速率 v 沿水平直线行走，如图所示。他的头顶在地上的影子 M 点沿地面移动的速度为 $v_M=$______。



解析

【答案】$\dfrac{h_1}{h_1-h_2}v$

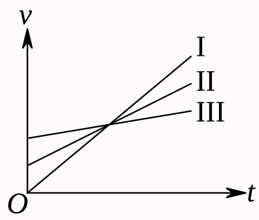
【解析】速度。

以灯正下方为坐标原点，设某 t 时刻，人的位置为 x_1，M 的位置为 x_2，则由几何关系有

$$
\begin{gathered}
\frac{x_2}{h_1}=\frac{x_2-x_1}{h_2}\\
\frac{x_2-x_1}{x_2}=1-\frac{x_1}{x_2}=\frac{h_2}{h_1}\\
\frac{x_1}{x_2}=1-\frac{h_2}{h_1}=\frac{h_1-h_2}{h_1}\\
x_2=x_1\frac{h_1}{h_1-h_2}\\
v_M\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}\frac{h_1}{h_1-h_2}=\frac{h_1}{h_1-h_2}v
\end{gathered}
$$

第 54 题

【0589】在 $v-t$ 图中所示的三条直线都表示同一类型的运动：(1) I、II、III 三条直线表示的是______运动；(2)______ 直线所表示的运动的加速度最大。



解析

【答案】匀加速直线；I

【解析】$v-t$ 曲线。

图中三条直线所表示的速度都随时间增加而变大，都是匀加速直线运动；直线 I 表示相同时间间隔内速度增加量最大，所以它表示的运动的加速度最大。

第 55 题

【0006】质点沿半径为 R 的圆周运动，运动学方程为 $\theta=3+2t^2$(SI)，则 t 时刻质点的法向加速度大小为 $a_n=$______；角加速度 $\beta=$______。

解析

【答案】$16Rt^2\ \mathrm{m/s^2}$；$4\ \mathrm{rad/s^2}$

【解析】圆周运动的线量表示和角量表示。

已知圆周运动中角坐标随时间的变化关系，通过求导可以求得角速度和角加速度

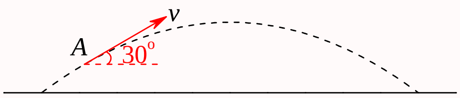
$$\theta=3+2t^2\ \mathrm{rad}$$
$$\omega=\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=4t\ \mathrm{rad/s}$$
$$\beta=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=4\ \mathrm{rad/s^2}$$

再根据角量与线量之间的关系，可得质点的线速度和加速度

$$v=\omega R=4Rt\ \mathrm{m/s}$$
$$a_n=\frac{v^2}{R}=\omega^2R=16Rt^2\ \mathrm{m/s^2}$$
$$a_\tau=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=4R\ \mathrm{m/s^2}=\beta R$$

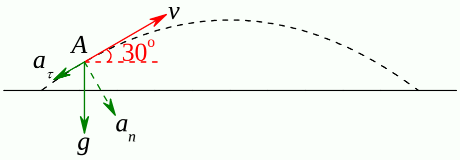
第 56 题

【0017】一物体作如图所示的斜抛运动，测得在轨道 A 点处速度 $\vec{v}$ 的大小为 v，其方向与水平方向夹角成 30°。则物体在 A 点的切向加速度 $a_\tau =$______，轨道的曲率半径 $\rho =$______。



解析

【答案】$-\dfrac{g}{2}$；$\dfrac{2\sqrt{3}v^2}{3g}$
【解析】斜抛运动的加速度。



斜抛物体的总加速度为重力加速度，大小为 g，方向竖直向下，所以，任意位置的切向加速度的大小为 $a_\tau = g\sin\theta$，图中所示方向与速度方向相反；法向加速度的大小为 $a_n = g\cos\theta = v^2/\rho$，所以该处的曲率半径为

$$\rho = \frac{v^2}{g\cos\theta} = \frac{2\sqrt{3}v^2}{3g}$$

第 57 题

【0253】已知质点的运动学方程为：$\vec{r} = \left(5 + 2t - \dfrac{1}{2}t^2\right)\vec{e}_x + \left(4t + \dfrac{1}{3}t^3\right)\vec{e}_y(\mathrm{SI})$。当 $t = 2$ s 时，加速度的大小为 $a =$______，加速度 $\vec{a}$ 与 x 轴正方向间夹角 $\alpha =$______。

解析

【答案】$\sqrt{17}$ m/s^2；104°
【解析】已知运动学方程求速度和加速度。
已知质点的位置随时间的变化关系，通过求导可以得到质点在任意时刻的速度和加速度

$$\vec{r} = \left(5 + 2t - \frac{1}{2}t^2\right)\vec{e}_x + \left(4t + \frac{1}{3}t^3\right)\vec{e}_y$$
$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = (2 - t)\vec{e}_x + (4 + t^2)\vec{e}_y$$
$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = -\vec{e}_x + 2t\vec{e}_y$$

所以 $t = 2$ s 时，

$$\vec{a} = -\vec{e}_x + 4\vec{e}_y$$
$$a_x = -1, a_y = 4$$

$$a = \sqrt{1^2 + 4^2} = \sqrt{17}\ \mathrm{m/s^2}$$
$$\tan\alpha = \frac{a_y}{a_x} = -4, \alpha = \pi - \arctan 4 \approx 104°$$

第 58 题

【0261】一质点从静止出发沿半径 $R = 1$ m 的圆周运动，其角加速度随时间 t 的变化规律是 $\beta = 12t^2 - 6t(\mathrm{SI})$，则质点的角速度 $\omega =$_____；切向加速度 $a_\tau =$_____。

解析

【答案】$4t^3 - 3t^2$ (rad/s)；$12t^2 - 6t$ (m/s²)

【解析】圆周运动的速度和加速度的线量表示和角量表示。

已知圆周运动质点的角加速度随时间的变化关系和某个初始时刻的角速度，通过积分可以得到质点在任意时刻的角速度

$$\beta = 12t^2 - 6t = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$$
$$\mathrm{d}\omega = \beta\mathrm{d}t = (12t^2 - 6t)\mathrm{d}t$$
$$\int_{\omega_0}^{\omega}\mathrm{d}\omega = \int_{t_0}^{t}\beta\mathrm{d}t = \int_{t_0}^{t}(12t^2 - 6t)\mathrm{d}t$$
$$\omega - \omega_0 = (4t^3 - 3t^2)_{t_0}^{t}$$
$$\omega = \omega_0 + (4t^3 - 3t^2)_{t_0}^{t} = 4t^3 - 3t^2\ (\mathrm{rad/s})$$

而根据切向加速度与角加速度之间的关系可以求得切向加速度为

$$a_\tau = R\beta = 12t^2 - 6t\ (\mathrm{m/s^2})$$

第 59 题

【0262】一质点沿半径为 R 的圆周运动，其路程 S 随时间 t 变化的规律为 $S = bt - \frac{1}{2}ct^2(\mathrm{SI})$，式中 b、c 为大于零的常量，且 $b^2 > Rc$。则此质点运动的切向加速度 $a_\tau =$_____；法向加速度 $a_n =$_____。

解析

【答案】$-c$ (m/s²)；$\dfrac{(b-ct)^2}{R}$ (m/s²)

【解析】圆周运动的速度和加速度的线量表示。

已知圆周运动质点的位置随时间的变化关系，通过求导可以得到质点在任意时刻的速度和加速度

$$S = bt - \frac{1}{2}ct^2$$
$$v = \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = b - ct$$

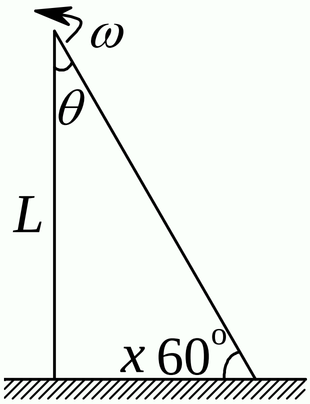
$$a_\tau = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -c\ (\mathrm{m/s^2})$$
$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{(b-ct)^2}{R}\ (\mathrm{m/s^2})$$

第 60 题

【0264】距河岸 (看成直线) 500 m 处有一艘静止的船，船上的探照灯以转速为 $n = 1$ r/min 转动。当光束与岸边成 60° 角时，光束沿岸边移动的速度 $v =$_____。

解析

【答案】$\dfrac{200\pi}{9}$ m/s ≈ 69.8 m/s
【解析】圆周运动的速度。



如上图所示，由几何关系有

$$x = L\tan\theta$$
$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \omega L\frac{1}{\cos^2\theta}$$

依题意，$L = 500$ m，$\omega = \dfrac{2\pi}{60} = \dfrac{\pi}{30}$ rad/s，$\theta = 30°$，所以光束沿岸边移动的速度为

$$v = \omega L\frac{1}{\cos^2\theta} = \frac{\pi}{30} \times 500 \times \frac{1}{\cos^2 30°} = \frac{500\pi}{30 \times 3/4} = \frac{200\pi}{9}\ \mathrm{m/s} \approx 69.8\ \mathrm{m/s}$$

第 61 题

【0509】在半径为 R 的圆周上运动的质点，其速率与时间关系为 $v = ct^2$（式中 c 为常量），则从 $t = 0$ 到 t 时刻质点走过的路程 $S(t) =$_____；t 时刻质点的切向加速度 $a_\tau =$_____；t 时刻质点的法向加速度 $a_n =$_____。

解析

【答案】$\frac{1}{3}ct^3$；$2ct$；$\frac{c^2t^4}{R}$
【解析】圆周运动的速度和加速度。
已知质点的速率与时间之间的关系，通过积分可以求得质点走过的路

$$v = \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = ct^2$$
$$\mathrm{d}S = v\mathrm{d}t = ct^2\mathrm{d}t$$
$$\int_{S_0}^{S} \mathrm{d}S = \int_{t_0}^{t} v\mathrm{d}t = \int_{t_0}^{t} ct^2\mathrm{d}t$$
$$S - S_0 = \frac{1}{3}c(t^3 - t_0^3)$$
$$S = S_0 + \frac{1}{3}c(t^3 - t_0^3) = \frac{1}{3}ct^3$$

而通过求导可得切向加速度

$$a_\tau = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 2ct$$

法向加速度则为

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{c^2t^4}{R}$$

第 62 题

【0592】已知质点的运动学方程为 $\vec{r} = 4t^2\vec{e}_x + (2t+3)\vec{e}_y$(SI)，则该质点的轨道方程为______。

解析

【答案】$x = (y-3)^2$
【解析】已知运动学方程求轨道方程。

$$\vec{r} = 4t^2\vec{e}_x + (2t+3)\vec{e}_y$$
$$x = 4t^2, y = 2t+3$$
$$2t = y - 3$$
$$4t^2 = x = (y-3)^2$$

第 63 题

【0597】一质点在 Oxy 平面内运动。运动学方程为 $x = 2t$(SI) 和 $y = 19 - 2t^2$(SI)，则在第 2 秒内质点的平均速度大小 $|\bar{\vec{v}}| =$______，2 秒末的瞬时速度大小 $v_2 =$______。

解析

【答案】$\sqrt{40}\ \mathrm{m/s} \approx 6.32\ \mathrm{m/s}$；$\sqrt{68}\ \mathrm{m/s} \approx 8.25\ \mathrm{m/s}$
【解析】已知运动学方程求平均速度和速度。
平均速度是某个时间段内质点通过的位移与时间的比值，质点在第 2 秒内的平均速度就是质点在第 2 秒初的位置到第 2 秒末的位置之间的变化（质点在第 2 秒内的位移）与时间（1 秒）的比值，所以由运动学方程可得

$$x = 2t, y = 19 - 2t^2$$
$$\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y = 2t\vec{e}_x + (19 - 2t^2)\vec{e}_y$$
$$\vec{r}_1 = 2\vec{e}_x + 17\vec{e}_y$$
$$\vec{r}_2 = 4\vec{e}_x + 11\vec{e}_y$$
$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = 2\vec{e}_x - 6\vec{e}_y$$
$$\bar{\vec{v}} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{2\vec{e}_x - 6\vec{e}_y}{1} = 2\vec{e}_x - 6\vec{e}_y$$
$$|\bar{\vec{v}}| = \sqrt{2^2 + (-6)^2} = \sqrt{40}\ \mathrm{m/s} \approx 6.32\ \mathrm{m/s}$$

而瞬时速度可以由运动学方程直接求导得到

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = 2\vec{e}_x - 4t\vec{e}_y$$
$$\vec{v}_2 = 2\vec{e}_x - 8\vec{e}_y$$
$$v_{2x} = 2, v_{2y} = -8$$
$$v_2 = \sqrt{v_{2x}^2 + v_{2y}^2} = \sqrt{2^2 + (-8)^2} = \sqrt{68}\ \mathrm{m/s} \approx 8.25\ \mathrm{m/s}$$

第 64 题

【0599】以初速率 v_0、抛射角 θ 抛出一物体，则其抛物线轨道最高点处的曲率半径为______。

解析

【答案】$\dfrac{v_0^2\cos^2\theta}{g}$
【解析】抛体运动的速度和加速度。
做抛体运动的质点，其只受到重力的作用，所以其总速度为重力加速度，方向竖直向下，在轨道最高点，其速度只有水平分量，大小为初速度的水平分量，所以此处切向加速度为零，法向加速度等于 g，因此有

$$a_n = g = \frac{v^2}{\rho} = \frac{v_0^2\cos^2\theta}{\rho}$$
$$\rho = \frac{v_0^2\cos^2\theta}{g}$$

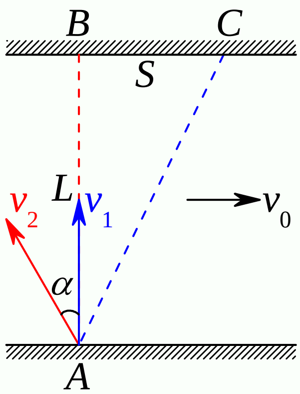
第 65 题

【0271】小船从岸边 A 点出发渡河，如果它保持与河岸垂直向前划，则经过时间 t_1 到达对岸下游 C 点；如果小船以同样速率划行，但垂直河岸横渡到正对岸 B 点，则需与 A、B 两点联成的直线成 α 角逆流划行，经过时间 t_2 到达 B 点。若 B、C 两点间距为 S，则：(1) 此河宽度 $L=$_____；(2) $\alpha=$_____。

解析

【答案】$\dfrac{St_2}{\sqrt{t_2^2-t_1^2}}$； $\arccos\dfrac{t_1}{t_2}$ 或 $\arcsin\dfrac{\sqrt{t_2^2-t_1^2}}{t_2}$

【解析】相对运动。



如上图，以水流方向为 x 轴正方向，垂直河岸指向对岸为 y 轴正方向，设水流的速度为 $\vec{v}_0=v_0\vec{e}_x$，小船划速为 v_1。依题意，第一种情况下，小船相对河水的速度为 $\vec{v}_1=v_1\vec{e}_y$；第二种情况下，小船相对河水的速度为 $\vec{v}_2=-v_1\sin\alpha\vec{e}_x+v_1\cos\alpha\vec{e}_y$；则有

$$v_1t_1=L$$

$$v_0t_1=S$$

$$v_0=v_1\sin\alpha$$

$$(v_1\cos\alpha)t_2=L$$

整理得

$$v_1t_1=L,v_1t_2\cos\alpha=L$$

$$t_1=t_2\cos\alpha$$

$$\cos\alpha=\frac{t_1}{t_2},\sin\alpha=\sqrt{1-\frac{t_1^2}{t_2^2}}=\frac{\sqrt{t_2^2-t_1^2}}{t_2}$$

$$\alpha=\arccos\frac{t_1}{t_2},\alpha=\arcsin\frac{\sqrt{t_2^2-t_1^2}}{t_2}$$

$$v_1t_1=L,v_1t_1\sin\alpha=S$$

$$L\sin\alpha=S\Rightarrow L=\frac{S}{\sin\alpha}=\frac{St_2}{\sqrt{t_2^2-t_1^2}}$$

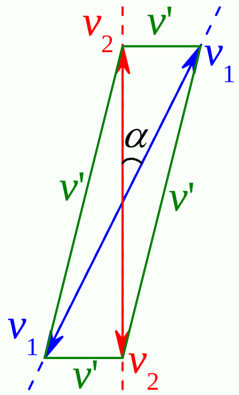
第 66 题

【0688】两条直路交叉成 α 角，两辆汽车分别以速率 v_1 和 v_2 沿两条路行驶，一车相对另一车的速度大小为______。

解析

【答案】$\sqrt{v_1^2+v_2^2+2v_1v_2\cos\alpha}$；$\sqrt{v_1^2+v_2^2-2v_1v_2\cos\alpha}$

【解析】相对运动。



如上图，共有四种可能的情况，根据三角形的余弦定理，相对速度的大小共有两种情况

$$v' = \sqrt{v_1^2+v_2^2+2v_1v_2\cos\alpha}$$
$$v' = \sqrt{v_1^2+v_2^2-2v_1v_2\cos\alpha}$$

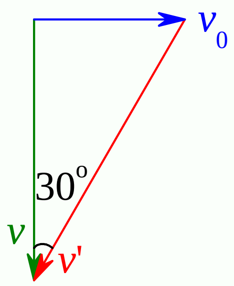
第 67 题

【0691】当一列火车以 10 m/s 的速率向东行驶时，若相对于地面竖直下落的雨滴在列车的窗子上形成的雨迹偏离竖直方向 30°，则雨滴相对于地面的速率是______；相对于列车的速率是______。

解析

【答案】17.3 m/s；20 m/s

【解析】相对运动。



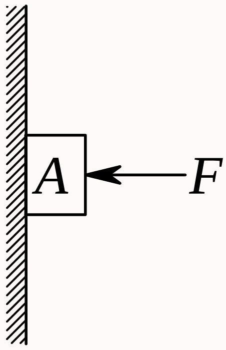
如上图，依题意，$v_0 = 10$ m/s，由图中很容易得到

$$v' = v_0/\sin 30° = 2v_0 = 20 \text{ m/s}$$

$$v = v' \cos 30° = \sqrt{3} v_0 = 17.3\ \mathrm{m/s}$$

第 68 题

【0043】沿水平方向的外力 F 将物体 A 压在竖直墙上，由于物体与墙之间有摩擦力，此时物体保持静止，并设其所受静摩擦力为 f_0，若外力增至 $2F$，则此时物体所受静摩擦力为______。



解析

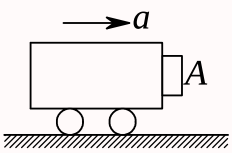
【答案】f_0

【解析】摩擦力。

静摩擦的大小是可以变化的，随外界条件的不同可能会有所不同。本题中物体 A 共受到四个力的作用而处于平衡状态（静止），水平方向受到外力 F 和墙壁的支持力 N，二者互相平衡，外力变化时，支持力也跟着变化；竖直方向受到竖直向下的重力 mg 和竖直向上的静摩擦力 f（如果墙面光滑，物体将向下运动，因此物体相对墙有向下运动的趋势，所以摩擦力方向向上），二者也相互平衡，只要外力足够大，支持力也就足够大，物体就保持静止，静摩擦力就等于重力，依题意，重力的大小就等于 $mg = f_0$，因此外力增至 $2F$ 时，物体仍然是保持静止，所以它所受到的摩擦力仍然等于重力，也就是它仍然等于 f_0。

第 69 题

【5390】如图所示，一个小物体 A 靠在一辆小车的竖直前壁上，A 和车壁间静摩擦系数是 μ_s，若要使物体 A 不致掉下来，小车的加速度的最小值应为 $a =$______。



解析

【答案】$\dfrac{g}{\mu_s}$

【解析】摩擦力。

对物体进行受力分析，共受到三个力的作用，水平方向，小车对物体的压力 N，竖直方向，竖直向

下的重力 mg，竖直向上的静摩擦力 f，在这三个力作用下，物体与小车相对静止，共同具有水平向右的加速度 a，所以有

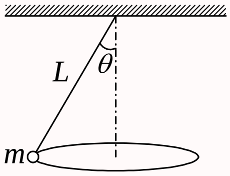
$$N = ma$$
$$f - mg = 0$$
$$f \leqslant \mu_s N$$

整理得

$$mg \leqslant \mu_s ma$$
$$a \geqslant \frac{g}{\mu_s}$$

第 70 题

【0351】一圆锥摆摆长为 L、摆锤质量为 m，在水平面上作匀速圆周运动，摆线与铅直线夹角 θ，则：(1) 摆线的张力 $T =$_____；(2) 摆锤的速率 $v =$_____。



解析

【答案】$\dfrac{mg}{\cos\theta}$；$\sqrt{\dfrac{gL}{\cos\theta}}\sin\theta$
【解析】圆周运动。
对摆锤进行受力分析，共受到两个力的作用，竖直向下的重力 mg，沿绳子方向的拉力 T，在这两个力作用下，摆锤在水平面上做匀速圆周运动，所以有

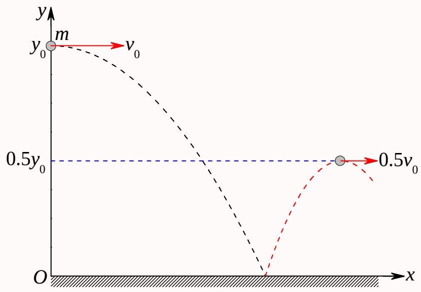
$$T\cos\theta = mg$$
$$T\sin\theta = m\frac{v^2}{L\sin\theta}$$

整理得

$$T = \frac{mg}{\cos\theta}$$
$$v^2 = \frac{TL\sin^2\theta}{m} = \frac{gL\sin^2\theta}{\cos\theta}$$
$$v = \sqrt{\frac{gL}{\cos\theta}}\sin\theta$$

第 71 题

【0055】质量为 m 的小球自高为 y_0 处沿水平方向以速率 v_0 抛出，与地面碰撞后跳起的最大高度为 $\frac{1}{2}y_0$，水平速率为 $\frac{1}{2}v_0$，则碰撞过程中 (1) 地面对小球的竖直冲量的大小为_____；(2) 地面对小球的水平冲量的大小为_____。



解析

【答案】$(1+\sqrt{2})m\sqrt{gy_0}$；$\frac{1}{2}mv_0$

【解析】抛体运动，机械能守恒定律，动量定理。

小球在抛出到碰地前机械能守恒，碰后弹起到最大高度处也机械能守恒。以水平向右为 x 轴正方向，竖直向上为 y 轴正方向，设碰地前瞬间小球的速度为 $\vec{v}_1=v_{1x}\vec{e}_x+v_{1y}\vec{e}_y$，碰地后弹起瞬间小球的速度为 $\vec{v}_2=v_{2x}\vec{e}_x+v_{2y}\vec{e}_y$，则有

$$v_{1x}=v_0, v_{2x}=\frac{1}{2}v_0, v_{1y}=-\sqrt{2gy_0}, v_{2y}=\sqrt{2g\times\frac{1}{2}y_0}=\sqrt{gy_0}$$

所以碰撞过程，地面对小球的总的冲量为

$$\begin{aligned}\vec{I}=\Delta\vec{p}=m\Delta\vec{v}=m(\vec{v}_2-\vec{v}_1)&=m[(v_{2x}-v_{1x})\vec{e}_x+(v_{2y}-v_{1y})\vec{e}_y]\\&=m\left[-\frac{1}{2}v_0\vec{e}_x+(1+\sqrt{2})\sqrt{gy_0}\vec{e}_y\right]\end{aligned}$$

第 72 题

【0060】一质量为 m 的物体，原来以速率 v 向北运动，它突然受到外力打击，变为向西运动，速率仍为 v，则外力的冲量大小为_____，方向为_____。

解析

【答案】$\sqrt{2}mv$；正西南或南偏西 45°

【解析】动量定理。

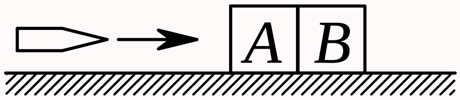
以由西向东为 x 轴正方向，由南向北为 y 轴正方向，依题意打击前物体的初速度为 $\vec{v}_1=v\vec{e}_y$，打击后物体的速度为 $\vec{v}_2=-v\vec{e}_x$，所以打击过程外力的冲量为

$$\vec{I}=\Delta\vec{p}=m\Delta\vec{v}=m(\vec{v}_2-\vec{v}_1)=m(-v\vec{e}_x-v\vec{e}_y)$$

$$I_x=-mv, I_y=-mv, I=\sqrt{I_x^2+I_y^2}=\sqrt{2}mv$$

第 73 题

【0062】两块并排的木块 A 和 B，质量分别为 m_1 和 m_2，静止地放置在光滑的水平面上，一子弹水平地穿过两木块，设子弹穿过两木块所用的时间分别为 Δt_1 和 Δt_2，木块对子弹的阻力为恒力 F，则子弹穿出后，木块 A 的速度大小为_____，木块 B 的速度大小为_____。



解析

【答案】$\dfrac{F\Delta t_1}{m_1+m_2}$；$\dfrac{F\Delta t_1}{m_1+m_2}+\dfrac{F\Delta t_2}{m_2}$

【解析】动量定理。

子弹穿出 A 前，以 A、B 整体作为研究对象，在水平方向上，系统只受到子弹对 A 的作用力，根据作用力与反作用力定律，子弹对 A 的作用力也是恒力，大小为 F，方向水平向右，作用时间为 Δt_1，根据动量定理，子弹穿出 A 时，A、B 的速度大小 v_1 满足

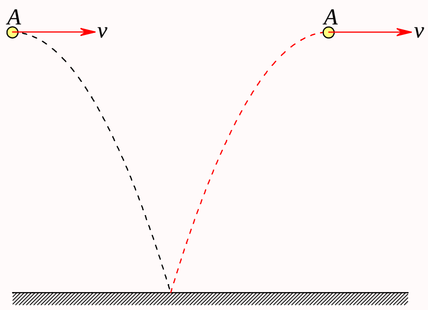
$$I_1 = F\Delta t_1 = (m_1+m_2)v_1$$
$$v_1 = \frac{F\Delta t_1}{m_1+m_2}$$

子弹穿出 A 进入 B，到子弹穿出 B 这段时间内，以 B 为研究对象，在水平方向上，B 只受到子弹对 B 的作用力，根据作用力与反作用力定律，子弹对 B 的作用力也是恒力，大小为 F，方向水平向右，作用时间为 Δt_2，根据动量定理，子弹穿出 B 时，B 的速度大小 v_2 满足

$$I_2 = F\Delta t_2 = m_2v_2 - m_2v_1$$
$$v_2 = v_1 + \frac{F\Delta t_2}{m_2} = \frac{F\Delta t_1}{m_1+m_2} + \frac{F\Delta t_2}{m_2}$$

第 74 题

【0068】一质量为 m 的小球 A，在距离地面某一高度处以速度 $\vec{v}$ 水平抛出，触地后反跳。在抛出 t 秒后小球 A 跳回原高度，速度仍沿水平方向，速度大小也与抛出时相同，如图。则小球 A 与地面碰撞过程中，地面给它的冲量的方向为_____，冲量的大小为_____。



解析

【答案】垂直地面竖直向上；mgt
【解析】动量定理。
依题意，小球碰地前和碰地后，水平方向的速度分量保持不变，竖直方向的速度分量等值反号，因此小球在与地面的碰撞过程中，地面给它的冲量的方向一定是垂直地面竖直向上的。另依题意还可得，小球从抛出到碰地所花的时间为 $t/2$，所以碰地前小球在竖直方向的速度分量的大小为 $gt/2$，所以冲量的大小为

$$|\vec{I}| = |\Delta\vec{p}| = |m\Delta\vec{v}| = m|\vec{v}_2 - \vec{v}_1| = m \times 2 \times (gt/2) = mgt$$

第 75 题

【0184】设作用在质量为 1 kg 的物体上的力 $F = 6t + 3(\mathrm{SI})$。如果物体在这一力的作用下，由静止开始沿直线运动，在 0 到 2.0 s 的时间间隔内，这个力作用在物体上的冲量大小 $I =$______。

解析

【答案】$18\ \mathrm{N\cdot s}$
【解析】变力的冲量。
已知变力随时间的变化关系，根据冲量的定义通过积分求冲量

$$I = \int_{t_0}^{t} F\mathrm{d}t = \int_{t_0}^{t} (6t+3)\mathrm{d}t = (3t^2 + 3t)_{t_0}^{t} = 3 \times 2.0^2 + 3 \times 2.0 = 18\ \mathrm{N\cdot s}$$

第 76 题

【0371】一颗子弹在枪筒里前进时所受的合力大小为 $F = 400 - \dfrac{4\times10^5}{3}t(\mathrm{SI})$，子弹从枪口射出时的速率为 300 m/s。假设子弹离开枪口时合力刚好为零，则：(1) 子弹走完枪筒全长所用的时间 $t =$______，(2) 子弹在枪筒中所受力的冲量 $I =$______，(3) 子弹的质量 $m =$______。

解析

【答案】3×10^{-3} s；$0.6\ \mathrm{N\cdot s}$；2 g
【解析】动量定理，变力的冲量。
依题意，子弹离开枪口时的合力刚好为零，所以

$$F = 400 - \frac{4\times10^5}{3}t = 0$$
$$t = \frac{400}{\frac{4\times10^5}{3}} = 3\times10^{-3}\ \mathrm{s}$$

已知力随时间的变化关系，根据冲量的定义。通过积分可以求出某时间段内力的冲量为

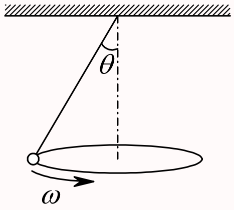
$$I = \int_{t_0}^{t} F\mathrm{d}t = \int_{0}^{t}\left(400 - \frac{4\times10^5}{3}t\right)\mathrm{d}t = \left(400t - \frac{2\times10^5}{3}t^2\right)_0^t$$
$$= 400\times3\times10^{-3} - \frac{2\times10^5}{3}\times(3\times10^{-3})^2 = 1.2 - 0.6 = 0.6\ \mathrm{N\cdot s}$$

根据动量定理，可求得子弹的质量

$$I=\Delta p=m\Delta v$$
$$m=\frac{I}{\Delta v}=\frac{0.6}{300-0}=0.002\ \mathrm{kg}=2\ \mathrm{g}$$

第 77 题

【0374】图示一圆锥摆，质量为 m 的小球在水平面内以角速度 ω 匀速转动。在小球转动一周的过程中，(1) 小球动量增量的大小等于_____；(2) 小球所受重力的冲量的大小等于_____；(3) 小球所受绳子拉力的冲量大小等于_____。



解析

【答案】0；$\dfrac{2\pi mg}{\omega}$；$\dfrac{2\pi mg}{\omega}$
【解析】动量定理，变力的冲量。
小球运动一周，速度恢复原来的大小和方向，所以动量也恢复原来的大小和方向，因此小球动量的增量为零。
小球在平面内以角速度 ω 匀速转动，转动一周所用的时间为

$$T=\frac{2\pi}{\omega}$$

而重力是个恒力，大小一直为 mg，方向一直竖直向下，所以重力的冲量大小为

$$I_1=mgT=\frac{2\pi mg}{\omega}$$

方向竖直向下。
对于绳子的拉力，其方向一直变化，其冲量直接计算较为复杂，但根据动量定理，小球动量的变化量等于它所受所有外力的冲量的总和，据前可知，小球的动量变化量为零，小球共受到两个力的作用，重力和绳子的拉力，所以在这段时间内，重力和拉力的冲量一定等值反向，因此绳子拉力的冲量的大小 $I_2=I_1=\dfrac{2\pi mg}{\omega}$，方向竖直向上。

第 78 题

【0708】一质量为 1 kg 的物体，置于水平地面上，物体与地面之间的静摩擦系数 $\mu_0=0.20$，滑动摩擦系数 $\mu=0.16$，现对物体施一水平拉力 $F=t+0.96$(SI)，则 2 秒末物体的速度大小 $v=$_____。

解析

【答案】0.892 m/s

【解析】摩擦力，动量定理，变力的冲量。

注意，这题中，当拉力小于最大静摩擦力时，物体保持静止，所以物体开始运动的时刻 t_0 满足

$$F = t_0 + 0.96 = \mu_0 mg = 0.20 \times 1 \times 9.8 = 1.96$$
$$t_0 = 1\ \text{s}$$

在 t_0 时刻后，物体在拉力 F 和滑动摩擦力 $f = \mu mg$ 作用下运动，此二力方向相反，因此合力为 $F - f = t + 0.96 - \mu mg$，从 t_0 到第 2 秒末，物体受到的外力的合冲量为

$$I = \int_{t_0}^{t} (F - f)\mathrm{d}t = \int_{t_0}^{t} (t + 0.96 - \mu mg)\mathrm{d}t$$
$$= \left[\frac{1}{2}t^2 + (0.96 - 0.16 \times 1 \times 9.8)t\right]_1^2 = \frac{1}{2}(2^2 - 1^2) - 0.608(2 - 1) = 1.5 - 0.608 = 0.892\ \text{N}\cdot\text{s}$$

根据动量定理，有

$$I = \Delta p = m\Delta v = m(v - v_0)$$
$$v = v_0 + \frac{I}{m} = 0 + \frac{0.892}{1} = 0.892\ \text{m/s}$$

第 79 题

【0710】一吊车底板上放一质量为 10 kg 的物体，若吊车底板加速上升，加速度大小为 $a = 3 + 5t$(SI)，则 2 秒内吊车底板给物体的冲量大小 $I =$_____；2 秒内物体动量的增量大小_____。

解析

【答案】356 N · s；160 N · s

【解析】动量定理，变力的冲量。

物体共受到两个力的作用，竖直向下的重力 mg，竖直向上的底板的支持力 N，在这两个力的作用下，物体跟随吊车共同具有向上的加速度 a。假设计时开始 $t = 0$ 时，吊车的速度为 v_0，假定 $t = 2$ s 时，吊车的速度为 v_2。

已知加速度和物体的质量，可以求得物体所受的合力，此合力是个变力，利用积分求得该时间段内的合力的冲量，再求出重力的冲量，就可以求得支持力的冲量；当然也可以直接求得底板对物体的支持力，进而求其冲量

$$F = N - mg = ma \Rightarrow N = m(g + a)$$
$$I_N = \int_{t_0}^{t} N\mathrm{d}t = m\int_{t_0}^{t} (g + a)\mathrm{d}t = 10\int_0^2 (12.8 + 5t)\mathrm{d}t$$
$$= 10 \times (12.8t + 2.5t^2)_0^2 = 10 \times (12.8 \times 2 + 2.5 \times 2^2) = 356\ \text{N}\cdot\text{s}$$

而重力的冲量为 $I_G = mg\Delta t = 2mg = 2 \times 10 \times 9.8 = 196\ \text{N}\cdot\text{s}$，两个冲量的方向相反，所以合冲量

为二者之差，根据动量定理，有

$$I = I_N - I_G = \Delta p = m\Delta v = m(v_2 - v_0)$$
$$\Delta p = 356 - 196 = 160\ \mathrm{N\cdot s}$$

当然，本题也可以根据加速度求得该时间段内的速度增量

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 3 + 5t$$
$$\mathrm{d}v = a\mathrm{d}t = (3+5t)\mathrm{d}t$$
$$\Delta v = \int_{v_0}^{v_2} \mathrm{d}v = \int_{t_0}^{t} a\mathrm{d}t = \int_0^2 (3+5t)\mathrm{d}t = (3t + 2.5t^2)_0^2 = 16\ \mathrm{m/s}$$

所以该时间段内物体的动量增量为

$$\Delta p = m\Delta v = 10 \times 16 = 160\ \mathrm{N\cdot s}$$

依题意，吊车加速上升，所以以上速度增量和动量增量的方向都是竖直向上。而在这个时间段内，重力的冲量为 $I_G = mg\Delta t = 2mg = 2\times 10\times 9.8 = 196\ \mathrm{N\cdot s}$，它的方向是竖直向下的。根据动量定理，物体所受到的总的冲量等于它的动量的增量，而总的冲量为支持力的冲量与重力冲量的矢量和，所以支持力的冲量为

$$I_N = I + I_G = \Delta p + I_G = 160 + 196 = 356\ \mathrm{N\cdot s}$$

第 80 题

【0711】粒子 B 的质量是粒子 A 的质量的 4 倍，开始时粒子 A 的速度 $\vec{v}_{A0} = 3\vec{e}_x + 4\vec{e}_y$，粒子 B 的速度 $\vec{v}_{B0} = 2\vec{e}_x - 7\vec{e}_y$；在无外力作用的情况下两者发生碰撞，碰后粒子 A 的速度变为 $\vec{v}_A = 7\vec{e}_x - 4\vec{e}_y$，则此时粒子 B 的速度 $\vec{v}_B =$______。

解析

【答案】$\vec{e}_x - 5\vec{e}_y$
【解析】动量守恒定律。
在无外力作用的情况下，两个粒子组成的系统在碰撞过程中动量守恒，设粒子 A 的质量为 $m_A = m$，则依题意粒子 B 的质量为 $m_B = 4m_A = 4m$。因此，由动量守恒定律，有

$$m_A\vec{v}_{A0} + m_B\vec{v}_{B0} = m_A\vec{v}_A + m_B\vec{v}_B$$
$$\vec{v}_B = \frac{m_A\vec{v}_{A0} + m_B\vec{v}_{B0} - m_A\vec{v}_A}{m_B} = \frac{m(3\vec{e}_x + 4\vec{e}_y) + 4m(2\vec{e}_x - 7\vec{e}_y) - m(7\vec{e}_x - 4\vec{e}_y)}{4m}$$
$$= \frac{3\vec{e}_x + 4\vec{e}_y + 4(2\vec{e}_x - 7\vec{e}_y) - (7\vec{e}_x - 4\vec{e}_y)}{4} = \vec{e}_x - 5\vec{e}_y$$

第 81 题

【0719】质量为 M 的车以速度 v_0 沿光滑水平地面直线前进，车上的人将一质量为 m 的物体相对于车以速度 u 竖直上抛，则此时车的速度 $v=$_____。

解析

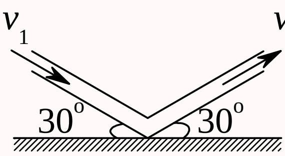
【答案】v_0
【解析】动量守恒定律，相对运动。
在水平方向上，以车、人及物体组成的系统所受的合力为零，所以在水平方向上系统的动量守恒。以车前进方向为 x 轴正方向，竖直向上为 y 轴正方向，则抛出物体前，系统的速度为 $\vec{v}_0=v_0\vec{e}_x$，设抛出物体后，车和人的速度为 $\vec{v}=v\vec{e}_x$，而物体相对车的速度为 $\vec{v}'=u\vec{e}_y$，根据伽利略速度相加公式，物体相对地面的速度为 $\vec{v}_2=\vec{v}+\vec{v}'=v\vec{e}_x+u\vec{e}_y$，所以水平方向的动量守恒写成

$$(M+m)v_0=Mv+mv$$

$$v=v_0$$

第 82 题

【0516】如图所示，流水以初速度 $\vec{v}_1$ 进入弯管，流出时的速度为 $\vec{v}_2$，且 $v_1=v_2=v$。设每秒流入的水质量为 q，则在管子转弯处，水对管壁的平均冲力大小是_____，方向_____。（管内水受到的重力不考虑）。



解析

【答案】qv；竖直向下
【解析】动量定理。
依题意，一秒时间内，有质量为 q 的水由初动量 $q\vec{v}_1$ 变成末动量 $q\vec{v}_2$，以这部分水为研究对象，则系统的动量增量为 $\Delta\vec{p}=q(\vec{v}_2-\vec{v}_1)$，这个动量的增量就是由于管壁对水施加的冲量 $\vec{I}=\vec{F}\Delta t=\vec{F}$，所以由动量定理得

$$\vec{I}=\Delta\vec{p}$$

$$\vec{F}=q(\vec{v}_2-\vec{v}_1)$$

以水平向右为 x 轴正方向，竖直向上为 y 轴正方向，则 $\vec{v}_1=v\cos30°\vec{e}_x-v\sin30°\vec{e}_y$，$\vec{v}_2=v\cos30°\vec{e}_x+v\sin30°\vec{e}_y$，所以

$$\begin{aligned}\vec{F}&=q(\vec{v}_2-\vec{v}_1)=q[(v\cos30°\vec{e}_x+v\sin30°\vec{e}_y)-(v\cos30°\vec{e}_x-v\sin30°\vec{e}_y)]\\&=qv(2\sin30°\vec{e}_y)=qv\vec{e}_y\end{aligned}$$

即管壁对水的平均作用力的大小为 qv，方向竖直向上。根据作用力与反作用力定律，水对管壁的平均冲力的大小为 qv，方向竖直向下。

第 83 题

【5258】一质量为 m 的物体，以初速 $\vec{v}_0$ 从地面抛出，抛射角 $\theta=30°$，如忽略空气阻力，则从抛出到刚要接触地面的过程中 (1) 物体动量增量的大小为_____，(2) 物体动量增量的方向为_____。

解析

【答案】mv_0；竖直向下

【解析】动量定理。

忽略空气阻力，抛射体只受到重力的作用，重力的方向是竖直向下的，所以过程重力的冲量的方向也是竖直向下的。以水平向右为 x 轴正方向【假定物体向右上方抛出】，竖直向上为 y 轴正方向，根据斜抛运动的规律，可知抛出速度 $\vec{v}_0=v_0\cos\theta\vec{e}_x+v_0\sin\theta\vec{e}_y$，落地时的速度为 $\vec{v}=v_0\cos\theta\vec{e}_x-v_0\sin\theta\vec{e}_y$，所以物体动量的增量为

$$\Delta\vec{p}=m\Delta\vec{v}=m(\vec{v}-\vec{v}_0)=-2mv_0\sin\theta\vec{e}_y=-mv_0\vec{e}_y$$

所以物体动量增量的大小为 mv_0，方向竖直向下。

第 84 题

【5630】一个打桩机，夯的质量为 m_1，桩的质量为 m_2。假设夯与桩相碰撞时为完全非弹性碰撞且碰撞时间极短，则刚刚碰撞后夯与桩的动能是碰前夯的动能的_____ 倍。

解析

【答案】$\dfrac{m_1}{m_1+m_2}$

【解析】动量守恒定律，完全非弹性碰撞。

碰前桩是静止的，设碰前夯的速度大小为 v_1，由于是完全非弹性碰撞，所以碰后夯与桩的速度大小相等，设为 v_2，碰撞过程动量守恒，所以有

$$m_1v_1=(m_1+m_2)v_2$$
$$v_2=\frac{m_1}{m_1+m_2}v_1$$

所以碰后夯与桩的动能为

$$E=\frac{1}{2}(m_1+m_2)v_2^2=\frac{1}{2}(m_1+m_2)\left(\frac{m_1}{m_1+m_2}v_1\right)^2=\frac{1}{2}\frac{m_1^2}{m_1+m_2}v_1^2$$
$$=\frac{m_1}{m_1+m_2}\frac{1}{2}m_1v_1^2=\frac{m_1}{m_1+m_2}E_0$$

第 85 题

【0404】地球的质量为 m，太阳的质量为 M，地心与日心的距离为 R，引力常量为 G，则地球绕太阳作圆周运动的轨道角动量为 $L=$_____。

解析

【答案】$m\sqrt{GMR}$
【解析】角动量，圆周运动，万有引力。
这里假定地球绕太阳做匀速圆周运动，向心力由太阳与地球之间的万有引力提供，所以

$$m\frac{v^2}{R}=\frac{GMm}{R^2}$$
$$v=\sqrt{\frac{GM}{R}}$$

所以地球的角动量为

$$L=mvR=m\sqrt{\frac{GM}{R}}R=m\sqrt{GMR}$$

第 86 题

【0667】将一质量为 m 的小球，系于轻绳的一端，绳的另一端穿过光滑水平桌面上的小孔用手拉住。先使小球以角速度 ω_1 在桌面上做半径为 r_1 的圆周运动，然后缓慢将绳下拉，使半径缩小为 r_2，在此过程中小球的动能增量是______。

解析

【答案】$\frac{1}{2}m\omega_1^2r_1^2\frac{r_1^2-r_2^2}{r_2^2}$
【解析】角动量守恒定律，有心力。
在水平面内，小球只受到绳子的拉力的作用，这个拉力一直通过小孔，所以是个有心力，因此这个力对小孔的力矩一直为零，所以小球对小孔的角动量守恒，而且这个拉力提供小球作圆周运动的向心力，因此有

$$mv_1r_1=mv_2r_2$$
$$v_2=\frac{r_1}{r_2}v_1$$

所以小球动能的增量为

$$\Delta E_k=\frac{1}{2}mv_2^2-\frac{1}{2}mv_1^2=\frac{1}{2}m(v_2^2-v_1^2)=\frac{1}{2}mv_1^2\frac{r_1^2-r_2^2}{r_2^2}=\frac{1}{2}m\omega_1^2r_1^2\frac{r_1^2-r_2^2}{r_2^2}$$

第 87 题

【0712】哈雷慧星绕太阳的轨道是以太阳为一个焦点的椭圆。它离太阳最近的距离是 $r_1=8.75\times10^{10}$ m，此时它的速率是 $v_1=5.46\times10^4$ m/s。它离太阳最远时的速率是 $v_2=9.08\times10^2$ m/s，这时它离太阳的距离是 $r_2=$______。

解析

【答案】5.26×10^{12} m

【解析】角动量守恒定律，有心力。

彗星在绕太阳运动的过程中，只受到太阳万有引力的作用，太阳的万有引力是个有心力，一直通过太阳，因此万有引力对太阳的力矩为零，所以彗星对太阳的角动量守恒，即

$$mv_1r_1 = mv_2r_2$$
$$r_2 = \frac{v_1}{v_2}r_1 = \frac{5.46\times10^4}{9.08\times10^2}\times8.75\times10^{10}\approx5.26\times10^{12}\ \mathrm{m}$$

第 88 题

【0724】一质量为 m 的质点沿着一条曲线运动，其位置矢量在空间直角坐标系中的表达式为 $\vec{r}=a\cos\omega t\vec{e}_x+b\sin\omega t\vec{e}_y$，其中 a、b、ω 皆为常量，则此质点对原点的角动量 $\vec{L}=$_____；此质点所受对原点的力矩 $\vec{M}=$_____。

解析

【答案】$m\omega ab\vec{e}_z$；0

【解析】角动量和力矩的概念。

已知运动方程，通过求导可以得到速度和加速度，再利用牛顿第二定律，可以得到质点所受到的合力

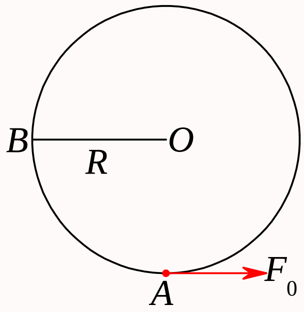
$$\vec{r}=a\cos\omega t\vec{e}_x+b\sin\omega t\vec{e}_y$$
$$\vec{v}=\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}=-a\omega\sin\omega t\vec{e}_x+b\omega\cos\omega t\vec{e}_y$$
$$\vec{a}=\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}=-a\omega^2\cos\omega t\vec{e}_x-b\omega^2\sin\omega t\vec{e}_y=-\omega^2\vec{r}$$
$$\vec{p}=m\vec{v}=m\omega(-a\sin\omega t\vec{e}_x+b\cos\omega t\vec{e}_y)$$
$$\vec{F}=m\vec{a}=-m\omega^2\vec{r}$$

根据角动量和力矩的定义，可得

$$\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}=(a\cos\omega t\vec{e}_x+b\sin\omega t\vec{e}_y)\times m\omega(-a\sin\omega t\vec{e}_x+b\cos\omega t\vec{e}_y)=m\omega ab\vec{e}_z$$
$$\vec{M}=\vec{r}\times\vec{F}=\vec{r}\times(-m\omega^2\vec{r})=-m\omega^2\vec{r}\times\vec{r}=0$$

第 89 题

【0082】图中，沿着半径为 R 圆周运动的质点，所受的几个力中有一个是恒力 $\vec{F}_0$，方向始终沿 x 轴正向，即 $\vec{F}_0=F_0\vec{e}_x$。当质点从 A 点沿逆时针方向走过 3/4 圆周到达 B 点时，力 $\vec{F}_0$ 所作的功为 $W=$_____。



解析

【答案】$-F_0R$

【解析】恒力做功。

以水平向右为 x 轴正方向，竖直向上为 y 轴正方向，则从 A 到 B，质点的位移为 $\Delta\vec{r}=-R\vec{e}_x+R\vec{e}_y$，根据力做功的定义可知，恒力 $\vec{F}_0$ 在这个过程中所做的功为

$$W=\vec{F}\cdot\Delta\vec{r}=(-R\vec{e}_x+R\vec{e}_y)\cdot F_0\vec{e}_x=-F_0R$$

第 90 题

【0100】已知地球质量为 M，半径为 R。一质量为 m 的火箭从地面上升到距地面高度为 $2R$ 处。在此过程中，地球引力对火箭作的功为_____。

解析

【答案】$-\dfrac{2GMm}{3R}$

【解析】万有引力的功，万有引力的势能。

火箭受到地球的万有引力的大小为

$$F=\frac{GMm}{r^2}$$

其中 r 是由地心到火箭的距离，引力的方向一直是指向地心，与位移的方向相反，所以在此过程中万有引力的功为

$$W=\int_R^{3R}-F\mathrm{d}r=\int_R^{3R}-\frac{GMm}{r^2}\mathrm{d}r=GMm\left(\frac{1}{3R}-\frac{1}{R}\right)=-\frac{2GMm}{3R}$$

第 91 题

【0732】某质点在力 $\vec{F}=(4+5x)\vec{e}_x$(SI) 的作用下沿 x 轴作直线运动，在从 $x=0$ 移动到 $x=10$ m 的过程中，力 $\vec{F}$ 所做的功为_____。

解析

【答案】290 J
【解析】变力做功。
根据变力做功的定义有

$$W=\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}}\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=\int_0^{10}(4+5x)\mathrm{d}x=(4x+2.5x^2)_0^{10}=40+250=290\ \mathrm{J}$$

第 92 题

【0735】二质点的质量各为 m_1，m_2。当它们之间的距离由 a 缩短到 b 时，它们之间万有引力所做的功为______。

解析

【答案】$-Gm_1m_2\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)$
【解析】万有引力的功，万有引力的势能。
以二者相距无穷远时的位置为万有引力的势能零点，根据万有引力做功等于万有引力势能的减小可得

$$W=-Gm_1m_2\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)$$

第 93 题

【0745】某人拉住在河水中的船，使船相对于岸不动，以地面为参考系，人对船所做的功______；以流水为参考系，人对船所做的功______。（填 >0，$=0$ 或 <0）

解析

【答案】$=0$；>0
【解析】功的概念。
从地面参考系上看，人对船的力的方向与河水的运动方向相反，船在这个力的作用下没有发生位移，所以做功为零；从流水参考系来看，人对船的拉力不变，还是与河水的运动方向相反，但从河水上看，船的位移也与河水的运动方向相反，因此人对船所做的功大于零。
从这个题目还可以看出，从不同参考系看，真实存在的牛顿力保持不变，但物体发生的位移与参考系的选择有关。

第 94 题

【5021】有一劲度系数为 k 的轻弹簧，竖直放置，下端悬一质量为 m 的小球。先使弹簧为原长，而小球恰好与地接触。再将弹簧上端缓慢地提起，直到小球刚能脱离地面为止。在此过程中外力所作的功为______。

解析

【答案】$\dfrac{m^2g^2}{2k}$

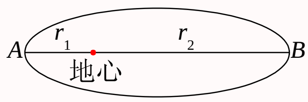
【解析】功能原理，保守力的功，势能。

小球要刚能脱离地面，它所受到的弹簧的拉力要刚好等于小球本身的重力。在此过程中，由小球和弹簧组成的系统，动能保持为零，重力势能保持不变，弹性势能慢慢增加，所以总的机械能慢慢增加，机械能的变化量就等于外力所做的功。因此，有

$$kx = mg \Rightarrow x = \frac{mg}{k}$$
$$W = \Delta E = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}k\frac{m^2g^2}{k^2} = \frac{m^2g^2}{2k}$$

第 95 题

【0072】一人造地球卫星绕地球作椭圆运动，近地点为 A，远地点为 B。A、B 两点距地心分别为 r_1、r_2。设卫星质量为 m，地球质量为 M，万有引力常量为 G。则卫星在 A、B 两点处的万有引力势能之差 $E_{PB} - E_{PA} =$______；卫星在 A、B 两点的动能之差 $E_{kB} - E_{kA} =$______。



解析

【答案】$GMm\left(\dfrac{1}{r_1} - \dfrac{1}{r_2}\right)$；$GMm\left(\dfrac{1}{r_2} - \dfrac{1}{r_1}\right)$

【解析】万有引力势能，机械能守恒定律。

以卫星与地球相距无穷远时为万有引力势能的零点，则当卫星与地球相距 r 时，万有引力势能为

$$E_p = -\frac{GMm}{r}$$

所以在近地点，万有引力势能为

$$E_{pA} = -\frac{GMm}{r_1}$$

在远地点，万有引力势能为

$$E_{pB} = -\frac{GMm}{r_2}$$

二者之差为

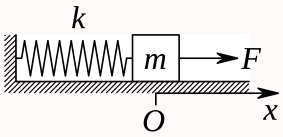
$$E_{pB} - E_{pA} = -\frac{GMm}{r_2} + \frac{GMm}{r_1} = GMm\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

而在整个运动过程中，只有万有引力做功，所以系统的机械能守恒，即

$$E_{kA} + E_{pA} = E_{kB} + E_{pB}$$
$$E_{kB} - E_{kA} = E_{pA} - E_{pB} = GMm\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right)$$

第 96 题

【0093】如图所示，劲度系数为 k 的弹簧，一端固定在墙壁上，另一端连一质量为 m 的物体，物体在坐标原点 O 时弹簧长度为原长。物体与桌面间的摩擦系数为 μ。若物体在不变的外力 F 作用下向右移动，则物体到达最远位置时系统的弹性势能 $E_p =$______。



解析

【答案】$\dfrac{2(F-\mu mg)^2}{k}$

【解析】弹性势能。

在运动过程中，物体在竖直方向上共受到两个力的作用：竖直向下的重力 mg，竖直向上的桌面的支持力 N，而且这两个力互相平衡，所以有 $N = mg$；在水平方向上物体共受到三个力的作用：水平向右的恒力 F，水平向左的弹簧拉力 kx，水平向左的滑动摩擦力 $f = \mu N = \mu mg$，根据牛顿第二定律，在水平方向上物体的加速度为

$$a = \frac{F - kx - \mu mg}{m}$$

物体到达最远位置时，物体静止，假定此时弹簧伸长量为 x，则有

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$$

$$v\mathrm{d}v = a\mathrm{d}x = \frac{F - kx - \mu mg}{m}\mathrm{d}x$$

$$\int_{v_0} vv\mathrm{d}v = \int_{x_0}^{x} a\mathrm{d}x = \int_{x_0}^{x} \frac{F - kx - \mu mg}{m}\mathrm{d}x$$

$$v - v_0 = 0 - 0 = \left[\left(\frac{F}{m} - \mu g\right)x - \frac{k}{2m}x^2\right]_0^x = \left(\frac{F}{m} - \mu g\right)x - \frac{k}{2m}x^2 = x\left(\frac{F}{m} - \mu g - \frac{k}{2m}x\right)$$

$$x_1 = 0, x_2 = \frac{\frac{F}{m} - \mu g}{\frac{k}{2m}} = \frac{2(F - \mu mg)}{k}$$

所以，物体到达最远位置时弹簧的伸长量为 $x = x_2 = \dfrac{2(F - \mu mg)}{k}$，所以弹性势能为

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}k\frac{4(F - \mu mg)^2}{k^2} = \frac{2(F - \mu mg)^2}{k}$$

第 97 题

【0644】一质量为 m 的质点在指向圆心的平方反比力 $F = -k/r^2$ 的作用下，作半径为 r 的圆周运动。此质点的速度 $v =$______。若取距圆心无穷远处为势能零点，它的机械能 $E =$______。

解析

【答案】$\sqrt{\dfrac{k}{mr}}$；$-\dfrac{k}{2r}$

【解析】圆周运动，势能，机械能。

质点在平方反比力 $F=-k/r^2$ 的作用下，作半径为 r 的圆周运动，所以有

$$\frac{k}{r^2}=\frac{mv^2}{r}$$
$$v=\sqrt{\frac{k}{mr}}$$

若取距圆心无穷远处为势能零点，则势能为

$$E_p=\int_r^{\infty}F\mathrm{d}r=\int_r^{\infty}-\frac{k}{r^2}\mathrm{d}r=-\frac{k}{r}$$

所以总的机械能为

$$E=E_k+E_p=\frac{1}{2}mv^2-\frac{k}{r}=\frac{1}{2}m\frac{k}{mr}-\frac{k}{r}=-\frac{k}{2r}$$

第 98 题

【0733】一质点在二恒力共同作用下，位移为 $\Delta\vec{r}=3\vec{e}_x+8\vec{e}_y$(SI)；在此过程中，动能增量为 24 J，已知其中一恒力 $\vec{F}_1=12\vec{e}_x-3\vec{e}_y$(SI)，则另一恒力所作的功为______。

解析

【答案】12 J

【解析】恒力的功，动能定理。

根据恒力做功的定义，$\vec{F}_1$ 在过程中所做的功为

$$W_1=\vec{F}_1\cdot\Delta\vec{r}=(12\vec{e}_x-3\vec{e}_y)\cdot(3\vec{e}_x+8\vec{e}_y)=12\times3+(-3)\times8=12\ \mathrm{J}$$

而根据动能定理，质点动能的增量等于过程中所有外力所做功的总和，所以有

$$\Delta E_k=W=W_1+W_2$$
$$W_2=\Delta E_k-W_1=24-12=12\ \mathrm{J}$$

第 99 题

【0744】一长为 L，质量为 m 的匀质链条，放在光滑的桌面上，若其长度的 1/5 悬挂于桌边下，将其慢慢拉回桌面，需做功______。

解析

【答案】$\frac{1}{50}mgL$
【解析】功能原理。
慢慢拉回，所以不考虑动能的变化，但系统的势能发生了变化，因此机械能也发生了变化

$$\Delta E=\Delta E_k+\Delta E_p=0+\frac{1}{5}mg\times\frac{1}{10}L=\frac{1}{50}mgL$$

根据功能原理，系统机械能的变化量等于外力所做的功，即

$$W=\Delta E=\frac{1}{50}mgL$$

三、计算题

第 100 题

【0004】一质点沿 x 轴运动，其加速度 a 与位置坐标 x 的关系为：$a=2+6x^2$(SI)；如果质点在原点处的速度为零，试求其在任意位置处的速度。

解析

【解析】已知加速度随位置之间的关系及某个初始位置的速度，通过积分可以求任意位置的速度。

$$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$$
$$v\mathrm{d}v=a\mathrm{d}x$$
$$\int_{v_0}^{v}v\mathrm{d}v=\int_{x_0}^{x}a\mathrm{d}x$$
$$\int_0^v v\mathrm{d}v=\int_0^x(2+6x^2)\mathrm{d}x$$
$$\frac{1}{2}v^2=2x+2x^3$$
$$v^2=4x+4x^3$$
$$v=\sqrt{4x+4x^3}=2\sqrt{x+x^3}$$

第 101 题

【0037】质量为 m 的子弹以速度 v_0 水平射入沙土中，设子弹所受阻力与速度反向，大小与速度成正比，比例系数为 k，忽略子弹的重力，求：(1) 子弹射入沙土后，速度随时间变化的函数式；(2) 子弹进入沙土的最大深度。

解析

【解析】已知力求加速度，进而求速度和位置。

依题意，以子弹初速度的方向为正方向，则子弹所受阻力为

$$f=-kv$$

根据牛顿第二定律，可以求得加速度为

$$a=\frac{f}{m}=-\frac{k}{m}v$$

再根据已知初始条件，$t_0=0$ 时，$v=v_0$，根据数学上的分离变量法，通过积分可以求得任意时刻的速度

$$\begin{gathered}a=-\frac{k}{m}v=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\\ \frac{\mathrm{d}v}{v}=-\frac{k}{m}\mathrm{d}t\\ \int_{v_0}^{v}\frac{\mathrm{d}v}{v}=\int_{t_0}^{t}-\frac{k}{m}\mathrm{d}t\\ \ln\frac{v}{v_0}=-\frac{k}{m}t\\ v=v_0\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}\end{gathered}$$

选择子弹射入沙土的位置为坐标原点，则 $t_0=0$ 时，$x=0$，所以

$$\begin{gathered}v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\\ \mathrm{d}x=v\mathrm{d}t=v_0\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}\mathrm{d}t\\ \int_{x_0}^{x}\mathrm{d}x=\int_{t_0}^{t}v_0\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}\mathrm{d}t\\ x=-\frac{m}{k}v_0\left[\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}\right]_0^t=-\frac{m}{k}v_0\left[\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}-1\right]\end{gathered}$$

而子弹进入沙土的最大深度处时，速度为零，即

$$v=v_0\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}=0\Rightarrow\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}=0$$

所以最大深度为

$$x=-\frac{m}{k}v_0\left[\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}-1\right]=-\frac{m}{k}v_0\left[0-1\right]=\frac{m}{k}v_0$$

【解析】这题，第二步求最大深度还可以通过另一种数学处理来求得。

$$\begin{gathered}a=-\frac{k}{m}v=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\\ \mathrm{d}v=-\frac{k}{m}\mathrm{d}x\\ \int_{v_0}^{v}\mathrm{d}v=\int_{x_0}^{x}-\frac{k}{m}\mathrm{d}x\\ 0-v_0=-\frac{k}{m}x\end{gathered}$$

$$x = \frac{m}{k} v_0$$

【解析】这题，第二步求最大深度还可以通过动能定理来求得。

$$W = \Delta E_k$$
$$\mathrm{d}W = \mathrm{d}E_k$$
$$F\mathrm{d}x = -kv\mathrm{d}x = \mathrm{d}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = mv\mathrm{d}v$$
$$\mathrm{d}x = -\frac{m}{k}\mathrm{d}v$$
$$\int_{x_0}^{x} \mathrm{d}x = \int_{v_0}^{v} -\frac{m}{k}\mathrm{d}v$$
$$x - 0 = -\frac{m}{k}(0 - v_0) = \frac{m}{k}v_0$$

第 102 题

【0354】质量为 m 的雨滴下降时，因受空气阻力，在落地前已是匀速运动，其速率为 $v = 5.0$ m/s。设空气阻力大小与雨滴速率的平方成正比，问：当雨滴下降速率为 $v = 4.0$ m/s 时，其加速度 a 多大？

解析

【解析】已知力求加速度。

雨滴在下降过程中共受到两个力的作用，竖直向下的重力 mg，竖直向上的空气阻力 $f = kv^2$。依题意，当 $v_1 = 5.0$ m/s 时，子弹做匀速运动，所以加速度为零，即合外力为零，此时空气阻力与重力等值反向，所以

$$mg = kv_1^2$$
$$k = \frac{mg}{v_1^2}$$

当雨滴下降速率为 $v_2 = 4.0$ m/s 时，由牛顿第二定律，有

$$ma = mg - f = mg - mg\frac{v_2^2}{v_1^2} = mg\frac{v_1^2 - v_2^2}{v_1^2}$$
$$a = g\frac{v_1^2 - v_2^2}{v_1^2} = g\frac{5^2 - 4^2}{5^2} = \frac{9}{25}g = 3.528 \text{ m/s}^2$$

第 103 题

【0028】一水平放置的飞轮可绕通过中心的竖直轴转动，飞轮的辐条上装有一个小滑块，它可在辐条上无摩擦地滑动。一轻弹簧一端固定在飞轮转轴上，另一端与滑块联接。当飞轮以角速度 ω 旋转时，弹簧的长度为原长的 f 倍，已知 $\omega = \omega_0$ 时，$f = f_0$，求 ω 与 f 的函数关系。

解析

【解析】圆周运动，弹簧的弹力。

由于滑块可以在辐条上无摩擦地滑动，所以滑块做圆周运动的向心力由弹簧的弹力提供。设弹簧原长为 L，劲度系数为 k，依题意，有

$$m\omega^2(fL)=k(f-1)L$$
$$\omega^2=\frac{k(f-1)}{mf}$$

又依题意，有

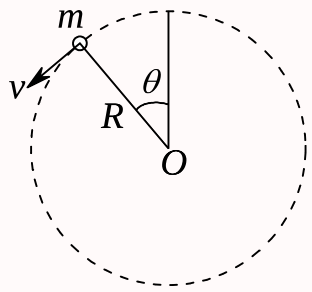
$$\omega_0^2=\frac{k(f_0-1)}{mf_0}$$
$$k=\omega_0^2\frac{mf_0}{f_0-1}$$

代入前式，有

$$\omega^2=\frac{k(f-1)}{mf}=\omega_0^2\frac{mf_0}{f_0-1}\frac{f-1}{mf}=\omega_0^2\frac{f_0(f-1)}{(f_0-1)f}$$

第 104 题

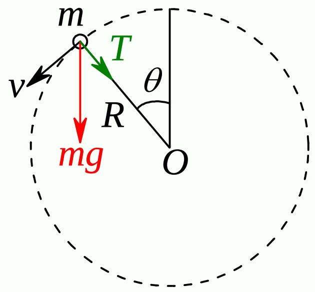
【0044】质量为 m 的物体系于长度为 R 的绳子的一个端点上，在竖直平面内绕绳子另一端点（固定）作圆周运动。设 t 时刻物体瞬时速度的大小为 v，绳子与竖直向上的方向成 θ 角，如图所示。(1) 求 t 时刻绳中的张力 T 和物体的切向加速度 a_τ；(2) 说明在物体运动过程中 a_τ 的大小和方向如何变化？



解析

【解析】圆周运动的加速度。

以物体为研究对象，对物体进行受力分析，如下图所示。



物体在运动过程中共受到两个力的作用，竖直向下的重力 mg，沿绳子方向的拉力 T，其中重力沿绳子方向的分力与绳子拉力的合成提供物体做圆周运动的向心力，而重力沿圆周切线方向的分力使得物体沿切向方向产生切向加速度，所以有

$$m\frac{v^2}{R}=T+mg\cos\theta$$
$$ma_\tau=mg\sin\theta$$

所以，整理得

$$T=m\frac{v^2}{R}-mg\cos\theta$$
$$a_\tau=g\sin\theta$$

由上述切向加速度的表达式 $a_\tau=g\sin\theta$ 可以看出，切向加速度的大小随 θ 而变化：当 $0\leqslant\theta\leqslant\frac{1}{2}\pi$ 时，$a_\tau>0$，且随 θ 增大而增大，在这个阶段，物体的速率越来越大，且速率变化率也越来越大；当 $\frac{1}{2}\pi\leqslant\theta\leqslant\pi$ 时，$a_\tau>0$，且随 θ 增大而减小，在这个阶段，物体的速率越来越大，但速率变化率也越来越小；当 $\pi\leqslant\theta\leqslant\frac{3}{2}\pi$ 时，$a_\tau<0$，且其绝对值随 θ 增大而增大，在这个阶段，物体的速率越来越小，且速率变化率也越来越大；当 $\frac{3}{2}\pi\leqslant\theta\leqslant 2\pi$ 时，$a_\tau<0$，且其绝对值随 θ 增大而减小，在这个阶段，物体的速率越来越小，但速率变化率也越来越小。

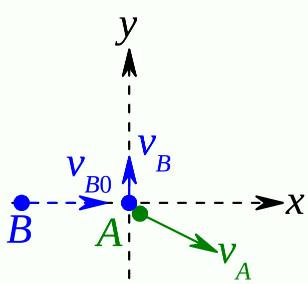
第 105 题

【0730】光滑水平面上有两个质量不同的小球 A 和 B。A 球静止，B 球以速度 $\vec{v}$ 和 A 球发生碰撞，碰撞后 B 球速度的大小为 $\frac{1}{2}v$，方向与 $\vec{v}$ 垂直，求碰后 A 球运动方向。

解析

【解析】动量守恒。

设 A 球质量为 m_1，B 球质量为 m_2，以 B 球碰前速度的方向为 x 轴正方向，碰后速度的方向为 y 轴正方向，建立坐标系，如下图。



依题意，有

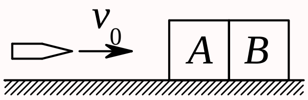
$$\vec{v}_{A0}=0,\vec{v}_{B0}=v\vec{e}_x,\vec{v}_B=\frac{1}{2}v\vec{e}_y$$

碰撞过程，以 A、B 球组成的系统在水平面内没有受到外力的作用，所以动量守恒，因此有

$$m_1\vec{v}_{A0}+m_2\vec{v}_{B0}=m_1\vec{v}_A+m_2\vec{v}_B$$
$$m_2v\vec{e}_x=m_1\vec{v}_A+\frac{1}{2}m_2v\vec{e}_y$$
$$\vec{v}_A=\frac{m_2}{m_1}v\left(\vec{e}_x-\frac{1}{2}\vec{e}_y\right)$$

第 106 题

【0769】如图所示，有两个长方形的物体 A 和 B 紧靠着静止放在光滑的水平桌面上，已知 $m_A=2$ kg，$m_B=3$ kg。现有一质量 $m=100$ g 的子弹以速率 $v_0=800$ m/s 水平射入长方体 A，经 $t=0.01$ s，又射入长方体 B，最后停留在长方体 B 内未射出。设子弹射入 A 时所受的摩擦力为 $f=3\times10^3$ N，求：(1) 子弹在射入 A 的过程中，B 受到 A 的作用力的大小。(2) 当子弹留在 B 中时，A 和 B 的速度大小。



解析

【解析】动量定理，动量守恒定律。

整个过程可以分成两段，第一段，子弹穿过 A，第二段子弹进入 B 到相对静止。

第一阶段，若以子弹和 A、B 为研究对象，由于水平桌面光滑，系统在水平方向上不受外力作用，系统动量守恒，假设子弹穿出 A 时，子弹的速度为 v_1，A 和 B 的速度为 v_2，则有

$$mv_0=mv_1+(m_A+m_B)v_2$$

若只以子弹为研究对象，在水平方向上，子弹受到木块的摩擦力 f 的作用，作用时间为 t，所以由动量定理，有

$$-ft=mv_1-mv_0$$

这里因为子弹受到的摩擦力的方向与子弹前进的方向相反，所以冲量取负号，其实是摩擦力取负号。

若单以 B 为研究对象，在水平方向上，B 受到 A 向右推的压力 N，这个力的作用时间也是 t，因此由动量定理，有

$$Nt=m_Bv_2$$

联立上述前两式，其实就是以 A、B 为研究对象，则在水平方向上，系统受到子弹施加的向前的摩擦力 f，作用时间为 t，所以由动量定理，有

$$ft=(m_A+m_B)v_2$$

所以综合上面最后两式，有

$$\frac{N}{f}=\frac{m_B}{m_A+m_B}$$

$$N=\frac{m_B}{m_A+m_B}f=\frac{3}{2+3}\times3\times10^3=1.8\times10^3\ \mathrm{N}$$

当然，由上面几式还可以解得

$$v_1=v_0-\frac{ft}{m}=800-\frac{3\times10^3\times0.01}{0.1}=500\ \mathrm{m/s}$$
$$v_2=\frac{ft}{m_A+m_B}=\frac{3\times10^3\times0.01}{2+3}=6\ \mathrm{m/s}$$

上述 v_2 就是子弹离开 A 之后 A 的速度，在第二阶段，A 在水平方向上不受力，所以做匀速直线运动。而在第二阶段，以子弹和 B 为研究对象，系统在水平方向上不受力，所以系统的动量守恒，子弹离开 A 进入 B 时，子弹的速度为 v_1，B 的速度为 v_2，设最后子弹留在 B 中时子弹和 B 的共同速度为 v_3，则有

$$mv_1+m_Bv_2=(m+m_B)v_3$$
$$v_3=\frac{mv_1+m_Bv_2}{m+m_B}=\frac{0.1\times500+3\times6}{0.1+3}=\frac{680}{31}\ \mathrm{m/s}$$

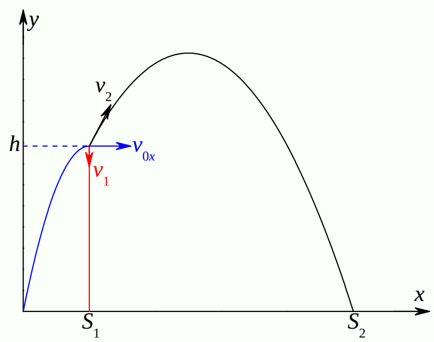
第 107 题

【5009】一炮弹发射后在其运行轨道上的最高点 $h=19.6$ m 处炸裂成质量相等的两块。其中一块在爆炸后 1 秒钟落到爆炸点正下方的地面上。设此处与发射点的距离 $S_1=1000$ m，问另一块落地点与发射地点间的距离是多少？（空气阻力不计，$g=9.8\ \mathrm{m/s^2}$）

解析

【解析】动量守恒定律，抛体运动。

设炮弹总质量为 $m_0=2m$，爆炸后两个碎片的质量分别为 $m_1=m_2=m$，炮弹发射时的初速度为 $\vec{v}_0=v_{0x}\vec{e}_x+v_{0y}\vec{e}_y$，爆炸后两个碎片的速度分别为 $\vec{v}_1$ 和 $\vec{v}_2$，炮弹发射 t_0 时间后到达轨道最高点，爆炸后第一个碎片经过 t_1 时间落到爆炸点正下方的地面上，第二个碎片经过 t_2 时间落到地面，落地点与发射点之间的距离为 S_2。



则在爆炸过程中，动量守恒，所以依题意有

$$\vec{v}_1=v_1\vec{e}_y$$
$$\vec{v}_2=v_{2x}\vec{e}_x+v_{2y}\vec{e}_y$$

$$m_0v_{0x}\vec{e}_x = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$$
$$-h = v_1t_1 - \frac{1}{2}gt_1^2$$
$$h = v_{0y}t_0 - \frac{1}{2}gt_0^2 = \frac{1}{2}gt_0^2$$
$$v_{0y} = gt_0$$
$$S_1 = v_{0x}t_0$$
$$-h = v_{2y}t_2 - \frac{1}{2}gt_2^2$$
$$S_2 = S_1 + v_{2x}t_2$$

解得

$$t_0 = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2\times 19.6}{9.8}} = 2\ \mathrm{s}$$
$$v_{0x} = \frac{S_1}{t_0} = \frac{1000}{2} = 500\ \mathrm{m/s}$$
$$v_{0y} = 9.8\times 2 = 19.6\ \mathrm{m/s}$$
$$v_1 = \frac{1}{2}gt_1 - \frac{h}{t_1} = \frac{1}{2}\times 9.8\times 1 - \frac{19.6}{1} = -14.7\ \mathrm{m/s}$$
$$\vec{v}_2 = 2v_{0x}\vec{e}_x - \vec{v}_1 = 1000\vec{e}_x + 14.7\vec{e}_y\ \mathrm{m/s}$$
$$-19.6 = 14.7t_2 - 4.9t_2^2 \Rightarrow t_2^2 - 3t_2 - 4 = (t_2+1)(t_2-4) = 0 \Rightarrow t_2 = 4\ \mathrm{s}$$
$$S_2 = 1000 + 1000\times 4 = 5000\ \mathrm{m}$$

第 108 题

【0416】一物体按规律 $x = ct^3$ 在流体媒质中作直线运动，式中 c 为常量，t 为时间。设媒质对物体的阻力正比于速度的平方，阻力系数为 k，试求物体由 $x=0$ 运动到 $x=L$ 时，阻力所作的功。

解析

【解析】变力的功。
已知位置随时间的变化关系，通过求导可以得到速度

$$x = ct^3$$
$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 3ct^2 = 3c^{1/3}x^{2/3}$$

依题意，可得阻力的表达式为

$$f = -kv^2 = -9kc^2t^4 = -9kc^{2/3}x^{4/3}$$

根据变力做功的定义，可得

$$W = \int_{x_0}^{x} f\mathrm{d}x = \int_0^L -9kc^{2/3}x^{4/3}\mathrm{d}x = -\frac{27}{7}kc^{2/3}L^{7/3}$$

第 109 题

【0422】一质量为 m 的质点在 Oxy 平面上运动，其位置矢量为：$\vec{r}=a\cos\omega t\vec{e}_x+b\sin\omega t\vec{e}_y$(SI)，式中 a、b、ω 是正值常量，且 $a>b$。(1) 求质点在 A 点 $(a,0)$ 时和 B 点 $(0,b)$ 时的动能；(2) 求质点所受的合外力 $\vec{F}$ 以及当质点从 A 点运动到 B 点的过程中 $\vec{F}$ 的分力 F_x 和 F_y 分别作的功。

解析

【解析】已知运动学方程求速度和加速度，动能，变力的功。

已知位置随时间的变化关系，通过求导可以得到速度和加速度

$$\vec{r}=a\cos\omega t\vec{e}_x+b\sin\omega t\vec{e}_y$$
$$\vec{v}=\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}=-a\omega\sin\omega t\vec{e}_x+b\omega\cos\omega t\vec{e}_y$$
$$\vec{a}=\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}=-a\omega^2\cos\omega t\vec{e}_x-b\omega^2\sin\omega t\vec{e}_y=-\omega^2\vec{r}$$

在 A 点 $(a,0)$，

$$\cos\omega t=1,\sin\omega t=0$$

所以速度为

$$\vec{v}_A=b\omega\vec{e}_y$$

所以质点的动能为

$$E_{kA}=\frac{1}{2}mv_A^2=\frac{1}{2}mb^2\omega^2$$

在 B 点 $(0,b)$，

$$\cos\omega t=0,\sin\omega t=1$$

所以速度为

$$\vec{v}_B=-a\omega\vec{e}_x$$

所以质点的动能为

$$E_{kB}=\frac{1}{2}mv_B^2=\frac{1}{2}ma^2\omega^2$$

上面已经求得质点的加速度 $\vec{a}$，利用牛顿第二定律，可得质点所受合外力为

$$\vec{F}=m\vec{a}=-ma\omega^2\cos\omega t\vec{e}_x-mb\omega^2\sin\omega t\vec{e}_y=-m\omega^2\vec{r}$$
$$F_x=-ma\omega^2\cos\omega t=-m\omega^2x,F_y=-mb\omega^2\sin\omega t=-m\omega^2y$$

根据变力做功的定义，可得

$$W=\int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B}\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=\int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B}(F_x\mathrm{d}x+F_y\mathrm{d}y)$$
$$W_x=\int_{x_A}^{x_B}F_x\mathrm{d}x=\int_a^0-m\omega^2x\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}m\omega^2(0^2-a^2)=\frac{1}{2}m\omega^2a^2$$
$$W_y=\int_{y_A}^{y_B}F_y\mathrm{d}y=\int_0^b-m\omega^2y\mathrm{d}y=-\frac{1}{2}m\omega^2(b^2-0^2)=-\frac{1}{2}m\omega^2b^2$$

第 110 题

【0202】质量 $m = 2$ kg 的物体沿 x 轴作直线运动，所受合外力 $F = 10 + 6x^2$(SI)。如果在 $x = 0$ 处时速度 $v_0 = 0$；试求该物体运动到 $x = 4$ m 处时速度的大小。

解析

【解析】变力的功，动能定理。

根据变力做功的定义，可得

$$W = \int_{x_0}^{x} F\mathrm{d}x = \int_0^4 (10 + 6x^2)\mathrm{d}x = (10x + 2x^3)_0^4 = 10 \times 4 + 2 \times 4^3 = 168\ \mathrm{J}$$

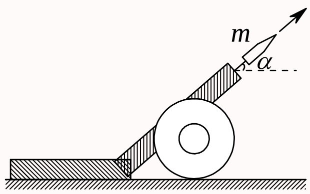
根据动能定理，可得

$$W = \Delta E_k = E_{k1} - E_{k0} = \frac{1}{2}m(v_1^2 - v_0^2)$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{2W}{m}} = \sqrt{\frac{2 \times 168}{2}} = \sqrt{168}\ \mathrm{m/s}$$

第 111 题

【0452】如图，水平地面上一辆静止的炮车发射炮弹。炮车质量为 M，炮身仰角为 α，炮弹质量为 m，炮弹刚出口时，相对于炮身的速度为 u，不计地面摩擦：(1) 求炮弹刚出口时，炮车的反冲速度大小；(2) 若炮筒长为 L，求发炮过程中炮车移动的距离。



解析

【解析】相对运动，动量守恒定律，质心运动定理。

以水平向右为 x 轴正方向，竖直向上为 y 轴正方向，设炮车的反冲速度为 $\vec{v}_1 = -v_1\vec{e}_x$，则炮弹刚射出时的速度为

$$\vec{v}_2 = (-v_1 + u\cos\alpha)\vec{e}_x + u\sin\alpha\vec{e}_y$$

由于不计地面摩擦，所以由炮车和炮弹组成的系统在水平方向上所受合外力为零，系统的动量守恒，原来炮车静止，所以有

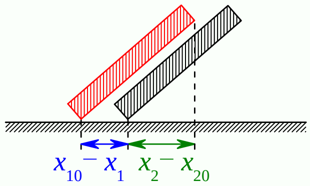
$$0 = -Mv_1 + m(-v_1 + u\cos\alpha)$$

$$v_1 = \frac{mu\cos\alpha}{M + m}$$

由于不计地面摩擦，所以由炮车和炮弹组成的系统在水平方向上所受合外力为零，原来炮车静止，所以系统的质心在发炮过程中在水平方向的位置保持不动。假设发炮前，炮车质心的水平位置为 x_{10}，炮弹质心的水平位置为 x_{20}，炮弹离开炮口时，炮车质心的水平位置为 x_1，炮弹质心的水平位置

为 x_2，则有

$$Mx_{10}+mx_{20}=Mx_1+mx_2$$
$$(x_{10}-x_1)+(x_2-x_{20})=L\cos\alpha$$



解得

$$M(x_{10}-x_1)=m(x_2-x_{20})$$
$$x_2-x_{20}=\frac{M}{m}(x_{10}-x_1)$$
$$(x_{10}-x_1)+\frac{M}{m}(x_{10}-x_1)=\frac{m+M}{m}(x_{10}-x_1)=L\cos\alpha$$
$$x_{10}-x_1=\frac{m}{m+M}L\cos\alpha$$

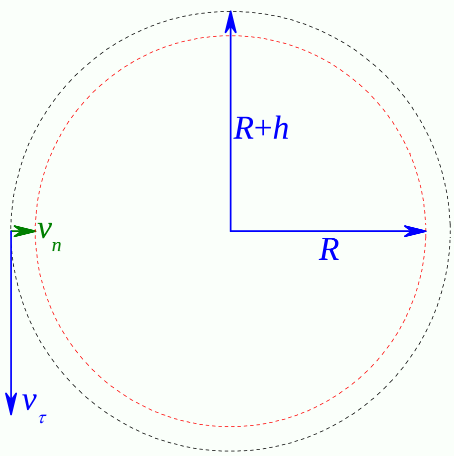
第 112 题

【0201】地球可看作是半径 $R=6400$ km 的球体，一颗人造地球卫星在地面上空 $h=800$ km 的圆形轨道上，以 7.5 km/s 的速度绕地球运动。在卫星的外侧发生一次爆炸，其冲量不影响卫星当时的绕地圆周切向速度 $v_\tau=7.5$ km/s，但却给予卫星一个指向地心的径向速度 $v_n=0.2$ km/s。求这次爆炸后使卫星轨道的最低点和最高点各位于地面上空多少公里？

解析

【解析】角动量守恒定律，机械能守恒定律。

设地球的质量为 M，卫星的质量为 m，在卫星的运动过程中，只受到地球万有引力的作用，万有引力一定指向地球的地心，所以对地球地心的力矩为零，所以卫星对地球地心的角动量守恒；另外万有引力是个保守力，所以系统的机械能守恒。



爆炸前，卫星的轨道为圆形轨道，爆炸后，卫星的轨道为椭圆轨道。卫星在椭圆轨道的最低点和最高点时的速度方向和卫星与地心连线垂直。所以有

$$mv_\tau(R+h)=mvr$$
$$\frac{1}{2}m(v_\tau^2+v_n^2)-\frac{GMm}{R+h}=\frac{1}{2}mv^2-\frac{GMm}{r}$$

而当卫星在圆形轨道上运动时，其向心力就是卫星与地球之间的万有引力，所以有

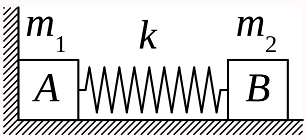
$$\frac{mv_\tau^2}{R+h}=\frac{GMm}{(R+h)^2}$$

联立求得

$$GM=v_\tau^2(R+h)$$
$$vr=v_\tau(R+h)$$
$$(v_\tau^2+v_n^2)-2v_\tau^2=v_n^2-v_\tau^2=v^2-2\frac{v_\tau^2(R+h)}{r}=v^2-2vv_\tau^2$$
$$v^2-2vv_\tau^2+v_\tau^2=(v-v_\tau)^2=v_n^2$$
$$v=v_\tau\pm v_n$$
$$r=\frac{v_\tau}{v}(R+h)=\frac{v_\tau}{v_\tau\pm v_n}(R+h)$$
$$h_1=\frac{v_\tau}{v_\tau+v_n}(R+h)-R=\frac{7.5}{7.5+0.2}(6400+800)-6400\approx 613\text{ km}$$
$$h_2=\frac{v_\tau}{v_\tau-v_n}(R+h)-R=\frac{7.5}{7.5-0.2}(6400+800)-6400\approx 997\text{ km}$$

第 113 题

【0183】两个质量分别为 m_1 和 m_2 的木块 A 和 B，用一个质量忽略不计、劲度系数为 k 的弹簧联接起来，放置在光滑水平面上，使 A 紧靠墙壁，如图所示。用力推木块 B 使弹簧压缩 x_0，然后释放。已知 $m_1=m$，$m_2=3m$，求：(1) 释放后，A、B 两木块速度相等时的瞬时速度的大小；(2) 释放后，弹簧的最大伸长量。



解析

【解析】机械能守恒定律，动量守恒定律。

释放之后在弹簧恢复原长之前，墙壁对 A 有作用力，但这个作用力不做功，所以这个阶段，由两个木块和弹簧组成的系统动量不守恒，但机械能守恒。所以，弹簧恢复原长的瞬间，B 的速度大小 v_0 满足

$$\frac{1}{2}kx_0^2=\frac{1}{2}m_2v_0^2$$

$$v_0=\sqrt{\frac{k}{m_2}}x_0=\sqrt{\frac{k}{3m}}x_0$$

之后，A 离开墙壁，系统在水平方向不再受到外力作用，系统机械能守恒、动量守恒。当 A、B 速度相等时，弹簧形变量最大，可能是被拉伸最大，也可能是被压缩最大，所以有

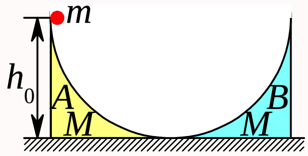
$$m_2v_0=(m_1+m_2)v$$
$$\frac{1}{2}m_2v_0^2=\frac{1}{2}kx_0^2=\frac{1}{2}(m_1+m_2)v^2+\frac{1}{2}kx^2$$

解得

$$v=\frac{m_2v_0}{m_1+m_2}=\frac{3m}{m+3m}\sqrt{\frac{k}{3m}}x_0=\frac{1}{4}\sqrt{\frac{3k}{m}}x_0$$
$$x=\sqrt{x_0^2-\frac{(m_1+m_2)v^2}{k}}=x_0\sqrt{1-\frac{4m}{k}\times\frac{1}{16}\times\frac{3k}{m}}=x_0\sqrt{1-\frac{3}{4}}=\frac{x_0}{2}$$

第 114 题

【0209】两个形状完全相同、质量都为 M 的弧形导轨 A 和 B，相向地放在地板上，今有一质量为 m 的小物体，从静止状态由 A 的顶端下滑，A 顶端的高度为 h_0，所有接触面均光滑。试求小物体在 B 轨上上升的最大高度 (设 A、B 导轨与地面相切)。



解析

【解析】机械能守恒定律，动量守恒定律。

小物体从 A 上滑下时，以小物体与 A 为研究对象，由于所有接触都光滑，所以系统在水平方向上不受外力作用，系统水平方向上动量守恒，机械能守恒。由于导轨与地面相切，所以物体离开 A 时的速度也是沿水平方向，设物体离开 A 时，物体的速度为 v_1，A 的速度为 v_A，则有

$$0=mv_1+Mv_A$$
$$mgh_0=\frac{1}{2}mv_1^2+\frac{1}{2}Mv_A^2$$

解得

$$v_A=-\frac{mv_1}{M}$$
$$2mgh_0=mv_1^2+M\frac{m^2v_1^2}{M^2}=\frac{M+m}{M}mv_1^2$$
$$v_1=\sqrt{\frac{2Mgh_0}{M+m}}$$

之后，物体沿 B 上升，以小物体与 B 为研究对象，由于所有接触都光滑，所以系统在水平方向上不受外力作用，系统水平方向上动量守恒，机械能守恒。当物体与 B 的水平速度分量相等且物体的

竖直速度分量为零时，小物体在 B 轨上上升的高度最大，设此时二者的水平速度分量为 v_x，物体上升的高度为 h，则有

$$mv_1 = (m+M)v_x$$

$$\frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}(m+M)v_x^2 + mgh$$

解得

$$v_x = \frac{mv_1}{m+M}$$

$$2mgh = mv_1^2 - (m+M)v_x^2 = mv_1^2 - (m+M)\frac{m^2v_1^2}{(m+M)^2} = \frac{M}{m+M}mv_1^2$$

$$h = \frac{M}{2(m+M)g}v_1^2 = \frac{M}{2(m+M)g} \times \frac{2Mgh_0}{M+m} = \frac{M^2}{(m+M)^2}h_0$$