

目 录

第1章 质点运动学.....	5
1.1 复习笔记.....	5
1.2 课后习题详解.....	10
1.3 名校考研真题详解.....	34
第2章 牛顿定律.....	39
2.1 复习笔记.....	39
2.2 课后习题详解.....	42
2.3 名校考研真题详解.....	64
第3章 动量守恒定律和能量守恒定律.....	70
3.1 复习笔记.....	70
3.2 课后习题详解.....	77
3.3 名校考研真题详解.....	104
第4章 刚体转动和流体运动.....	111
4.1 复习笔记.....	111
4.2 课后习题详解.....	123
4.3 名校考研真题详解.....	150
第5章 静电场.....	155
5.1 复习笔记.....	155
5.2 课后习题详解.....	164
5.3 名校考研真题详解.....	193
第6章 静电场中的导体与电介质.....	200
6.1 复习笔记.....	200
6.2 课后习题详解.....	208
6.3 名校考研真题详解.....	237
第7章 恒定磁场.....	240
7.1 复习笔记.....	240
7.2 课后习题详解.....	256
7.3 名校考研真题详解.....	283
第8章 电磁感应 电磁场.....	289
8.1 复习笔记.....	289
8.2 课后习题详解.....	300
8.3 名校考研真题详解.....	324

1.1 复习笔记

一、质点运动的描述

1. 参考系

(1) 运动的相对性

运动的相对性是指在观察物体的位置及位置的变化时,标准物不同,对物体运动情况的描述也就不同。

(2) 参考系

参考系是为描述物体的运动而选的标准物。

参考系的选择是任意的,选择不同的参考系,对同一物体运动情况的描述是不同的。因此,在讲述物体运动情况时,必须指明是对什么参考系而言的。

2. 质点

(1) 质点的概念

质点是指忽略物体的大小和形状对运动的影响,把物体当作一个有质量的点(即质点)来处理的一个理想模型。

(2) 质点选取的条件

作为质点的物体的形状和大小必须对所要研究的问题无影响,且必须对具体情况作具体分析。

二、位置矢量运动方程位移

1. 位置矢量

(1) 概念

①位置矢量是一个有向线段,其始端位于坐标系的原点 O ,末端与质点 P 在时刻 t 的位置相重合,它可简称为位矢。

②位置矢量可用 $\boldsymbol{r}(t)$ 来表示。

(2) 表示方法

在直角坐标系中,位矢 \boldsymbol{r} 在 Ox 轴、 Oy 轴和 Oz 轴上的投影分别为 x 、 y 和 z 。如取 \boldsymbol{i} 、 \boldsymbol{j} 和 \boldsymbol{k} 分别为沿 Ox 轴、 Oy 轴和 Oz 轴的单位矢量,那么

①位矢 \boldsymbol{r} 为

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$$

②其值为

$$|\boldsymbol{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

③位矢 \boldsymbol{r} 的方向余弦由为

$$\cos \alpha = \frac{x}{|\boldsymbol{r}|} \quad \cos \beta = \frac{y}{|\boldsymbol{r}|} \quad \cos \gamma = \frac{z}{|\boldsymbol{r}|}$$

式中 α 、 β 、 γ 分别是 \boldsymbol{r} 与 Ox 轴、 Oy 轴和 Oz 轴之间的夹角。

2. 运动方程

(1) 运动方程

质点的运动方程是指当质点运动时,它相对坐标原点 O 的位矢 \boldsymbol{r} 关于时间 t 的函数

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j} + z(t)\boldsymbol{k}$$

(2) 轨迹方程

轨迹方程是指利用 $x(t)$ 、 $y(t)$ 和 $z(t)$ 表示 $\boldsymbol{r}(t)$ 在 Ox 轴、 Oy 轴、 Oz 轴的分量,从而消去参数 t 所得到的方程。它们也是轨迹的参数方程。

3. 位移

(1) 位移概念

位移是指一质点在平面直角坐标系中从点 A 运动到点 B, 相对原点 O 的位矢由 r_A 变化到 r_B 时, 它在时间 Δt 内位移矢量的变化。

(2) 位移的表达式

将 A、B 两点的位矢 r_A 与 r_B 分别写成

$$r_A = x_A i + y_A j$$

$$r_B = x_B i + y_B j$$

于是, 位移 Δr 可写成

$$\Delta r = r_B - r_A = (x_B - x_A) i + (y_B - y_A) j$$

若质点在三维空间中运动, 则在直角坐标系 Oxyz 中其位移为

$$\Delta r = (x_B - x_A) i + (y_B - y_A) j + (z_B - z_A) k$$

注: 路程与位移不是完全等价的, 它们是两个完全不同的概念, 位移为零时, 路程不一定为零。

三、速度

设在 Δt 时间内, 质点的位移为 $\Delta r = r_2 - r_1$ 。

1. 平均速度 \bar{v}

$$\bar{v} = \frac{r_2 - r_1}{\Delta t} = \frac{\Delta r}{\Delta t}$$

平均速度 \bar{v} 是矢量, 且与 Δr 的方向相同。

平均速度的矢量形式为

$$\bar{v} = \frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t} i + \frac{\Delta y}{\Delta t} j = \bar{v}_x i + \bar{v}_y j$$

其中 \bar{v}_x 和 \bar{v}_y 分别是平均速度 \bar{v} 在 Ox 轴和 Oy 轴上的分量。

2. 速度

(1) 速度的几种表达式

瞬时速度简称速度, 是指当 $\Delta t \rightarrow 0$ 时, 平均速度的极限值, 表达式为

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{dr}{dt} \quad \text{或} \quad v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} i + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} j = v_x i + v_y j$$

其中

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}$$

v_x 和 v_y 分别是速度 v 在 Ox 轴和 Oy 轴上的分量。

若 v_x 和 v_y 分别表示速度 v 在 Ox 和 Oy 轴上的分速度 (v_x 和 v_y 是分矢量), 那么有 $v_x = v_x i$ 和 $v_y = v_y j$, 上式亦可写成

$$v = v_x + v_y$$

(2) 速度、分速度和速度分量之间的关系如图 1-1 所示。

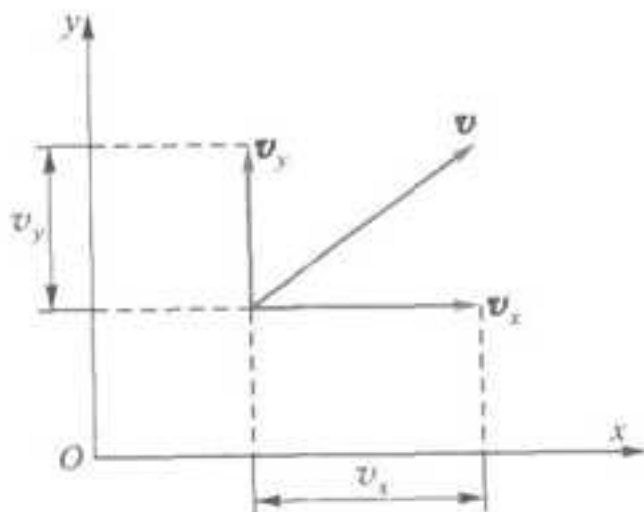


图 1-1 速度分速度及其分量的关系图

(3) 速率

速率通常指速度 v 的值 $|v|$ 或 v 。

(4) 速度方向

当质点作曲线运动时，质点在某一点的速度方向就是沿该点曲线的切线方向。

四、加速度

1. 平均加速度

平均加速度是指在时间间隔 Δt 内，质点的速度增量 $\Delta v = v_2 - v_1$ 与 Δt 的比值

$$\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

2. 加速度

(1) 定义

加速度是指当 $\Delta t \rightarrow 0$ 时，平均加速度的极限值，又称瞬时加速度，用 a 表示

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}$$

(2) 大小及方向

a 的方向是 $\Delta t \rightarrow 0$ 时 Δv 的极限方向，而 a 的大小是 $|\Delta v / \Delta t|$ 的极限值，即

$$|a| = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta v}{\Delta t} \right|$$

注：曲线运动中，加速度的方向指向曲线的凹侧。

(3) 坐标表达式

$$a = a_x i + a_y j = a_x + a_y$$

其中

$$a_x = \frac{dv_x}{dt}, \quad a_y = \frac{dv_y}{dt}$$

五、圆周运动

1. 平面极坐标

(1) 定义

平面极坐标是指质点在 Oxy 平面内的位置 A ，以它相对原点 O 的位矢 r 与 Ox 轴之间的夹角为 θ 即 (r, θ) 为坐标的坐标系，如图 1-2 所示。

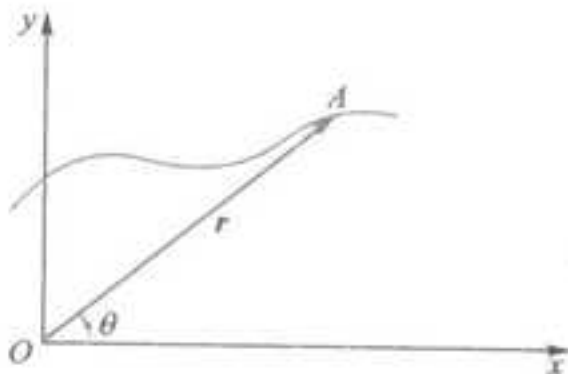


图 1-2 平面极坐标

(2) 极坐标与直角坐标的关系

点 A 在平面直角坐标系内的坐标则为 (x, y) ，在极坐标中为 (r, θ) ，则 $x = r \cos \theta$ 、 $y = r \sin \theta$ 。

2. 圆周运动的角速度

当质点在圆周上运动时，位矢 r 与 Ox 轴之间的夹角 θ 随时间而改变，即 θ 是时间的函数 $\theta(t)$ 。

(1) 定义

角速度是指角坐标 $\theta(t)$ 随时间的变化率，即 $d\theta/dt$ 。用符号 ω 表示，则有

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

(2) 单位

角速度 ω 的单位名称为弧度每秒，符号为 $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$ 。

(3) 速率与角速度关系

当 $\Delta t \rightarrow 0$ 时， $\Delta s/\Delta t$ 的极限值为

$$\frac{ds}{dt} = r \frac{d\theta}{dt}$$

而 ds/dt 为质点在点 A 的速率 v ， $d\theta/dt$ 则为质点在点 A 的角速度 ω ，故有

$$v = r\omega$$

3. 圆周运动的切向加速度和法向加速度角加速度

(1) 切向加速度

切向加速度是指质点加速度的切向分矢量，它由速度大小变化而引起，其方向为 e_t 的方向，即与速度 v 的方向相同。用 a_t 表示，有

$$a_t = \frac{dv}{dt} e_t, \quad |a_t| = \frac{dv}{dt}$$

(2) 角加速度

角加速度是指角速度随时间的变化率 $d\omega/dt$ ，用符号 α 表示，有

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

角加速度 α 的单位名称是弧度每二次方秒，符号为 $\text{rad} \cdot \text{s}^{-2}$ 。

(3) 切向加速度与角加速度之间的瞬时关系

$$a_t = r\alpha e_t$$

(4) 法向加速度

法向单位矢量为指向圆心的法线方向上取的单位矢量 e_n 。

法向加速度是加速度沿法线方向的分矢量，用 a_n 表示，有

$$a_n = v \frac{d\theta}{dt} e_n$$

因为 $\omega = d\theta/dt$, $v = r\omega$, 故上式为

$$a_n = r\omega^2 e_n = \frac{v^2}{r} e_n, \quad |a_n| = \frac{v^2}{r}$$

(5) 合加速度

质点作变速圆周运动时的加速度 a 的表示式

$$a = a_t + a_n = \frac{dv}{dt} e_t + \frac{v^2}{r} e_n \quad \text{或} \quad a = r\alpha e_t + r\omega^2 e_n$$

其中切向加速度 a_t 是由于速度数值的变化而引起的，法向加速度 a_n 是由于速度方向的变化而引起的。

(6) 变速圆周运动的加速度

在变速圆周运动中，速度的方向和大小都在变化，加速度 a 的值和方向为

$$a = (a_n^2 + a_t^2)^{1/2}, \quad \tan \varphi = \frac{a_n}{a_t}$$

对于一般的曲线运动，可以把一段足够小的曲线看成是一段圆弧，这样包含这段圆弧的圆周就被称为曲线在给定点的曲率圆，从而可用曲率半径 ρ 来替代圆的半径 r 。

(7) 自然坐标系

自然坐标系是指以动点 A 为原点，以切向单位矢量 e_t 和法向单位矢量 e_n 建立的二维坐标系，如图 1-3 所示。

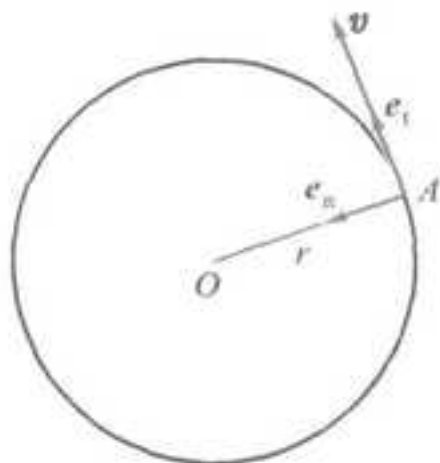


图 1-3 法向单位矢量 e_n 与切向单位矢量 e_t 相垂直

六、匀速率圆周运动和匀变速率圆周运动

1. 匀速率圆周运动

质点作匀速率圆周运动时，其速率 v 和角速度 ω 都为常量，故角加速度 $\alpha = 0$ ，切向加速度 $a_t = dv/dt = 0$ ，而法向加速度的值 $a_n = r\omega^2 = v^2/r$ 为常量。

(1) 加速度

$$a = a_n = r\omega^2 e_n$$

(2) 角度

如取 $t=0$ 时, $\theta=\theta_0$, 则有 $\theta=\theta_0+\omega t$.

2. 匀变速率圆周运动

质点作匀变速率圆周运动时, 有

- (1) 角加速度 $\alpha = \text{常量}$;
- (2) 圆周上某点的切向加速度的值为 $a_t = r\alpha = \text{常量}$;
- (3) 法向加速度的值为 $a_n = r\omega^2 = v^2/r$, 但不为常量;
- (4) 合加速度为

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_t + \boldsymbol{a}_n = r\alpha \boldsymbol{e}_t + r\omega^2 \boldsymbol{e}_n$$

- (5) 参数变化公式

如果 $t=0$ 时, $\theta=\theta_0$, $\omega=\omega_0$, 则有

$$\left. \begin{aligned} \omega &= \omega_0 + \alpha t \\ \theta &= \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2 \\ \omega^2 &= \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0) \end{aligned} \right\}$$

七、相对运动

1. 时间与空间

在牛顿力学范围内, 只有时间与空间的测量可以视为与参考系的选取无关, 然而, 运动质点的位移、速度和运动轨迹则与参考系的选择有关.

2. 相对运动

- (1) 现象

运动的相对性是指质点的运动轨迹依赖于参考系的不同而不同.

- (2) 几种速度的定义

常把视为静止的参考系 S 作为基本参考系, 把相对 S 系运动的参考系 S' 作为运动参考系.

- ①绝对速度: 质点相对基本参考系 S 的速度 \boldsymbol{v} .
- ②相对速度: 质点相对运动参考系 S' 的速度 \boldsymbol{v}' .
- ③牵连速度: 运动参考系 S' 相对基本参考系 S 的速度 \boldsymbol{u} .

- (3) 伽利略速度变换公式

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}' + \boldsymbol{u}$$

可理解为: 质点相对基本参考系的绝对运动速度 \boldsymbol{v} , 等于运动参考系相对于基本参考系的牵连速度 \boldsymbol{u} 与质点相对于运动参考系的相对速度 \boldsymbol{v}' 之和.

1.2 课后习题详解

一、问题

1-1 在一艘内河轮船中, 两个旅客有这样的对话:

甲: 我静静地坐在这里好半天了, 我一点也没有运动.

乙: 不对, 你看看窗外, 河岸上的物体都飞快地向后掠走. 船在飞快前进, 你也在很快地运动.

试把他们讲话的含义阐述得确切一些. 究竟旅客甲是运动, 还是静止? 你如何理解运动和静止这两个概念.

答: 甲、乙两人的话都是对的, 只是他们在描述物体的运动状态时所选的参考系不同而已. 自然界中所有的物体都在不停地运动着, 绝对静止不动的物体是没有的. 选取的参考系不同, 对物体运动情况的描述也就有所不同. 若以轮船为参考系, 静静坐在船里的旅客甲是静止的; 若以河岸上的物体为参考系, 旅客甲随船在飞快前进, 当然是运动的.

1-2 有人说: “分子很小, 可将其当作质点; 地球很大, 不能当作质点”. 对吗?

答：这种说法是错误的。因为定义质点并不是只看物体本身的大小，而是要看物体的大小和形状的变化对物体运动的影响是否小到可以被忽略，若能忽略这些影响，物体就可以被看作质点。地球是很大，但在研究地球公转时，由于日地距离远大于地球半径。地球上各点相对于太阳的运动可以看作是相同的，此时当然可以把地球当作质点。

1-3 已知质点的运动方程为 $\mathbf{r} = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$ ，有人说其速度和加速度分别为 $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$ ， $\mathbf{a} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$ ，其中 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ 。你说对吗？

答：不对。质点在 Oxy 平面内作曲线运动时，运动方程为 $\mathbf{r} = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$ 随时间变化， $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ 是 t 时刻位置矢量 \mathbf{r} 的大小，质点的速度为 $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$ ，质点的加速度为 $\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$ ，质点的速度和加速度的大小分别为

$$v = |\mathbf{v}| = \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

$$a = |\mathbf{a}| = \left| \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \right| = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2}$$

因为 $\left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| \neq \frac{dr}{dt}$ ，所以 $v \neq \frac{dr}{dt}$ ， $a \neq \frac{d^2r}{dt^2}$ 。

1-4 回答并举例说明下列问题：

- (1) 质点能否具有恒定的速率而速度却是变化的呢？
- (2) 质点在某时刻其速度为零，而其加速度是否也为零呢？
- (3) 有没有这样的可能，质点的加速度在变小，而其速度在变大呢？

答：(1) 可以。当加速度方向与速度方向垂直时，速度大小不变但方向改变，比如：匀速圆周运动。

(2) 速度是加速度的时间积累，速度为零，加速度可以不为零，比如物体竖直上抛到最高点时，速度为零，加速度为重力加速度。

(3) 可以。当加速度方向与速度方向一致时，尽管加速度大小在变小，速度（大小）还是增加的。

1-5 在习题 1-5 中，有人认为：船速为 $v = v_0 \cos\theta$ ，由此得出的答案是错误的。你知道错在哪里吗？

答：错误地认为船沿水面的速度是收绳速度的一个分量。该题中绳速 v_0 是指收绳的速度，其实绳上各点速度，不仅大小不同，方向也不同，只有系在船上的绳端部分速度与船速相同。既然船速与系在船上的绳端速度相同，船速就不会是绳速的一个分量。

1-6 如果一质点的加速度与时间的关系是线性的，那么，该质点的速度和位矢与时间的关系是否也是线性的呢？

答：质点的速度和位矢与时间的关系都不是线性的。因为 $\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$ ，若加速度与时间的关系是线性的，两边积分求得的速度和位矢与时间的关系显然都不是线性的。

1-7 一人站在地面上用枪瞄准悬挂在树上的木偶。当击发枪机，子弹从枪口射出时，木偶正好从树上由静止自由下落。试说明为什么子弹总可以射中木偶？

答：因为子弹在竖直方向上的运动和木偶的运动一样，都是自由落体运动。

1-8 一质点作匀速率圆周运动, 取其圆心为坐标原点。试问: 质点的位矢与速度、位矢与加速度、速度与加速度的方向之间有何关系?

答: 质点的位矢方向沿半径向外, 速度的方向沿圆周切向, 即位矢与速度的方向始终是垂直的; 匀速率圆周运动质点的加速度方向始终指向圆心, 即位矢与加速度的方向相反; 速度与加速度的方向也始终彼此垂直。

1-9 在《关于两门新科学的对话》一书中, 伽利略写道: “仰角(即抛射角)比 45° 增大或减小一个相等角度的抛体, 其射程是相等的。”你能证明吗?

答: 设仰角为 θ , 增减角为 φ , 则 $\theta = 45^\circ + \varphi$, 斜抛运动的运动方程为

$$x = v_0 t \cos \theta, y = v_0 t \sin \theta - \frac{1}{2} g t^2$$

令 $y=0$ 并消去 t 得

$$x = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\theta = \frac{v_0^2}{g} \sin(90^\circ \pm 2\varphi) = \frac{v_0^2}{g} \cos 2\varphi$$

所以对于 $\theta = 45^\circ + \varphi$ 和 $\theta = 45^\circ - \varphi$ 都有相等的射程。

1-10 下列说法是否正确:

- (1) 质点作圆周运动时的加速度指向圆心;
- (2) 匀速圆周运动的加速度为恒量;
- (3) 只有法向加速度的运动一定是圆周运动;
- (4) 只有切向加速度的运动一定是直线运动。

答: 加速度的产生, 是由于质点的运动速度发生了变化。无论是速度的大小还是速度的方向, 只要发生变化都会产生加速度。在自然坐标系中, 切向加速度反映速度大小的变化, 法向加速度反映速度方向的变化。

(1) 错误。质点作圆周运动时, 除了有法向加速度外, 还可以有切向加速度。这时加速度并不指向圆心。只有在匀速圆周运动中, 加速度才指向圆心。

(2) 错误。匀速圆周运动中, 加速度虽指向圆心, 但方向是时刻变化的, 所以加速度是变量。

(3) 错误。只有法向加速度的方向始终指向一点, 才是圆周运动。

(4) 正确。只有切向加速度意味着速度方向没有变化, 一直沿着同一方向, 所以一定是直线运动。

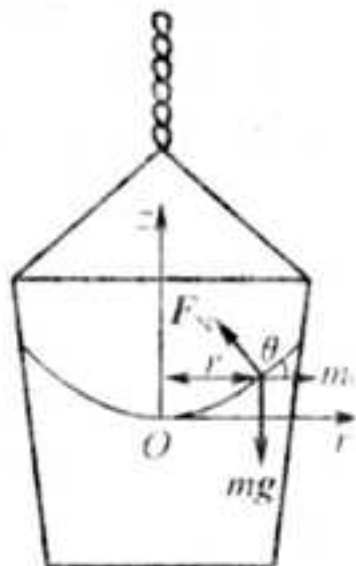
1-11 在地球的赤道上, 有一质点随地球自转的加速度为 a_E ; 而此质点随地球绕太阳公转的加速度为 a_S 。设想地球绕太阳的轨道可视为圆形。你知道这两个加速度之比是多少?

答: 根据 $a_n = \omega^2 R = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 R$ 得

$$\frac{a_E}{a_S} = \frac{R_E T_S^2}{R_S T_E^2} = \frac{6.37 \times 10^6 \times 365^2}{1.496 \times 10^{11} \times 1^2} = 5.673$$

1-12 一半径为 R 的圆筒中盛有水, 水面低于圆筒的顶部。当它以角速度 ω 绕竖直轴旋转时, 水面呈平面还是抛物面? 试证之。

答: 在水与水桶一起旋转的参考系上, 水受离心力作用向四周散开, 最后形成旋转凹面状。由于凹面具有旋转对称性, 只要求出凹面与过轴的竖直面的交线即可确定水面形状。



问题 1-12 图

如图所示，以液面中心为原点，建立 z, r 坐标。距离横坐标为 r 的一液面上的液体微团 m ，受重力 mg 、离心力 $mr\omega^2$ 和其他液体对它的作用力 F 的共同作用，合力为零。由于液体质元间的作用力是短程力，其他液体对该液体微团的作用，只是其附近的液体对它的作用，又由于液体内部无切向应力，此作用力 F 必与液面垂直，即与所求交线在该点的切线垂直，于是

$$\frac{dz}{dr} = \tan\theta = \frac{mr\omega^2}{mg} = \frac{\omega^2}{g}r$$

$$\text{分离变量积分} \int_0^z dz = \int_0^r \frac{\omega^2}{g} r dr, \text{得 } z = \frac{\omega^2}{2g} r^2.$$

此为抛物线方程，故液面为旋转抛物面。

1-13 把一小钢球放在大钢球的顶部，让两钢球自距地面高为 h 处，由静止自由下落与地面上钢板相碰撞。相碰后，小钢球可弹到 $9h$ 的高度。你能用相对运动的概念给予说明吗？设钢球间和钢球与钢板间的碰撞均为完全弹性碰撞。

答：两钢球距地面为 h 处自由下落，大球落地时的速度为 $\sqrt{2gh}$ （取竖直向下为正），与地面上钢板相碰后其反弹速度为 $v_{20} = -\sqrt{2gh}$ ，然后再与小球（此时小球相对于地面的速度为 $v_{10} = \sqrt{2gh}$ ）相碰。设小球的质量为 m ，大球的质量为 $M (M \gg m)$ ，由完全弹性碰撞时系统的动量守恒和能量守恒得

$$\begin{aligned} mv_{10} + Mv_{20} &= mv_1 + Mv_2 \\ \frac{1}{2}mv_{10}^2 + \frac{1}{2}Mv_{20}^2 &= \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}Mv_2^2 \end{aligned}$$

小球反弹的速度

$$v_1 = \frac{(m-M)v_{10} + 2Mv_{20}}{m+M}$$

当 $M \gg m$ 时， $v_1 = \frac{-Mv_{10} + 2Mv_{20}}{M} = -3\sqrt{2gh}$ ，则小钢球能反弹的高度为 $l = \frac{v_1^2}{2g} = 9h$ 。

1-14 如果有两个质点分别以初速 v_{10} 和 v_{20} 抛出， v_{10} 和 v_{20} 在同一平面内且与水平面的夹角分别为 θ_1 和 θ_2 ，有人说，在任意时刻，两质点的相对速度是一常量，你说对吗？

答：对。若取 v_{10} 的质点为参考系，则速度 v_{20} 的质点相对于它的速度为 $v = v_{20} - v_{10}$ 显然是个恒矢量。若取地面为参考系，则两个质点在任意时刻的速度分别为

$$\boldsymbol{v}_1 = v_{10} \cos \theta_1 \boldsymbol{i} + (v_{10} \sin \theta_1 - gt) \boldsymbol{j}$$

$$\boldsymbol{v}_2 = v_{20} \cos \theta_2 \boldsymbol{i} + (v_{20} \sin \theta_2 - gt) \boldsymbol{j}$$

两质点的相对速度

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}_{20} - \boldsymbol{v}_{10} = \text{恒矢量}$$

二、习题

1-1 质点作曲线运动，在时刻 t 质点的位矢为 \boldsymbol{r} ，速度为 \boldsymbol{v} ，速率为 v ， t 至 $(t+\Delta t)$ 时间内的位移为 $\Delta \boldsymbol{r}$ ，路程为 Δs ，位矢大小的变化量为 Δr （或称 $\Delta |\boldsymbol{r}|$ ），平均速度为 $\bar{\boldsymbol{v}}$ ，平均速率为 \bar{v} 。

(1) 根据上述情况，则必有 ()

- A. $|\Delta \boldsymbol{r}| = \Delta s = \Delta r$
 B. $|\Delta \boldsymbol{r}| \neq \Delta s \neq \Delta r$ ，当 $\Delta t \rightarrow 0$ 时有 $|\mathrm{d}\boldsymbol{r}| = \mathrm{d}s \neq \mathrm{d}r$
 C. $|\Delta \boldsymbol{r}| \neq \Delta r \neq \Delta s$ ，当 $\Delta t \rightarrow 0$ 时有 $|\mathrm{d}\boldsymbol{r}| = \mathrm{d}r \neq \mathrm{d}s$
 D. $|\Delta \boldsymbol{r}| \neq \Delta s \neq \Delta r$ ，当 $\Delta t \rightarrow 0$ 时有 $|\mathrm{d}\boldsymbol{r}| = \mathrm{d}r = \mathrm{d}s$

(2) 根据上述情况，则必有 ()

- A. $|\boldsymbol{v}| = v, |\bar{\boldsymbol{v}}| = \bar{v}$
 B. $|\boldsymbol{v}| \neq v, |\bar{\boldsymbol{v}}| \neq \bar{v}$
 C. $|\boldsymbol{v}| = v, |\bar{\boldsymbol{v}}| \neq \bar{v}$
 D. $|\boldsymbol{v}| \neq v, |\bar{\boldsymbol{v}}| = \bar{v}$

【答案】(1) B; (2) C

【解析】(1) 质点在 t 至 $(t+\Delta t)$ 时间内沿曲线从 P 点运动到 P' 点，各量关系如图所示，其中路程 $\Delta s = \widehat{PP'}$ ，位移大小 $|\Delta \boldsymbol{r}| = \overline{PP'}$ ，而 $\Delta r = |\boldsymbol{r}'| - |\boldsymbol{r}|$ 表示质点位矢大小的变化量，三个量的物理含义不同，在曲线运动中大小也不相等。但当 $\Delta t \rightarrow 0$ 时， P' 点无限趋近 P 点，则有 $|\mathrm{d}\boldsymbol{r}| = \mathrm{d}s$ ，但却不等于 $\mathrm{d}r$ 。

(2) 由于 $|\Delta \boldsymbol{r}| \neq \Delta s$ ，故 $\left| \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t} \right| \neq \frac{\Delta s}{\Delta t}$ ，即 $|\bar{\boldsymbol{v}}| \neq \bar{v}$ ，但由于 $|\mathrm{d}\boldsymbol{r}| = \mathrm{d}s$ ，故 $\left| \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} \right| = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$ ，即 $|\boldsymbol{v}| = v$ 。

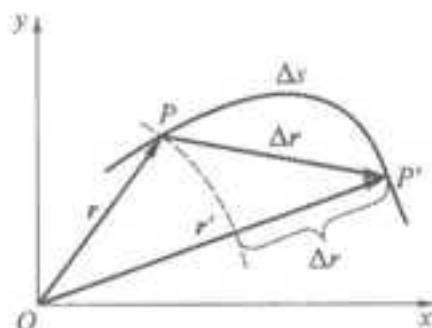


图 1-1

1-2 一运动质点在某瞬时位于位矢 $\boldsymbol{r}(x, y)$ 的端点处，对其速度的大小有四种意见，即

- (1) $\frac{dr}{dt}$; (2) $\frac{d|\boldsymbol{r}|}{dt}$; (3) $\frac{ds}{dt}$; (4) $\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$.

下述判断正确的是 ()

- A. 只有 (1) (2) 正确
 B. 只有 (2) 正确
 C. 只有 (2) (3) 正确
 D. 只有 (3) (4) 正确

【答案】D

【解析】 $\frac{dr}{dt}$ 表示质点到坐标原点的距离随时间的变化率，在极坐标系中叫径向速率，通常用符号 v_r 表示，

这是速度矢量在位矢方向上的一个分量； $\frac{dr}{dt}$ 表示速度矢量；在自然坐标系中速度大小可用公式 $v = \frac{ds}{dt}$ 计算，在

直角坐标系中则可由公式 $v = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$ 求解。

1-3 质点作曲线运动， r 表示位置矢量， v 表示速度， a 表示加速度， s 表示路程， a_t 表示切向加速度。对下列表达式，即

$$(1) \quad dv/dt = a; \quad (2) \quad dr/dt = v; \quad (3) \quad ds/dt = v; \quad (4) \quad |dv/dt| = a_t.$$

下述判断正确的是 ()

- A. 只有 (1)、(4) 是对的
 B. 只有 (2)、(4) 是对的
 C. 只有 (2) 是对的
 D. 只有 (3) 是对的

【答案】D

【解析】 $\frac{dv}{dt}$ 表示切向加速度 a_t ，它表示速度大小随时间的变化率，是加速度矢量沿速度方向的一个分量，起改变速度大小的作用； $\frac{dr}{dt}$ 在极坐标系中表示径向速率 v_r ，(如题 1-2 所述)； $\frac{ds}{dt}$ 在自然坐标系中表示质点的速率

v ；而 $\left|\frac{dv}{dt}\right|$ 表示加速度的大小而不是切向加速度 a_t ，因此只有 (3) 式表达是正确的。

1-4 一个质点在做圆周运动时，则有 ()

- A. 切向加速度一定改变，法向加速度也改变
 B. 切向加速度可能不变，法向加速度一定改变
 C. 切向加速度可能不变，法向加速度不变
 D. 切向加速度一定改变，法向加速度不变

【答案】B

【解析】加速度的切向分量 a_t 起改变速度大小的作用，而法向分量 a_n 起改变速度方向的作用。质点作圆周运动时，由于速度方向不断改变，相应法向加速度的方向也在不断改变，因而法向加速度是一定改变的。至于 a_t 是否改变，则要看质点的速率情况而定。质点作匀速率圆周运动时， a_t 恒为零；质点作匀变速率圆周运动时， a_t 为一不为零的恒量，当 a_t 改变时，质点则作一般的变速率圆周运动。

1-5 如图 1-2 所示，湖中有一小船，有人用绳绕过岸上一定高度处的定滑轮拉湖中的船向岸边运动。设该人以匀速率 v_0 收绳，绳不伸长且湖水静止，小船的速率为 v ，则小船作 ()

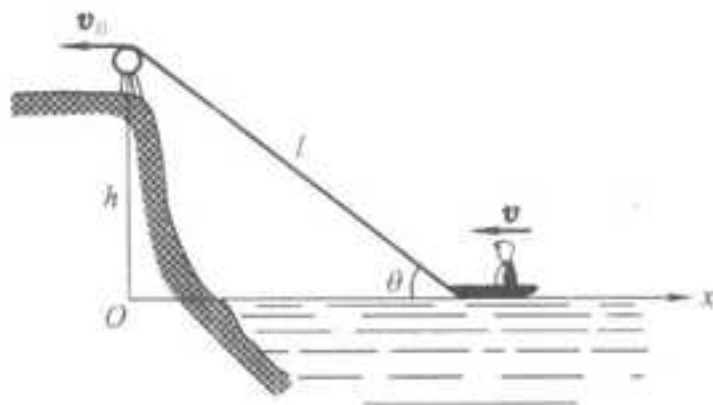


图 1-2

- A. 匀加速运动, $v = \frac{v_0}{\cos \theta}$
 B. 匀减速运动, $v = v_0 \cos \theta$
 C. 变加速运动, $v = \frac{v_0}{\cos \theta}$
 D. 变减速运动, $v = v_0 \cos \theta$
 E. 匀速直线运动, $v = v_0$

【答案】C

【解析】本题关键是先求得小船速度表达式, 进而判断运动性质. 为此建立如图 1-2 所示坐标系, 设定滑轮距水面高度为 h , t 时刻定滑轮距小船的绳长为 l , 则小船的运动方程为 $x = \sqrt{l^2 - h^2}$, 其中绳长 l 随时间 t

而变化. 小船速度 $v = \frac{dx}{dt} = \frac{l \frac{dl}{dt}}{\sqrt{l^2 - h^2}}$, 式中 $\frac{dl}{dt}$ 表示绳长 l 随时间的变化率, 其大小即为 v_0 . 代入整理后为

$v = \frac{v_0}{\sqrt{l^2 - h^2}/l} = \frac{v_0}{\cos \theta}$, 方向沿 x 轴负向. 由速度表达式, 可判断小船作变加速运动.

1-6 已知质点沿 x 轴作直线运动, 其运动方程为 $x = 2 + 6t^2 - 2t^3$, 式中 x 的单位为 m , t 的单位为 s . 求:

- (1) 质点在运动开始后 4.0 s 内的位移的大小;
- (2) 质点在该时间内所通过的路程;
- (3) $t=4\text{ s}$ 时质点的速度和加速度.

解: (1) 质点在 4.0 s 内位移的大小

$$\Delta x = x_4 - x_0 = -32\text{ m}$$

(2) 由 $\frac{dx}{dt} = 0$

得知质点的换向时刻为

$$t_p = 2\text{ s} \quad (t=0 \text{ 不合题意})$$

则

$$\Delta x_1 = x_2 - x_0 = 8.0\text{ m}$$

$$\Delta x_2 = x_4 - x_2 = -40\text{ m}$$

所以，质点在 4.0 s 时间间隔内的路程为

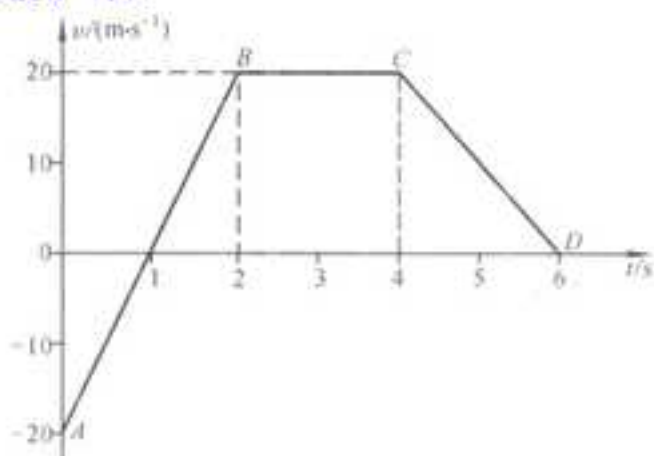
$$s = |\Delta x_1| + |\Delta x_2| = 48 \text{ m}$$

(3) $t=4.0 \text{ s}$ 时

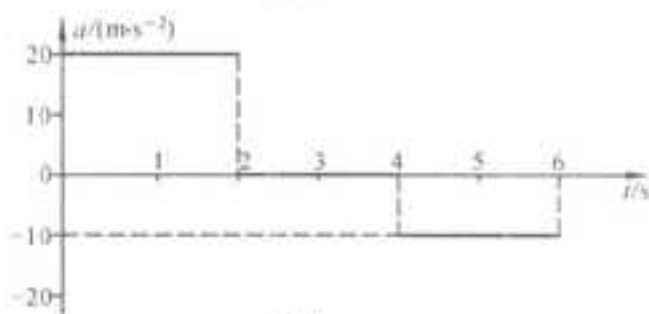
$$v = \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=4.0 \text{ s}} = -48 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$a = \left. \frac{d^2x}{dt^2} \right|_{t=4.0 \text{ s}} = -36 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

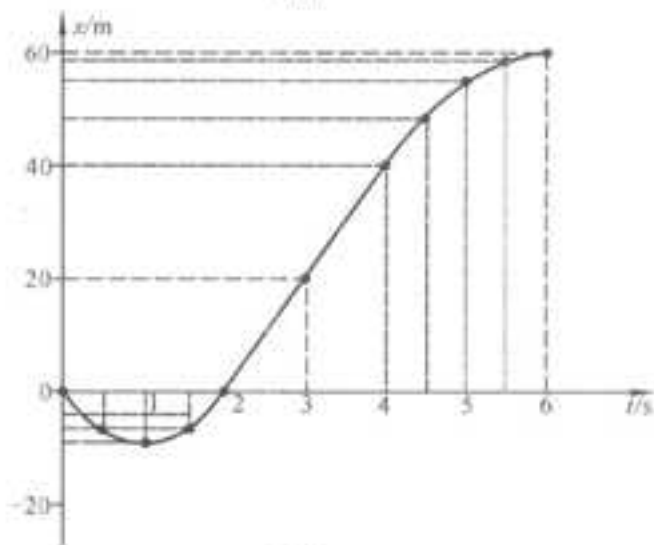
1-7 一质点沿 x 轴方向作直线运动，其速度与时间的关系如图 1-3 (a) 所示。设 $t=0$ 时， $x=0$ 。试根据已知的 $v-t$ 图，画出 $a-t$ 图以及 $x-t$ 图。



(a)



(b)



(c)

图 1-3

解：将曲线分为 AB、BC、CD 三个过程，它们对应的加速度值分别为

$$a_{AB} = \frac{v_B - v_A}{t_B - t_A} = 20 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \quad (\text{匀加速直线运动})$$

$$a_{BC} = 0 \quad (\text{匀速直线运动})$$

$$a_{CD} = \frac{v_D - v_C}{t_D - t_C} = -10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \quad (\text{匀减速直线运动})$$

根据上述结果即可作出质点的 $a-t$ 图[图 1-3 (b)]。

在匀变速直线运动中，有

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

由此，可计算在 $0 \sim 2 \text{ s}$ 和 $4 \sim 6 \text{ s}$ 时间间隔内各时刻的位置分别见表 1-1

表 1-1

t/s	0	0.5	1	1.5	2	4	4.5	5	5.5	6
x/m	0	-7.5	-10	-7.5	0	40	48.8	55	58.8	60

描数据点的作图方法，由表 1-1 中数据可作 $0 \sim 2 \text{ s}$ 和 $4 \sim 6 \text{ s}$ 时间内的 $x-t$ 图。在 $2 \sim 4 \text{ s}$ 时间内，质点是作 $v = 20 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ 的匀速直线运动，其 $x-t$ 图是斜率 $k=20$ 的一段直线[图 1-3 (c)]。

1-8 已知质点的运动方程为 $\boldsymbol{r} = 2t\boldsymbol{i} + (2 - t^2)\boldsymbol{j}$ ，式中 r 的单位为 m ， t 的单位为 s ，求：

- (1) 质点的运动轨迹；
- (2) $t=0$ 及 $t=2\text{s}$ 时，质点的位矢；
- (3) 由 $t=0$ 到 $t=2\text{s}$ 内质点的位移 Δr 和径向增量 Δr ；
- * (4) 2s 内质点所走过的路程 s 。

解：(1) 由 $x(t)$ 和 $y(t)$ 中消去 t 后得质点轨迹方程为

$$y = 2 - \frac{1}{4}x^2$$

这是一个抛物线方程，轨迹如图 1-4 (a) 所示。

(2) 将 $t=0\text{s}$ 和 $t=2\text{s}$ 分别代入运动方程，可得相应位矢分别为

$$\boldsymbol{r}_0 = 2\boldsymbol{j}, \quad \boldsymbol{r}_2 = 4\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j}$$

图 1-4 (a) 中的 P、Q 两点，即为 $t=0\text{s}$ 和 $t=2\text{s}$ 时质点所在位置。

(3) 由位移表达式，得

$$\Delta \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1 = (x_2 - x_0)\boldsymbol{i} + (y_2 - y_0)\boldsymbol{j} = 4\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j}$$

其中位移大小 $|\Delta \boldsymbol{r}| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = 5.66 \text{ m}$

而径向增量 $\Delta r = \Delta |\boldsymbol{r}| = |\boldsymbol{r}_2| - |\boldsymbol{r}_0| = \sqrt{x_2^2 + y_2^2} - \sqrt{x_0^2 + y_0^2} = 2.47 \text{ m}$

(4) 如图 1-4 (b) 所示，所求 Δs 即为图中 \widehat{PQ} 段长度，先在其间任意处取 AB 微元 ds ，则

$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$ ，由轨道方程可得 $dy = -\frac{1}{2}x dx$ ，代入 ds ，则 2s 内路程为

$$s = \int_P^Q ds = \int_0^4 \frac{1}{2} \sqrt{4+x^2} dx = 5.91 \text{ m}$$

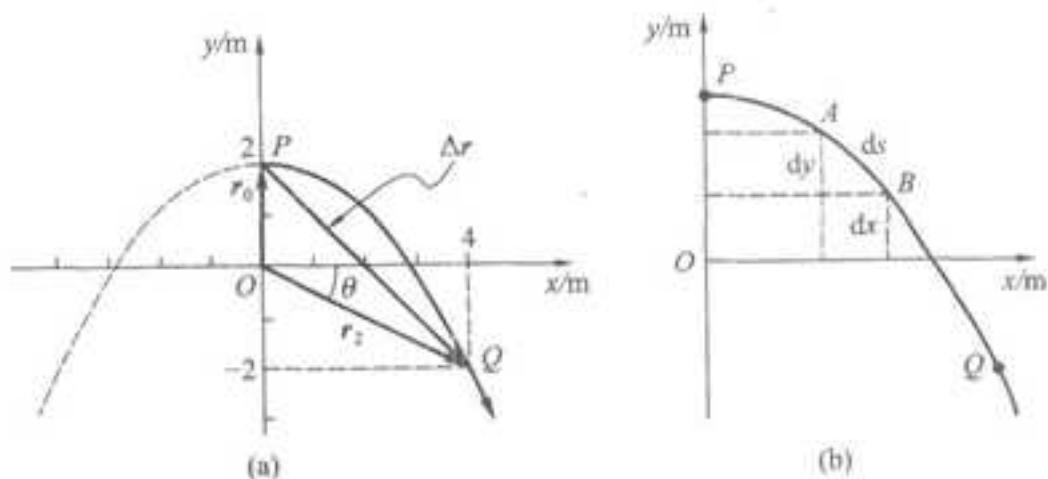


图 1-4

1-9 质点的运动方程为

$$x = -10t + 30t^2$$

$$y = 15t - 20t^2$$

式中 x, y 的单位为 m , t 的单位为 s .

试求: (1) 初速度的大小和方向; (2) 加速度的大小和方向.

解: (1) 速度的分量式为

$$v_x = \frac{dx}{dt} = -10 + 60t,$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = 15 - 40t$$

当 $t=0$ 时, $v_{0x} = -10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, $v_{0y} = 15 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, 则初速度大小为

$$v_0 = \sqrt{v_{0x}^2 + v_{0y}^2} = 18.0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

设 v_0 与 x 轴的夹角为 α , 则

$$\tan \alpha = \frac{v_{0y}}{v_{0x}} = -\frac{3}{2}$$

$$\alpha = 123^\circ 41'$$

(2) 加速度的分量式为

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = 60 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} = -40 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

则加速度的大小为

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = 72.1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

设 a 与 x 轴的夹角为 β , 则

$$\tan \beta = \frac{a_y}{a_x} = -\frac{2}{3}$$

$$\beta = -33^{\circ} 41' \text{ (或 } 326^{\circ} 19') \text{}$$

1-10 一质点 P 沿半径 $R=3.0\text{ m}$ 的圆周作匀速率运动, 运动一周所需时间为 20.0 s , 设 $t=0$ 时, 质点位于 O 点, 按图 1-5 (a) 中所示 Oxy 坐标系, 求 (1) 质点 P 在任意时刻的位矢; (2) 5 s 时的速度和加速度。

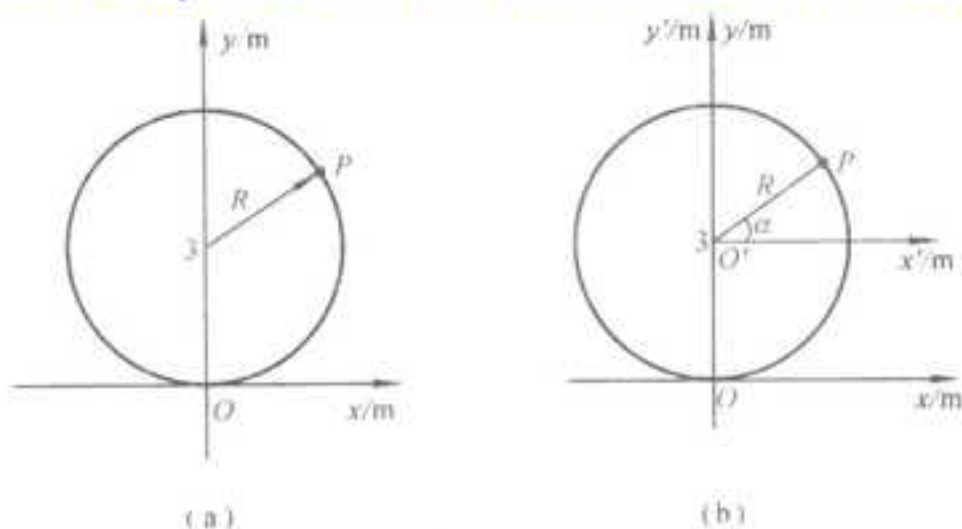


图 1-5

解: (1) 如图 1-5 (b) 所示, 在 $O'x'y'$ 坐标系中, 因 $\theta = \frac{2\pi}{T}t$ 则质点 P 的参数方程为

$$x' = R \sin \frac{2\pi}{T} t, \quad y' = -R \cos \frac{2\pi}{T} t$$

坐标变换后, 在 Oxy 坐标系中有

$$x = x' = R \sin \frac{2\pi}{T} t, \quad y = y' + y_0 = -R \cos \frac{2\pi}{T} t + R$$

则质点 P 的位矢方程为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r} &= R \sin \frac{2\pi}{T} t \boldsymbol{i} + (-R \cos \frac{2\pi}{T} t + R) \boldsymbol{j} \\ &= 3 \sin (0.1\pi t) \boldsymbol{i} + 3[1 - \cos (0.1\pi t)] \boldsymbol{j} \end{aligned}$$

(2) 5 s 时的速度和加速度分别为

$$\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = R \frac{2\pi}{T} \cos \frac{2\pi}{T} t \boldsymbol{i} + R \frac{2\pi}{T} \sin \frac{2\pi}{T} t \boldsymbol{j} = (0.3\pi \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}) \boldsymbol{j}$$

$$\boldsymbol{a} = \frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = -R \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \sin \frac{2\pi}{T} t \boldsymbol{i} + R \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \cos \frac{2\pi}{T} t \boldsymbol{j} = (-0.03\pi^2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}) \boldsymbol{i}$$

1-11 一气球以匀速率 v_0 从地面上升, 由于风的影响, 它获得了一个水平速度 $v_x = by$ (b 为常量, y 为上升高度), 以气球出发点为坐标系原点, 向上为 y 轴正向, 水平沿风向为 x 轴正向, 求: (1) 气球的运动方程; (2) 气球的轨迹方程。

解: (1) 由题意, 分析得

$$y = v_0 t \quad (1)$$

$$v_x = by = bv_0 t = \frac{dx}{dt} \quad (2)$$

对式 (2) 作分离变量即

$$dx = bv_0 t dt$$

两边积分

$$\int_0^x dx = \int_0^t bv_0 t dt$$

得

$$x = \frac{1}{2}bv_0 t^2 \quad (3)$$

则气球运动方程为

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}bv_0 t^2 \\ y = v_0 t \end{cases}$$

写成矢量式

$$\boldsymbol{r} = \frac{1}{2}bv_0 t^2 \boldsymbol{i} + v_0 t \boldsymbol{j}$$

(2) 由式(1)和(3)消去 t , 得气球轨迹方程

$$x = \frac{b}{2v_0} y^2$$

显然气球的空间轨迹为一抛物线。

1-12 一升降机以加速度 $1.22 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ 上升, 当上升速度为 $2.44 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ 时, 有一螺丝自升降机的天花板上松脱。天花板与升降机的底面相距 2.74 m 。计算: (1) 螺丝从天花板落到底面所需要的时间; (2) 螺丝相对升降机外固定柱子的下降距离。

解: 解1 (1) 以地面为参考系, 取如图 1-6 所示的坐标系, 升降机与螺丝的运动方程分别为

$$y_1 = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

$$y_2 = h + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$$

当螺丝落至底面时, 有 $y_1 = y_2$, 即

$$v_0 t + \frac{1}{2}at^2 = h + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$$

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g+a}} = 0.705 \text{ s}$$

(2) 螺丝相对升降机外固定柱子下降的距离为

$$d = h - y_2 = -v_0 t + \frac{1}{2}gt^2 = 0.716 \text{ m}$$

解2 (1) 以升降机为参考系, 此时, 螺丝相对它的加速度大小 $a' = g + a$ 。螺丝落至底面时, 有

$$0 = h - \frac{1}{2}(g+a)t^2$$

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g+a}} = 0.705 \text{ s}$$

(2) 由于升降机在 t 时间内上升的高度为

$$h' = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

则 $d = h - h' = 0.716 \text{ m}$

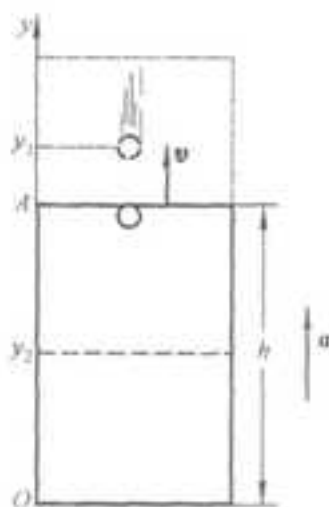


图 1-6

1-13 设一列动车有 9 节长度相等的车厢，动车匀加速地从站台处驶出，一观察者站在第一节车厢的最前端，他测到第一节车厢驶过他的时间是 4.0s。问第 9 节车厢驶过他时用时多少？

解：设动车每节车厢（含车头）长度均为 l_0 ，第一节车厢驶过观察者用时 $t_0 = 4\text{s}$ 。

第一节车厢尾端驶过时有

$$l_0 = \frac{1}{2} a t_0^2 \quad (1)$$

第八节车厢尾端驶过时有

$$8l_0 = \frac{1}{2} a t_8^2 \quad (2)$$

第九节车厢尾端驶过时有

$$9l_0 = \frac{1}{2} a t_9^2 \quad (3)$$

由式 (1) 和 (2) 得

$$t_8 = \sqrt{8} t_0$$

由式 (1) 和 (3) 得

$$t_9 = 3t_0$$

则第九节车厢本身驶过观察者用时

$$\Delta t = t_9 - t_8 = (3 - \sqrt{8}) t_0 = 0.69 \text{ s}$$

1-14 地面上垂直竖立一高 20.0 m 的旗杆，已知正午时分太阳在旗杆的正上方，求在下午 2:00 时，杆顶在地面上的影子的速度的大小，在何时刻杆影将伸展至 20.0 m？

解：设太阳光线对地转动的角速度为 ω ，从正午时分开始计时，则杆的影长为 $s = h \tan \omega t$ ，下午 2:00 时，杆顶在地面上影子的速度大小为

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{h\omega}{\cos^2 \omega t} = 1.94 \times 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

当杆长等于影长时，即 $s = h$ ，则

$$t = \frac{1}{\omega} \arctan \frac{s}{h} = \frac{\pi}{4\omega} = 3 \times 60 \times 60 \text{ s}$$

即为下午 3:00 时。

1-15 一质点具有恒定加速度 $\mathbf{a}=6\mathbf{i}+4\mathbf{j}$ ，式中 \mathbf{a} 的单位为 $\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$ 。在 $t=0$ 时，其速度为零，位置矢量 $\mathbf{r}_0=10\text{ m}$ 。求：(1) 在任意时刻的速度和位置矢量；(2) 质点在 Oxy 平面上的轨迹方程，并画出轨迹的示意图。

解：由加速度定义式，根据初始条件 $t_0=0$ 时 $\mathbf{v}_0=0$ ，积分可得

$$\int_0^t d\mathbf{v} = \int_0^t \mathbf{a} dt = \int_0^t (6\mathbf{i} + 4\mathbf{j}) dt$$

$$\mathbf{v} = 6t\mathbf{i} + 4t\mathbf{j}$$

又由 $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$ 及初始条件 $t=0$ 时， $\mathbf{r}_0 = (10\text{ m})\mathbf{i}$ ，积分可得

$$\int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} d\mathbf{r} = \int_0^t \mathbf{v} dt = \int_0^t (6t\mathbf{i} + 4t\mathbf{j}) dt$$

$$\mathbf{r} = (10 + 3t^2)\mathbf{i} + 2t^2\mathbf{j}$$

由上述结果可得质点运动方程的分量式，即

$$x = 10 + 3t^2$$

$$y = 2t^2$$

消去参数 t ，可得运动的轨迹方程

$$3y = 2x - 20 \text{ m}$$

这是一个直线方程。直线斜率 $k = \frac{dy}{dx} = \tan \alpha = \frac{2}{3}$ ， $\alpha = 33^\circ 41'$ 。轨迹如图 1-7 所示。

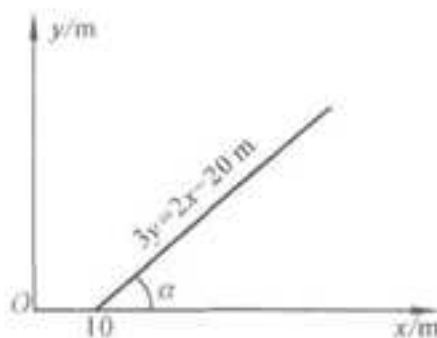


图 1-7

1-16 质点沿直线运动，加速度 $\mathbf{a}=4-t^2$ ，式中 \mathbf{a} 的单位为 $\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$ ， t 的单位为 s 。如果当 $t=3\text{ s}$ 时， $x=9\text{ m}$ ， $v=2\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ ，求质点的运动方程。

解：由分析知，应有

$$\int_{v_0}^v dv = \int_0^t a dt$$

得

$$v = 4t - \frac{1}{3}t^3 + v_0 \quad (1)$$

$$\int_{x_0}^x dx = \int_0^t v dt$$

由
得

$$x = 2t^2 - \frac{1}{12}t^4 + v_0 t + x_0 \quad (2)$$

将 $t=3\text{s}$ 时, $x=9\text{m}$, $v=2\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ 代入 (1) (2) 得 $v_0=-1\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$, $x_0=0.75\text{m}$. 于是可得质点运动方程为

$$x = 2t^2 - \frac{1}{12}t^4 - t + 0.75$$

1-17 一石子从空中由静止下落, 由于空气阻力, 石子并非作自由落体运动, 现测得其加速度 $a=A-Bv$, 式中 A 、 B 为正恒量, 求石子下落的速度和运动方程.

解: 选取石子下落方向为 y 轴正向, 下落起点为坐标原点.

(1) 由题意知

$$a = \frac{dv}{dt} = A - Bv \quad (1)$$

用分离变量法把式 (1) 改写为

$$\frac{dv}{A - Bv} = dt \quad (2)$$

将式 (2) 两边积分并考虑初始条件, 有

$$\int_0^v \frac{dv}{A - Bv} = \int_0^t dt$$

$$v = \frac{A}{B}(1 - e^{-Bt})$$

得石子速度

由此可知当 $t \rightarrow \infty$ 时, $v \rightarrow \frac{A}{B}$ 为一常量, 通常称为极限速度或收尾速度.

(2) 再由 $v = \frac{dy}{dt} = \frac{A}{B}(1 - e^{-Bt})$ 并考虑初始条件有

$$\int_0^y dy = \int_0^t \frac{A}{B}(1 - e^{-Bt}) dt$$

得石子运动方程

$$y = \frac{A}{B}t + \frac{A}{B^2}(e^{-Bt} - 1)$$

1-18 一质点沿 x 轴运动, 其加速度 a 与位置坐标 x 的关系为 $a=2+6x^2$, 式中 a 的单位为 $\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$, x 的单位为 m . 如果质点在原点处的速度为零, 试求其在任意位置处的速度.

解: 设质点在 x 处的速度为 v , 由定义式作变量变换

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = 2 + 6x^2$$

分离变量后两边积分

$$\int_0^v v dv = \int_0^x (2 + 6x^2) dx$$

得

$$v = 2(x+x^3)^{1/2}$$

1-19 如图 1-8 (a) 所示, 一小型迫击炮架设在一斜坡的底端 O 处, 已知斜坡倾角为 α , 炮身与斜坡的夹角为 β , 炮弹的出口速度为 v_0 , 忽略空气阻力. 求: (1) 炮弹落地点 P 与点 O 的距离 OP; (2) 欲使炮弹能垂直击中坡面, 证明 α 和 β 必须满足 $\tan \beta = \frac{1}{2 \tan \alpha}$ 并与 v_0 无关.

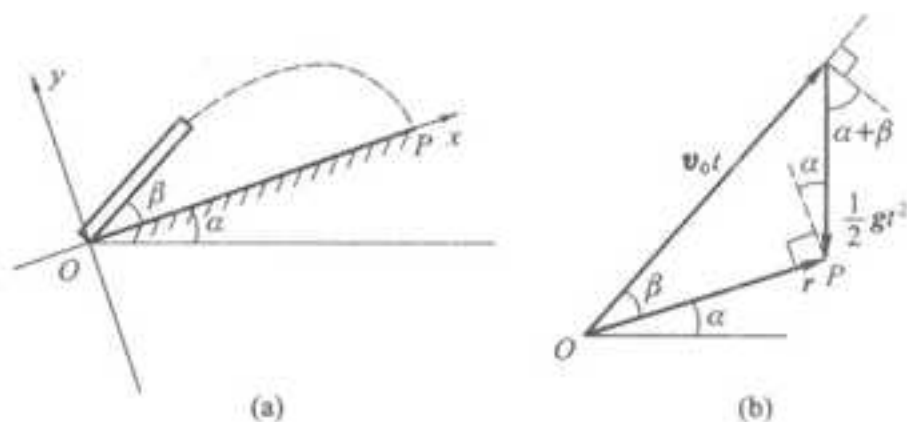


图 1-8

解: (1) 解 1 由分析知, 炮弹在图 1-8 (a) 所示坐标系中两个分运动方程为

$$x = v_0 t \cos \beta - \frac{1}{2} g t^2 \sin \alpha \quad (1)$$

$$y = v_0 t \sin \beta - \frac{1}{2} g t^2 \cos \alpha \quad (2)$$

令 $y=0$ 求得时间 t 后再代入式 (1) 得

$$OP = x = \frac{2v_0^2 \sin \beta}{g \cos^2 \alpha} (\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta)$$

$$= \frac{2v_0^2 \sin \beta}{g \cos^2 \alpha} \cos(\alpha + \beta)$$

解 2 做出炮弹的运动矢量图, 如图 1-8 (b) 所示, 并利用正弦定理, 有

$$\frac{|r|}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha - \beta\right)} = \frac{v_0 t}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)} = \frac{\frac{1}{2} g t^2}{\sin \beta}$$

从中消去 t 后也可得到同样结果.

(2) 由分析知, 如炮弹垂直击中坡面应满足 $y=0$ 和 $v_x=0$, 则

$$v_x = v_0 \cos \beta - g t \sin \alpha = 0 \quad (3)$$

由 (2) (3) 两式消去 t 后得

$$\tan \beta = \frac{1}{2 \tan \alpha}$$

由此可知, 只要角 α 和 β 满足上式, 炮弹就能垂直击中坡面, 而与 v_0 的大小无关.

1-20 一足球运动员在正对球门前 25.0m 处以 $20.0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ 的初速率罚任意球, 已知球门高为 3.44m. 若要在垂直于球门的竖直平面内将足球直接踢进球门, 问他应在与地面成什么角度的范围内踢出足球? (足球可视为质点)

解: 取图 1-9 示坐标系 Oxy, 由运动方程

$$x = vt \cos \theta, \quad y = vt \sin \theta - \frac{1}{2}gt^2$$

消去 t 得轨迹方程

$$y = x \tan \theta - \frac{g}{2v^2} (1 + \tan^2 \theta) x^2$$

以 $x=25.0\text{m}$, $v=20.0\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ 及 $3.44\text{m} \geq y \geq 0$ 代入后, 可解得

$$71.11^\circ \geq \theta_1 \geq 69.92^\circ$$

$$27.92^\circ \geq \theta_2 \geq 18.89^\circ$$

在初速一定的条件下, 球击中球门底线或球门上缘都将对应有两个不同的投射倾角 (如图 1-9 所示)。如果以 $\theta > 71.11^\circ$ 或 $\theta < 18.89^\circ$ 踢出足球, 都将因射程不足而不能直接射入球门; 由于球门高度的限制, θ 角也并非能取 71.11° 与 18.89° 之间的任何值。当倾角取值为 $27.92^\circ < \theta < 69.92^\circ$ 时, 踢出的足球将越过门缘而离去, 这时球也不能射入球门。

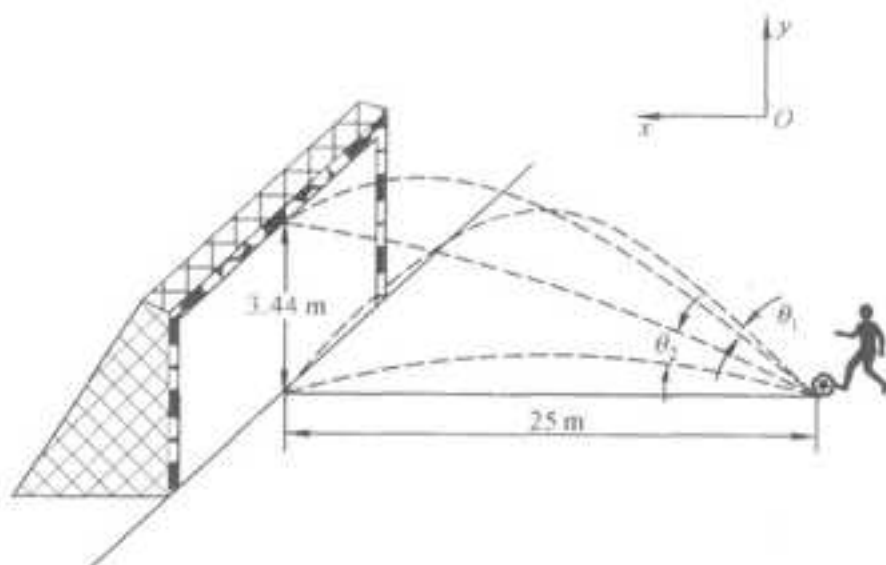
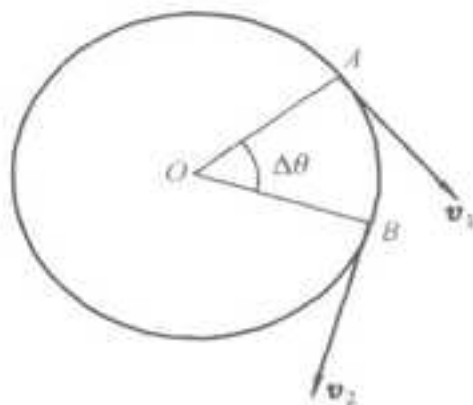
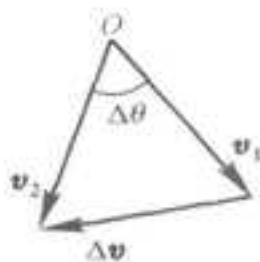


图 1-9

1-21 如图 1-10 所示, 一质点在半径为 R 的圆周上以恒定的速率运动, 质点由位置 A 运动到位置 B, OA 和 OB 所对的圆心角为 $\Delta\theta$, (1) 试证位置 A 和 B 之间的平均加速度为 $\bar{a} = \sqrt{2(1 - \cos \Delta\theta)} v^2 / (R\Delta\theta)$, (2) 当 $\Delta\theta$ 分别等于 90° 、 30° 、 10° 和 1° 时, 平均加速度各为多少? 并对结果加以讨论。



(a)



(b)

图 1-10

解: (1) 由图 1-10 (b) 可看到 $\Delta \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1$, 故

$$\begin{aligned} |\Delta \boldsymbol{v}| &= \sqrt{v_1^2 + v_2^2 - 2v_1v_2 \cos \Delta\theta} \\ &= v \sqrt{2(1 - \cos \Delta\theta)} \end{aligned}$$

而

$$\Delta t = \frac{\Delta s}{v} = \frac{R\Delta\theta}{v}$$

所以

$$\bar{a} = \frac{|\Delta \boldsymbol{v}|}{\Delta t} = \sqrt{2(1 - \cos \Delta\theta)} \frac{v^2}{R\Delta\theta}$$

(2) 将 $\Delta\theta = 90^\circ, 30^\circ, 10^\circ, 1^\circ$ 分别代入上式, 得

$$\bar{a}_1 \approx 0.9003 \frac{v^2}{R}, \quad \bar{a}_2 \approx 0.9886 \frac{v^2}{R}$$

$$\bar{a}_3 \approx 0.9987 \frac{v^2}{R}, \quad \bar{a}_4 \approx 1.000 \frac{v^2}{R}$$

以上结果表明, 当 $\Delta\theta \rightarrow 0$ 时, 匀速率圆周运动的平均加速度趋近于一极限值, 该值即为法向加速度 $\frac{v^2}{R}$.

1-22 质点在 Oxy 平面内运动, 其运动方程为 $\boldsymbol{r} = 2.0t\boldsymbol{i} + (19.0 - 2.0t^2)\boldsymbol{j}$, 式中 \boldsymbol{r} 的单位为 m, t 的单位为 s, 求: (1) 质点的轨迹方程; (2) 在 $t_1 = 1.0$ s 到 $t_2 = 2.0$ s 时间内的平均速度; (3) $t_1 = 1.0$ s 时的速度及切向和法向加速度; (4) $t = 1.0$ s 时质点所在处轨道的曲率半径 ρ .

解: (1) 由参数方程

$$x=2.0t, \quad y=19.0-2.0t^2$$

消去 t 得质点的轨迹方程

$$y=19.0-0.50x^2$$

(2) 在 $t_1=1.00\text{ s}$ 到 $t_2=2.0\text{ s}$ 时间内的平均速度

$$\bar{v} = \frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{r_2 - r_1}{t_2 - t_1} = 2.0i - 6.0j$$

(3) 质点在任意时刻的速度和加速度分别为

$$v(t) = v_x i + v_y j = \frac{dx}{dt} i + \frac{dy}{dt} j = 2.0i - 4.0tj$$

$$a(t) = \frac{d^2x}{dt^2} i + \frac{d^2y}{dt^2} j = -4.0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} j$$

则 $t_1=1.00\text{ s}$ 时的速度

$$v(t) |_{t=1.0} = 2.0i - 4.0j$$

切向和法向加速度分别为

$$a_t |_{t=1.0} = \frac{dv}{dt} e_t = \frac{d}{dt} (\sqrt{v_x^2 + v_y^2}) e_t = 3.58 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} e_t$$

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_t^2} e_n = 1.79 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} e_n$$

(4) $t=1.0\text{ s}$ 质点的速度大小为

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 4.47 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\text{则 } \rho = \frac{v^2}{a_n} = 11.17 \text{ m.}$$

1-23 飞机以 $100 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ 的速度沿水平直线飞行, 在离地面高为 100 m 时, 驾驶员要把物品空投到前方某一地面目标处, 问: (1) 此时目标在飞机正下方位置的前面多远? (2) 投放物品时, 驾驶员看目标的视线和水平线成何角度? (3) 物品投出 2.0 s 后, 它的法向加速度和切向加速度各为多少?

解: (1) 取如图 1-11 所示的坐标, 物品下落时在水平和竖直方向的运动方程分别为

$$x = vt, \quad y = \frac{1}{2}gt^2$$

飞机水平飞行速度 $v=100 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, 飞机离地面的高度 $y=100 \text{ m}$, 由上述两式可得目标在飞机正下方前的距离

$$x = v \sqrt{\frac{2y}{g}} = 452 \text{ m}$$

(2) 视线和水平线的夹角为

$$\theta = \arctan \frac{y}{x} = 12.5^\circ$$

(3) 在任意时刻物品的速度与水平轴的夹角为

$$\alpha = \arctan \frac{v_y}{v_x} = \arctan \frac{gt}{v}$$

取自然坐标, 物品在抛出 2 s 时, 重力加速度的切向分量与法向分量分别为

$$a_t = g \sin \alpha = g \sin \left(\arctan \frac{gt}{v} \right) = 1.88 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

$$a_n = g \cos \alpha = g \cos \left(\arctan \frac{gt}{v} \right) = 9.62 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

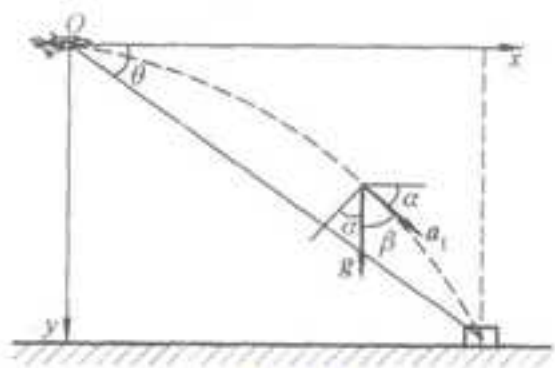


图 1-11

1-24 一质点沿半径为 R 的圆周按规律 $s = v_0 t - \frac{1}{2} b t^2$ 运动, v_0 、 b 都是常量。(1) 求 t 时刻质点的总加速度; (2) t 为何值时总加速度在数值上等于 b ? (3) 当加速度达到 b 时, 质点已沿圆周运行了多少圈?

解: (1) 质点作圆周运动的速率为

$$v = \frac{ds}{dt} = v_0 - bt$$

其加速度的切向分量和法向分量分别为

$$a_t = \frac{d^2s}{dt^2} = -b, \quad a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{(v_0 - bt)^2}{R}$$

故加速度的大小为

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_t^2} = \frac{\sqrt{R^2 b^2 + (v_0 - bt)^2}}{R}$$

其方向与切线之间的夹角为

$$\theta = \arctan \frac{a_n}{a_t} = \arctan \left[-\frac{(v_0 - bt)^2}{Rb} \right]$$

(2) 要使 $|a| = b$, 由 $\frac{1}{R} \sqrt{R^2 b^2 + (v_0 - bt)^2} = b$ 可得

$$t = \frac{v_0}{b}$$

(3) 从 $t=0$ 开始到 $t=v_0/b$ 时, 质点经过的路程为

$$s = s_t - s_0 = \frac{v_0^2}{2b}$$

因此质点运行的圈数为

$$n = \frac{s}{2\pi R} = \frac{v_0^2}{4\pi b R}$$

1-25 一半径为 0.50m 的飞轮在启动时的短时间内, 其角速度与时间的平方成正比。在 $t=2.0\text{s}$ 时测得轮缘一点的速度值为 $4.0\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ 。求: (1) 该轮在 $t'=0.5\text{s}$ 的角速度, 轮缘一点的切向加速度和总加速度; (2) 该点在 2.0s 内所转过的角度。

解: 因 $\omega R=v$, 由题意 $\omega \propto t^2$ 得比例系数

$$k = \frac{\omega}{t^2} = \frac{v}{Rt^2} = 2 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-3}$$

所以 $\omega = \omega(t) = 2t^2$

则 $t'=0.5\text{s}$ 时的角速度、角加速度和切向加速度分别为

$$\omega = 2t'^2 = 0.5 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = 4t' = 2.0 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-2}$$

$$a_t = \alpha R = 1.0\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$$

总加速度

$$a = a_t + a_n = \alpha R e_t + \omega^2 R e_n$$

$$a = \sqrt{(\alpha R)^2 + (\omega^2 R)^2} = 1.01 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

在 2.0s 内该点所转过的角度

$$\theta - \theta_0 = \int_0^2 \omega dt = \int_0^2 2t^2 dt = \frac{2}{3} t^3 \Big|_0^2 = 5.33 \text{ rad}$$

1-26 一质点在半径为 0.10m 的圆周上运动, 其角位置为 $\theta=2+4t^3$, 式中 θ 的单位为 rad, t 的单位为 s。 (1) 求在 $t=2.0\text{s}$ 时质点的法向加速度和切向加速度。 (2) 当切向加速度的大小恰等于总加速度大小的一半时, θ 值为多少? (3) t 为多少时, 法向加速度和切向加速度的值相等?

解: (1) 由于 $\theta=2+4t^3$, 则角速度 $\omega = \frac{d\theta}{dt} = 12t^2$ 。在 $t=2\text{s}$ 时, 法向加速度和切向加速度的数值分别为

$$a_n|_{t=2\text{s}} = r\omega^2 = 2.30 \times 10^2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

$$a_t|_{t=2\text{s}} = r \frac{d\omega}{dt} = 4.80 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

(2) 当 $a_t = a/2 = \frac{1}{2} \sqrt{a_n^2 + a_t^2}$ 时, 有 $3a_t^2 = a_n^2$, 即

$$3(24rt)^2 = r^2(12t^2)^4$$

得

$$t^3 = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

此时刻的角位置为

$$\theta = 2 + 4t^3 = 3.15\text{rad}$$

(3) 要使 $a_n = a_t$, 则有

$$r(12t^2)^2 = 24rt$$

$$t = 0.55\text{s}$$

1-27 在半径为 R 的圆周上运动的质点, 其速率与时间关系为 $v=ct^2$, 式中 c 为常量。求: (1) 从 $t=0$ 时刻到 t 时刻质点走过的路程 $s(t)$; (2) 在 t 时刻质点的切向加速度 a_t 和法向加速度 a_n 。

解: (1) 由分析知

$$v = \frac{ds}{dt} = ct^2$$

分离变量后两边积分

$$\int_0^s ds = \int_0^t ct^2 dt$$

得

$$s = \frac{1}{3}ct^3$$

(2) 由相关定义, 得

$$a_t = \frac{dv}{dt} = 2ct$$

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{c^2 t^4}{R}$$

1-28 一直立的雨伞, 张开后其边缘圆周的半径为 R , 离地面的高度为 h , (1) 当伞绕伞柄以匀角速 ω 旋转时, 求证水滴沿边缘飞出后落在地面上半径为 $r = R \sqrt{1 + 2h\omega^2/g}$ 的圆周上; (2) 读者能否由此定性构想一种草坪上或农田灌溉用的旋转式洒水器的方案?

解: (1) 如图 1-12 (a) 所示坐标系中, 雨滴落地的运动方程为

$$x = vt = R\omega t \quad (1)$$

$$y = \frac{1}{2}gt^2 = h \quad (2)$$

由式 (1) (2) 可得

$$x^2 = \frac{2R^2\omega^2 h}{g}$$

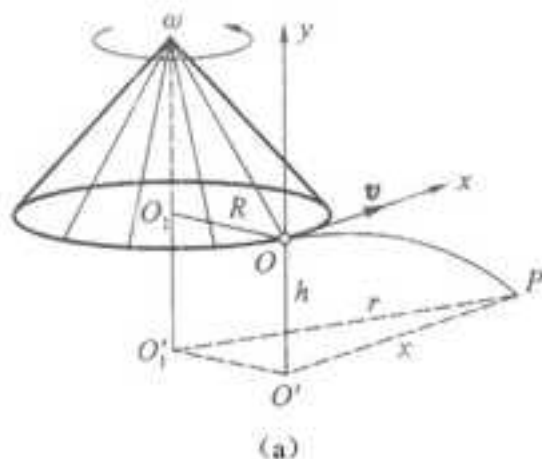
由图 1-12 (a) 所示几何关系得雨滴落地处圆周的半径为

$$r = \sqrt{x^2 + R^2} = R \sqrt{1 + \frac{2h}{g}\omega^2}$$

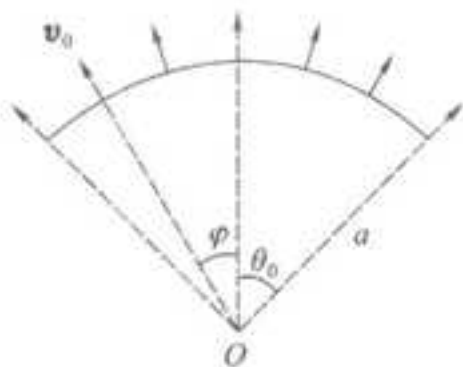
(2) 常用草坪喷水器采用如图 1-12 (b) 所示的球面喷头 ($\theta_0 = 45^\circ$) 其上有大量小孔, 喷头旋转时, 水滴以初速度 v_0 从各个小孔中喷出, 并作斜上抛运动, 通常喷头表面基本上与草坪处在同一水平面上, 则以 φ 角喷射的水柱射程为

$$R = \frac{v_0^2 \sin 2\varphi}{g}$$

为使喷头周围的草坪能被均匀喷洒, 喷头上的小孔数不但很多, 而且还不能均匀分布, 这是喷头设计中的一个关键问题。



(a)



(b)

图 1-12

1-29 一无风的下雨天，一列火车以 $v_1 = 20.0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ 的速度匀速前进，在车内的旅客看见玻璃窗外的雨滴和垂线成 75° 角下降。求雨滴下落的速度 v_2 。（设下降的雨滴作匀速运动）

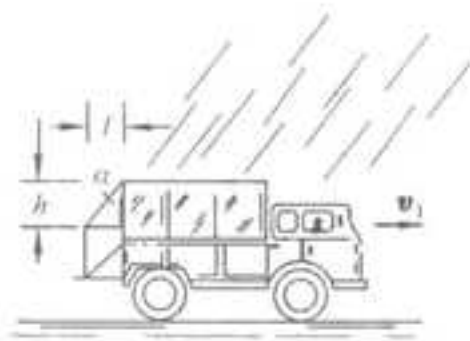
解：以地面为参考系，火车相对地面运动的速度为 v_1 ，雨滴相对地面竖直下落的速度为 v_2 ，旅客看到雨滴下落的速度 v' 为相对速度，它们之间的关系为 $v_2 = v' + v_1$ （如图 1-13 所示），于是可得

$$v_2 = \frac{v_1}{\tan 75^\circ} = 5.36 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

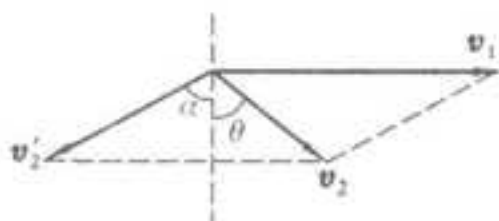


图 1-13

1-30 如图 1-14 (a) 所示，一汽车在雨中沿直线行驶，其速率为 v_1 ，下落雨滴的速度方向偏于竖直方向之前 θ 角，速率为 v_2 ，若车后有一长方形物体，问车速 v_1 为多大时，此物体正好不会被雨水淋湿？



(a)



(b)

图 1-14

解: 由 $\boldsymbol{v}'_2 = \boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1$ [图 1-14 (b)], 有

$$\alpha = \arctan \frac{v_1 - v_2 \sin \theta}{v_2 \cos \theta}$$

而要使 $\alpha \geq \arctan \frac{l}{h}$, 则

$$\frac{v_1 - v_2 \sin \theta}{v_2 \cos \theta} \geq \frac{l}{h}$$

$$v_1 \geq v_2 \left(\frac{l \cos \theta}{h} + \sin \theta \right)$$

1-31 一人能在静水中以 $1.10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ 的速度划船前进, 今欲横渡一宽为 $1.00 \times 10^3 \text{ m}$ 、水流速度为 $0.55 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ 的大河。(1) 他若要从出发点横渡该河而到达正对岸的一点, 那么应如何确定划行方向? 到达正对岸需多少时间? (2) 如果希望用最短的时间过河, 应如何确定划行方向? 船到达对岸的位置在什么地方?

解: 船到达对岸所需时间是由船相对于岸的速度 v 决定的, 由于水流速度 u 的存在, v 与船在静水中划行的速度 v' 之间有 $v = u + v'$ (如图 1-15 所示), 若要使船到达正对岸, 则必须使 v 沿正对岸方向; 在划速一定的条件下, 若要用最短时间过河, 则必须使 v 有极大值。

(1) 由 $v = u + v'$ 可知 $\alpha = \arcsin \frac{u}{v'}$, 则船到达正对岸所需时间为

$$t = \frac{d}{v} = \frac{d}{v' \cos \alpha} = 1.05 \times 10^3 \text{ s}$$

(2) 由于 $v = v' \cos \alpha$, 在划速 v' 一定的条件下, 只有当 $\alpha = 0$ 时, v 最大 (即 $v = v'$), 此时, 船过河时间 $t' = d/v'$, 船到达距正对岸为 l 的下游处, 且有

$$l = ut' = u \frac{d}{v'} = 5.0 \times 10^2 \text{ m}$$

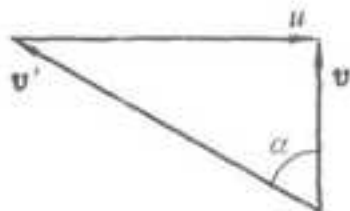


图 1-15

1-32 一质点相对观察者 O 运动, 在任意时刻 t , 其位置为 $x=vt$, $y=gt^2/2$. 质点运动的轨迹为抛物线. 若另一观察者 O' 以速率 v 沿 x 轴正向相对于 O 运动, 试问质点相对 O' 的轨迹和加速度如何?

解: 取 Oxy 和 $O'x'y'$ 分别为观察者 O 和观察者 O' 所在的坐标系, 且使 Ox 和 $O'x'$ 两轴平行. 在 $t=0$ 时, 两坐标原点重合. 由坐标变换得

$$x' = x - vt = vt - vt = 0$$

$$y' = y = \frac{1}{2}gt^2$$

加速度

$$a = a_y = \frac{d^2 y'}{dt^2} = g$$

由此可见, 动点相对于系 O' 是在 y 方向作匀变速直线运动. 动点在两坐标系中加速度相同, 这也正是伽利略变换的必然结果.

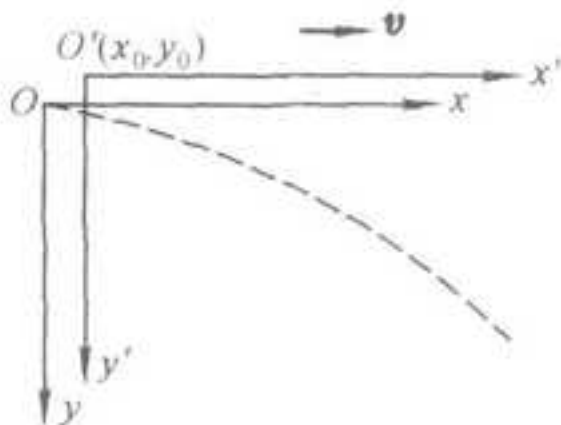


图 1-16

1.3 名校考研真题详解

一、选择题

1. 质点作半径为 R 的变速圆周运动时的加速度大小为 (v 表示任一时刻质点的速率) 为 (). [北京科技大学 2014 研]

A. $\frac{dv}{dt}$

B. $\frac{v^2}{R}$

C. $\frac{dv}{dt} + \frac{v^2}{R}$

$$D. \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{R}\right)^2}$$

【答案】D

【解析】物体作圆周运动时，加速度可分解为切向加速度 a_t 和法向加速度 a_n ，其表达式为

$$a_t = \frac{dv}{dt}$$

$$a_n = \frac{v^2}{R}$$

因此在任意时刻的合加速度的大小可表示为

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{R}\right)^2}$$

2. 质点沿半径为 R 的圆周作匀速率运动，每 t 秒转一圈，在 $2t$ 时间间隔中，其平均速度大小与平均速率大小分别为 ()。[电子科技大学 2011 研]

- A. $\frac{2\pi R}{t}, \frac{2\pi R}{t}$
 B. $0, \frac{2\pi R}{t}$
 C. $0, 0$
 D. $\frac{2\pi R}{t}, 0$

【答案】B

二、填空题

1. 在半径为 R 的圆周上运动的质点，其速率与时间关系为 $v = ct^3$ (式中 c 为常量)， t 时刻质点的切向加速度的大小 $a_t =$ ；法向加速度大小 $a_n =$ 。[北京科技大学 2014 研]

【答案】 $2ct$ ； $\frac{c^2 t^4}{R}$

【解析】由切向加速度的定义得

$$a_t = \frac{dv}{dt} = 2ct$$

由法向加速度的定义得

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{(ct^3)^2}{R} = \frac{c^2 t^6}{R}$$

2. 质量分别为 m_1 、 m_2 、 m_3 的三个物体 A、B、C，用一根细绳和两根轻弹簧连接并悬于固定点 O ，如图 1-1 所示，取向下为 x 轴正向，开始时系统处于平衡状态，后将细绳剪断，则在刚剪断瞬时，物体 B 的加速度 $\vec{a}_B =$ ；物体 C 的加速度 $\vec{a}_C =$ 。[电子科技大学 2011 研]



图 1-1

【答案】 $-(m_1/m_2)g\vec{i}$; 0

3. 半径为 $R=2\text{m}$ 飞轮作转速转动时, 轮边缘上一点的运动学方程为 $S=0.1t^3$ (国际单位制), 则当此点的速率 $v=30\text{m/s}$ 时, 其切向加速度为____, 法向加速度为____. [南京航空航天大学 2008 研]

【答案】 6m/s^2 ; 450m/s^2

三、计算题

1. 一质点沿 x 轴运动, 其加速度 $a=1+2t$, 若初始时刻 $v_0=2\text{m/s}$, $x_0=1\text{m}$, 求 $t=2\text{s}$ 时质点的速度大小及位置坐标. [武汉科技大学 2016 研]

解: $a = \frac{dv}{dt} \therefore dv = a dt$ 两边积分得: $\int_2^v dv = \int_0^t (1+2t) dt$

$$\therefore v = t^2 + t + 2$$

又 $v = \frac{dx}{dt} \therefore dx = v dt$ 两边积分得: $\int_1^x dx = \int_0^t (t^2 + t + 2) dt$

$$\therefore x = \frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} + 2t + 1$$

$$\therefore t = 2\text{s 时}, v = 8\text{m/s}; x = 9.7\text{m} \text{ (也可写为 } \frac{29}{3} \text{)}$$

2. 已知某质点的运动方程为 $\vec{r} = (10 - 5t^2)\vec{i} + 10t\vec{j}$ (SI), 则在 $t=1\text{s}$ 时该质点的切向加速度和法向加速度大小各为多少? [浙江大学 2007 研]

解: $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = -10t\vec{i} + 10\vec{j}$, 则: $\vec{v}|_{t=1} = -10\vec{i} + 10\vec{j}$

$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = -10\vec{i}$, 则 $a_t = a_n = 5\sqrt{2}\text{m/s}^2$

3. 如图 1-2 所示, 导弹 A 与靶机 B 在同一高度作水平飞行, 某时刻导弹正处于原点 O, 而靶机则位于导弹正东 1000 米处, 靶机以 500 米/秒的速度向东偏北 30° 的方向匀速飞行, 导弹以 1000 米/秒的匀速率飞行, 且飞行方向时正对靶机, 求此刻导弹的加速度矢量和它的飞行轨道在 O 点的曲率半径. [山东大学研]

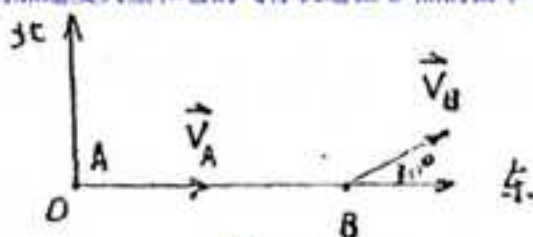


图 1-2

解: 加速度 $\vec{a} = \frac{d\vec{V}_A}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{V}_A$, 所以

$$a = V_A \frac{V_0 \sin 30}{AB} = 250 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \quad (\text{垂直于速度方向向上})$$

因为 $a = \frac{V_A^2}{\rho}$, 所以曲率半径为 $\rho = \frac{V_A^2}{a} = 4000 \text{ m}$

4. 一正在行驶的汽船, 发动机关闭后, 得到一个与船速方向相反, 大小与船速平方成正比的加速度. 设关闭发动机时船的速度为 v_0 , 经过时间 $t_0 = 10 \text{ s}$ 后减小为 $v_0/2$. 求:

(1) 发动机关闭后, t 时刻船的速度大小;

(2) 发动机关闭后, 经过时间 t 船行驶的距离 x . [厦门大学 2006 研]

解: 设发动机关闭时船的位置为坐标原点,

(1) 由题意可知: $a = -kv^2 = \frac{dv}{dt}$

两边积分, 得: $-\int_{v_0}^v \frac{dv}{v^2} = \int_0^t kt$

解得: $\frac{1}{v} = kt + \frac{1}{v_0}$

代入条件 $t = 10 \text{ s}$, $v = \frac{v_0}{2}$ 得: $\frac{1}{v} = \frac{1}{v_0} + \frac{1}{10v_0}t$ 或 $v = \frac{10v_0}{10+t}$

(2) 由 $v = \frac{dx}{dt}$ 移项积分, 得: $\int_0^x dx = \int_0^t v dt = \int_0^t \frac{10v_0}{10+t} dt$

解得运动方程为: $x = 10v_0 \ln\left(\frac{t}{10} + 1\right)$

5. 一汽车发动机的转速在 7.0 s 内由 200 r/min 均匀地增加到 3000 r/min .

(1) 求在这段时间内的初角速度和末角速度以及角加速度.

(2) 求这段时间内转过的角度.

(3) 发动机轴上装有一半径为 $r = 0.2 \text{ m}$ 的飞轮, 求它的边缘上一点在第 7.0 s 末的切向加速度、法向加速度和总加速度. [郑州大学 2008 研]

解: (1) 运动关系 $\omega = \omega_0 + \beta t$, 其中, $\omega_0 = 200 \text{ r/min} = 10/3 \text{ r/s}$, $\omega = 3000 \text{ r/min} = 50 \text{ r/s}$. 可得

$$\beta = \frac{\omega - \omega_0}{t} = \frac{2800/60 - 10/3}{7} = 3 \text{ r/s}^2$$

(2) 由运动学公式, 可得

$$\theta = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2\beta} = \frac{50^2 - (10/3)^2}{2 \times 20/3} = 186.67$$

(3) 切向加速度: $a_t = r\beta = 0.2 \times 3 = \frac{20}{3} \text{ m/s}^2$

法向加速度: $a_n = R\omega^2 = 0.2 \times 50^2 = 500 \text{ m/s}^2$

则总加速度为: $a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = 500 \text{ m/s}^2$

6. 有一宽为 l 的大江, 江水由北向南流去, 设江中心流速为 u_0 , 靠两岸的流速为零, 江中任一点的流速与江中心流速之差是和江心至该点距离的平方成正比, 今有相对于水的速度为 \vec{v}_0 的汽船由西岸出发, 向东偏北 45° 方向航行, 试求其航线的轨迹方程以及到达东岸的地点. [宁波大学 2009 研]

解: 以出发点为坐标原点, 向东取为 x 轴, 向北取为 y 轴, 因流速 $-y$ 方向, 由题意可得: $u_x = 0$,

$$u_y = a(x-l/2)^2 + b$$

令 $x = 0$, $x = l$ 处 $u_y = 0$; $x = l/2$ 处, $u_y = -u_0$, 代入上式定出 a 、 b , 可得:

$$u_y = -\frac{4u_0}{l^2}(l-x)x$$

船相对于岸的速度 $\vec{v}(u_x, u_y)$ 为: $u_x = v_0/\sqrt{2}$, $u_y = v_0/\sqrt{2} + u_y$, 将第一式进行积分, 有: $x = \frac{v_0}{\sqrt{2}}t$

因外有: $v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dt} = \frac{v_0}{\sqrt{2}} \frac{dy}{dx} = \frac{v_0}{\sqrt{2}} - \frac{4u_0}{l^2}(l-x)x$

即: $\frac{dy}{dx} = 1 - \frac{4\sqrt{2}u_0}{l^2 v_0}(l-x)x$

因此, 积分之后可求得如下的轨迹 (航线) 方程

$$y = x - \frac{2\sqrt{2}u_0}{lv_0}x^2 + \frac{4\sqrt{2}u_0}{3l^2v_0}x^3$$

到达东岸的地点 (x', y') 为

$$x' = l, y' = y_{x=l} = l \left(1 - \frac{3\sqrt{2}u_0}{3v_0} \right)$$

第2章 牛顿定律

2.1 复习笔记

一、牛顿定律

1. 牛顿第一定律

(1) 定律描述

牛顿第一定律是指任何物体都要保持其静止或匀速直线运动状态，直到外力迫使它改变运动状态为止。

(2) 数学形式表示为

$$F=0 \text{ 时, } v=\text{恒矢量}$$

(3) 第一定律揭示的规律

①任何物体都具有保持其运动状态不变的性质，这个性质称为惯性，所以，第一定律又称为惯性定律。

②要使其运动状态发生变化，一定要有其它物体对它作用，这种作用被称为力。

(4) 惯性系的区分

①惯性系

惯性系是指物体不受其它物体作用，可保持静止或匀速直线运动时所在的参考系，以恒定速度相对惯性系运动的参考系也就是惯性系。

②非惯性系

非惯性系是相对惯性系作变速运动的参考系。地球不是严格的惯性系，但可近似视为惯性系。

2. 牛顿第二定律

(1) 动量

物体的动量是指物体的质量 m 与其运动速度 v 的乘积，用 p 表示，即

$$p=mv$$

动量 p 是一个矢量，其方向与速度 v 的方向相同。

(2) 牛顿第二定律表达式

在合外力的作用下，动量随时间的变化率应等于作用于物体的合外力，即

$$F = \frac{dp}{dt} = \frac{d(mv)}{dt}$$

当物体在低速情况下运动时，上式可写成

$$F = m \frac{dv}{dt} = ma$$

在直角坐标系中，也可写成

$$F = m \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = m \frac{dv_x}{dt} \boldsymbol{i} + m \frac{dv_y}{dt} \boldsymbol{j} + m \frac{dv_z}{dt} \boldsymbol{k}$$

即

$$F = ma_x \boldsymbol{i} + ma_y \boldsymbol{j} + ma_z \boldsymbol{k}$$

(3) 应用牛顿第二定律需注意：

①只适用于质点的运动；

②定律中表示的合外力与加速度之间的关系是瞬时对应的关系，即力会产生加速度，而不是速度；

③力的叠加原理：当几个外力同时作用于物体时，其合外力 F 所产生的加速度 a ，与每个外力 F_i 所产生加速度 a_i 的矢量和是一样的。

(4) 曲线运动时，牛顿第二定律的表达式

如图 2-1 所示，取自然坐标系， e_n 为法向单位矢量， e_t 为切向单位矢量。于是质点在点 A 的加速度 a 在自然坐标系的两个相互垂直方向上的分矢量为 a_n 和 a_t 。

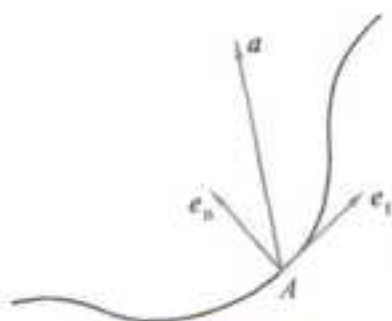


图 2-1 自然坐标系

如果 A 处曲线的曲率半径为 ρ ，则质点在平面上作曲线运动时，在自然坐标系中牛顿第二定律可写成

$$F = ma = m(a_t + a_n) = m \frac{dv}{dt} e_t + m \frac{v^2}{\rho} e_n$$

如以 F_t 和 F_n 代表合外力 F 在切向和法向的分矢量，则有

$$\begin{cases} F_t = ma_t = m \frac{dv}{dt} e_t \\ F_n = ma_n = m \frac{v^2}{\rho} e_n \end{cases}$$

F_t 称为切向力， F_n 称为法向力（或向心力）； a_t 和 a_n 相应地称为切向加速度和法向加速度。

3. 牛顿第三定律

牛顿第三定律说明物体间相互作用力的性质。

(1) 定律描述

牛顿第三定律是指两个物体之间的作用力 F 和反作用力 F' ，沿同一直线，大小相等，方向相反，分别作用在两个物体上。

(2) 数学表达式

$$F = -F'$$

(3) 应用第三定律需注意：

作用力和反作用力是互以对方为自己存在的条件，同时产生，同时消灭，任何一方都不能孤立地存在，并分别作用在两个物体上，它们属于同种性质的力。

4. 力学相对性原理

在一惯性系内部所作的任何力学实验，都不能确定该惯性系相对于其他惯性系是否在运动。

5. 物理量的单位和量纲

(1) 基本量即单位

国际单位制规定，力学的基本量是长度、质量和时间，其它力学物理量都是导出量，并规定：

- ①长度的基本单位名称为“米”，单位符号为 m；
- ②质量的基本单位名称为“千克”，单位符号为 kg；
- ③时间的基本单位名称为“秒”，单位符号为 s。

(2) 量纲

在物理学中，导出量与基本量之间的关系用量纲来表示。

二、几种常见的力

1. 万有引力

(1) 概念

万有引力是指所有物体与物体之间都存在着的一种相互吸引的力。

(2) 定律表述

在两个相距为 r ，质量分别为 m_1 、 m_2 的质点间有万有引力，其方向沿着它们的连线，其大小与它们的质量乘积成正比，与它们之间距离 r 的二次方成反比，即

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

式中 G 为一普通常数，称为引力常数，在一般计算时取

$$G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$$

2. 重力

(1) 重力

重力是指地球对地面附近物体的万有引力，用 P 表示，方向指向地球中心，重力的大小叫重量。

(2) 重力加速度

重力加速度是指在重力 P 的作用下，物体具有的加速度，用 g 表示，有

$$g = \frac{P}{m}$$

3. 弹性力

(1) 弹性力是由物体形变而产生的。

(2) 常见的弹性力：

① 弹簧被拉伸或压缩时产生的弹簧弹性力；

② 绳索被拉紧时所产生的张力；

③ 重物放在支承面上产生作用在支承面上的正压力和作用在物体上的支持力。

4. 摩擦力

(1) 静摩擦力

静摩擦力是指两个互相接触的物体间有相对滑动的趋势但尚未相对滑动时，在接触面上便产生阻碍发生相对滑动的力。

(2) 最大静摩擦力

最大静摩擦力是指使物体即将滑动的摩擦力达到的最大值。最大静摩擦力的值与物体的正压力 F_N 成正比，即

$$F_{f_{0m}} = \mu_0 F_N$$

μ_0 称为静摩擦因数，它与两接触物体的材料性质以及接触面的情况有关，与接触面的大小无关。

(3) 滑动摩擦力

① 概念

滑动摩擦力是指物体在平面上滑动时所受摩擦力，用 F_f 表示。

② 方向及大小

滑动摩擦力总是与物体相对平面的运动方向相反，其大小也是与物体的正压力 F_N 成正比，即

$$F_f = \mu F_N$$

③ 滑动因数

μ 称为滑动摩擦因数，与两接触物体的材料性质、接触表面的情况、温度、干湿度等有关，还与两接触物体的相对速度有关，一般取

$$\mu \approx \mu_0$$

(4) 摩擦的利弊

① 弊处：机器的摩擦浪费能量，降低精度，通常涂润滑油来改变摩擦材料的性能。

② 利处：人的行走，车轮的滚动，货物借助皮带输送。

三、牛顿定律的应用举例

1. 质点动力学的问题分类

(1) 已知物体的受力情况，由牛顿定律来求解其运动状态；

(2) 已知物体的运动状态，求作用于物体上的力。

2. 隔离体法

隔离体法是指正确地分析运动物体的受力情况，且作示力图时，把所研究的物体从与之相联系的其它物体中“隔离”出来，标明力的方向的一种物体受力分析方法。

四、非惯性系、惯性力

牛顿定律只适用于惯性系，而不适用于非惯性系。

1. 惯性力

惯性力是指在非惯性系中引入的一个使其中的物体符合牛顿运动定律力。

2. 惯性力表达式

一般来说，如果作用在物体上的力含有惯性力 F_i ，那么牛顿第二定律的数学表达式为

$$F + F_i = ma \text{ 或 } F - (ma_0) = ma$$

式中 a_0 是非惯性系相对惯性系的加速度， a 是物体相对非惯性系的加速度， F 是物体所受到的除惯性力以外的合外力。

3. 惯性离心力

惯性离心力是指一物体做圆周运动时，假想的一个作用在物体上的与向心力方向相反、大小相等的力 F_i 。

注：向心力和惯性离心力都是作用在同一小球上的，但它们不是作用力和反作用力，即它们不服从牛顿第三定律。

2.2 课后习题详解

一、问题

2-1 一探险者欲往山洞对面，他将拴有绳子的锚钩掷到山洞对面一棵大树上，并使之固定。探险者将绳的另一端拴在腰上并拉直，然后荡过山洞，落在山洞对面的地上。你能说明探险者在荡过山洞的过程中绳的张力在什么位置最大吗？

答：在荡过山洞的过程中，忽略摩擦和能量损失，系统的机械能守恒，绳在竖直位置时动能最大。由牛顿第二定律 $F_T - mg \cos\theta = mv^2/R$ 可知，在竖直位置时，速度最大， $\theta = 0$ ，所以此处绳的张力最大。

2-2 一车辆沿弯曲公路运动。试问作用在车辆上的力的方向是指向道路外侧，还是指向道路的内侧？

答：指向道路的内侧。因为车辆沿弯曲公路运动，必定有法向加速度是指向道路的内侧的。因此有指向内侧的力，同时还有可能存在切向加速度，即存在沿道路切向的力，不论切向加速度是否存在，合力必指向道路内侧。

2-3 将一质量略去不计的轻绳，跨过无摩擦的定滑轮。一只猴子抓住绳的一端，绳的另一端悬挂一个质量和高度均与猴子相等的镜子。开始时，猴子与镜在同一水平面上。猴子为了不看到镜中的猴像，它作了下面三项尝试：(1) 向上爬；(2) 向下爬；(3) 松开绳子自由下落。这样猴子是否就看不到它在镜中的像了？

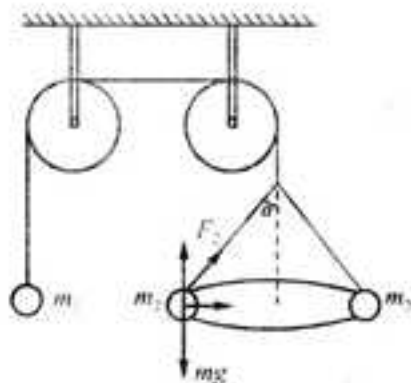
答：都能看到镜中的像。

(1) 猴子向上爬时绳对猴的拉力与绳对镜子的拉力相等，而镜子与猴子质量相等，因此镜子随猴子一起上升。

(2) 向下爬与向上爬类似，只是此时重力大于绳子的拉力，镜子随猴子一起下降。

(3) 松开绳子自由下落时，镜子也会自由下落，始终和猴子在同一高度。

2-4 如图所示，轻绳与定滑轮间的摩擦力略去不计，且 $m_1 = 2m_2$ 。若使质量为 m_2 的两个物体绕公共竖直轴转动，两边能否保持平衡？



问题 2-4 图

答：如图所示， m_1 这边绳的拉力为 $F_1 = m_1 g$ ，而右边绳的拉力

$$F_2 = 2F \cos \alpha = 2 \frac{m_1 g}{\cos \alpha} \cos \alpha = m_1 g$$

所以两边能保持平衡。

2-5 如图所示，一半径为 R 的木桶，以角速度 ω 绕其轴线转动，有一人紧贴在木桶壁上，人与木桶间的静摩擦因数为 μ_0 。你知道在什么情形下，人会紧贴在木桶壁上而不掉下来吗？



问题 2-5 图

答：当桶壁对人的静摩擦力等于人的重力时人就不会落下。即 $F_{f0} = \mu_0 F_N = mg$ ，则正压力

$F_N = mg / \mu_0$ 。该力等于人的向心力， $mg / \mu_0 = m\omega^2 R$ ，得当 $\omega \geq \sqrt{g / (\mu_0 R)}$ 时，人不会掉下来。

2-6 已知太阳的质量约为 $2.0 \times 10^{30} \text{ kg}$ ，设太阳绕银河中心运动的轨道为圆形，每转一圈所经历的时间约为 2.5×10^8 年，如果设想银河系中所有恒星都可看成类似太阳那样的恒星，并认为恒星系中所有行星、彗星及宇宙尘埃的质量较之恒星的质量都可略去不计。那么你能估计出银河系中有多少颗类似于太阳的恒星吗？

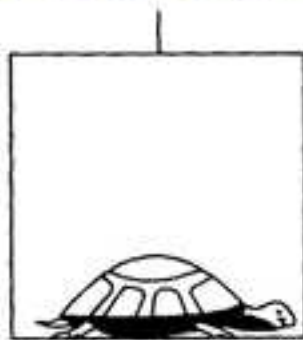
答：由附录三查得太阳绕银河系运动的平均轨道半径为 $R = 5.6 \times 10^{20} \text{ m}$ ，设银河系质量为 M ，由万有引力定律 $GMm/R^2 = mR\omega^2$ 得银河系质量为

$$M = \frac{R^3 \omega^2}{G} = \frac{R^3 (2\pi)^2}{GT^2} = 9.6 \times 10^{44} \text{ kg}$$

银河系质量除以太阳的质量可得银河系中有类似于太阳的恒星数为

$$N = \frac{M}{m} = \frac{9.6 \times 10^{44}}{2.0 \times 10^{30}} = 4.8 \times 10^{14} \text{ 个}$$

2-7 在升降机中有一只海龟，如问题 2-7 图所示，在什么情况下，海龟会“飘浮”在空中？



问题 2-7 图

答：当升降机做自由落体运动时，海龟就会失重，会“飘浮”在空中。

2-8 在空间站中的宇航员“没有重量”，你怎样判断地球引力对它的影响呢？

答：地球对宇航员的影响表现为万有引力。宇航员和空间站都是绕地球作圆周运动的，他们的向心力就是由万有引力提供的。宇航员“没有重量”，空间站也没有掉下来，是因为万有引力提供了向心力，使他们绕地球运动，而他们处于失重状态，即宇航员对空间站的地板没有压力是因为万有引力全部用来提供作向心力了。他们绕地球运动就表明他们还受地球引力的影响。

2-9 在火车车厢中的光滑桌面上，放置一个钢制小球。当火车的速率增加时，车厢内的观察者和铁轨上的观察者看到小球的运动状态将会发生怎样的变化？如果火车的速率减小，情况又将怎样？你能对上述现象加以说明吗？

答：因为小球处于光滑桌面上，从地面铁轨上的观察者的角度看，它在运动方向上不受外力作用，无论火车如何运动，小球都只作匀速直线运动。

车厢内的观察者随着火车加速或减速都将处于非惯性系。火车加速运动时，小球受向后的惯性力，因此小球向后运动；火车减速运动时，小球受向前的惯性力，因此小球向前运动。

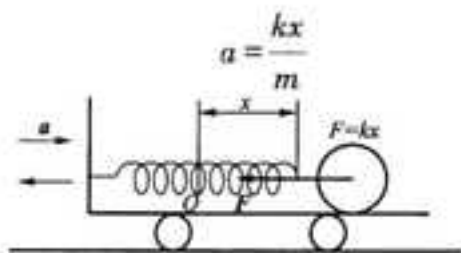
2-10 一物体相对于某参考系处于静止状态，是否可说此物体所受的合力一定为零呢？

答：不能这样说，要看此参考系是否为惯性参考系，物体如果在非惯性参考系中静止，不能表明物体所受的实际作用力的合力为零，只能说，如果合力包含惯性力，则合力为零。

2-11 有人想了一个简易办法，他用一块较光滑平板，一根劲度系数较小的弹簧，弹簧一端固定，另一端系一小钢球，就可以测量出汽车的加速度。你能给出该装置的示意图和测量原理吗？

答：图形如问题 2-11 图所示，设弹簧劲度系数为 k ，小球质量为 m 。当汽车作恒定加速度为 a 的运动时，弹簧将沿加速度的反方向长度变化 x ，产生的弹力使小球保持与汽车加速度一致的加速运动，根据胡克定律和牛顿第二定律，此时有 $kx=ma$ 。

由此可得汽车的加速度



问题 2-11 图

此外，题意中选定“劲度系数较小的弹簧”是为了使弹簧有良好的灵敏度，对不大的加速度有较大的伸长，使测量结果较精确。

二、习题

2-1 如图 2-1 (a) 所示，质量为 m 的物体用平行于斜面的细线联结置于光滑的斜面上，若斜面向左方作加速运动，当物体刚脱离斜面时，它的加速度的大小为 ()

- A. $g\sin\theta$
- B. $g\cos\theta$
- C. $g\tan\theta$
- D. $g\cot\theta$

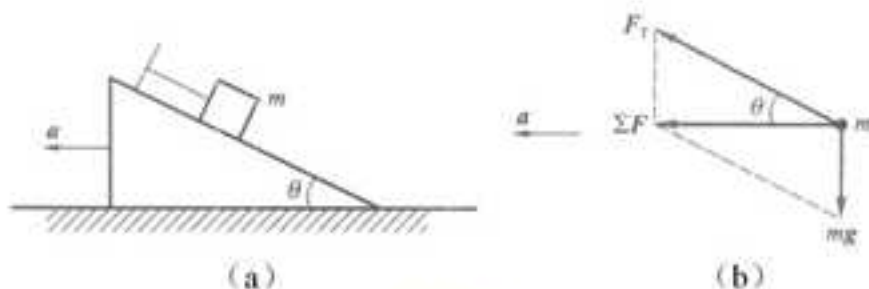


图 2-1

【答案】D

【解析】当物体离开斜面瞬间，斜面对物体的支持力消失为零，物体在绳子拉力 F_T 和重力作用下产生平行水平面向左的加速度 a ，如图 2-1 (b) 所示，由其可解得合外力为 $mg\cot\theta$ 。求解的关键是正确分析物体刚离开斜面瞬间的物体受力情况和状态特征。

2-2 用水平力 F_N 把一个物体压着靠在粗糙的竖直墙面上保持静止。当 F_N 逐渐增大时，物体所受的静摩擦力 F_f 的大小 ()

- A. 不为零，但保持不变
- B. 随 F_N 成正比地增大
- C. 开始随 F_N 增大，达到某一最大值后，就保持不变
- D. 无法确定

【答案】A

【解析】与滑动摩擦力不同的是，静摩擦力可在零与最大值 μF_N 范围内取值，当 F_N 增加时，静摩擦力可取的最大值成正比增加，但具体大小则取决于被作用物体的运动状态。由题意知，物体一直保持静止状态，故静摩擦力与重力大小相等，方向相反，并保持不变。

2-3 一段路面水平的公路，转弯处轨道半径为 R ，汽车轮胎与路面间的摩擦因数为 μ ，要使汽车不至于发生侧向打滑，汽车在该处的行驶速率 ()

- A. 不得小于 $\sqrt{\mu g R}$
- B. 必须等于 $\sqrt{\mu g R}$
- C. 不得大于 $\sqrt{\mu g R}$
- D. 还应由汽车的质量 m 决定

【答案】C

【解析】由题意知，汽车应在水平面内作匀速率圆周运动，为保证汽车转弯时不侧向打滑，所需向心力只能由路面与轮胎间的静摩擦力提供，能够提供的最大向心力应为 μF_N ，由此可算得汽车转弯的最大速率应为 $v = \sqrt{\mu g R}$ 。因此只要汽车转弯时的实际速率不大于此值，均能保证不侧向打滑。

2-4 一物体沿固定圆弧形光滑轨道由静止下滑，在下滑过程中，则 ()

- A. 它的加速度方向永远指向圆心，其速率保持不变
- B. 它受到的轨道的作用力的大小不断增加
- C. 它受到的合外力大小变化，方向永远指向圆心
- D. 它受到的合外力大小不变，其速率不断增加

【答案】B

【解析】由图 2-2 可知，物体在下滑过程中受到大小和方向不变的重力以及时刻指向圆轨道中心的轨道支持力 F_N 作用，其合外力方向并非指向圆心，其大小和方向均与物体所在位置有关。重力的切向分量 ($mg\cos\theta$) 使物体的速率将会不断增加，则物体作圆周运动的向心力将不断增大，由轨道法向方向上的动力学方程

$F_N - mg\sin\theta = m \frac{v^2}{R}$ 可判断，随 θ 角的不断增大过程，轨道支持力 F_N 也将不断增大。

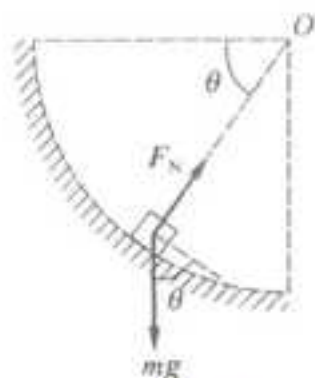


图 2-2

2-5 图 2-3 (a) 示系统置于以 $a = \frac{1}{4}g$ 的加速度上升的升降机内, A、B 两物体质量相同均为 m , A

所在的桌面是水平的, 绳子和定滑轮质量均不计, 若忽略滑轮轴上和桌面上的摩擦, 并不计空气阻力, 则绳中张力为 ()

- A. $\frac{5}{8}mg$
- B. $\frac{1}{2}mg$
- C. mg
- D. $2mg$

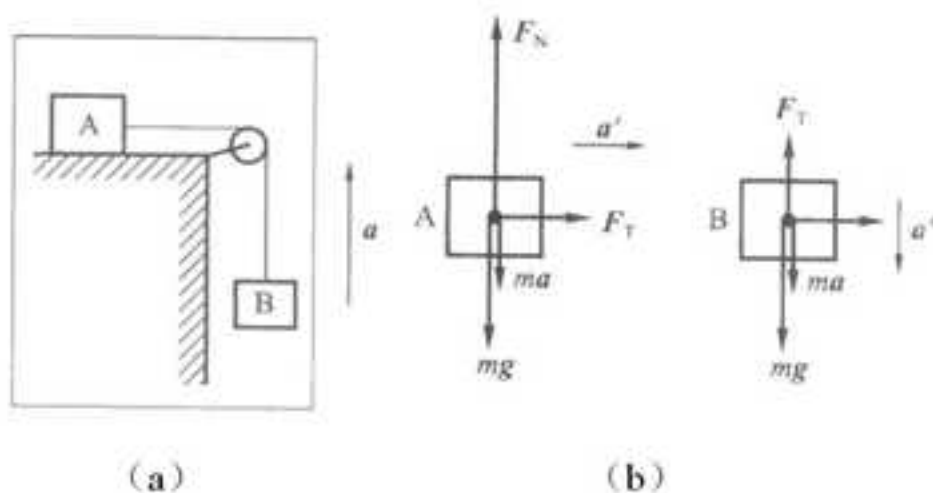


图 2-3

【答案】A

【解析】 本题可考虑对 A、B 两物体加上惯性力后, 以电梯这个非惯性参考系进行求解。此时 A、B 两物体受力情况如图 2-3 (b) 所示, 图中 a' 为 A、B 两物体相对电梯的加速度, ma' 为惯性力。对 A、B 两物体应用牛顿第二定律, 可解得 $F_T = \frac{5}{8}mg$ 。

2-6 图 2-4 中一斜面, 倾角为 α , 底边 AB 长为 $l=2.1\text{m}$, 质量为 m 的物体从斜面顶端由静止开始向下滑动, 斜面的摩擦因数为 $\mu=0.14$, 试问, 当 α 为何值时, 物体在斜面上下滑的时间最短? 其数值为多少?

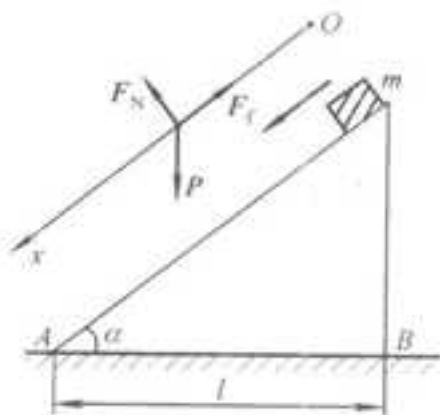


图 2-4

解：取沿斜面为坐标轴 Ox ，原点 O 位于斜面顶点，则由牛顿第二定律有

$$mgsin\alpha - mg\mu\cos\alpha = ma \quad (1)$$

又物体在斜面上作匀变速直线运动，故有

$$\frac{l}{\cos\alpha} = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)t^2$$

则

$$t = \sqrt{\frac{2l}{g\cos\alpha(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}} \quad (2)$$

为使下滑的时间最短，可令 $\frac{dt}{d\alpha} = 0$ ，由式 (2) 有

$$-\sin\alpha(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) + \cos\alpha(\cos\alpha + \mu\sin\alpha) = 0$$

则可得

$$\tan 2\alpha = -\frac{1}{\mu}, \quad \alpha = 49^\circ$$

此时

$$t_{\min} = \sqrt{\frac{2l}{g\cos\alpha(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}} = 0.99 \text{ s}$$

2-7 工地上有一吊车，将甲、乙两块混凝土预制板吊起送至高空。甲块质量为 $m_1 = 2.00 \times 10^3 \text{ kg}$ ，乙块质量为 $m_2 = 1.00 \times 10^3 \text{ kg}$ ，设吊车、框架和钢丝绳的质量不计。试求下述两种情况下，钢丝绳所受的张力以及乙块对甲块的作用力：(1) 两物块以 $10.0 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ 的加速度上升；(2) 两物块以 $1.0 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ 的加速度上升。从本题的结果，你能体会到起吊重物时必须缓慢加速的道理吗？

解：按题意，可分别取吊车（含甲、乙）和乙作为隔离体，画示力图，并取竖直向上为 Oy 轴正方向（如图 2-5 所示）。

当框架以加速度 a 上升时，有

$$F_T - (m_1 + m_2)g = (m_1 + m_2)a \quad (1)$$

$$F_{N2} - m_2g = m_2a \quad (2)$$

解上述方程，得

$$F_T = (m_1 + m_2)(g + a) \quad (3)$$

$$F_{N2} = m_2(g + a) \quad (4)$$

(1) 当整个装置以加速度 $a = 10 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ 上升时，由式 (3) 可得绳所受张力的值为

$$F_T = 5.94 \times 10^3 \text{ N}$$

乙对甲的作用力为

$$F'_{N2} = -F_{N2} = -m_2(g + a) = -1.98 \times 10^3 \text{ N}$$

(2) 当整个装置以加速度 $a=1\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$ 上升时, 得绳张力的值为

$$F_T=3.24\times 10^3\text{N}$$

此时, 乙对甲的作用力则为

$$F'_{N2}=-1.08\times 10^3\text{N}$$

由上述计算可见, 在起吊相同重量的物体时, 由于起吊加速度不同, 绳中所受张力也不同, 加速度大, 绳中张力也大, 因此, 起吊重物时必须缓慢加速, 以确保起吊过程的安全。

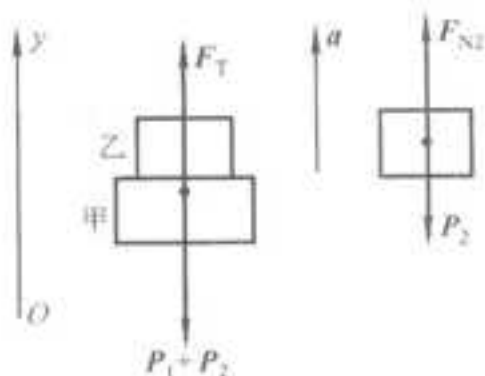


图 2-5

2-8 如图 2-6 (a) 所示, 已知两物体 A、B 的质量均为 $m=3.0\text{kg}$, 物体 A 以加速度 $a=1.0\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$ 运动, 求物体 B 与桌面间的摩擦力。(滑轮与连接绳的质量不计)。

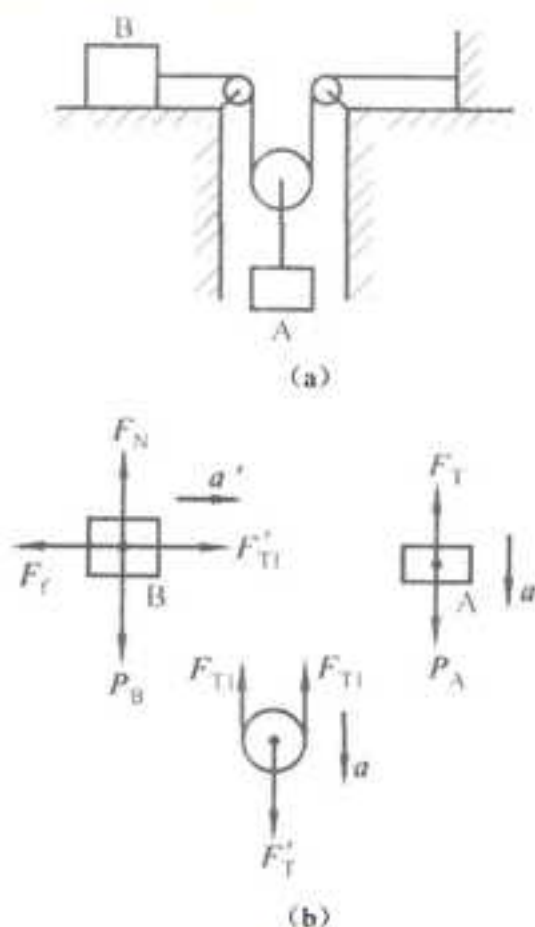


图 2-6

解: 分别对物体和滑轮作受力分析[图 2-6 (b)]. 由牛顿定律分别对物体 A、B 及滑轮列动力学方程, 有

$$m_A g - F_T = m_A a \quad (1)$$

$$F'_{T1} - F_f = m_B a' \quad (2)$$

$$F'_T - 2F_{T1} = 0 \quad (3)$$

考虑到 $m_A = m_B = m$, $F_T = F'_T$, $F_{T1} = F'_{T1}$, $a' = 2a$, 可联立解得物体与桌面的摩擦力

$$F_f = \frac{mg - (m + 4m)a}{2} = 7.2 \text{ N}$$

2-9 质量为 m' 的长平板 A 以速度 v' 在光滑平面上作直线运动, 现将质量为 m 的木块 B 轻轻平稳地放在长平板上, 板与木块之间的动摩擦因数为 μ , 求木块在长平板上滑行多远才能与板取得共同速度?

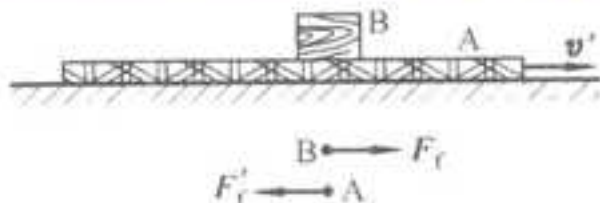


图 2-7

解: 解 1 以地面为参考系, 在摩擦力 $F_f = \mu mg$ 的作用下, 根据牛顿定律分别对木块、平板列出动力学方程

$$F_f = \mu mg = ma_1$$

$$F'_f = -F_f = m'a_2$$

a_1 和 a_2 分别是木块和木板相对地面参考系的加速度. 若以木板为参考系, 木块相对平板的加速度 $a = a_1 + a_2$, 木块相对平板以初速度 $-v'$ 作匀减速运动直至最终停止. 由运动学规律有 $-v'^2 = 2as$. 由上述各式可得木块相对于平板所移动的距离为

$$s = \frac{m'v'^2}{2\mu g(m' + m)}$$

解 2 以木块和平板为系统, 它们之间一对摩擦力作的总功为

$$W = F_f(s+l) - F'_f l = \mu mgs$$

式中 l 为平板相对地面移动的距离.

由于系统在水平方向上不受外力, 当木块放至平板上时, 根据动量守恒定律, 有

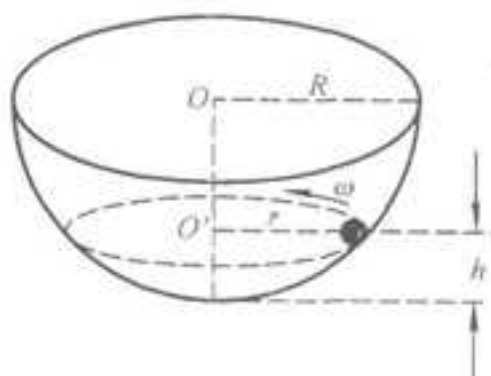
$$m'v' = (m' + m)v''$$

由系统的动能定理, 有

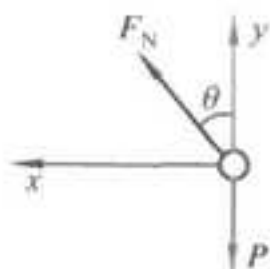
$$\mu mgs = \frac{1}{2}m'v'^2 - \frac{1}{2}(m' + m)v''^2$$

由上述各式可得 $s = \frac{m'v'^2}{2\mu g(m' + m)}$.

2-10 如图 2-8 (a) 所示, 在一只半径为 R 的半球形碗内, 有一粒质量为 m 的小钢球, 当小球以角速度 ω 在水平面内沿碗内壁作匀速圆周运动时, 它距碗底有多高?



(a)



(b)

图 2-8

解：取图示 Oxy 坐标，取钢球为隔离体，其受力分析如图 2-8 (b) 所示。在图示坐标中列动力学方程

$$F_N \sin \theta = ma_n = mR \omega^2 \sin \theta \quad (1)$$

$$F_N \cos \theta = mg \quad (2)$$

且有

$$\cos \theta = \frac{(R-h)}{R} \quad (3)$$

由上述各式可解得钢球距碗底的高度为

$$h = R - \frac{g}{\omega^2}$$

可见， h 随 ω 的变化而变化。

2-11 一汽车以 $100 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ 的速度在水平公路上行驶时，其刹车长度为 20 m 。如果该车在坡度为 12° 的平直公路上行驶，问该车上坡和下坡时其刹车长度又各为多少呢？

解：由题意得

$$-\mu mg = ma \quad (1)$$

$$0 - v_0^2 = 2as \quad (2)$$

由式 (1) 和 (2) 得

$$\mu = \frac{v_0^2}{2gs} = 1.97$$

上坡时有

$$mg \sin 12^\circ - \mu mg \cos 12^\circ = ma_2 \quad (3)$$

$$0 - v_0^2 = 2a_1 s_1 \quad (4)$$

由式 (3) 和 (4) 得

$$s_1 = -\frac{v_0^2}{2a_1} = -\frac{v_0^2}{2(g\sin 12^\circ + \mu g\cos 12^\circ)} = 18.44 \text{ m}$$

下坡时有

$$mg\sin 12^\circ - \mu mg\cos 12^\circ = ma_2 \quad (5)$$

$$0 - v_0^2 = 2a_2 s_2 \quad (6)$$

由式(5)和(6)得

$$s_2 = -\frac{v_0^2}{2a_2} = -\frac{v_0^2}{2(\mu g\cos 12^\circ - g\sin 12^\circ)} = 22.90 \text{ m}$$

由上可知 $s_2 > s_1$, 因此下坡时更要注意行车安全。

2-12 火车转弯时需要较大的向心力, 如果两条铁轨都在同一水平面内(内轨、外轨等高), 这个向心力只能由外轨提供, 也就是说外轨会受到车轮对它很大的向外侧压力, 这是很危险的。因此, 对应于火车的速率及转弯处的曲率半径, 必须使外轨适当地高出内轨, 称为外轨超高。现有一质量为 m 的火车, 以速率 v 沿半径为 R 的圆弧轨道转弯, 已知路面倾角为 θ , 试求: (1) 在此条件下, 火车速率 v_0 为多大时, 才能使车轮对铁轨内外轨的侧压力均为零? (2) 如果火车的速率 $v \neq v_0$, 则车轮对铁轨的侧压力为多少?

解: (1) 以火车为研究对象, 建立如图 2-9 所示坐标系。据分析, 由牛顿定律有

$$F_N \sin \theta = m \frac{v^2}{R} \quad (1)$$

$$F_N \cos \theta - mg = 0 \quad (2)$$

解(1)(2)两式可得火车转弯时规定速率为

$$v_0 = \sqrt{gR \tan \theta}$$

(2) 当 $v > v_0$ 时, 根据分析有

$$F_N \sin \theta + F_1 \cos \theta = m \frac{v^2}{R} \quad (3)$$

$$F_N \cos \theta - F_1 \sin \theta - mg = 0 \quad (4)$$

解(3)(4)两式, 可得外轨侧压力为

$$F_1 = m \left(\frac{v^2}{R} \cos \theta - g \sin \theta \right)$$

当 $v < v_0$ 时, 根据分析有

$$F_N \sin \theta - F_2 \cos \theta = m \frac{v^2}{R} \quad (5)$$

$$F_N \cos \theta + F_2 \sin \theta - mg = 0 \quad (6)$$

解(5)(6)两式, 可得内轨侧压力为

$$F_2 = m \left(g \sin \theta - \frac{v^2}{R} \cos \theta \right)$$

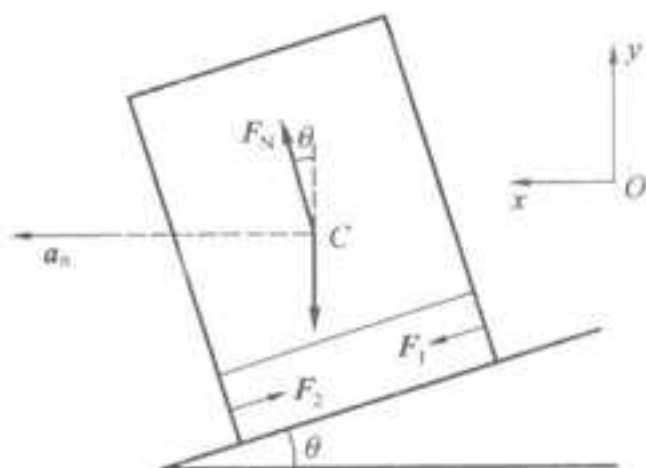


图 2-9

2-13 已知地球和月球的中心距离约为 $3.84 \times 10^5 \text{ km}$ ，而月球的质量约为地球质量的 $1/81$ 。试问航天器在从地球飞往月球的过程中，在距地球多远出航天员不能测到重力？

解：记 d 为地球和月球间的距离，则 $d = 3.84 \times 10^5 \text{ km}$ ，在距地球 r 处航天员不能测到重力，则

$$-G \frac{m_E m}{r^2} = -G \frac{\frac{m_E}{81} m}{(d-r)^2}$$

化简得 $80r^2 - 162 dr + 81d^2 = 0$ ，解得

$$r = 3.46 \times 10^5 \text{ km}$$

注：另外一解不符合题意。

2-14 一杂技演员在圆筒形建筑物内表演飞车走壁。设演员和摩托车的总质量为 m ，圆筒半径为 R ，演员骑摩托车在直壁上以速率 v 作匀速圆周螺旋运动，每绕一周上升距离为 h ，如图 2-10 所示。求壁对演员和摩托车的作用力。

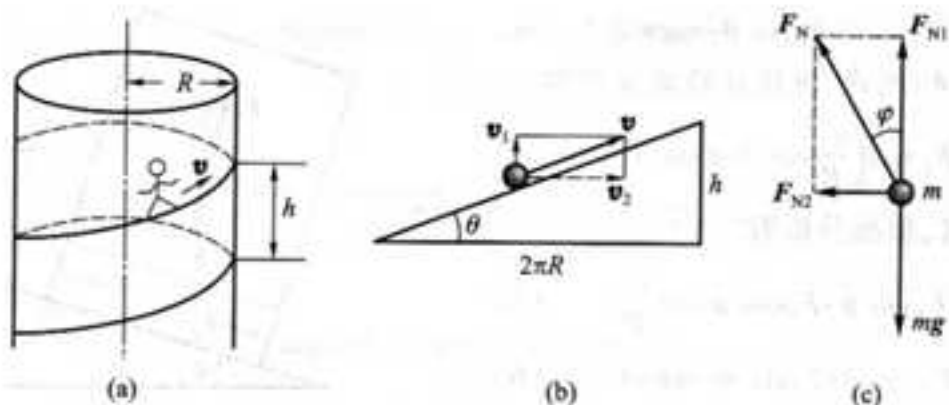


图 2-10

解：设杂技演员连同摩托车整体为研究对象，其旋转一周所形成的螺旋线轨迹展开后，相当于如图 2-10 (b) 所示的斜面。把演员的运动速度分解为竖直向上作匀速直线运动的分速度 v_1 和绕圆筒壁作水平圆周运动的分速度 v_2 。向心力由筒壁对演员的支持力 F_N 的水平分量 F_{N2} 提供，竖直分量 F_{N1} 与重力相平衡。如图 2-10 (c) 所示，其中 φ 角为摩托车与筒壁所夹角。

据 (b) (c) 两图应有

$$F_{N1} - mg = 0 \quad (1)$$

$$F_{N2} = m \frac{v_2^2}{R} \quad (2)$$

$$v_2 = v \cos \theta = v \frac{2\pi R}{\sqrt{(2\pi R)^2 + h^2}} \quad (3)$$

$$F_N = \sqrt{F_{N1}^2 + F_{N2}^2} \quad (4)$$

以式(3)代入式(2), 得

$$F_{N2} = \frac{m}{R} \frac{4\pi^2 R^2 v^2}{4\pi^2 R^2 + h^2} = \frac{4\pi^2 R m v^2}{4\pi^2 R^2 + h^2} \quad (5)$$

将式(1)和式(5)代入式(4), 可求出圆筒壁对杂技演员的作用力(即支承力)大小为

$$F_N = \sqrt{F_{N1}^2 + F_{N2}^2} = m \sqrt{g^2 + \left(\frac{4\pi^2 R v^2}{4\pi^2 R^2 + h^2} \right)^2}$$

与壁的夹角 φ 为 $\varphi = \arctan \frac{F_{N2}}{F_{N1}} = \arctan \frac{4\pi^2 R v^2}{(4\pi^2 R^2 + h^2)g}$.

2-15 一质点沿 x 轴运动, 其受力如图 2-11 所示, 设 $t=0$ 时, $v_0=5\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$, $x_0=2\text{m}$, 质点质量 $m=1\text{kg}$, 试求该质点 7s 末的速度和位置坐标。

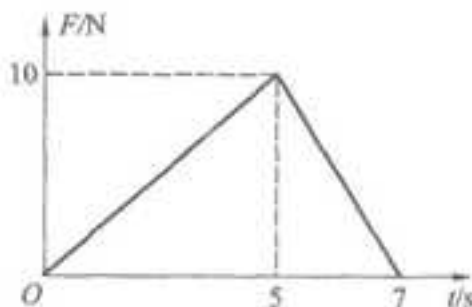


图 2-11

解: 由题图得

$$F(t) = \begin{cases} 2t, & 0 < t < 5 \text{ s} \\ 35 - 5t, & 5 \text{ s} < t < 7 \text{ s} \end{cases}$$

由牛顿定律可得两时间段质点的加速度分别为

$$\begin{aligned} a &= 2t, & 0 < t < 5\text{s} \\ a &= 35 - 5t, & 5\text{s} < t < 7\text{s} \end{aligned}$$

对 $0 < t < 5\text{s}$ 时间段, 由 $a = \frac{dv}{dt}$ 得

$$\int_{v_0}^v dv = \int_0^t a dt$$

积分后得

$$v = 5 + t^2$$

再由 $v = \frac{dx}{dt}$ 得

$$\int_{v_0}^v dx = \int_0^t v dt$$

积分后得

$$x = 2 + 5t + \frac{1}{3}t^3$$

将 $t=5s$ 代入, 得 $v_5=30\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ 和 $x_5=68.7\text{m}$.

对 $5s < t < 7s$ 时间段, 用同样方法有

$$\int_{v_5}^v dv = \int_{5s}^t a_2 dt$$

得 $v=35t-2.5t^2-82.5$.

再由 $\int_{x_5}^x dx = \int_{5s}^t v dt$ 得

$$x=17.5t^2-0.83t^3-82.5t+147.87$$

将 $t=7s$ 代入分别得 $v_7=40\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ 和 $x_7=142\text{m}$

2-16 一质量为 10kg 的质点在力 F 的作用下沿 x 轴作直线运动, 已知 $F=120t+40$, 式中 F 的单位为 N , t 的单位的 s . 在 $t=0$ 时, 质点位于 $x=5.0\text{m}$ 处, 其速度 $v_0=6.0\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$. 求质点在任意时刻的速度和位置.

解: 因加速度 $a=dv/dt$. 在直线运动中, 根据牛顿运动定律有

$$120t + 40 = m \frac{dv}{dt}$$

依据质点运动的初始条件, 即 $t_0=0$ 时 $v_0=6.0\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$, 运用分离变量法对上式积分, 得

$$\int_{v_0}^v dv = \int_0^t (12.0t + 4.0) dt$$

$$v = 6.0 + 4.0t + 6.0t^2$$

又因 $v=dx/dt$, 并由质点运动的初始条件: $t_0=0$ 时 $x_0=5.0\text{m}$, 对上式分离变量后积分, 有

$$\int_{x_0}^x dx = \int_0^t (6.0 + 4.0t + 6.0t^2) dt$$

$$x = 5.0 + 6.0t + 2.0t^2 + 2.0t^3$$

2-17 轻型飞机连同驾驶员总质量为 $1.0 \times 10^3\text{kg}$. 飞机以 $55.0\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ 的速率在水平跑道上着陆后, 驾驶员开始制动, 若阻力与时间成正比, 比例系数 $\alpha=5.0 \times 10^2\text{N}\cdot\text{s}^{-1}$, 空气对飞机升力不计, 求: (1) 10s 后飞机的速率; (2) 飞机着陆后 10s 内滑行的距离.

解: 以地面飞机滑行方向为坐标正方向, 由牛顿运动定律及初始条件, 有

$$F = ma = m \frac{dv}{dt} = -\alpha t$$

$$\int_{v_0}^v dv = \int_0^t -\frac{\alpha t}{m} dt$$

得

$$v = v_0 - \frac{\alpha}{2m} t^2$$

因此, 飞机着陆 10s 后的速率为

$$v = 30.0\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

又

$$\int_{x_0}^x dx = \int_0^t (v_0 - \frac{\alpha}{2m} t^2) dt$$

故飞机着陆后 10s 内所滑行的距离

$$s = x - x_0 = v_0 t - \frac{\alpha}{6m} t^3 = 467 \text{ m}$$

2-18 质量为 m 的跳水运动员，从 10.0m 高台上由静止跳下落入水中。高台距水面距离为 h 。把跳水运动员视为质点，并略去空气阻力。运动员入水后垂直下沉，水对其阻力为 bv^2 ，其中 b 为一常量。若以水面上一点为坐标原点 O ，竖直向下为 Oy 轴，求：(1) 运动员在水中的速率 v 与 y 的函数关系；(2) 如 $b/m=0.40\text{m}^{-1}$ ，跳水运动员在水中下沉多少距离才能使其速率 v 减少到落水速率 v_0 的 $1/10$ ？(假定跳水运动员在水中的浮力与所受的重力大小恰好相等)

解：(1) 运动员入水前可视为自由落体运动，故入水时的速度为

$$v_0 = \sqrt{2gh}$$

运动员入水后，受重力 P 、浮力 F 和水的阻力 F_r 的作用，其合力是一变力，因此，物体作变加速运动。由牛顿定律得

$$P - F_r - F = ma$$

由题意 $P=F$ 、 $F_r=bv^2$ ，而 $a=dv/dt=v(dv/dy)$ ，代入上式后得

$$-bv^2 = mv(dv/dy)$$

考虑到初始条件 $y_0=0$ 时， $v_0 = \sqrt{2gh}$ ，对上式积分，有

$$\int_0^y (-\frac{b}{m}) dy = \int_{v_0}^v \frac{dv}{v}$$

$$v = v_0 e^{-by/m} = \sqrt{2gh} e^{-by/m}$$

(2) 将已知条件 $\frac{b}{m} = 0.4 \text{ m}^{-1}$ ， $v=0.1v_0$ 代入上式，则得

$$y = -\frac{m}{b} \ln \frac{v}{v_0} = 5.76 \text{ m}$$

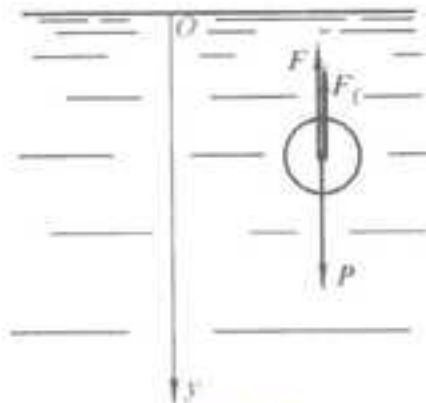


图 2-12

2-19 直升飞机的螺旋桨由两个对称的叶片组成。每一叶片的质量 $m=136\text{kg}$ ，长 $l=3.66\text{m}$ 。求当它的转速 $n=320\text{r/min}$ 时，两个叶片根部的张力。(设叶片是宽度一定、厚度均匀的薄片)

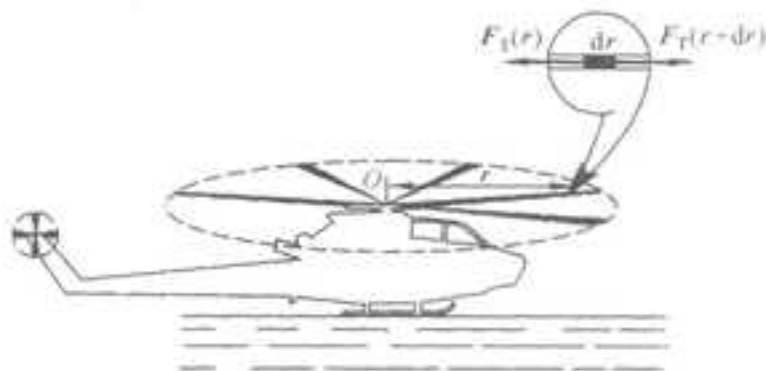


图 2-13

解：设叶片根部为原点 \$O\$，沿叶片背离原点 \$O\$ 的方向为正向，距原点 \$O\$ 为 \$r\$ 处的长为 \$dr\$ 一小段叶片，其两侧对它的拉力分别为 \$F_T(r)\$ 与 \$F_T(r+dr)\$。叶片转动时，该小段叶片作圆周运动，由牛顿定律有

$$dF_T = F_T(r) - F_T(r + dr) = \frac{m}{l} \omega^2 r dr$$

由于 \$r=l\$ 时外侧 \$F_T=0\$，所以有

$$\int_{F_T(r)}^0 dF_T = \int_r^l \frac{m\omega^2}{l} r dr$$

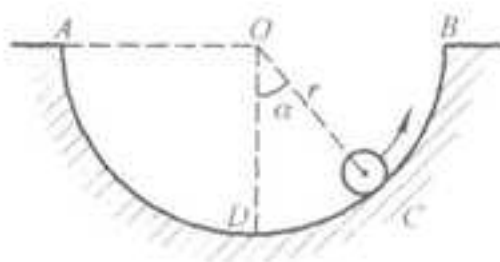
$$F_T(r) = -\frac{m\omega^2}{2l} (l^2 - r^2) = -\frac{2\pi^2 mn^2}{l} (l^2 - r^2)$$

上式中取 \$r=0\$，即得叶片根部的张力

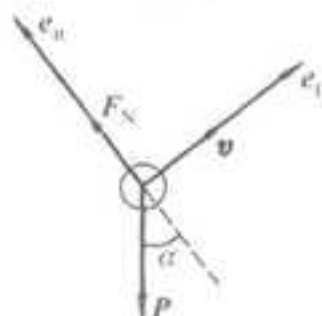
$$F_m = -2.79 \times 10^3 \text{ N}$$

负号表示张力方向与坐标方向相反。

2-20 一质量为 \$m\$ 的小球最初位于如图 2-14 (a) 所示的 \$A\$ 点，然后沿半径为 \$r\$ 的光滑圆轨道 \$ADCB\$ 下滑。试求小球到达点 \$C\$ 时的角速度和对圆轨道的作用力。



(a)



(b)

图 2-14

解：小球在运动过程中受到重力 \mathbf{P} 和圆轨道对它的支持力 \mathbf{F}_N 。

取图 2-14 (b) 所示的自然坐标系，由牛顿定律得

$$F_t = -mg \sin \alpha = m \frac{dv}{dt} \quad (1)$$

$$F_n = F_N - mg \cos \alpha = \frac{mv^2}{R} \quad (2)$$

由 $v = \frac{ds}{dt} = \frac{rd\alpha}{dt}$ ，得 $dt = \frac{rd\alpha}{v}$ ，代入式 (1)，并根据小球从点 A 运动到点 C 的始末条件，进行积分，有

$$\int_0^v v dv = \int_{90^\circ}^\alpha (-rg \sin \alpha) d\alpha$$

$$\text{得 } v = \sqrt{2rg \cos \alpha}$$

则小球在点 C 的角速度为

$$\omega = \frac{v}{r} = \sqrt{(2g \cos \alpha)/r}$$

由式 (2) 得

$$F_N = \frac{mv^2}{r} + mg \cos \alpha = 3mg \cos \alpha$$

由此可得小球对圆轨道的作用力为

$$F_N' = -F_N = -3mg \cos \alpha$$

负号表示 F_N' 与 \mathbf{e}_n 反向。

2-21 光滑的水平桌面上放置一半径为 R 的固定圆环，物体紧贴环的内侧作圆周运动，其摩擦因数为 μ ，开始时物体的速率为 v_0 ，求：(1) t 时刻物体的速率；(2) 当物体速率从 v_0 减少到 $\frac{1}{2}v_0$ 时，物体所经历的时间及经过的路程。

解：(1) 设物体质量为 m ，圆环内侧对物体的支持力为 F_N ，环与物体之间的摩擦力 F_t 取图 2-15 中所示的自然坐标

按牛顿定律，有

$$F_N = ma_n = \frac{mv^2}{R}$$

$$F_t = -ma_t = -m \frac{dv}{dt}$$

由分析中可知，摩擦力的大小 $F_t = \mu F_N$ ，由上述各式可得

$$\mu \frac{v^2}{R} = -\frac{dv}{dt}$$

取初始条件 $t=0$ 时 $v=v_0$ ，并对上式进行积分，有

$$\int_0^t dt = -\frac{R}{\mu} \int_{v_0}^v \frac{dv}{v^2}$$

$$v = \frac{Rv_0}{R + v_0\mu t}$$

(2) 当物体的速率从 v_0 减少到 $\frac{1}{2}v_0$ 时，由上式可得所需的时间为

$$t' = \frac{R}{\mu v_0}$$

物体在这段时间内所经过的路程

$$s = \int_0^{t'} v dt = \int_0^{t'} \frac{Rv_0}{R + v_0\mu t} dt$$

$$s = \frac{R}{\mu} \ln 2$$

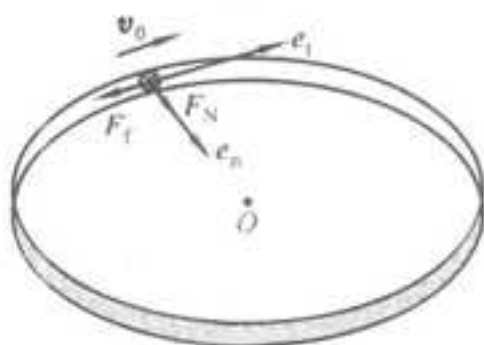


图 2-15

2-22 质量为 45.0 kg 的物体，由地面以初速 $60.0 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ 竖直向上发射，物体受到空气的阻力为 $F_r = kv$ ，且 $k = 0.03 \text{ N}\cdot\text{s}\cdot\text{m}^{-1}$ 。(1) 求物体发射到最大高度所需的时间。(2) 最大高度为多少？

解：(1) 物体在空中受重力 mg 和空气阻力 $F_r = kv$ 作用而减速，由牛顿定律得

$$-mg - kv = m \frac{dv}{dt} \quad (1)$$

根据始末条件对上式积分，有

$$\int_0^t dt = -m \int_{v_0}^0 \frac{dv}{mg + kv}$$

$$t = \frac{m}{k} \ln\left(1 + \frac{kv_0}{mg}\right) = 6.11 \text{ s}$$

(2) 利用 $\frac{dv}{dt} = \frac{v dv}{dy}$ 的关系代入式 (1)，可得

$$-mg - kv = mv \frac{dv}{dy}$$

分离变量后积分

$$\int_0^y dy = \int_{v_0}^0 -\frac{mvdv}{mg + kv}$$

故

$$y = -\frac{m}{k} \left[\frac{mg}{k} \ln\left(1 + \frac{kv_0}{mg}\right) - v_0 \right] \approx 183 \text{ m}$$

2-23 已知一质量为 m 的质点在 x 轴上运动，质点只受到指向原点的引力的作用，引力大小与质点离原点的距离 x 的二次方成反比，即 $F = -k/x^2$ ， k 是比例常量。设质点在 $x=A$ 时的速度为零，求质点在 $x=A/4$ 处的速度的大小。

解：由牛顿定律有

$$F = m \frac{dv}{dt} = -\frac{k}{x^2}$$

作变量变换

$$m \frac{dv}{dt} = \frac{mv dv}{dx} = -\frac{k}{x^2}$$

分离变量后两边积分

$$- \int_A^{\frac{A}{x}} k \frac{dx}{x^2} = \int_0^v mv dv$$

得

$$v = \sqrt{\frac{6k}{mA}}$$

本题也可由动能定理求解。即

$$W = \int F dx = \int_A^{\frac{A}{x}} \left(-\frac{k}{x^2} \right) dx = \frac{1}{2}mv^2 - 0$$

相比之下此法更直接和较为简便。

2-24 一物体自地球表面以速率 v_0 竖直上抛。假定空气对物体阻力的值为 $F_r = kmv^2$ ，其中 m 为物体的质量， k 为常量。试求：(1) 该物体能上升的高度；(2) 物体返回地面时速度的值。（设重力加速度为常量。）

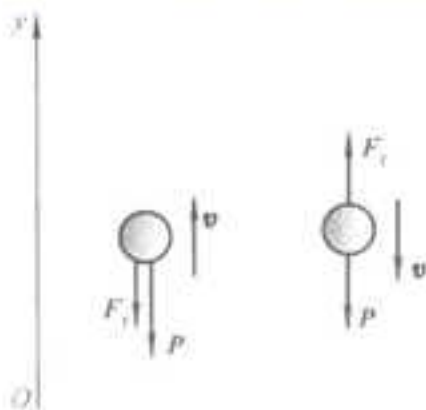


图 2-16

解：分别对物体上抛、下落时作受力分析，以地面为原点，竖直向上为 y 轴（如图 2-16 所示）。

(1) 物体在上抛过程中，根据牛顿定律有

$$-mg - kmv^2 = m \frac{dv}{dt} = m \frac{v dv}{dy}$$

依据初始条件对上式积分，有

$$\int_0^y dy = - \int_{v_0}^v \frac{v dv}{g + kv^2}$$

$$y = -\frac{1}{2k} \ln \left(\frac{g + kv^2}{g + kv_0^2} \right)$$

物体到达最高处时， $v=0$ ，故有

$$h = y_{\max} = \frac{1}{2k} \ln \left(\frac{g + kv_0^2}{g} \right)$$

(2) 物体下落过程中，有

$$-mg + kmv^2 = m \frac{v dv}{dy}$$

对上式积分, 有

$$\int_h^0 dy = - \int_0^v \frac{v dv}{g - kv^2}$$

则

$$v = v_0 \left(1 + \frac{kv_0^2}{g} \right)^{-1/2}$$

2-25 质量为 m 的摩托车, 在恒定的牵引力 F 的作用下工作, 它所受的阻力与其速率的平方成正比, 它能达到的最大速率是 v_m . 试计算从静止加速到 $v_m/2$ 所需的时间以及所走过的路程.

解: 设摩托车沿 x 轴正方向运动, 在牵引力 F 和阻力 F_r , 同时作用下, 由牛顿定律有

$$F - kv^2 = m \frac{dv}{dt} \quad (1)$$

当加速度 $a = dv/dt = 0$ 时, 摩托车的速率最大, 因此可得

$$k = F/v_m^2 \quad (2)$$

由式 (1) 和式 (2) 可得

$$F \left(1 - \frac{v^2}{v_m^2} \right) = m \frac{dv}{dt} \quad (3)$$

根据始末条件对式 (3) 积分, 有

$$\int_0^t dt = \frac{m}{F} \int_0^{v_m/2} \left(1 - \frac{v^2}{v_m^2} \right)^{-1} dv$$

则

$$t = \frac{mv_m}{2F} \ln 3$$

又因式 (3) 中 $m \frac{dv}{dt} = \frac{mv dv}{dx}$, 再利用始末条件对式 (3) 积分, 有

$$\int_0^x dx = \frac{m}{F} \int_0^{v_m/2} v \left(1 - \frac{v^2}{v_m^2} \right)^{-1} dv$$

则

$$x = \frac{mv_m^2}{2F} \ln \frac{4}{3} \approx 0.144 \frac{mv_m^2}{F}$$

*2-26 飞机降落时, 以 v_0 的水平速度着落后自由滑行, 滑行期间飞机受到的空气阻力 $F_1 = -k_1 v^2$, 升力 $F_2 = k_2 v^2$, 其中 v 为飞机的滑行速度, 两个系数之比 k_1/k_2 称为飞机的升阻比. 实验表明, 物体在流体中运动时, 所受阻力与速度的关系与多种因素有关, 如速度大小、流体性质、物体形状等, 在速度较小或流体密度较小时有 $F \propto v$, 而在速度较大或流体密度较大的有 $F \propto v^2$, 需要精确计算时则应由实验测定. 本题中由于飞机速

率较大，故取 $F \propto v^2$ 作为计算依据。设飞机与跑道间的滑动摩擦因数为 μ ，试求飞机从触地到静止所滑行的距离。以上计算实际上已成为飞机跑道长度设计的依据之一。

解：如图 2-17 所示，飞机触地后滑行期间受到 5 个力作用，其中 F_1 为空气阻力， F_2 为空气升力， F_N 为跑道作用于飞机的摩擦力，飞机在合外力为变力的情况下作减速运动

取飞机滑行方向为 x 的正方向，着陆点为坐标原点，如图 2-17 所示，根据牛顿第二定律有

$$-\mu F_N - k_1 v^2 = m \frac{dv}{dt} \quad (1)$$

$$F_N + k_2 v^2 - mg = 0 \quad (2)$$

将式 (2) 代入式 (1)，并整理得

$$-\mu mg - (k_1 - \mu k_2) v^2 = m \frac{dv}{dt} = mv \frac{dv}{dx}$$

分离变量并积分，有

$$\int_{v_0}^0 \frac{m v dv}{\mu mg + (k_1 - \mu k_2) v^2} = - \int_0^x dx$$

得飞机滑行距离

$$x = \frac{m}{2(k_1 - \mu k_2)} \ln \left[\frac{\mu mg + (k_1 - \mu k_2) v_0^2}{\mu mg} \right] \quad (3)$$

考虑飞机着陆瞬间有 $F_N = 0$ 和 $v = v_0$ ，应有 $k_2 v_0^2 = mg$ ，将其代入 (3) 式，可得飞机滑行距离 x 的另一表达式

$$x = \frac{k_2 v_0^2}{2g(k_1 - \mu k_2)} \ln \left(\frac{k_1}{\mu k_2} \right)$$

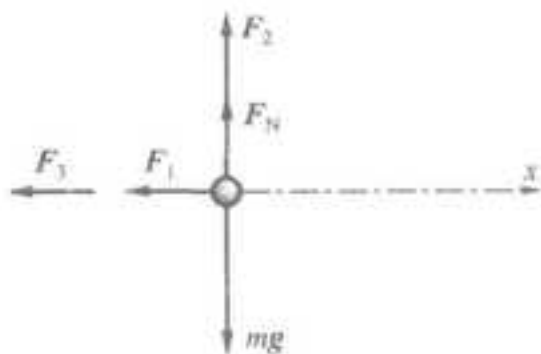


图 2-17

2-27 在卡车车厢底板上放一木箱，该木箱距车厢前沿挡板的距离 $L = 2.0 \text{ m}$ ，已知刹车时卡车的加速度 $a = 7.0 \text{ m/s}^2$ ，设刹车一开始木箱就开始滑动，求该木箱撞上挡板时相对卡车的速率为多大？设木箱与底板间滑动摩擦因数 $\mu = 0.50$ 。

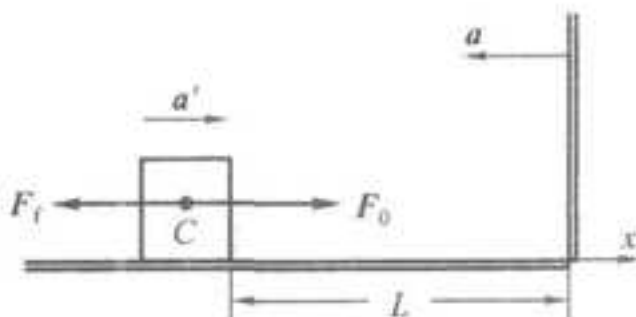


图 2-18

解：在图 2-18 中对木箱加上惯性力 F_0 ，其中 a' 为木箱相对车厢的加速度，由牛顿第二定律和相关运动学规律有

$$F_0 - F_f = ma - \mu mg = ma' \quad (1)$$

$$v'^2 = 2a'L \quad (2)$$

联立解 (1) (2) 两式并代入题给数据，得木箱撞上车厢挡板时的速度为

$$v' = \sqrt{2(a - \mu g)L} = 2.9 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

2-28 如图 2-19 (a) 所示，电梯相对地面以加速度 a 竖直向上运动，电梯中有一滑轮固定在电梯顶部，滑轮两侧用轻绳悬挂着质量分别为 m_1 和 m_2 的物体 A 和 B。设滑轮的质量和滑轮与绳索间的摩擦均略去不计，已知 $m_1 > m_2$ ，如以加速运动的电梯为参考系，求物体相对地面的加速度和绳的张力。

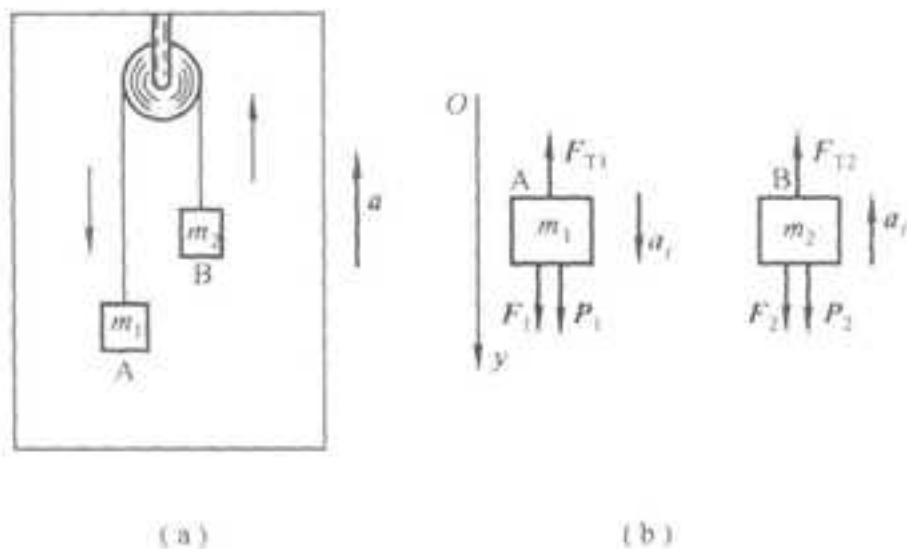


图 2-19

解：取如图 2-19(b) 所示的坐标，以电梯为参考系，分别对物体 A、B 作受力分析，其中 $F_1 = m_1 a$ ， $F_2 = m_2 a$ 分别为作用在物体 A、B 上的惯性力。设 a_r 为物体相对电梯的加速度，根据牛顿定律有

$$m_1 g + m_1 a - F_{T1} = m_1 a_r \quad (1)$$

$$m_2 g + m_2 a - F_{T2} = -m_2 a_r \quad (2)$$

$$F_{T1} = F_{T2} \quad (3)$$

由上述各式可得

$$a_r = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} (g + a)$$

$$F_{T1} = F_{T2} = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} (g + a)$$

由相对加速度的矢量关系, 可得物体 A、B 对地面的加速度值为

$$a_1 = a_2 - a = \frac{(m_1 - m_2)g - 2m_2 a}{m_1 + m_2}$$

$$a_2 = -(a_1 + a) = -\frac{2m_1 a + (m_1 - m_2)g}{m_1 + m_2}$$

a_2 的方向向上, a_1 的方向由 a_1 和 a 的大小决定。当 $a_1 < a$, 即 $m_1 g - m_2 g - 2m_2 a > 0$ 时, a_1 的方向向下; 反之, a_1 的方向向上。

2-29 如图 2-20 (a) 所示, 在光滑水平面上, 放一质量为 m' 的三棱柱 A, 它的斜面的倾角为 α 。现把一质量为 m 的滑块 B 放在三棱柱的光滑斜面上。试求: (1) 三棱柱相对于地面的加速度; (2) 滑块相对于地面的加速度; (3) 滑块与三棱柱之间的正压力。

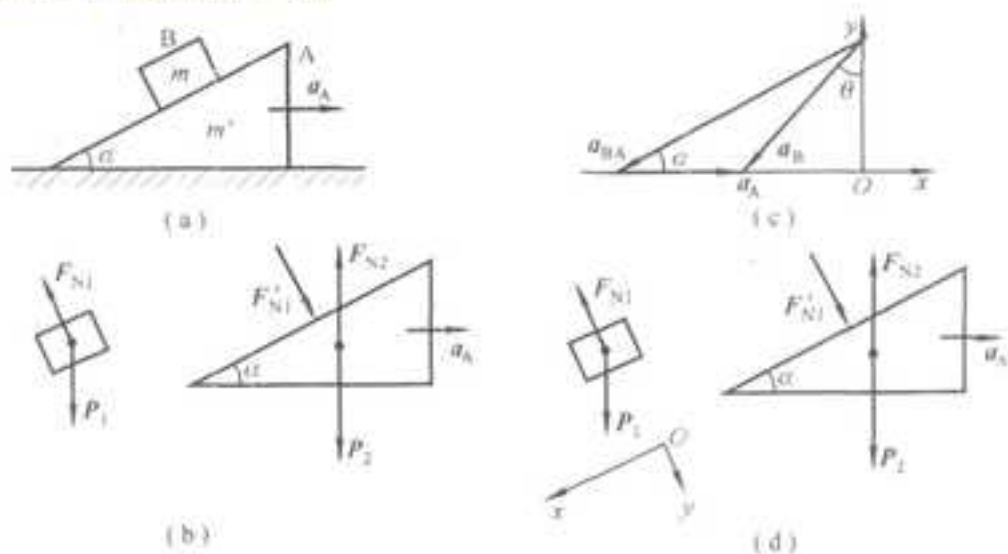


图 2-20

解: 解 1 取地面为参考系, 以滑块 B 和三棱柱 A 为研究对象, 分别作示力图, 如图 2-20 (b) 所示。B 受重力 P_1 、A 施加的支持力 F_{N1} ; A 受重力 P_2 、B 施加的压力 F'_{N1} 、地面支持力 F_{N2} 。A 的运动方向为 Ox 轴的正向, Oy 轴的正向垂直地面向上。设 a_A 为 A 对地的加速度, a_B 为 B 对的地加速度, 由牛顿定律得

$$F'_{N1} \sin \alpha = m' a_A \quad (1)$$

$$-F_{N1} \sin \alpha = m a_{By} \quad (2)$$

$$F_{N1} \cos \alpha - mg = m a_{Bx} \quad (3)$$

$$F_{N1} = F'_{N1} \quad (4)$$

设 B 相对 A 的加速度为 a_{BA} , 则由题意 a_B 、 a_{BA} 、 a_A 三者的矢量关系如图 2-20 (c) 所示。据此可得

$$a_{Bx} = a_A - a_{BA} \cos \alpha \quad (5)$$

$$a_{By} = -a_{BA} \sin \alpha \quad (6)$$

解上述方程组可得三棱柱对地面的加速度为

$$a_A = \frac{mg \sin \alpha \cos \alpha}{m' + m \sin^2 \alpha}$$

滑块相对地面的加速度 a_B 在 x、y 轴上的分量分别为

$$a_{Bx} = -\frac{m'g\sin\alpha\cos\alpha}{m' + m\sin^2\alpha}$$

$$a_{By} = -\frac{(m' + m)g\sin^2\alpha}{m' + m\sin^2\alpha}$$

则滑块相对地面的加速度 a_B 的大小为

$$a_B = \sqrt{a_{Bx}^2 + a_{By}^2} = g\sin\alpha \frac{\sqrt{m'^2 + (2m'm + m^2)\sin^2\alpha}}{m' + m\sin^2\alpha}$$

其方向与 y 轴负向的夹角为

$$\theta = \arctan \frac{a_{Bx}}{a_{By}} = \arctan \frac{m'\cot\alpha}{m' + m}$$

A 与 B 之间的正压力

$$F_{N1} = \frac{m'mg\cos\alpha}{m' + m\sin^2\alpha}$$

解 2 若以 A 为参考系, Ox 轴沿斜面方向[图 2-20 (d)]. 在非惯性系中运用牛顿定律, 则滑块 B 的动力学方程分别为

$$mg\sin\alpha + ma_A\cos\alpha = ma_{Bx} \quad (1)$$

$$mg\cos\alpha - F_{N1} - ma_A\sin\alpha = 0 \quad (2)$$

又因

$$F'_{N1}\sin\alpha - m'a_A = 0 \quad (3)$$

$$F_{N1} = F'_{N1} \quad (4)$$

由以上各式可解得

$$a_A = \frac{mgs\sin\alpha\cos\alpha}{m' + m\sin^2\alpha}$$

$$a_{BA} = \frac{(m' + m)g\sin\alpha}{m' + m\sin^2\alpha}$$

由 a_B 、 a_{BA} 、 a_A 三者的矢量关系可得

$$a_B = g\sin\alpha \frac{\sqrt{m'^2 + (2m'm + m^2)\sin^2\alpha}}{m' + m\sin^2\alpha}$$

以 a_A 代入式 (3) 可得

$$F_{N1} = \frac{m'mg\cos\alpha}{m' + m\sin^2\alpha}$$

2.3 名校考研真题详解

一、选择题

1. 如图 2-1 所示, 一轻绳跨过一质量为 M , 具有水平光滑轴的定滑轮, 绳的两端分别挂有质量为 m_1 和 m_2 的物体 ($m_1 < m_2$), 绳与轮之间无相对滑动, 若某时刻滑轮沿逆时针方向转动, 则绳中张力大小 (). [电子科技大学]

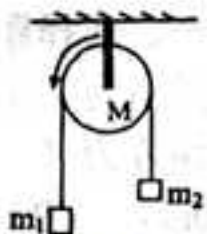


图 2-1

- A. 处处相等
B. 左边大于右边
C. 右边大于左边
D. 无法判断

【答案】C

2. 一个圆锥摆的摆线长为 l ，摆线与竖直方向的夹角恒为 θ ，如图 2-2 所示，则摆锤转动的周期为 ()。 [郑州大学 2008 研]

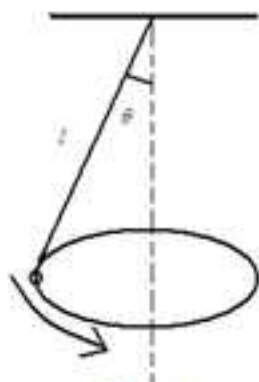


图 2-2

- A. $\sqrt{\frac{l}{g}}$
B. $\sqrt{\frac{l \cos \theta}{g}}$
C. $2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$
D. $2\pi \sqrt{\frac{l \cos \theta}{g}}$

【答案】D

二、填空题

一个质量为 m 的质点，沿 x 轴作直线运动，受到的作用力为： $F = F_0 \cos \omega t$ ，若 $t=0$ 时刻，质点的位置坐标为 x_0 ，初速度 $v_0 = 0$ ，则质点的速度随时间变化的关系式是 $v = \underline{\hspace{2cm}}$ ；质点的位置坐标随时间变化的关系式是 $x = \underline{\hspace{2cm}}$ 。 [南京航空航天大学 2008 研]

【答案】 $v = \frac{F_0}{m\omega} \sin \omega t$ ； $x = \frac{F_0}{m\omega^2} (1 - \cos \omega t) + x_0$

三、计算题

1. 一辆汽车驶入曲率半径为 R 的弯道，弯道倾斜一角度 θ ，轮胎与路面之间的摩擦系数为 μ ，求汽车在路面上不作侧向滑动的最大和最小速率。 [南京大学 2005 研]

解：当车具有向下滑动的趋势时，由牛顿第二定律可得

$$mg \sin \theta - \mu mg \cos \theta = m \frac{v_{\min}^2}{R}$$

解得最小速度为: $v_{\min} = \sqrt{gR(\sin \theta - \mu \cos \theta)}$

当车具有向上滑动的趋势时, 由牛顿第二定律可得

$$mg \sin \theta + \mu mg \cos \theta = m \frac{v_{\min}^2}{R}$$

解得最大速度为: $v_{\max} = \sqrt{gR(\sin \theta + \mu \cos \theta)}$

2. 倾角为 θ , 质量为 M 的斜面放在光滑水平面上, 一质量为 m 的物体自斜面顶端滑下, 已知物体与斜面间摩擦系数为 μ , 求下滑过程中 m 对 M 所施加的正压力. [北京师范大学 2008 研]

解: 对 M 、 m 进行受力分析, 如图 2-3 所示.

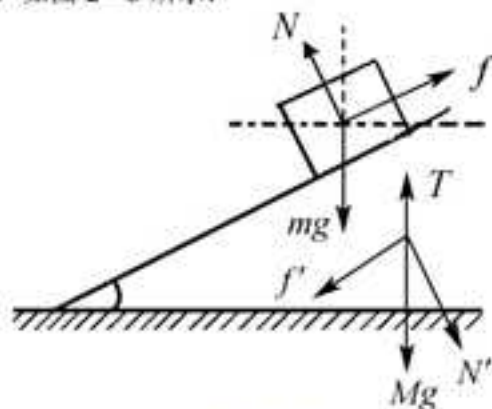


图 2-3

可知, m 受到自身重力, M 对其支持力和摩擦力; M 受 m 对其正压力、摩擦力、自身重力和地面向上的支持力. 对 m 有:

$$\begin{cases} N \sin \theta - f \cos \theta = ma_1 & \text{①} \\ f = N\mu & \text{②} \end{cases}$$

对 M 有:

$$N' \sin \theta - f' \cos \theta = Ma_2 \quad \text{③}$$

对 m 可知: m 在非惯性系, 则可加上惯性力考察, 如图 2-4 所示.

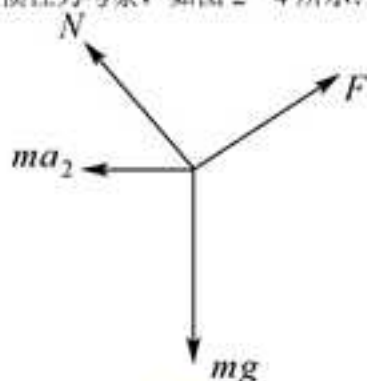


图 2-4

则 m 对斜面的加速度为 a_2 :
$$\begin{cases} mg \sin \theta - f + ma_2 \cos \theta = ma_1 \\ a_2 \cos \theta = a_1 + a_2 \end{cases}$$

则有:

$$mg \sin \theta - f = ma_1 \cos \theta \quad \text{④}$$

将①、②式代入④, 得: $mg \sin \theta - N\mu = (N \sin \theta - \mu N \cos \theta) \cos \theta$

则可得:
$$N = \frac{mg \sin \theta}{\sin \theta \cos \theta + \mu(1 - \cos^2 \theta)} = \frac{mg}{\cos \theta + \mu \sin \theta}$$

3. 一个质量为 m 的质点, 沿 x 轴作直线运动, 受到的作用力为 $\vec{F} = F_0 \cos \omega t \vec{i}$ (SI), $t=0$ 时刻, 质点的位置坐标为 x_0 , 初速度 $\vec{v} = \vec{0}$. 试写出质点的位置坐标和时间的关系式. [浙江大学 2008 研]

解：由牛顿第二定律： $\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} = \frac{F_0}{m} \cos \omega t \vec{i}$

又 $\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a}$ ，所以： $\vec{v} = \int_0^t \frac{F_0}{m} \cos \omega t dt = \frac{F_0}{m\omega} \sin \omega t \vec{i}$

又 $\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{v}$ ，所以

$$x - x_0 = \int_0^t \frac{F_0}{m\omega} \sin \omega t dt = \int_0^t \frac{-F_0}{m\omega^2} \cos \omega t dt = \left(-\frac{F_0}{m\omega^2} \right) \left[\cos \omega t \right]_0^t = \frac{-F_0}{m\omega^2} (\cos \omega t - 1)$$

得： $\vec{x} = \left(x_0 - \frac{F_0}{m\omega^2} \cos \omega t + \frac{F_0}{m\omega^2} \right) \vec{i}$

4. 车以速度 v 在地面上匀速形式，其轮胎与地面间的摩擦系数为 μ ，为保证车无滑动行驶，求：

(1) 车转弯时轨道的最小曲率半径。

(2) 车与铅垂线之间的最大倾角。[吉林大学 2009 研]

解：(1) 转弯时摩擦力提供向心力 $f = \frac{mv^2}{r}$ ，所以 $r = \frac{mv^2}{f}$ ，则 $r_{\min} = \frac{mv^2}{f_{\max}}$ ，且 $f_{\max} = \mu mg$ ，因此可得最小曲

率半径为： $r_{\min} = \frac{mv^2}{\mu mg} = \frac{v^2}{\mu g}$

(2) 如图 2-5 所示，设汽车重心高 $AB = h$ 。

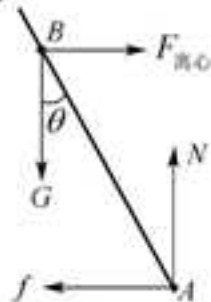


图 2-5

由受力平衡 $f h \cos \theta = G h \sin \theta$ ，所以有： $\tan \theta = \frac{f}{G}$

则： $\tan \theta_{\max} = \frac{f_{\max}}{G} = \frac{mg\mu}{G} = \mu$

因此，所求的车与铅垂线之间最大倾角为： $\theta_{\max} = \arctan \mu$ 。

5. 小球可以在半径为 0.1m 的铅直圆环上作无摩擦滑动，当圆环以 1 转/秒的角速度绕圆竖直直径转动时，如图 2-6 所示，试求：

(1) 小球在环中平衡时与竖轴的夹角 α 。

(2) 这小球是否可以达到与环心同一水平高度？

(3) 如环以 1 转/秒的角速度匀速转动，情况又将如何？[中科院 - 中科大 2009 研]

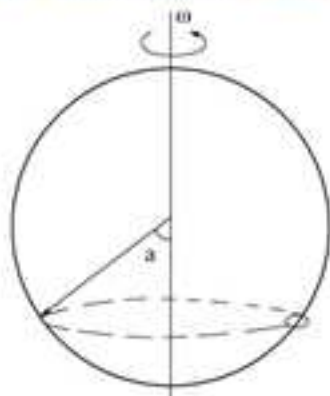


图 2-6

解：(1) 小球的平衡方程为

$$\begin{cases} mg - N \cos \alpha = 0 \\ N \sin \alpha = mR\omega^2 = mr \sin \alpha (2n\pi)^2 \end{cases}$$

解得: $\cos \alpha = \frac{g}{4\pi^2 n^2 r}$, $\alpha = 51.6^\circ$

(2) 小球上升到与环心同一高度, 此时 $\alpha = 90^\circ$, $n = \infty$. 不符合实际, 因此小球不可能上升到与环心同一高度.

(3) 若环以 1 秒/米转动, $n = 1$, 此时 $\cos \alpha = \frac{g}{4\pi^2 n^2 r} = 2.5 > 1$. 可见, 此时小球不可能作任何圆周运动, 故小球只会呆在圆环底部.

6. 如图 2-7 所示, 将质量为 M , 长度为 L 的均匀绳的一端系在轴 O 上, 使它以匀角速度 ω 绕 O 在光滑水平桌面上旋转, 在旋转过程中绳保持平直, 求绳中张力 T 与到轴距离 x 的关系. [山东大学研]

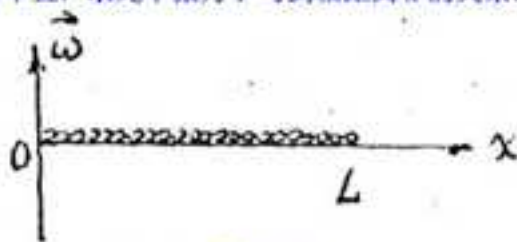


图 2-7

解: 取绳上一段微元分析, 张力等于向心力:

$$dF_x = \omega^2 x dm$$

坐标为 x 处的张力: $T(x) = \int_x^L dF_x$

$$\text{得: } T(x) = \frac{m\omega^2}{2L} (L^2 - x^2)$$

7. 用力 F 推水平面上一质量为 M 的木箱, 设力 F 与水平面的夹角为 θ , 木箱与地面间的滑动摩擦系数和静摩擦系数分别为 μ_s 和 μ_k .

(1) 要推动木箱, F 至少应多大? 此后维持木箱匀速前进, F 应多大?

(2) 证明当 θ 角大于某一数值时, 无论用多大的力 F 也不能推动木箱, 此时 θ 角是多大? [郑州大学 2007 研]

解: (1) 受力分析如图 2-8 (a) 所示.

要推动木箱, 需满足: $F \cos \theta \geq f_{\text{静}}$

竖直方向: $N = mg - F \sin \theta$

静摩擦力: $f_{\text{静}} = \mu_s N$

于是: $F \cos \theta \geq \mu_s (mg - F \sin \theta)$

$$\text{解得: } F \geq \frac{\mu_s mg}{\cos \theta + \mu_s \sin \theta}$$

当 $\theta = \arctan \mu_s$ 时, $F_{\min} = \frac{\mu_s}{\sqrt{1 + \mu_s^2}} mg$. 此后, 为滑动摩擦力, 要使其匀速, 则:

$$F \cos \theta = f_{\text{滑}} = \mu_k N = \mu_k (mg - F \sin \theta)$$

$$\text{所以: } F = \frac{\mu_k mg}{\cos \theta + \mu_k \sin \theta}$$

(2) 受力分析如图 2-8 (b) 所示. 木箱不能被推动, 则最大静摩擦力大于水平推力, 即: $\mu_s N > F \cos \theta$

竖直方向: $N = mg + F \sin \theta$. 得:

$$\mu_s (mg + F \sin \theta) > F \cos \theta$$

即: $\mu_s mg > F (\cos \theta - \mu_s \sin \theta)$

当 $\cos \theta \leq \mu_s \sin \theta$ 时, $\mu_s (mg + F \sin \theta) > F \cos \theta$, 木箱不能被推动, 此时:

$$\theta = \arctan \mu_s$$

即当 F 斜向下且与 x 方向夹角大于 $\theta = \arctan \mu_s$ 时, F 不能推动木箱.

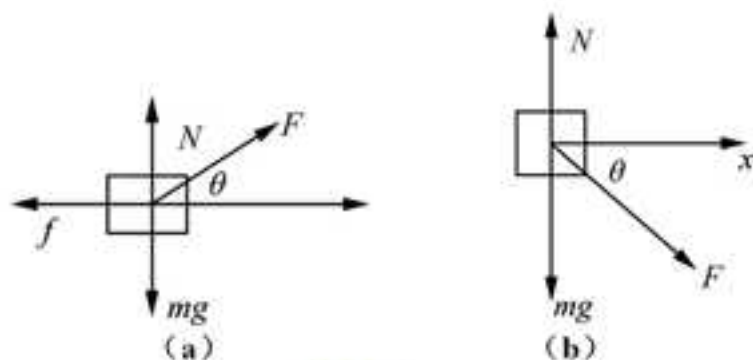


图 2-8

8. 质量为 m 的小球在光滑的水平面内沿半径为 R 的固定圆环作圆周运动, 已知小球与圆环间的滑动摩擦系数为 μ , 小球的初速度大小为 v_0 , 求小球运动三周回到原来位置时的速度大小. [南京理工大学 2005 研]

解: 由圆周运动规律, 有: $F_n = ma_n = m \frac{v^2}{R}$, $F_t = ma_t = -\mu N$

又因为 $N = \mu F_n$, 则可得: $a_t = -\frac{\mu}{R} v^2$

又 $a_t = \frac{dv}{dt}$, 则有: $-\frac{dv}{v^2} = \frac{\mu}{R} dt$

两边积分得: $\int_{v_0}^v -\frac{dv}{v^2} = \int_0^t \frac{\mu}{R} dt$

可得: $\frac{1}{v} - \frac{1}{v_0} = \frac{\mu}{R} t$

解得:

$$v = \frac{v_0}{1 + \frac{\mu v_0}{R} t} \quad (1)$$

又 $\frac{ds}{dt} = v$, 则转动 3 圈的路程为:

$$s = 6\pi R = \int_0^t v dt = \frac{R}{\mu} \ln \left(1 + \frac{\mu v_0}{R} t \right)$$

解得: $t = \frac{R}{\mu v_0} (e^{6\pi\mu} - 1)$

代入①式得: $v = v_0 e^{-6\pi\mu}$

9. 一人从 10m 深的井中提水, 起始时桶中装有 10kg 水, 桶的质量为 1kg. 若桶每升高一米要漏掉 0.2kg 的水, 求水桶匀速地从井中提到井口, 人所作的功. [北京工业大学 2004 研]

解: 设竖直向上为正 x 向, 水面为原点. 由牛顿第二定律, 匀速提水时, 拉力与水及桶等重力 P 平衡, 即: $F = P = mg - 0.2gx$.

拉力做功为

$$A = \int_0^{10} (mg - 0.2gx) dx = 10mg - 0.1g \cdot 100 = 980J$$

3.1 复习笔记

一、质点和质点系的动量定理

1. 冲量、质点的动量定理

(1) 冲量

力的冲量是指在时间间隔 $\Delta t = t_2 - t_1$ 内, 力对时间的积分, 表达式为

$$\int_{t_1}^{t_2} F(t) dt$$

它也是矢量, 用符号 I 表示.

(2) 质点的动量定理

质点的动量定理是指在给定时间间隔内, 外力作用在质点上的冲量, 等于质点在此时间内动量的增量, 其表达式为

$$\int_{t_1}^{t_2} F(t) dt = p_2 - p_1 = m v_2 - m v_1$$

式中 v_1 和 p_1 是质点在时刻 t_1 的速度和动量, v_2 和 p_2 是质点在时刻 t_2 的速度和动量.

一般来说, 冲量的方向并不与动量的方向相同, 而是与动量增量的方向相同.

(3) 质点动量定理的矢量表达式

在直角坐标系中, 其分量式为

$$\left. \begin{aligned} I_x &= \int_{t_1}^{t_2} F_x dt = m v_{2x} - m v_{1x} \\ I_y &= \int_{t_1}^{t_2} F_y dt = m v_{2y} - m v_{1y} \\ I_z &= \int_{t_1}^{t_2} F_z dt = m v_{2z} - m v_{1z} \end{aligned} \right\}$$

即质点在某一轴线上的动量增量, 仅与该质点在此轴线上所受外力的冲量有关.

(4) 动量 p 的物理意义

在相等的冲量作用下, 不同质量的物体, 即使速度变化不相同, 但它们的动量的变化却一样, 所以从过程角度来看, 动量 p 比速度 v 能更确切地反映物体的运动状态. 因此, 物体作机械运动时, 动量 p 和位矢 r 是描述物体运动状态的状态参量.

2. 质点系的动量定理

外力指外界对系统内质点作用的力; 内力指系统内质点间的相互作用力.

(1) 概念

质点系的动量定理是指由 n 个质点所组成的系统, 作用于系统的合外力的冲量等于系统动量的增量. 其表达式为

$$\int_{t_1}^{t_2} F^{ext} dt = \sum_{i=1}^n m_i v_i - \sum_{i=1}^n m_i v_{i0} = p - p_0$$

注意: 作用于系统的合外力是作用于系统内每一质点的外力的矢量和. 只有外力才引起系统的动量变化, 而系统的内力是不能改变整个系统的动量的.

(2) 质点系合外力

对于在无限小的时间间隔内, 质点系的动量定理可写成

$$F^{ext} dt = dp \quad \text{或} \quad F^{ext} = \frac{dp}{dt}$$

上式表明, 作用于质点系的合外力等于质点系的动量随时间的变化率.

二、动量守恒定律

1. 动量守恒定律的矢量式

(1) 动量守恒定律

当系统所受合外力为零, 即 $F^{\text{外}}=0$ 时, 系统的总动量的增量亦为零, 即 $p-p_0=0$. 这时系统的总动量保持不变, 即

$$p = \sum_{i=1}^n m_i v_i = \text{恒矢量}$$

(2) 动量守恒定律的表述

动量守恒定律是指当系统所受合外力为零时, 系统的总动量将保持不变.

2. 动量守恒定律的分量式

在直角坐标系中, 其分量式为

$$\left. \begin{aligned} p_x &= \sum m_i v_{ix} = C_1 \quad (F_x^{\text{外}} = 0) \\ p_y &= \sum m_i v_{iy} = C_2 \quad (F_y^{\text{外}} = 0) \\ p_z &= \sum m_i v_{iz} = C_3 \quad (F_z^{\text{外}} = 0) \end{aligned} \right\}$$

式中 C_1 、 C_2 和 C_3 均为恒量.

3. 应用动量守恒定律时注意

(1) 由于动量是矢量, 故系统的总动量不变是指系统内各物体动量的矢量和不变, 而非其中某一个物体的动量不变. 此外, 各物体的动量都应相对于同一惯性参考系.

(2) 系统的动量守恒必须满足系统所受的合外力必须为零的条件. 在外力与系统内力相比, 外力远小于内力, 也可认为系统动量守恒.

(3) 如果系统所受外力的矢量和并不为零, 但合外力在某个坐标轴上的分量为零, 这时系统在该坐标轴的分动量也是满足系统动量守恒的.

三、系统内质量移动问题

1. 常见质量移动问题

砂粒流入车厢, 柔软绳索落在桌面上, 水滴在水蒸汽中下落, 以及火箭在飞行中由燃料燃烧而射出大量粒子等.

2. 火箭飞行问题

(1) 火箭内部发生的变化

在火箭的运行过程中, 火箭内部的燃料发生爆炸性的燃烧, 火箭里燃料的质量在减少, 而粒子流的质量在增加. 设每个粒子相对火箭的速率均为 u , u 叫做喷射速率. 把火箭、燃料和粒子流作为一个系统, 虽然该系统的总质量守恒, 但有部分质量的燃料变为了粒子.

(2) 火箭系统所受的力

①系统的合外力 F 为

$$F = \frac{dp}{dt} = m' \frac{dv}{dt} - u \frac{dm'}{dt}$$

②火箭发动机的推力为

$$u \frac{dm'}{dt}$$

③火箭的加速度表达式

$$m' \frac{dv}{dt} = F + u \frac{dm'}{dt}$$

火箭的加速度与外力 F 及推力的矢量和成正比。当外力给定时，推力越大，火箭获得的加速度 dv/dt 也越大。

(3) 在星际空间飞行的火箭

此时火箭不受外力作用，即 $F=0$ ，则有

$$m' \frac{dv}{dt} = u \frac{dm'}{dt} \quad \text{或} \quad m' dv = u dm'$$

经化简积分，可得

$$v = v_0 + u \ln \frac{m'_0}{m'} = v_0 + u \ln N$$

式中 $N=m'_0/m'$ 称为质量比。显然，火箭的质量比越大，粒子流的喷射速率越大，火箭获得的速度也越大。

四、动能定理

1. 功

(1) 功的定义

功是指力在位移方向的分量与该位移大小的乘积。

(2) 功的表达式

①元功

按定义，力 F 所作的元功为

$$dW = F |dr| \cos \theta$$

又 $dv = |dr|$ ，则上式可写为

$$dW = F ds \cos \theta$$

②方向

a. 当 $90^\circ > \theta > 0^\circ$ 时，功为正值，即力对质点作正功；

b. 当 $90^\circ < \theta \leq 180^\circ$ 时，功为负值，即力对质点作了负功。

③功用矢量的表达

$$dW = F \cdot dr$$

上式表明，虽然力和位移都是矢量，但它们的标积——功是标量。

(3) 变力做功的表达式

①一般公式

若有一变力作用于质点，质点从点 A 移到点 B 时，则变力所作的功应等于力在每段位移元上所作元功的代数和，即

$$W = \int dW = \int_A^B F \cdot dr = \int_A^B F \cos \theta ds$$

②坐标表达式

在直角坐标系中， F 和 dr 都是坐标 x 、 y 、 z 的函数，即

$$F = F_x i + F_y j + F_z k \quad \text{和} \quad dr = dx i + dy j + dz k$$

则变力做功的坐标表达式为

$$W = \int_A^B F \cdot dr = \int_A^B (F_x dx + F_y dy + F_z dz)$$

(4) 功的示图法

功常用图示法来计算。如图 3-1 所示，图中的曲线表示 $F \cos \theta$ 随路径变化的函数关系，曲线下方的面积等于变力所做功的代数值。

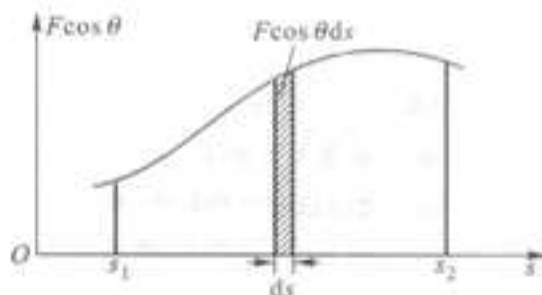


图 3-1 变力做功的图示

(5) 合力做功

合力对质点所作的功，等于每个分力所作的功的代数和，即

$$W = W_1 + W_2 + W_3 + \cdots + W_i + \cdots$$

在国际单位制中，力的单位是 N，位移的单位是 m，所以功的单位是 N·m，这个单位也叫做焦耳，简称焦，符号是 J。功的量纲为 ML^2T^{-2} 。

(6) 功率定义

功率是指功随时间的变化率，用 P 表示，则有

$$P = \frac{dW}{dt} = F \cdot \frac{dr}{dt} = F \cdot v$$

功率的单位名称为瓦特，简称瓦，符号为 W。1kW=10³W。

2. 质点的动能定理

(1) 质点的动能

质点的动能用 E_k 表示，即 $E_k = \frac{1}{2}mv^2$ 。

(2) 动能定理

质点的动能定理是指合外力对质点所作的功，等于质点动能的增量。

以 $E_{k1} = \frac{1}{2}mv_1^2$ 和 $E_{k2} = \frac{1}{2}mv_2^2$ 分别表示质点在起始和终了位置时的动能，则

$$W = E_{k2} - E_{k1}$$

(3) 质点的动能定理的说明

①功与动能之间的联系和区别。功是一个过程量，而动能则是决定于质点的运动状态的，故它是运动状态的函数。

②动能定理也适用于惯性系。由于在不同的惯性系中，质点的位移和速度都是不同的，因此，功和动能依赖于惯性系的选取。动能的单位和量纲与功的单位和量纲相同。

五、保守力与非保守力势能

1. 万有引力和弹性力做功的特点

(1) 万有引力做功的特点

当质点的质量 m 和 m 给定时，万有引力作的功只取决于质点 m 的起始和终了的位置，而与所经过的路径无关。

(2) 弹性力做功的特点

对在弹性限度内具有给定劲度系数的弹簧来说，弹性力所作的功只由弹簧起始和终了的位置 (x_1 和 x_2) 决定，而与弹性形变的过程无关。

2. 保守力与非保守力做功的数学表达式

(1) 保守力

①概念

保守力是指所作的功只与质点的始、末位置有关，而与路径无关的力。

②数学表达式

$$W = \oint_l \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$$

上式表明质点沿任意闭合路径运动一周时，保守力对它所作的功为零。

(2) 非保守力

非保守力是指做功与路径有关的力。常见非保守力有，摩擦力，磁场对电流作用的安培力。

3. 势能

(1) 概念

势能是指与质点位置有关的能量，用符号 E_p 表示，有

$$\text{引力势能} \quad E_p = -G \frac{m_1 m_2}{r}$$

$$\text{弹性势能} \quad E_p = \frac{1}{2} kx^2$$

$$\text{重力势能} \quad E_p = mgy$$

(2) 势能与做功的关系

保守力对质点作的功等于质点势能增量的负值，即

$$W = -(E_{p2} - E_{p1}) = -\Delta E_p$$

(3) 关于势能的说明

①势能是状态的函数。在保守力作用下，只要质点的起始和终止位置确定了，保守力所作的功也就确定了，而与所经过的路径是无关的。

②势能的相对性。势能的值与势能零点的选取有关。

a. 一般选地面的重力势能为零；

b. 引力势能的零点取在无限远处；

c. 而水平放置的弹簧处于平衡位置时，其弹性势能为零。

③势能是属于系统的。势能是由于系统内各物体间具有保守力作用而产生的，因而它是属于系统的。单独谈单个质点的势能是没有意义的。

4. 势能曲线

势能曲线是指当坐标系和势能零点一经确定后，按质点的势能（坐标的函数，即 $E_p = E_p(x, y, z)$ ）画出的势能随坐标变化的曲线。

六、功能原理机械能守恒定律

1. 质点系的动能定理

①一般表达式

质点系的动能定理是指作用于质点系的力所作之功，等于该质点系的动能增量，即

$$\sum_{i=1}^n W_i = \sum_{i=1}^n E_{ki} - \sum_{i=1}^n E_{ki0}$$

式中 $\sum_{i=1}^n E_{ki0}$ 是系统内 n 个质点的初动能之和， $\sum_{i=1}^n E_{ki}$ 是这些质点的末动能之和， $\sum_{i=1}^n W_i$ 则是作用在 n 个质点

上的力所作之功之和。

②另一表达式

质点系的动能的增量等于作用于质点系的一切外力作的功与一切内力作的功之和。即动量守恒定律

$$W^{ext} + W^{int} = \sum_{i=1}^n E_{ki} - \sum_{i=1}^n E_{ki0}$$

2. 质点系的功能原理

(1) 机械能

机械能是指在力学中动能和势能的统称。常以 E 表示质点系的机械能，即有

$$\sum_{i=1}^n E_{ki} + \sum_{i=1}^n E_{pi}$$

(2) 质点系的功能原理

质点系的功能原理是指质点系的机械能的增量等于外力与非保守内力做功之和。

若以 E_0 和 E 分别代表质点系的初机械能和末机械能，那么

$$W^{ex} + W_{nc}^{in} = E - E_0$$

(3) 功能关系

①联系：功总是和能量的变化与转换过程相联系，功是能量变化与转换的一种量度；

②区别：能量是代表质点系统在一定状态下所具有的做功本领，它和质点系统的状态有关，对机械能来说，它与质点系统的机械运动状态（即位置和速度）有关。

3. 机械能守恒定律

(1) 概念

机械能守恒定律是指当作用于质点系的外力和非保守内力不做功时，质点系的总机械能是守恒的。

(2) 数学表达式

①表达式一

当 $W^{ex} + W_{nc}^{in} = 0$ 时，有

$$E = E_0$$

即

$$\sum E_{ki} + \sum E_{pi} = \sum E_{ki0} + \sum E_{pi0}$$

②表达式二

$$\sum E_{ki} - \sum E_{ki0} = -(\sum E_{pi} - \sum E_{pi0})$$

即

$$\Delta E_k = -\Delta E_p$$

(3) 结论

在机械能守恒定律中，机械能是不变量或守恒量，而质点系内的动能和势能之间的转换则是通过质点系内的保守力做功 (W_c) 来实现的。

4. 宇宙速度

(1) 人造地球卫星第一宇宙速度

人造地球卫星第一宇宙速度是指在地面上发射人造地球卫星所需达到的最小速度，其大小为

$$v_1 = \sqrt{gR_E} = 7.9 \times 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

其中 $R_E = 6.37 \times 10^3 \text{ km}$ 。

(2) 人造行星第二宇宙速度

人造卫星第二宇宙速度是指使抛体脱离地球引力范围作用，在地面发射是所必须具有的最小发射速度，大小为

$$v_2 = \sqrt{\frac{2Gm_E}{R_E}} = \sqrt{2gR_E} = \sqrt{2}v_1 = 11.2 \times 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

(3) 飞出太阳系、第三宇宙速度

第三宇宙速度是指继续增加从地球表面发射抛体的速度，并使之能脱离太阳引力的束缚而飞出太阳系的速度，大小为

$$v' = (\sqrt{2} - 1) \left(G \frac{m_s}{R_s} \right)^{1/2}$$

从附录三可查得 $m_s = 1.99 \times 10^{30} \text{kg}$, $R_s = 1.50 \times 10^{11} \text{m}$, 故得 $v' = 12.3 \text{km} \cdot \text{s}^{-1}$, 将 v' 的值代入式, 有

$$v_3 = \left(v'^2 + 2G \frac{m_E}{R_E} \right)^{1/2}$$

其中 $m_E = 5.98 \times 10^{24} \text{kg}$, $R_E = 6.37 \times 10^6 \text{m}$, 所以第三宇宙速度为 $v_3 = 16.4 \text{km} \cdot \text{s}^{-1}$.

七、完全弹性碰撞、完全非弹性碰撞

在研究两物体间的碰撞问题时, 可将其它物体对它们作用的外力忽略不计.

1. 完全弹性碰撞

(1) 概念

完全弹性碰撞是指在碰撞后, 两物体的动能之和完全没有损失.

(2) 碰撞情况分析

①若 $m_1 = m_2$, 可得 $v_1 = v_{20}$, $v_2 = v_{10}$, 即两质量相同的小球碰撞后互交换速度.

②若 $m_2 \gg m_1$, 且 $v_{20} = 0$, 可得 $v_1 \approx -v_{10}$, $v_2 \approx 0$, 即碰撞后, 质量为 m_1 的小球将以同样大小的速率, 从质量为 m_2 的大球上反跳回来, 而大球 m_2 几乎保持静止, 皮球对墙壁的碰撞, 以及气体分子和容器壁的碰撞都属于这种情形.

③若 $m_2 \gg m_1$, 且 $v_{20} = 0$, 可得 $v_1 \approx v_{10}$, $v_2 \approx 2v_{10}$, 即一个质量很大的球体, 当它与质量很小的球体相碰撞时, 它的速度不发生显著改变, 但质量很小的球却以近于两倍于大球体的速度向前运动.

2. 完全非弹性碰撞

(1) 非弹性碰撞

非弹性碰撞是指在两物体碰撞时, 由于非保守力作用, 致使机械能转换为热能、声能、化学能等其它形式的能量, 或者其它形式的能量转换为机械能.

(2) 完全非弹性碰撞

完全非弹性碰撞是指两物体在非弹性碰撞后以同一速度运动.

八、能量守恒定律

能量守恒定律是指对于一个与自然界无任何联系的系统, 系统内各种形式的能量是可以互换的, 但是不论如何转换, 能量既不能产生, 也不能消灭.

九、质心、质心运动定律

1. 质心

(1) 概念

质心是指把一个物体质量集中时, 看作的一个点.

(2) 质心位置的确定

①一般表达式

$$\mathbf{r}_c = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 + \cdots + m_i \mathbf{r}_i + \cdots}{m_1 + m_2 + \cdots + m_i + \cdots} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i}{m'}$$

式中 m' 为质点系内各质点的质量总和; \mathbf{r}_i 为第 i 个质点对原点 O 的位矢, \mathbf{r}_c 为质心对原点 O 的位矢.

②坐标表达式

\mathbf{r}_c 在 Ox 轴、 Oy 轴和 Oz 轴上的分量即质心在 Ox 轴、 Oy 轴和 Oz 轴上的坐标, 分别为

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{m'}, \quad y_c = \frac{\sum_{i=1}^n m_i y_i}{m'}, \quad z_c = \frac{\sum_{i=1}^n m_i z_i}{m'}$$

a. 对于质量连续分布的物体, 质心的坐标为

$$x_c = \frac{1}{m'} \int x dm, \quad y_c = \frac{1}{m'} \int y dm, \quad z_c = \frac{1}{m'} \int z dm$$

b. 对于密度均匀、形状对称分布的物体，其质心都在它的几何中心处，例如圆环的质心在圆环中心，球的质心在球心等。

2. 质心运动定律

(1) 系统的动量

系统内各质点的动量的矢量和等于系统质心的速度乘以系统的质量，表达式为

$$m' \mathbf{v}_c = \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^n \mathbf{p}_i$$

式中 \mathbf{v}_c 是质心的速度， \mathbf{v}_i 是第 i 个质点的速度。

(2) 质心运动定律的数学表达式

系统内各质点间相互作用的内力的矢量和为零，即 $\sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i^m = 0$ 。因此，作用在系统上的合力就等于合外力，

即 $\mathbf{F}^{ex} = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i^{ex}$ 。于是有

$$\mathbf{F}^{ex} = m' \frac{d\mathbf{v}_c}{dt} = m' \mathbf{a}_c$$

表明作用在系统上的合外力等于系统的总质量乘以系统质心的加速度。

十、对称性与守恒律

1. 对称性

系统的对称性是指通过变换把系统从一个状态变化到另一个与之等价的状态，可称系统对于这个操作（或变换）是对称的。

2. 守恒律与对称性

(1) 空间平移不变性与动量守恒律

$$p_A + p_B = \text{常量}$$

即两粒子系统的动量守恒，与它们整体在空间的平移无关，这样就从空间平移不变性推出了动量守恒律。

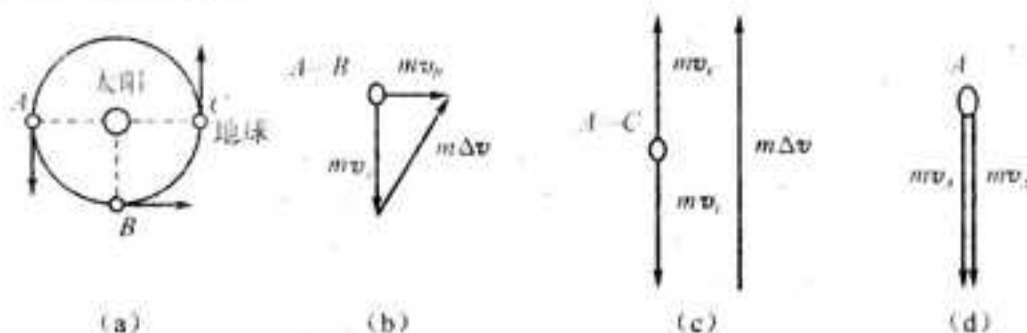
(2) 时间平移不变性与能量守恒律

机械能的时间平移不变性是指若系统为一孤立的保守系统，那么这个系统中的势能和动能可以相互转换，但它们之和是守恒的。能量守恒定律也具有时间平移不变性。

3.2 课后习题详解

一、问题

3-1 如问题 3-1 图 (a) 所示，设地球在太阳引力的作用下，绕太阳作匀速圆周运动。试问：在下述情况下，(1) 地球从点 A 运动到点 B，(2) 地球从点 A 运动到点 C，(3) 地球从点 A 出发绕行一周又返回点 A，地球的动量增量和所受的冲量各为多少？



问题 3-1 图

解：绕太阳运动的地球相当于质点，设其转动速率为 v ，显然地球在各处的动量大小相等，但方向不同，其所受冲量等于动量的增量。又设太阳的质量为 M ，地球为 m ，由匀变速圆周运动的向心力公式可得

$$\frac{GMm}{R^2} = m \frac{v^2}{R}$$

解出

$$v = \sqrt{\frac{GM}{R}}$$

(1) A—B 过程中冲量、动量的增量分别为

$$\boldsymbol{I} = \Delta \boldsymbol{p} = m \boldsymbol{v}_B - m \boldsymbol{v}_A$$

方向如问题 3-1 图 (b)，其数值为

$$I = |\Delta \boldsymbol{p}| = \sqrt{2}mv$$

(2) A—C 过程中冲量、动量的增量分别为

$$\boldsymbol{I} = \Delta \boldsymbol{p} = m \boldsymbol{v}_C - m \boldsymbol{v}_A$$

方向如问题 3-1 图 (c)，其数值为

$$I = |\Delta \boldsymbol{p}| = 2mv$$

(3) 从 A 点出发又返回到 A 点的过程中动量的增量、冲量均为零。

3-2 假使你处在摩擦可略去不计的覆盖着冰的湖面上。周围又无其他可资利用的工具，你怎样依靠自身的努力返回湖岸呢？

答：因为冰面光滑，没有静摩擦力。用步行、滚动、挥臂或踢脚的办法不能改变人的质心位置。要想返回湖岸，可以脱下一件衣物向岸的相反方向抛去，根据动量守恒定律，得到一个与衣物相反的速度向岸边冲去，从而回到湖岸上。

3-3 在上升气球下方悬挂一梯子，梯上站一人。问人站在梯上不动或以加速度向上攀升，气球的加速度有无变化？

答：设气球初始时匀速上升，速度为 v_0 ，以气球、人和梯子为系统，依题意，系统动量守恒；选地面为参照系，设人相对梯子以速度 v 向上爬，气球相对地面的速度为 V ，人相对地面的速度为 v' ，气球与梯子的质量为 M ，人的质量为 m 。根据速度的相对性 $v' = v + V$ ，对系统应用动量守恒定律，有

$$mv' + MV = (m + M)v_0$$

$$V = v_0 - \frac{mv}{m + M}$$

又因为

$$a_{\text{球}} = \frac{dV}{dt} = -\frac{m}{m + M} \frac{dv}{dt} = -\frac{m}{m + M} a_{\text{人对梯}}$$

由上式可知，在上述过程中，气球的加速度为零或向下加速。

或者以人、气球和梯子为系统来分析。当人站在梯子上不动时，系统的合外力（重力、浮力）为零，根据质心运动定律，系统的质心将保持原有的状态。当人以加速度沿梯子向上攀升时，人与梯子间的相互作用力是内力，而内力不改变系统的总动量，系统的合外力仍为零，系统的质心位置仍保持不变。所以，当人沿梯子加速向上攀升时，气球和梯子将向下加速。

3-4 一人在帆船上用电动鼓风机正对帆鼓风，企图使帆船前进，但他发觉，船非但不前进，反而缓慢后退，这是为什么？

答：鼓风机鼓风推动空气运动，帆受到风的作用后，将会得到向前的冲量，但与此同时，也会因鼓风机推动空气而使船得到一个向后的冲量。前者不可能大于后者，最多两者数值相等，但方向相反，这样船无法前进。若考虑空气阻力时，向前的冲量只能小于向后的冲量，船不但不能前进，反而会后退。

如果要想使船前进，应该将鼓风机背着帆向后吹风，此时船会得到一个相反方向的冲量，这个向前的冲量会使船前进。

3-5 在大气中, 打开充气气球下方的塞子, 让空气从球中冲出, 气球可在大气中上升。如果在真空中打开气球的塞子, 气球也会上升吗? 说明其道理。

答: 会上升。因为气体从球中冲出时, 对于由气球和冲出的气体组成的系统而言, 满足动量守恒定律。所以, 在真空中打开气球的塞子, 利用气球下方冲出的气体, 可使气球获得向上的速度。

3-6 两个物体系于轻绳的两端, 绳跨过一定滑轮。若把两物体和绳视为一个系统, 哪些力是外力? 哪些力是内力?

答: 外力是两个物体受到的重力, 滑轮对绳子的摩擦力; 内力是绳中的张力, 两个物体受到的拉力。

3-7 在水平光滑的平面上放一长为 L 、质量为 m' 的小车, 车的一端站有质量为 m 的人, 人和车都是静止不动的。当人以 v 的速率相对地面从车的一端走向另一端, 在此过程中人和小车相对地面各移动了多少距离?

解: 取人、小车为一系统, 设小车相对地面的速度为 V , 系统在水平方向上合外力为零, 根据动量守恒

$$m'V + mv = 0, \text{得 } V = -\frac{m}{m'}v$$

负号表示小车与人的运动方向相反。将上式两边同乘以 dt 得

$$Vdt = -\frac{m}{m'}vdt$$

Vdt 表示小车在 dt 时间内走过的路程 ds' , vdt 为人在 dt 时间内走过的路程 ds 。在 t 时间内小车和人走过的路程分别为

$$s' = \int_0^t Vdt \text{ 和 } s = \int_0^t vdt$$

$$s' = \int_0^t -\frac{m}{m'}vdt = -\frac{m}{m'}s$$

$$\frac{s'}{s} = -\frac{m}{m'} \quad \text{①}$$

又因

$$s' + s = L \quad \text{②}$$

由式①、②联立解出人和小车相对地面移动的距离分别为

$$s' = \frac{m}{m+m'}L, \quad s = \frac{m'}{m+m'}L$$

3-8 人从大船上容易跳上岸, 而从小舟上则不容易跳上岸了, 这是为什么?

答: 在人起跳时, 人与船的作用可以看作是一个冲量作用, 舟在瞬间得到的速度较大。人还没有离开, 舟已经向后运动了, 相当于增加了人与岸的距离, 所以人很难跳上岸。另一方面, 船相对于舟而言, 可以使人获得更长的作用时间因而使人得到更大的冲量。

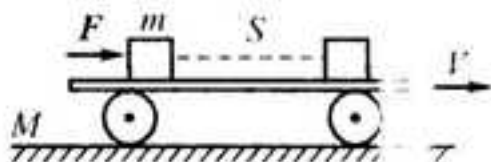
3-9 三艘船的质量相同, 且相距很近, 以相同的速度鱼贯而行。突然中间的船同时向前后两船分别抛去质量相同的重物。这三艘船的运动情况各有何变化? 设水的阻力略去不计。

答: 若中船向前后船抛出重物的速度相同, 则由动量定理可知各船的运动情况为: 中船向前、后船抛出动量相同的物体, 则自身速度不变; 前船获得向前的动量, 速度增加; 后船获得向后的动量, 速度减少, 且前后两船的速度增加量等于减少量。由于忽略水的阻力, 三船总动量守恒, 其质心速度即为中船速度, 前后两船以相对于中船相同的速度远离中船。

3-10 合外力对物体所做的功等于物体动能的增量, 而其中某一个分力做的功, 能否大于物体动能的增量?

答: 能。因为合外力所做的功是指所有外力对物体所做功的代数和, 其中正功使动能增加, 负功使动能减少, 相互间可以抵消, 因而有可能存在某一分力做的功大于合力做的功, 即大于物体动能的增量。

3-11 质点的动量和动能是否与惯性系的选取有关？功是否与惯性系有关？质点的动量定理和动能定理是否与惯性系有关？请举例说明。



问题 3-11 图

答：物体的位移、速度是相对的，其值与惯性系的选取有关，所以与之有关的量：动量、动能及功。例如一质量为 M 的货车以速度 v 匀速前进，车上某人用力 F 推一质量为 m 的木箱使其相对地面的速度为 v' ，并在车上发生位移 s ，则木箱相对货车的速度为

$$v' = -\frac{m+M}{m}v$$

而木箱相对地面的位移为

$$s' = s + vt$$

显然动量、动能与功在对地面的参照系中和在对货车的参照系中是不同的。

3-12 关于质点系的动能定理，有人认为可以这样得到：即“在质点系内，由于各质点间相互作用的力（内力）总是成对出现的，它们大小相等方向相反，因而所有内力做功相互抵消，这样质点系的总动能增量等于外力对质点系做的功”。显然这与式（3-20）所表述的质点系动能定理不符。错误出在哪里呢？

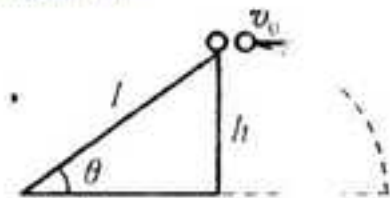
答：在质点系内，各质点间相互作用的力（内力）总是成对出现的，它们大小相等方向相反，但分别作用在两个不同的物体上，而两物体的位移也不一定相同（有相对位移时），所以内力做功的数值不一定相等，不能相互抵消。

3-13 在弹性限度内，如果将弹簧的伸长量增加到原来的两倍，那么弹性势能是否也增加为原来的两倍？

答：不对。因为弹性势能 $E_p = kx^2/2$ ，所以当弹簧的伸长量增加到原来的两倍时，弹性势能将增加为原来的 4 倍，即

$$E'_p = \frac{1}{2}k(2x)^2 = 4 \times \frac{1}{2}kx^2 = 4E_p$$

3-14 有两个同样的物体，处于同一位置，其中一个水平抛出，另一个沿斜面无摩擦地自由滑下，问哪一个物体先到达地面？到达地面时两者速率是否相等？



问题 3-13 图

答：平抛物体先到达地面，并且到达地面时的速率也较大。如问题 3-13 图所示，设平抛物体的水平速度为 v_0 ，斜面高为 h ，长为 l ，两物体质量均为 m ，物体与地球组成的系统只受保守力作用，所以对平抛物体，有

$$h = \frac{1}{2}gt^2$$

$$mgh + \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2$$

解得

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} \quad v = \sqrt{2gh + v_0^2}$$

对下滑物体，有

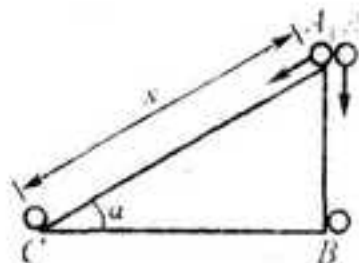
$$l = \frac{1}{2}at'^2 = \frac{1}{2}gt'^2 \sin\theta$$

$$mgh = \frac{1}{2}mv'^2$$

解得

$$t' = \sqrt{\frac{2l}{g \sin\theta}} = \sqrt{\frac{2h}{g \sin^2\theta}} > t \quad v' = \sqrt{2gh} < v$$

3-15 如图所示，光滑斜面与水平面间的夹角为 α 。(1) 一质量为 m 的物体沿斜面从点 A_1 下滑至点 C ，重力所做的功是多少？(2) 若物体从点 A_2 自由下落至点 B ，重力所做的功又为多少？从所得结果你能得出什么结论（点 A_1 、 A_2 在同一水平线上）？



问题 3-15 图

答：由于功为力在位移方向的分量与该位移大小的乘积，所以 A_1 下滑至 C 点，重力做功为

$$W_{A_1C} = mg \sin\alpha \cdot s = mgh$$

A_2 自由下落至 B 点重力做功为

$$W_{A_2B} = mgh$$

可见重力做功只与质点的始、末位置有关，而与所经过的路径无关，所以重力是保守力。重力所做的功等于重力势能的负值。

3-16 保守力做的功总是负的，对吗？举例说明。在式 (3-18) $W = -\Delta E_p$ 里，我们已经知道保守力做功等于势能增量的负值；若假定为正值，那又将如何呢？

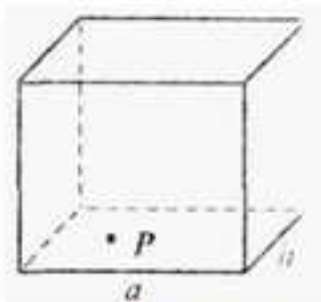
答：不对。物体在重力作用下的下落过程，伸长的弹簧恢复原长的过程等，都是保守力在做正功。所以，认为保守力做功总是负的，这是不对的。

势能是由于系统内各物体间具有保守力作用而产生的，因而它是属于系统的，当保守力做正功时，要消耗系统的势能。当保守力做负功时，系统的势能要增加。这就是式子 $W = -\Delta E_p$ 里负号的含义。否则，保守力做功时，不但不消耗势能，反而使势能增加了，这违背了自然界普遍遵循的基本定律，即能量守恒和转换定律。

3-17 把物体抛向空气中，有哪些力对它做功，这些力是否都是保守力？

答：被抛向空气中的物体受到重力和空气阻力的作用，两者均对物体做功，其中重力是保守力，但空气阻力不是保守力。

3-18 如果一质点 P 处于如问题 3-18 图所示的方形势阱底部，若有力作用在质点上，在什么情形下，此质点的运动可以不受方形势阱的束缚；在什么情形下，质点仍要受束缚。



问题 3-18 图

答：总能量 $E = E_p + E_k$ ，当 $E_k \geq 0$ 时，运动才能发生，所以当作用力的功使质点的机械能增加，在总能量大于势阱高度时，质点可以冲出势阱不受束缚，在总能量小于势阱高度时质点只能束缚在势阱内运动。

3-19 举例说明用能量方法和用牛顿定律各自求解哪些力学问题较方便，哪些力学问题不方便。

答：牛顿定律是力的瞬时作用规律，在求某一时刻对应的力、加速度及运动方程等过程中的细节问题时，用牛顿定律较为直接。若过程中物体间相互作用关系复杂时，直接用牛顿定律处理会感到困难，但只涉及始末状态就可以求解的问题，用能量的方法较容易，如求功、始末速度等和能量直接联系的量。很多情况是两种方法结合使用，会更方便解决问题。

3-20 在弹性碰撞中，有哪些量保持不变，在非弹性碰撞中又有哪些量保持不变？

答：弹性碰撞（即完全弹性碰撞）中，动量守恒，动能守恒；非弹性碰撞（即完全非弹性碰撞）中，只有动量守恒，动能不守恒。

3-21 在质点系的质心处，一定存在一个质点吗？

答：不一定。质心是质点系全体质点位置的平均位置所在处，只是全体质点在平动时的一个等效位置，如质量均匀分布的细圆环，其质心位置在环心处。

3-22 假设在宇宙空间站外面，有两位宇航员甲和乙漂浮在太空中。起先甲将扳手扔给乙，过后，乙又将此扳手扔还给甲。试问它们的质心要如何运动？

答：质心不动。起先甲将扳手扔给乙时，自身受反作用力将远离乙运动，乙在接到扳手时，受冲量将远离甲运动，同理在乙将此扳手扔还给甲的过程中，仍然是彼此远离，甲、乙各自的动量发生了改变。而对于甲、乙和扳手三者组成的系统而言，由于不受外力作用，所以质心没有运动。

二、习题

3-1 对质点组有以下几种说法：

- (1) 质点组总动量的改变与内力无关；
- (2) 质点组总动能的改变与内力无关；
- (3) 质点组机械能的改变与保守内力无关。

下列对上述说法判断正确的是 ()

- A. 只有 (1) 是正确的
- B. (1)、(2) 是正确的
- C. (1)、(3) 是正确的
- D. (2)、(3) 是正确的

【答案】C

【解析】在质点组中内力总是成对出现的，它们是作用力与反作用力，由于一对内力的冲量恒为零，故内力不会改变质点组的总动量。但由于相互有作用力的两个质点的位移大小以及位移与力的夹角一般不同，故一对内力所做功之和不一定为零，应作具体分析，如一对弹性内力的功的代数和一般为零，一对摩擦内力的功代数和一般不为零，对于保守内力来说，所作做功能使质点组动能与势能相互转换，因此保守内力即使有可能改变质点组的动能，但不可能改变质点组的机械能。

3-2 有两个倾角不同、高度相同、质量一样的斜面放在光滑的水平面上，斜面是光滑的，有两个一样的物块分别从这两个斜面的顶点由静止开始滑下，则（）

- A. 物块到达斜面底端时的动量相等
- B. 物块到达斜面底端时动能相等
- C. 物块和斜面（以及地球）组成的系统，机械能不守恒
- D. 物块和斜面组成的系统水平方向上动量守恒

【答案】D

【解析】对题述系统来说，由题意知并无外力和非保守内力做功，故系统机械能守恒。物体在下滑过程中，一方面通过重力做功将势能转化为动能，另一方面通过物体与斜面之间的弹性内力做功将一部分能量转化为斜面的动能，其大小取决于其中一个内力所做功，由于斜面倾角不同，故物体沿不同倾角斜面滑至底端时动能大小不等，动量自然也就不等，该系统动量虽不守恒，但在水平方向上并无外力，故系统在水平方向上分动量守恒。

3-3 对功的概念有以下几种说法：

- (1) 保守力作正功时，系统内相应的势能增加；
- (2) 质点运动经一闭合路径，保守力对质点作的功为零；
- (3) 作用力和反作用力大小相等、方向相反，所以两者所做功的代数和必为零。

下列上述说法中判断正确的是（）

- A. (1)、(2) 是正确的
- B. (2)、(3) 是正确的
- C. 只有 (2) 是正确的
- D. 只有 (3) 是正确的

【答案】C

【解析】保守力作正功时，系统内相应势能应该减少，由于保守力做功与路径无关，而只与始末位置有关，如质点环绕一周过程中，保守力在一段过程中作正功，在另一段过程中必然作负功，两者之和必为零，而一对作用力与反作用力分别作用于两个质点所做功之和未必为零。

3-4 如图 3-1 所示，质量分别为 m_1 和 m_2 的物体 A 和 B，置于光滑桌面上，A 和 B 之间连有一轻弹簧，另有质量为 m_1 和 m_2 的物体 C 和 D 分别置于物体 A 与 B 之上，且物体 A 和 C、B 和 D 之间的摩擦因数均不为零。首先用外力沿水平方向相向推压 A 和 B，使弹簧被压缩，然后撤掉外力，则在 A 和 B 弹开的过程中，对 A、B、C、D 以及弹簧组成的系统，有（）



图 3-1

- A. 动量守恒，机械能守恒
- B. 动量不守恒，机械能守恒
- C. 动量不守恒，机械能不守恒
- D. 动量守恒，机械能不一定守恒

【答案】D

【解析】由题意知，作用在题述系统上的合外力为零，故系统动量守恒，但机械能未必守恒，这取决于在 A、B 弹开过程中 C 与 A 或 D 与 B 之间有无相对滑动，如有则必然会因摩擦内力做功，而使一部分机械能转化为热能。

3-5 如图 3-2 所示，子弹射入放在水平光滑地面上静止的木块后而穿出。以地面为参考系，下列说法中正确的说法是（）

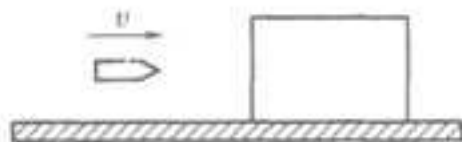


图 3-2

- A. 子弹减少的动能转变为木块的动能
- B. 子弹—木块系统的机械能守恒
- C. 子弹动能的减少等于子弹克服木块阻力所作的功
- D. 子弹克服木块阻力所作的功等于这一过程中产生的热

【答案】C

【解析】子弹—木块系统在子弹射入过程中，作用于系统的合外力为零，故系统动量守恒，但机械能并不守恒。这是因为子弹对地位移大于木块对地位移，故子弹与木块作用的一对内力所做功的代数和不为零，子弹动能的减少等于子弹克服阻力所做功，子弹减少的动能中，一部分通过其反作用力对木块作正功而转移为木块的动能，另一部分则转化为热能。

3-6 一架以 $3.0 \times 10^2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ 的速率水平飞行的飞机，与一只身长为 0.20 m 、质量为 0.50 kg 的飞鸟相碰。设碰撞后飞鸟的尸体与飞机具有同样的速度，而原来飞鸟对于地面的速率甚小，可以忽略不计。试估计飞鸟对飞机的冲击力（碰撞时间可用飞鸟身长被飞机速率相除来估算）。根据本题的计算结果，你对于高速运动的物体（如飞机、汽车）与通常情况下不足以引起危害的物体（如飞鸟、小石子）相碰后会产生什么后果的问题有些什么体会？

解：以飞鸟为研究对象，取飞机运动方向为 x 轴正向，由动量定理得

$$\overline{F'} \Delta t = mv - 0$$

式中 $\overline{F'}$ 为飞机对鸟的平均冲力，而身长为 20 cm 的飞鸟与飞机碰撞时间约为 $\Delta t = l/v$ ，以此代入上式可得

$$\overline{F'} = \frac{mv^2}{l} = 2.25 \times 10^5 \text{ N}$$

鸟对飞机的平均冲力为

$$\overline{F} = -\overline{F'} = -2.25 \times 10^5 \text{ N}$$

式中负号表示飞机受到的冲力与其飞行方向相反。从计算结果可知， $2.25 \times 10^5 \text{ N}$ 的冲力大致相当于一个 22 t 的物体所受的重力，可见，此冲力是相当大的。若飞鸟与发动机叶片相碰，足以使发动机损坏，造成飞行事故。

3-7 质量为 m 的物体，由水平面上点 O 以初速为 v_0 抛出， v_0 与水平面成仰角 α 。若不计空气阻力，求：（1）物体从发射点 O 到最高点的过程中，重力的冲量；（2）物体从发射点到落回至同一水平面的过程中，重力的冲量。

解：解 1 物体从出发到达最高点所需的时间为

$$\Delta t_1 = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}$$

则物体落回地面的时间为

$$\Delta t_2 = 2\Delta t_1 = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}$$

于是，在相应的过程中重力的冲量分别为

$$I_1 = \int_{\Delta t_1} F dt = -mg\Delta t_1 j = -mv_0 \sin \alpha j$$

$$I_2 = \int_{\Delta t_2} F dt = -mg\Delta t_2 j = -2mv_0 \sin \alpha j$$

解 2 根据动量定理，物体由发射点 O 运动到点 A 、 B 的过程中，重力的冲量分别为

$$I_1 = mv_{Ay} j - mv_{0y} j = -mv_0 \sin \alpha j$$

$$I_2 = mv_{By} j - mv_{0y} j = -2mv_0 \sin \alpha j$$

3-8 $F_x = 30 + 4t$ (式中 F_x 的单位为 N, t 的单位为 s) 的合外力作用在质量 $m = 10 \text{ kg}$ 的物体上. 试求: (1) 在开始 2 s 内此力的冲量; (2) 若冲量 $I = 300 \text{ N}\cdot\text{s}$, 此力作用的时间 t ; (3) 若物体的初速度 $v_1 = 10 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$, 方向与 F_x 相同, 在 $t = 6.86 \text{ s}$ 时, 此物体的速度 v_2 .

解: (1) 由分析知

$$I = \int_0^2 (30 + 4t) dt = 30t + 2t^2 \Big|_0^2 = 68 \text{ N}\cdot\text{s}$$

(2) 由 $I = 300 = 30t + 2t^2$, 解此方程可得

$$t = 6.86 \text{ s} \text{ (另一解不合题意已舍去)}$$

(3) 由动量定理, 有

$$I = mv_2 - mv_1$$

由 (2) 可知 $t = 6.86 \text{ s}$ 时 $I = 300 \text{ N}\cdot\text{s}$, 将 I 、 m 及 v_1 代入可得

$$v_2 = \frac{I + mv_1}{m} = 40 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$$

3-9 洗车时, 喷水管中的水以恒定速率 $v_0 = 20 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ 从喷口喷出, 喷出的水射在汽车的表面上后, 速率降为零. 设单位时间从喷口喷出水的质量为 $\frac{dm}{dt} = 1.5 \text{ kg}\cdot\text{s}^{-1}$, 求喷射出的水施加在车身上的作用力 F 的大小.

解: 对 dm 的水运用动量定理, 有

$$F' dt = v_0 dm$$

即

$$F' = v_0 \frac{dm}{dt} = 30 \text{ N}$$

所以水对汽车表面的作用力 $F = 30 \text{ N}$.

3-10 高空作业时系安全带是非常必要的. 假如一质量为 51.0 kg 的人, 在操作时不慎从高空竖直跌落下来, 由于安全带的保护, 最终使他被悬挂起来. 已知此时人离原处的距离为 2.0 m , 安全带弹性缓冲作用时间为 0.50 s . 求安全带对人的平均冲力.

解: 解 1 以人为研究对象, 按分析中的两个阶段进行讨论. 在自由落体运动过程中, 人跌落至 2 m 处时的速度为

$$v_1 = \sqrt{2gh} \quad (1)$$

在缓冲过程中, 人受重力和安全带冲力的作用, 根据动量定理, 有

$$(F + P) \Delta t = mv_1 - mv_0 \quad (2)$$

由式 (1)、(2) 可得安全带对人的平均冲力大小为

$$\bar{F} = mg + \frac{\Delta(mv)}{\Delta t} = mg + \frac{m \sqrt{2gh}}{\Delta t} = 1.14 \times 10^3 \text{ N}$$

解 2 从整个过程来讨论. 根据动量定理有

$$\bar{F} = \frac{mg}{\Delta t} \sqrt{2h/g} + mg = 1.14 \times 10^3 \text{ N}$$

3-11 质量为 m 的小球, 在合外力 $F = -kx$ 作用下运动, 已知 $x = A \cos \omega t$, 其中 k 、 ω 、 A 均为正常量,

求在 $t=0$ 到 $t = \frac{\pi}{2\omega}$ 时间内小球动量的增量.

解: 力 F 的冲量为

$$I = \int_{t_1}^{t_2} F dt = \int_{t_1}^{t_2} -kx dt = - \int_0^{\pi/2\omega} kA \cos \omega t dt = - \frac{kA}{\omega}$$

$$\text{即 } \Delta(mv) = I = - \frac{kA}{\omega}$$

3-12 如图 3-3 所示, 在水平地面上, 有一横截面 $S=0.20 \text{ m}^2$ 的直角弯管, 管中有流速为 $v=3.0 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ 的水通过, 求弯管所受力的大小和方向.

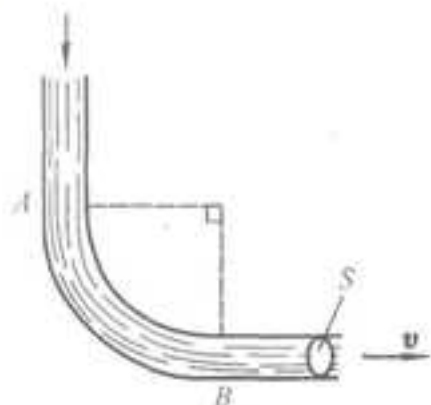


图 3-3

解: 在 Δt 时间内, 从管一端流入 (或流出) 水的质量为 $\Delta m = \rho v S \Delta t$, 弯曲部分 AB 的水的动量的增量则为

$$\Delta p = \Delta m (v_B - v_A) = \rho v S \Delta t (v_B - v_A)$$

依据动量定理 $I = \Delta p$, 得到管壁对这部分水的平均冲力

$$\bar{F} = \frac{I}{\Delta t} = \rho S v (v_B - v_A)$$

从而可得水流对管壁作用力的大小为

$$\bar{F}' = -\bar{F} = -\sqrt{2} \rho S v^2 = -2.5 \times 10^3 \text{ N}$$

作用力的方向则沿直角平分线指向弯管外侧.

3-13 一作斜抛运动的物体, 在最高点炸裂为质量相等的两块, 最高点距离地面为 19.6 m . 爆炸 1.00 s 后, 第一块落到爆炸点正下方的地面上, 此处距抛出点的水平距离为 $1.00 \times 10^2 \text{ m}$. 问第二块落在距抛出点多远的地面上. (设空气的阻力不计)

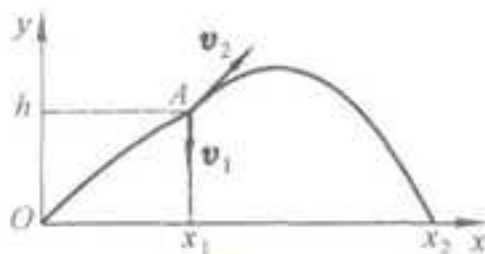


图 3-4

解: 取如图 3-4 示坐标, 根据抛体运动的规律, 爆炸前, 物体在最高点的速度的水平分量为

$$v_{0x} = \frac{x_1}{t_0} = x_1 \sqrt{\frac{g}{2h}} \quad (1)$$

物体爆炸后, 第一块碎片竖直落下的运动方程为

$$y_1 = h - v_1 t - \frac{1}{2} g t^2$$

当该碎片落地时, 有 $y_1=0$, $t=t_1$, 则由上式得爆炸后第一块碎片抛出的速度

$$v_1 = \frac{h - \frac{1}{2}gt_1^2}{t_1} \quad (2)$$

又根据动量守恒定律, 在最高点处有

$$mv_{0x} = \frac{1}{2}mv_{2x} \quad (3)$$

$$0 = -\frac{1}{2}mv_1 + \frac{1}{2}mv_2 \quad (4)$$

联立解式 (1)、(2)、(3) 和 (4), 可得爆炸后第二块碎片抛出时的速度分量分别为

$$v_{2x} = 2v_{0x} = 2x_1 \sqrt{\frac{g}{2h}} = 100 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$v_{2y} = v_1 = \frac{h - \frac{1}{2}gt_1^2}{t_1} = 14.7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

爆炸后, 第二块碎片作斜抛运动, 其运动方程为

$$x_2 = x_1 + v_{2x}t_2 \quad (5)$$

$$y_2 = h + v_{2y}t_2 - \frac{1}{2}gt_2^2 \quad (6)$$

落地时, $y_2=0$, 由式 (5)、(6) 可解得第二块碎片落地点的水平位置

$$x_2 = 500\text{m}$$

3-14 一棒球投手将 0.14kg 的棒球沿水平方向以 $50\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ 的速率将棒球投向击球手, 击球手用棒击球, 使球沿与水平线成 30° 斜向上飞出, 速率为 $80\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ 。设棒与球接触时间为 0.02s , 棒作用在球上的平均力为多少呢。

解 1: 建立如图 3-5 (a) 所示坐标系, 由动量定理的分量式有

$$\bar{F}_x \Delta t = mv_2 \cos 30^\circ - (-mv_1)$$

$$\bar{F}_y \Delta t = mv_2 \sin 30^\circ - 0$$

由上两式, 得

$$\bar{F}_x = 835 \text{ N}, \quad \bar{F}_y = 280 \text{ N}$$

则

$$\bar{F} = \sqrt{\bar{F}_x^2 + \bar{F}_y^2} = 881 \text{ N}$$

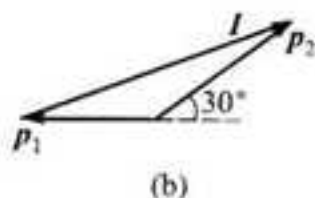
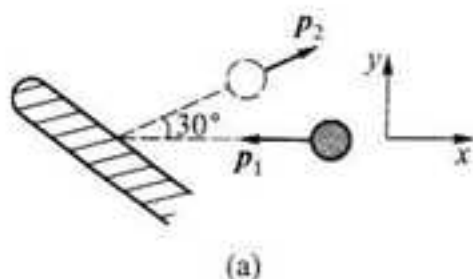


图 3-5

解 2: 由动量定理矢量式, 有

$$\vec{I} = \vec{F} \Delta t = \vec{p}_2 - \vec{p}_1$$

相应矢量关系如图 3-5 (b) 所示. 由图 3-5 知

$$\begin{aligned} F \Delta t &= \sqrt{p_1^2 + p_2^2 - 2p_1 p_2 \cos 150^\circ} \\ &= m \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + 2v_1 v_2 \cos 30^\circ} = 881 \text{ N} \end{aligned}$$

3-15 A、B 两船在平静的湖面上平行逆向航行, 当两船擦肩相遇时, 两船各自向对方平稳地传递 50 kg 的重物, 结果是 A 船停了下来, 而 B 船以 $3.4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ 的速度继续向前驶去. A、B 两船原有质量分别为 $0.5 \times 10^3 \text{ kg}$ 和 $1.0 \times 10^3 \text{ kg}$. 求在传递重物前两船的速度. (忽略水对船的阻力)

解: 设 A、B 两船原有的速度分别以 v_A 、 v_B 表示, 传递重物后船的速度分别以 v'_A 、 v'_B 表示, 被搬运重物的质量以 m 表示. 分别对搬出重物后的船 A 与从船 B 搬入的重物所组成的系统 I 以及搬出重物后的船 B 与从船 A 搬入的重物所组成的系统 II 应用动量守恒定律, 则有

$$(m_A - m)v_A + mv_B = m_A v'_A \quad (1)$$

$$(m_B - m)v_B + mv_A = m_B v'_B \quad (2)$$

由题意知 $v'_A = 0$, $v'_B = 3.4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ 代入数据后, 可解得

$$\begin{aligned} v_A &= \frac{-m_B m v'_B}{(m_B - m)(m_A - m) - m^2} = -0.40 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \\ v_B &= \frac{(m_A - m)m_B v'_B}{(m_A - m)(m_B - m) - m^2} = 3.6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \end{aligned}$$

也可以选择不同的系统, 例如, 把 A、B 两船 (包括传递的物体在内) 视为系统, 同样能满足动量守恒, 也可列出相对应的方程求解.

3-16 质量为 m' 的人手里拿着一个质量为 m 的物体, 此人用与水平面成 α 角的速率 v_0 向前跳去. 当他达到最高点时, 他将物体以相对于人为 u 的水平速率向后抛出. 问: 由于人抛出物体, 他跳跃的距离增加了多少? (假设人可视为质点)

解: 取如图 3-6 所示坐标. 把人与物视为一系统, 当人跳跃到最高点处, 在向左抛物的过程中, 满足动量守恒, 故有

$$(m + m')v_0 \cos \alpha = m'v + m(v - u)$$

式中 v 为人抛出后相对地面的水平速率, $v-u$ 为抛出物对地面的水平速率, 得

$$v = v_0 \cos \alpha + \frac{m}{m' + m} u$$

人的水平速率的增量为

$$\Delta v = v - v_0 \cos \alpha = \frac{m}{m' + m} u$$

而人从最高点到地面的运动时间为

$$t = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}$$

所以, 人跳跃后增加的距离

$$\Delta x = \Delta v t = \frac{m v_0 \sin \alpha}{(m' + m) g} u$$

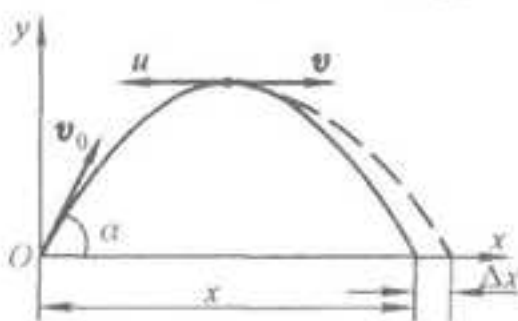


图 3-6

*3-17 一质量均匀柔软的绳竖直的悬挂着, 绳的下端刚好触到水平桌面上. 如果把绳的上端放开, 绳将落在桌面上. 试证明: 在绳下落过程中的任意时刻, 作用于桌面上的压力等于已落到桌面上绳的重量的三倍.

解: 取如图 3-7 所示坐标, 开始时绳的上端位于原点, Oy 轴的正向竖直向下. 绳的总长为 l , 以 t 时刻, 已落到桌面上长为 y 、质量为 m' 的绳为研究对象. 这段绳受重力 P 、桌面的托力 F_N 和下落绳子对它的冲力 F (如图 3-7 中所示) 的作用. 由力的平衡条件有

$$\frac{m}{l} y g + F - F_N = 0 \quad (1)$$

为求冲力 F , 可取 dt 时间内落至桌面的线元 dy 为研究对象, 线元的质量 $dm = \frac{m}{l} dy$, 它受到重力 dP 和冲力 F 的反作用力 F' 的作用, 由于 $F' \gg dP$, 故由动量定理得

$$F' dt = 0 - \frac{m}{l} v dy \quad (2)$$

而

$$F = -F' \quad (3)$$

由上述三式可得任意时刻桌面受到的压力大小为

$$F'_N = |-F_N| = \frac{m}{l} y g + \frac{m}{l} v^2 = 3 \frac{m}{l} y g = 3 m' g$$

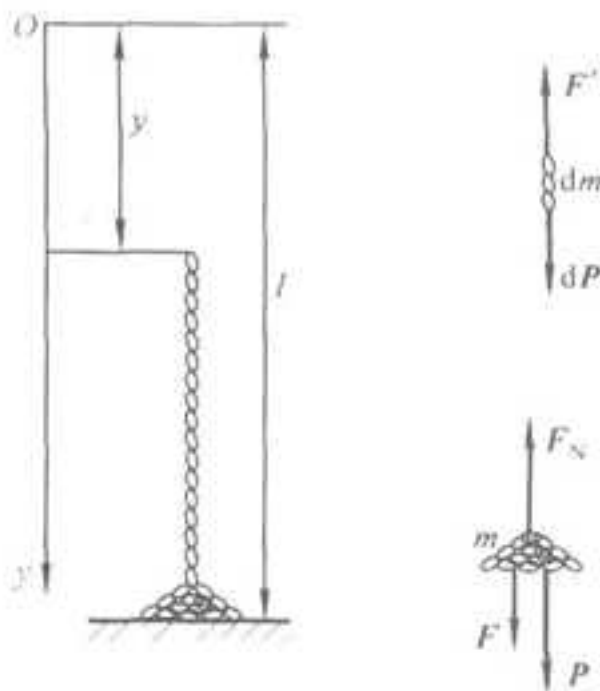


图 3-7

3-18 设在地球表面附近, 一初质量为 $5.00 \times 10^5 \text{ kg}$ 的火箭, 从尾部喷出气体的速率为 $2.00 \times 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. (1) 试问: 每秒需喷出多少气体, 才能使火箭最初向上的加速度大小为 $4.90 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. (2) 若火箭的质量比为 6.00, 求该火箭的最后速率.

解: (1) 以火箭发射处为原点, 竖直向上为正方向. 以 t 时刻质量为 m 的火箭为研究对象, 它在 t 到 $t + \Delta t$ 的时间内, 将分离成火箭主体 (包括尚剩的燃料) 和排出的燃料两部分. 根据它们的总动量的增量 $\hat{\Delta} dP$ 和系统重力, 由动量定理可得到该火箭在重力场中的动力学方程为

$$u \frac{dm}{dt} - mg = ma \quad (1)$$

因火箭的初始质量为 $m_0 = 5.00 \times 10^5 \text{ kg}$, 要使火箭获得最初的加速度 $a_0 = 4.90 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, 则燃气的排出率为

$$\frac{dm}{dt} = \frac{m_0 (g + a_0)}{u} = 3.68 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$$

(2) 为求火箭的最后速率, 可将式 (1) 改写成

$$u \frac{dm}{dt} - mg = m \frac{dv}{dt}$$

分离变量后积分, 有

$$\int_{v_0}^v dv = u \int_{m_0}^m \frac{dm}{m} - \int_0^t g dt$$

火箭速率随时间的变化规律为

$$v = v_0 - u \ln \frac{m}{m_0} - gt \quad (2)$$

因火箭的质量比为 6.00, 故经历时间 t 后, 其质量为

$$m = m_0 - \frac{dm}{dt} t = \frac{1}{6} m_0$$

得

$$t = \frac{5m_0}{6 dm/dt} \quad (3)$$

将式 (3) 代入式 (2), 依据初始条件, 可得火箭的最后速率

$$v' = u \ln \frac{m_0}{m} - gt = u \ln \frac{m_0}{m} - \frac{5m_0g}{6dm/dt} = 2.47 \times 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

3-19 质量为 m 的质点在外力 F 的作用下沿 Ox 轴运动, 已知 $t=0$ 时质点位于原点, 且初始速度为零. 设外力 F 随距离线性地减小, 且 $x=0$ 时, $F=F_0$; 当 $x=L$ 时, $F=0$. 试求质点从 $x=0$ 处运动到 $x=L$ 处的过程中力 F 对质点所做功和质点在 $x=L$ 处的速率.

解: 由分析知 $F = F_0 - \frac{F_0}{L}x$, 则在 $x=0$ 到 $x=L$ 过程中做功, $W = \int_0^L \left(F_0 - \frac{F_0}{L}x \right) dx = \frac{F_0L}{2}$

由动能定理有 $W = \frac{1}{2}mv^2 - 0$

得 $x=L$ 处的质点速率为

$$v = \sqrt{\frac{F_0L}{m}}$$

此处也可用牛顿定律求质点速率, 即

$$F_0 - \frac{F_0}{L}x = m \frac{dv}{dt} = mv \frac{dv}{dx}$$

分离变量后, 两边积分也可得同样结果.

3-20 如图 3-8 所示, 一绳索跨过无摩擦的滑轮, 系在质量为 1.00kg 的物体上, 起初物体静止在无摩擦的水平平面上. 若用 5.00 N 的恒力作用在绳索的另一端, 使物体向右作加速运动, 当系在物体上的绳索从与水平面成 30° 角变为 37° 角时, 力对物体所作的功为多少? 已知滑轮与水平面之间的距离 $d=1.00\text{ m}$.

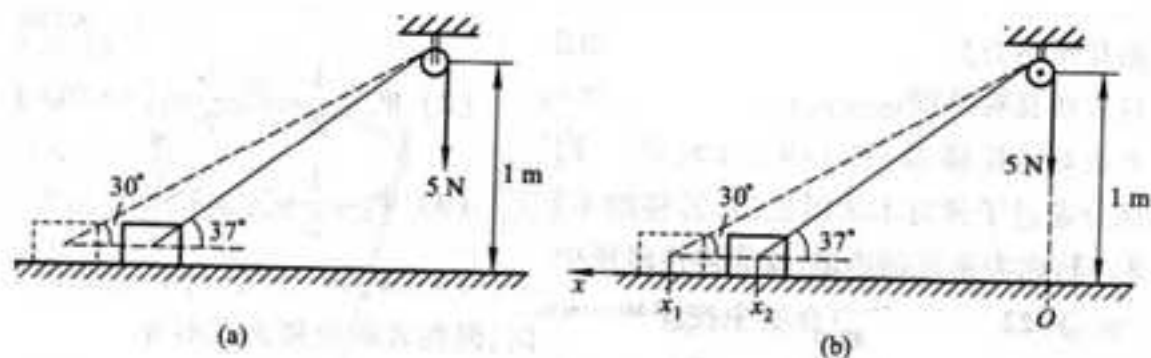


图 3-8

解: 取图 3-8 所示坐标, 绳索拉力对物体所作的功为

$$\begin{aligned} W &= \int F \cdot dx = \int F \cos \theta dx \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \frac{Fx}{\sqrt{d^2 + x^2}} dx = 1.69 \text{ J} \end{aligned}$$

3-21 质量为 $m=5.6\text{g}$ 的子弹, 以 $v_0=501\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ 的速率水平地射入一静止在水平面上的质量为 $m'=2\text{kg}$ 的木块内, 子弹射入木块后, 它们向前移动了 $s=50\text{cm}$ 而停止, 求:

- (1) 木块与水平面间的摩擦因数;
- (2) 木块对子弹所做的功 W_1 ;
- (3) 子弹对木块所做的功 W_2 ;
- (4) W_1 与 W_2 的大小是否相等?为什么?

解: (1) 设子弹射入木块内, 子弹与木块一起运动的初速率为 v , 则由动量守恒

$$mv_0 = (m' + m)v \quad (1)$$

根据动能定理

$$F_f \cdot s = \frac{1}{2}(m+m')v^2 \quad (2)$$

$$F_f = \mu(m+m')g \quad (3)$$

式(1)、(2)、(3)联立解出

$$\mu = 0.196, \quad v = 1.4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$(2) W_1 = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = -703 \text{ J}$$

$$(3) W_2 = \frac{1}{2}m'v^2 = 1.96 \text{ J}$$

(4) W_1 、 W_2 大小不等，这是因为虽然木块与子弹之间的相互作用力等值反向，但两者的位移大小不等。

3-22 一物体在介质中按规律 $x=ct^3$ 作直线运动， c 为一常量，设介质对物体的阻力正比于速度的平方，试求物体由 $x_0=0$ 运动到 $x=1$ 时，阻力所作的功。（已知阻力系数为 k ）

解：由运动学方程 $x=ct^3$ ，可得物体的速度

$$v = \frac{dx}{dt} = 3ct^2$$

按题意及上述关系，物体所受阻力的大小为

$$F = kv^2 = 9kc^2t^4 = 9kc^{2/3}x^{4/3}$$

则阻力的功为

$$W = \int_0^1 F \cdot dx = \int_0^1 F \cos 180^\circ dx = - \int_0^1 9kc^{2/3}x^{4/3} dx = -\frac{27}{7}kc^{2/3}l^{7/3}$$

3-23 一人从 10.0m 深的井中提水，起始桶中装有 10.0kg 的水，由于水桶漏水，每升高 1.00m 要漏去 0.20kg 的水。水桶被匀速地从井中提到井口，求人所作的功。

解：水桶在匀速上提过程中， $a=0$ ，拉力与水桶重力平衡，有 $F+P=0$ ，在图 3-9 所取坐标下，水桶重力随位置的变化关系为 $P=mg-\alpha gy$ ，其中 $\alpha=0.2\text{kg/m}$ ，人对水桶的拉力的功为

$$W = \int_0^{10} F \cdot dy = \int_0^{10} (mg - \alpha gy) dy = 882 \text{ J}$$

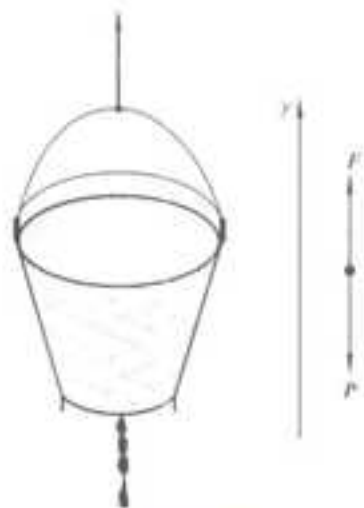


图 3-9

3-24 一质量为 0.20kg 的球，系在长为 2.00m 的细绳上，细绳的另一端系在天花板上，把小球移至使细绳与竖直方向成 30° 角的位置，然后从静止放开。求：(1) 在绳索从 30° 角到 0° 角的过程中，重力和张力所作的功；(2) 物体在最低位置时的动能和速率；(3) 在最低位置时的张力。

解：(1) 如图 3-10 所示，重力对小球所作的功只与始末位置有关，即

$$W_p = P\Delta h = mgl(1 - \cos\theta) = 0.53\text{J}$$

在小球摆动过程中，张力 F_T 的方向总是与运动方向垂直，所以，张力的功

$$W_T = \int F_T \cdot ds = 0$$

(2) 根据动能定理，小球摆动过程中，其动能的增量是由于重力对它做功的结果，初始时动能为零，因而，在最低位置时的动能为

$$E_k = W_p = 0.53\text{J}$$

小球在最低位置的速率为

$$v = \sqrt{\frac{2E_k}{m}} = \sqrt{\frac{2W_p}{m}} = 2.30 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

(3) 当小球在最低位置时，由牛顿定律可得

$$F_T - P = \frac{mv^2}{l}$$

$$F_T = mg + \frac{mv^2}{l} = 2.49 \text{ N}$$

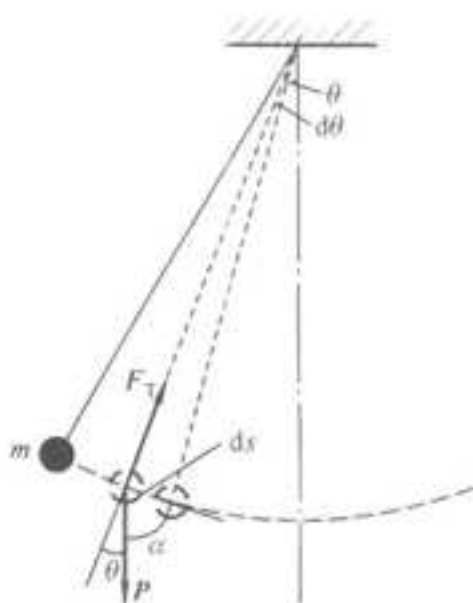


图 3-10

3-25 一质量为 m 的质点，系在细绳的一端，绳的另一端固定在平面上，此质点在粗糙水平面上作半径为 r 的圆周运动，设质点的最初速率是 v_0 ，当它运动一周时，其速率为 $v_0/2$ 。求：(1) 摩擦力作的功；(2) 动摩擦因数；(3) 在静止以前质点运动了多少圈？

解：(1) 摩擦力做功为

$$W = E_k - E_{k0} = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = -\frac{3}{8}mv_0^2 \quad (1)$$

(2) 由于摩擦力是一恒力，且 $F_f = \mu mg$ ，故有

$$W = F_s \cos 180^\circ = -2\pi r \mu mg \quad (2)$$

由式 (1)、(2) 可得动摩擦因数为

$$\mu = \frac{3v_0^2}{16\pi r g}$$

(3) 由于一周中损失的动能为 $\frac{3}{8}mv_0^2$, 则在静止前可运行的圈数为

$$n = \left| \frac{E_{k0}}{W} \right| = \frac{4}{3} \text{ 圈}$$

3-26 如图 3-11 (a) 所示, A 和 B 两块板用一轻弹簧连接起来, 它们的质量分别为 m_1 和 m_2 . 问在 A 板上需加多大的压力, 方可在力停止作用后, 恰能使 A 在跳起来时 B 稍被提起. (设弹簧的劲度系数为 k).

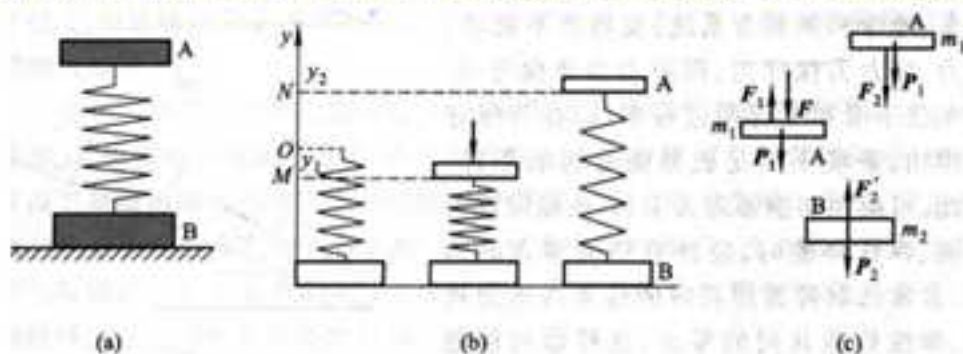


图 3-11

解: 选取如图 3-10 (b) 所示坐标, 取原点 O 处为重力势能和弹性势能零点, 作各状态下物体的受力图, 对 A 板而言, 当施以外力 F 时, 根据受力平衡有

$$F_1 = P_1 + F \quad (1)$$

当外力撤除后, 按分析中所选的系统, 由机械能守恒定律可得

$$\frac{1}{2}ky_1^2 - mgy_1 = \frac{1}{2}ky_2^2 + mgy_2$$

式中 y_1 、 y_2 为 M、N 两点对原点 O 的位移, 因为 $F_1 = ky_1$, $F_2 = ky_2$ 及 $P_1 = m_1g$, 上式可写为

$$F_1 - F_2 = 2P_1 \quad (2)$$

由式 (1)、(2) 可得

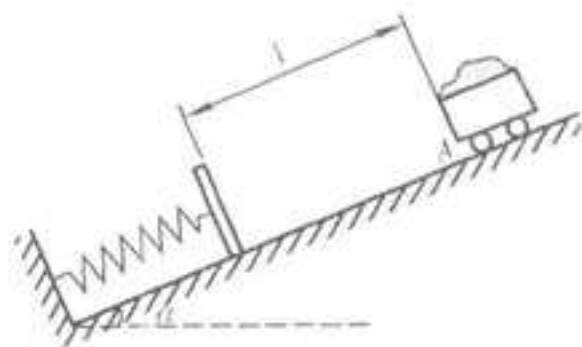
$$F = P_1 + F_2 \quad (3)$$

当 A 板跳到 N 点时, B 板刚被提起, 此时弹性力 $F'_2 = P_2$, 且 $F_2 = F'_2$, 由式 (3) 可得

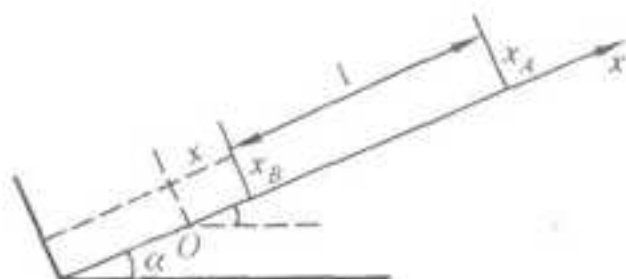
$$F = P_1 + P_2 = (m_1 + m_2)g$$

应注意, 势能的零点位置是可以任意选取的, 为计算方便起见, 通常取弹簧原长时的弹性势能为零点, 也同时为重力势能的零点.

3-27 如图 3-12 (a) 所示, 有一自动卸货矿车, 满载时的质量为 m' , 从与水平成倾角 $\alpha = 30.0^\circ$ 斜面上的点 A 由静止下滑, 设斜面对车的阻力为车重的 0.25 倍, 矿车下滑距离 l 时, 与缓冲弹簧一道沿斜面运动. 当矿车使弹簧产生最大压缩形变时, 矿车自动卸货, 然后矿车借助弹簧的弹性力作用, 使之返回原位置 A 再装货. 试问要完成这一过程, 空载时与满载时车的质量之比应为多大?



(a)



(b)

图 3-12

解：取沿斜面向上为 x 轴正方向，弹簧被压缩到最大形变时弹簧上端为坐标原点 O 。矿车在下滑和上行的全过程中，按题意，摩擦力所作的功为

$$W_f = (0.25mg + 0.25m'g)(l+x) \quad (1)$$

式中 m' 和 m 分别为矿车满载和空载时的质量， x 为弹簧最大被压缩量。

根据功能原理，在矿车运动的全过程中，摩擦力所作的功应等于系统机械能增量的负值，故有

$$W_f = -\Delta E = -(\Delta E_p + \Delta E_k)$$

由于矿车返回原位时速度为零，故 $\Delta E_k = 0$ ；而 $\Delta E_p = (m - m')g(l+x)\sin\alpha$ ，故有

$$W_f = -(m - m')g(l+x)\sin\alpha \quad (2)$$

由式 (1)、(2) 可解得 $\frac{m}{m'} = \frac{1}{3}$ 。

3-28 用铁锤把钉子敲入墙面木板，设木板对钉子的阻力与钉子进入木板的深度成正比，若第一次敲击，能把钉子钉入木板 $1.00 \times 10^{-2} \text{m}$ ，第二次敲击时，保持第一次敲击钉子的速度，那么第二次能把钉子钉入多深？

解：因阻力与深度成正比，则有 $F = kx$ (k 为阻力系数)，现令 $x_0 = 1.00 \times 10^{-2} \text{m}$ ，第二次钉入的深度为 Δx ，由于钉子两次所做功相等，可得

$$\int_0^{x_0} kx dx = \int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} kx dx$$

$$\Delta x = 0.41 \times 10^{-2} \text{m}$$

3-29 一质量为 m 的地球卫星，沿半径为 $3R_E$ 的圆轨道运动， R_E 为地球的半径，已知地球的质量为 m_E 。求：(1) 卫星的动能；(2) 卫星的引力势能；(3) 卫星的机械能。

解：(1) 卫星与地球之间的万有引力提供卫星作圆周运动的向心力，由牛顿定律可得

$$G \frac{m_E m}{(3R_E)^2} = m \frac{v^2}{3R_E}$$

则

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = G \frac{m_E m}{6R_E}$$

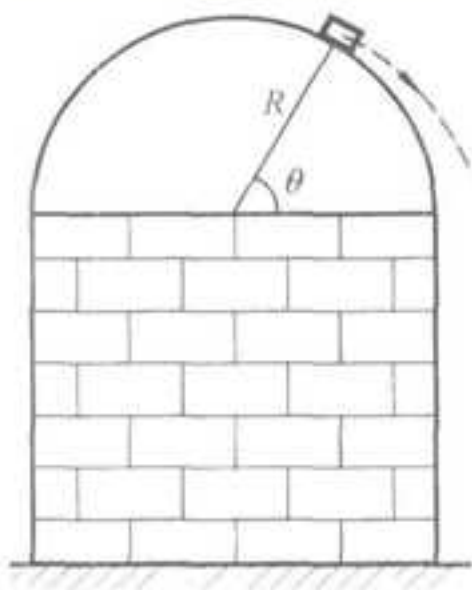
(2) 取卫星与地球相距无限远 ($r \rightarrow \infty$) 时的势能为零, 则处在轨道上的卫星所具有的势能为

$$E_p = -G \frac{m_E m}{3R_E}$$

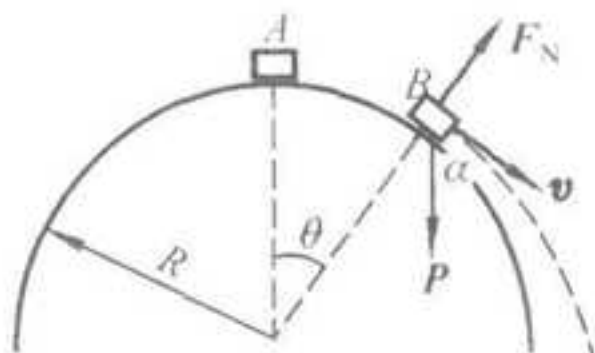
(3) 卫星的机械能为

$$E = E_k + E_p = G \frac{m_E m}{6R_E} - G \frac{m_E m}{3R_E} = -G \frac{m_E m}{6R_E}$$

3-30 如图 3-13 (a) 所示, 天文观测台有一半径为 R 的半球形屋面, 有一冰块从光滑屋面的最高点由静止沿屋面滑下, 若摩擦力略去不计, 求此冰块离开屋面的位置以及在该位置的速度.



(a)



(b)

图 3-13

解: 由系统的机械能守恒, 有

$$mgR = \frac{1}{2}mv^2 + mgR \cos \theta \quad (1)$$

根据牛顿定律, 冰块沿径向的动力学方程为

$$mg \cos \theta - F_N = \frac{mv^2}{R} \quad (2)$$

冰块脱离球面时，支持力 $F_N=0$ ，由式 (1)、(2) 可得冰块的角位置

$$\theta = \arccos \frac{2}{3} = 48.2^\circ$$

冰块此时的速率为

$$v = \sqrt{gR \cos \theta} = \sqrt{\frac{2Rg}{3}}$$

v 的方向与重力 P 方向的夹角为

$$\alpha = 90^\circ - \theta = 41.8^\circ$$

3-31 如图 3-14 所示，把质量 $m=0.20\text{kg}$ 的小球放在位置 A 时，使弹簧被压缩 $\Delta l=7.5 \times 10^{-2}\text{m}$ 。然后在弹簧弹性力的作用下，小球从位置 A 南静止被释放，小球沿轨道 ABCD 运动。小球与轨道间的摩擦不计。已知 \widehat{BCD} 为半径 $r=0.15\text{m}$ 的半圆弧，AB 相距为 $2r$ 。求弹簧劲度系数的最小值。

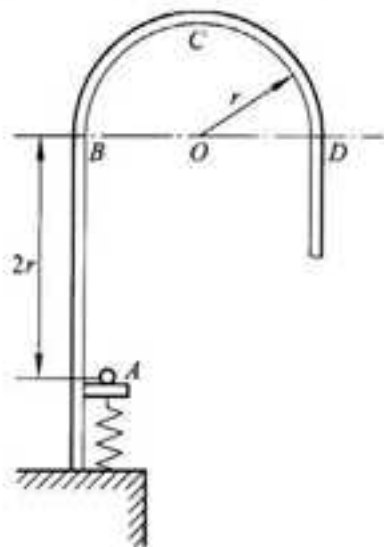


图 3-14

解：小球要刚好通过最高点 C 时，轨道对小球支持力 $F_N=0$ ，因此，有

$$mg = \frac{mv_C^2}{r} \quad (1)$$

取小球开始时所在位置 A 为重力势能的零点，由系统的机械能守恒定律，有

$$\frac{1}{2}k(\Delta l)^2 = mg(3r) + \frac{1}{2}mv_C^2 \quad (2)$$

由式 (1)、(2) 可得

$$k = \frac{7mgr}{(\Delta l)^2} = 366 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$$

3-32 如图 3-15 所示，质量为 m 、速度为 v 的钢球，射向质量为 m' 的靶，靶中心有一小孔，内有劲度系数为 k 的弹簧，此靶最初处于静止状态，但可在水平面上作无摩擦滑动。求子弹射入靶内弹簧后，弹簧的最大压缩距离。



图 3-15

解：设弹簧的最大压缩量为 x_0 ，小球与靶共同运动的速度为 v_1 ，由动量守恒定律，有

$$mv = (m + m')v_1 \quad (1)$$

又由机械能守恒定律，有

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}(m + m')v_1^2 + \frac{1}{2}kx_0^2 \quad (2)$$

由式 (1)、(2) 可得

$$x_0 = \sqrt{\frac{mm'}{k(m + m')}}v$$

3-33 质量为 m 的弹丸 A，穿过如图 3-16 所示的摆锤 B 后，速率由 v 减少到 $v/2$ 。已知摆锤的质量为 m' ，摆线长度为 l ，如果摆锤能在垂直平面内完成一个完全的圆周运动，弹丸速度 v 的最小值应为多少？

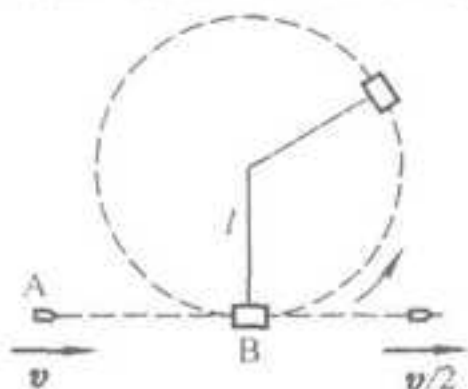


图 3-16

解：由水平方向的动量守恒定律，有

$$mv = m \frac{v}{2} + m'v' \quad (1)$$

为使摆锤恰好能在垂直平面内作圆周运动，在最高点时，摆线中的张力 $F_T = 0$ ，则

$$m'g = \frac{m'v_h'^2}{l} \quad (2)$$

式中 v_h' 为摆锤在圆周最高点的运动速率。

又摆锤在垂直平面内作圆周运动的过程中，满足机械能守恒定律，故有

$$\frac{1}{2}m'v'^2 = 2m'gl + \frac{1}{2}m'v_h'^2 \quad (3)$$

解上述三个方程，可得弹丸所需速率的最小值为

$$v = \frac{2m'}{m} \sqrt{5gl}$$

3-34 一个电子和一个原来静止的氢原子发生对心弹性碰撞。试问电子的动能中传递给氢原子的能量的百分数。(已知氢原子质量约为电子质量的 1840 倍)

解：以 E_H 表示氢原子被碰撞后的动能， E_e 表示电子的初动能，则

$$\frac{E_H}{E_e} = \frac{\frac{1}{2}m'v_H^2}{\frac{1}{2}mv_e^2} = \frac{m'}{m} \left(\frac{v_H}{v_e} \right)^2 \quad (1)$$

由于粒子作对心弹性碰撞，在碰撞过程中系统同时满足动量守恒和机械能守恒定律，故有

$$mv_e = m'v_H + mv_e' \quad (2)$$

$$\frac{1}{2}mv_e^2 = \frac{1}{2}m'v_H^2 + \frac{1}{2}mv_e'^2 \quad (3)$$

由题意知 $m'/m=1840$ ，解上述三式可得

$$\frac{E_H}{E_e} = \frac{m'}{m} \left(\frac{v_H}{v_e} \right)^2 = 1840 \left(\frac{2m}{m'+m} \right)^2 \approx 2.2 \times 10^{-3}$$

3-35 质量为 $7.2 \times 10^{-23} \text{kg}$ ，速率为 $6.0 \times 10^7 \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ 的粒子 A，与另一个质量为其一半而静止的粒子 B 发生二维完全弹性碰撞，碰撞后粒子 A 的速率为 $5.0 \times 10^7 \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ 。求：(1) 粒子 B 的速率及相对粒子 A 原来速度方向的偏转角；(2) 粒子 A 的偏转角。

解：取如图 3-17 所示的坐标，由于粒子系统属于斜碰，在碰撞平面内根据系统动量守恒定律可取两个分量式，有

$$mv_A = \frac{m}{2}v_B \cos \beta + mv_A' \cos \alpha \quad (1)$$

$$0 = \frac{m}{2}v_B \sin \beta - mv_A' \sin \alpha \quad (2)$$

又由机械能守恒定律，有

$$\frac{1}{2}mv_A^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{m}{2} \right) v_B^2 + \frac{1}{2}mv_A'^2 \quad (3)$$

解式 (1)、(2)、(3) 可得碰撞后 B 粒子的速率为

$$v_B = \sqrt{2(v_A^2 - v_A'^2)} = 4.69 \times 10^7 \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

各粒子相对原粒子方向的偏角分别为

$$\alpha = \arccos \frac{v_A^2 + 3v_A'^2}{4v_A v_A'} = 22^\circ 20' \quad \beta = \arccos \frac{3v_B}{4v_A} = 54^\circ 6'$$

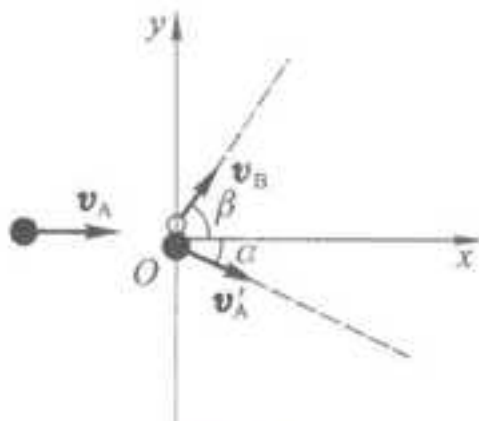


图 3-17

3-36 一辆小车质量为 $m_A = 300\text{kg}$ ，另一辆小车质量为 $m_B = 400\text{kg}$ ，如果两辆车都以 $14\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ 的速率向一个十字路口开去，不幸，它们互相碰撞到了一起，并在 γ 角的方向驶了出去，求：(1) 碰撞后驶在一起的两辆车速度的大小和方向；(2) 碰撞中损耗的能量。

解：建立如图 3-18 (a) 所示坐标系，由动量守恒，得

$$m_A v_0 = (m_A + m_B) v_x$$

$$m_B v_0 = (m_A + m_B) v_y$$

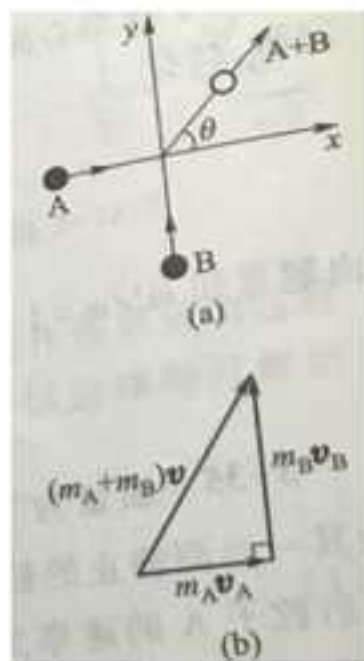


图 3-18

计算得 $v_x = 6\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$, $v_y = 8\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ ，则

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 10\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

$$\gamma = \arctan \frac{v_y}{v_x} = 53.1^\circ$$

(2) 碰撞中损耗的能量

$$\begin{aligned} \Delta E &= \frac{1}{2}(m_A + m_B)v^2 - \frac{1}{2}m_A v_0^2 - \frac{1}{2}m_B v_0^2 \\ &= -3.36 \times 10^4 \text{J} \end{aligned}$$

“-”号表示减少，能量转化为汽车内能。

3-37 如图 3-19 所示, 一质量为 m' 的物块放置在斜面的最底端 A 处, 斜面的倾角为 α , 高度为 h , 物块与斜面的动摩擦因数为 μ , 今有一质量为 m 的子弹以速度 v_0 沿水平方向射入物块并留在其中, 且使物块沿斜面向上滑动, 求物块滑出顶端时的速度大小。

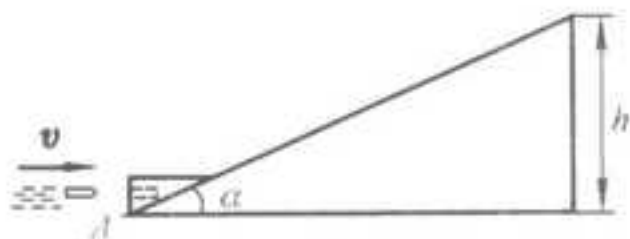


图 3-19

解: 在子弹与物块的撞击过程中, 在沿斜面的方向上, 根据动量守恒有

$$mv_0 \cos \alpha = (m' + m) v_1 \quad (1)$$

在物块上滑的过程中, 若令物块刚滑出斜面顶端时的速度为 v_2 , 并取 A 点的重力势能为零, 由系统的功能原理可得

$$\begin{aligned} & -\mu(m+m')g \cos \alpha \frac{h}{\sin \alpha} \\ &= \frac{1}{2}(m+m')v_2^2 + (m+m')gh - \frac{1}{2}(m+m')v_1^2 \end{aligned} \quad (2)$$

由式 (1)、(2) 可得

$$v_2 = \sqrt{\left(\frac{m}{m'+m}v_0 \cos \alpha\right)^2 - 2gh(\mu \cot \alpha + 1)}$$

3-38 如图 3-20 所示, 一个质量为 m 的小球, 从内壁为半球形的容器边缘点 A 滑下, 设容器质量为 m' , 半径为 R , 内壁光滑, 并放置在摩擦可以忽略的水平桌面上, 开始时小球和容器都处于静止状态, 当小球沿内壁滑到容器底部的点 B 时, 受到向上的支持力为多大?

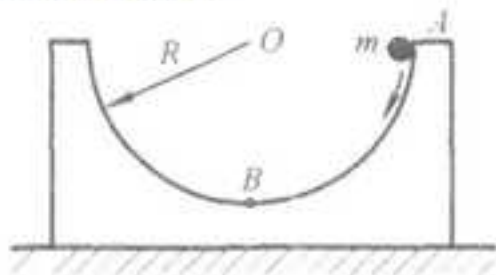


图 3-20

解: 根据水平方向动量守恒定律以及小球在下滑过程中机械能守恒定律可分别得

$$mv_m - m'v_{m'} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{1}{2}mv_m^2 + \frac{1}{2}m'v_{m'}^2 = mgR \quad (2)$$

式中 v_m 、 $v_{m'}$ 分别表示小球、容器相对桌面的速度, 由式 (1)、(2) 可得小球到达容器底部时小球、容器的速度大小分别为

$$v_m = \sqrt{\frac{2m'gR}{m'+m}}$$

$$v_{m'} = \frac{m}{m'} \sqrt{\frac{2m'gR}{m'+m}}$$

由于小球相对地面运动的轨迹比较复杂，为此，可改为以容器为参考系（非惯性系），在容器底部时，小球相对容器的运动速度为

$$v'_m = v_m - (-v_{m'}) = v_m + v_{m'} = \sqrt{\left(\frac{m'+m}{m'}\right)2gR} \quad (3)$$

在容器底部，小球所受惯性力为零，其法向运动方程为

$$F_N - mg = m \frac{v'^2_m}{R} \quad (4)$$

由式(3)、(4)可得小球此时所受到的支持力为

$$F_N = mg \left(3 + \frac{2m}{m'} \right)$$

3-39 打桩机锤的质量为 $m=10t$ ，将质量为 $m'=24t$ ，横截面为 $S=0.25m^2$ （正方形截面）、长达 $l=38.5m$ 的钢筋混凝土桩打入地层，单位侧面积上受泥土的阻力为 $K=2.65 \times 10^4 N \cdot m^{-2}$ ，问：(1) 桩依靠自重能下沉多深？

(2) 在桩稳定后，将锤提升至离桩顶面 $1m$ 处，让其自由下落击桩，假定锤与桩发生完全非弹性碰撞，第一锤能使桩下沉多少？(3) 若桩已下沉 $35m$ 时，锤再一次下落，此时锤与桩碰撞已不是完全非弹性碰撞了，锤在击桩后反弹起 $0.05m$ ，这种情况下，桩又下沉多少？

解：(1) 在锤击桩之前，由于桩的自重而下沉，这时，取桩和地球为系统，根据系统的功能原理，有

$$m'gh_1 = \int_0^{h_1} 4\sqrt{Sh}Kdh \quad (1)$$

桩下沉的距离为

$$h_1 = \frac{m'g}{2\sqrt{SK}} = 8.88 \text{ m}$$

(2) 锤从 $1m$ 高处落下，其末速率为 $v_0 = \sqrt{2gh}$ 。由于锤与桩碰撞是完全非弹性的，锤与桩碰撞后将有共同的速率，按动量守恒定律，有

$$mv_0 = (m'+m)v \quad (2)$$

随后桩下沉的过程中，根据系统的功能原理，有

$$\int_{h_1}^{h_1+h_2} -4\sqrt{Sh}Kdh = -\frac{1}{2}(m'+m)v^2 - (m'+m)gh_2 \quad (3)$$

由式(2)、(3)可解得桩下沉的距离为

$$h_2=0.2m$$

(3) 当桩已下沉 $35m$ 时，再一次锤桩，由于此时的碰撞是一般非弹性的，锤碰撞后的速率可由上抛运动规律得 $v_1 = \sqrt{2gh'}$ ，再根据动量守恒定律，有

$$mv_0 = -m\sqrt{2gh'} + m'v' \quad (4)$$

随后，桩在下沉过程中，再一次应用系统的功能原理，得

$$\int_0^{h_3} -4K\sqrt{S}(35\text{ m} + h) dh = -m'gh_3 - \frac{1}{2}m'v'^2 \quad (5)$$

由式(4)、(5)可得桩再一次下沉的距离 $h_3=0.033\text{m}$ 。

3-40 一系统由质量为 3.0kg 、 2.0kg 和 5.0kg 的三个质点组成，它们在同一平面内运动，其中第一个质点的速度为 $(6.0\text{m}\cdot\text{s}^{-1})\mathbf{j}$ ，第二个质点以与 x 轴成 -30° 角，大小为 $8.0\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ 的速度运动，如果地面上的观察者测出系统的质心是静止的，那么第三个质点的速度是多少？

解：在质点运动的平面内取如图 3-21 所示坐标，按 $\sum m_i \mathbf{v}_i = 0$ 的分量式，有

$$m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x} + m_3 v_{3x} = 0$$

$$m_1 v_{1y} + m_2 v_{2y} + m_3 v_{3y} = 0$$

其中 $v_{2x} = v_2 \cos\theta$ ， $v_{2y} = v_2 \sin\theta$ ， $\theta = -30^\circ$ ，代入后得

$$v_{3x} = -\frac{m_2}{m_3} v_{2x} = -2.8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$v_{3y} = \frac{m_1 v_{1y} + m_2 v_{2y}}{m_3} = -2.0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

则 $\mathbf{v}_3 = -(2.8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1})\mathbf{i} - (2.0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1})\mathbf{j}$ 。

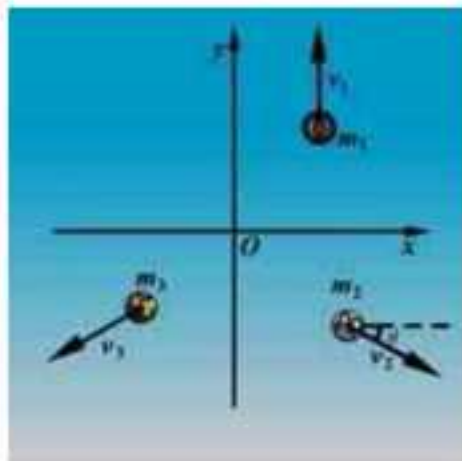


图 3-21

3-41 如图 3-22 所示，质量分别为 $m_1=10.0\text{kg}$ 和 $m_2=6.0\text{kg}$ 的两小球 A 和 B，用质量可略去不计的刚性细杆连接，开始时它们静止在 Oxy 平面上，在图示的外力 $F_1=(8.0\text{N})\mathbf{i}$ 和 $F_2=(6.0\text{N})\mathbf{j}$ 的作用下运动。试求：(1) 它们质心的坐标与时间的函数关系；(2) 系统总动量与时间的函数关系。

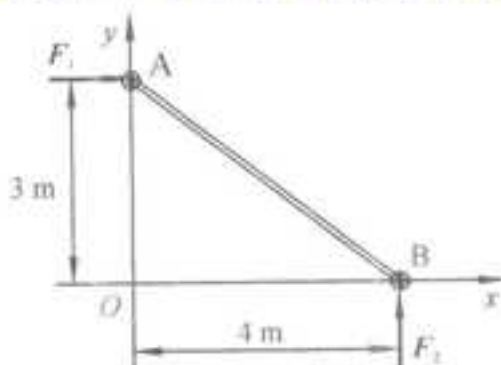


图 3-22

解：(1) 选如图 3-22 所示坐标，则 $t=0$ 时，系统质心的坐标为

$$x_{c0} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} x_{20} = 1.5 \text{ m}$$

$$y_{c0} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} y_{10} = 1.9 \text{ m}$$

对小球与杆整体应用质心运动定律, 得

$$F_x = F_1 = (m_1 + m_2) \frac{dv_x}{dt} \quad (1)$$

$$F_y = F_2 = (m_1 + m_2) \frac{dv_y}{dt} \quad (2)$$

根据初始条件 $t=0$ 时, $v=0$, 分别对式 (1)、式 (2) 积分可得质心速度的分量与时间的函数关系式, 有

$$\int_0^t F_1 dt = \int_0^t (m_1 + m_2) dv_x, \quad v_x = \frac{F_1}{m_1 + m_2} t \quad (3)$$

$$\int_0^t F_2 dt = \int_0^t (m_1 + m_2) dv_y, \quad v_y = \frac{F_2}{m_1 + m_2} t \quad (4)$$

根据初始条件 $t=0$ 时, $x=x_{c0}$, $y=y_{c0}$, 对式 (3)、式 (4) 再一次积分可得质心坐标与时间的函数关系式, 有

$$\int_{x_{c0}}^{x_c} dx_c = \int_0^t \left(\frac{F_1}{m_1 + m_2} t \right) dt$$

$$x_c = x_{c0} + \frac{F_1}{2(m_1 + m_2)} t^2 = 1.5 + 0.25t^2$$

及

$$\int_{y_{c0}}^{y_c} dy_c = \int_0^t \left(\frac{F_2}{m_1 + m_2} t \right) dt$$

$$y_c = y_{c0} + \frac{F_2}{2(m_1 + m_2)} t^2 = 1.9 + 0.19t^2$$

(2) 利用动量定理并考虑到系统的初始状态为静止, 可得系统总动量与时间的函数关系

$$\boldsymbol{p} = \Delta \boldsymbol{p} = \int_0^t (\boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2) dt = (8.0t) \boldsymbol{i} + (6.0t) \boldsymbol{j}$$

3.3 名校考研真题详解

一、选择题

1. 对质点系有下列几种说法: (1) 质点系总动量的改变与内力无关; (2) 质点系总动能的改变与内力无关; (3) 质点系机械能的改变与保守内力无关。在上述说法中正确的是 ()。[北京科技大学 2014 研]

- A. 只有 (1) 是正确的
- B. (1) (3) 是正确的
- C. (1) (2) 是正确的
- D. (2) (3) 是正确的

【答案】B

【解析】(1) 项, 根据冲量定理 $\int F_{\text{合}} dt = \Delta p$, 可得动量的改变与合外力有关而与内力无关。(2) 项, 根据动能定理 $\int \vec{F}_{\text{合}} \cdot d\vec{r} = \Delta E_k$, 可得总动能的改变与合力做功有关, 因此不管是内力还是外力, 只要有净做功就会改变系统的动能。(3) 根据功能关系, 保守力做功会转化成相应的势能, 而机械能包括动能和势能, 因此保守力做功机械能守恒。

2. A、B 两木块质量分别为 m_A 和 m_B , 且 $m_B = 2m_A$, 两者用一轻弹簧连接后静止于光滑水平桌面上, 如图 3-1 所示。若用外力将两木块压近使弹簧被压缩, 然后将外力撤去, 则此后两木块运动动能之比 E_{kA}/E_{kB} 为 ()。
[北京科技大学 2014 研]



图 3-1

- A. $\frac{1}{2}$
- B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$
- C. $\sqrt{2}$
- D. 2

【答案】D

【解析】水平面光滑, 把两木块和弹簧看成一个系统, 可知该系统合外力为零, 动量守恒, 因此

$$p_A + p_B = 0$$

$$\therefore p_A = -p_B$$

根据动能与动量之间的关系可得

$$E_{kA} = \frac{p_A^2}{2m_A}$$

$$E_{kB} = \frac{p_B^2}{2m_B}$$

$$\therefore \frac{E_{kA}}{E_{kB}} = \frac{p_A^2}{2m_A} \times \frac{2m_B}{p_B^2} = \frac{m_B}{m_A} = 2$$

3. 物体在恒力 \vec{F} 作用下作直线运动, 在 t_1 时间内速度由 0 增加到 \vec{v} , 在 t_2 时间内速度由 \vec{v} 增加到 $2\vec{v}$, 设 \vec{F} 在 t_1 时间内做的功是 A_1 , 冲量是 \vec{I}_1 , 在 t_2 时间内做的功是 A_2 , 冲量是 \vec{I}_2 , 则 ()。[北京科技大学 2014 研]

- A. $A_1 = A_2, \vec{I}_1 > \vec{I}_2$
- B. $A_1 < A_2, \vec{I}_1 = \vec{I}_2$
- C. $A_1 > A_2, \vec{I}_1 = \vec{I}_2$
- D. $A_1 = A_2, \vec{I}_1 < \vec{I}_2$

【答案】B

【解析】方法一

根据动能定理可得

$$A_1 = \int \vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{1}{2}mv^2 - 0 = \frac{1}{2}mv^2$$

$$A_2 = \int \vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{1}{2}m(2v)^2 - \frac{1}{2}mv^2 = \frac{3}{2}mv^2 > A_1$$

根据冲量定理可得

$$I_1 = \int F dt = \Delta p = mv - 0 = mv$$

$$I_2 = \int F dt = \Delta p = m2v - mv = mv = I_1$$

方法二

在恒力作用下物体运动的 $v-t$ 曲线如图 3-2 所示

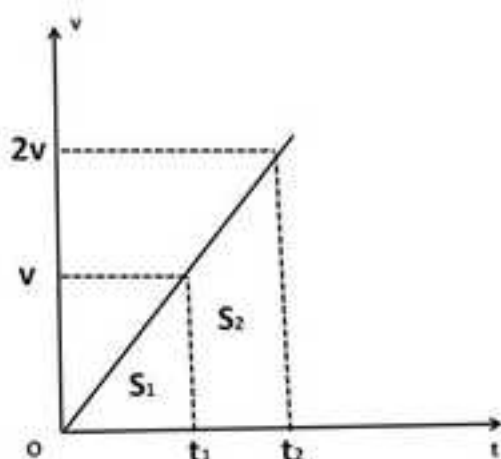


图 3-2

因此两段时间内做功分别为

$$A_1 = FS_1$$

$$A_2 = FS_2 > A_1$$

4. 如图 3-3 所示, 有一个小块物体, 置于一个光滑的水平桌面上, 有一绳其一端连结此物体, 另一端穿过桌面中心的小孔, 该物体原以角速度 ω 在距孔为 R 的圆周上转动, 今将绳从小孔缓慢往下拉, 则该物体 ()。 [电子科技大学 2011 研]

- A. 动能不变, 动量改变
- B. 动量不变, 动能改变
- C. 角动量不变, 动量改变
- D. 角动量改变, 动量改变
- E. 角动量不变, 动能、动量都改变

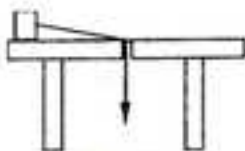


图 3-3

【答案】E

3. 在如图 3-4 所示的装置中, 当不太长的条形磁铁在闭合线圈内作振动时 (忽略空气阻力) () [暨南大学 2010 研]

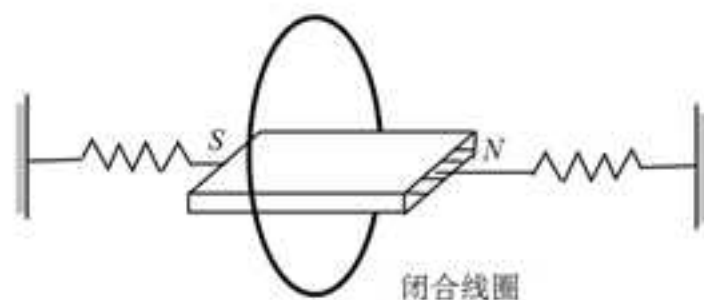


图 3-4

- A. 振幅会逐渐加大
- B. 振幅会逐渐减小
- C. 振幅不变
- D. 振幅先减小后增大

【答案】B

【解析】从能量的角度考虑，磁铁振动在闭合线圈中产生电流，变成热消耗掉，而热不能转化为机械能，所以磁铁的机械能逐渐减小，又因为机械能与振动的振幅平方成正比，所以磁铁的振幅也逐渐减小。

二、填空题

1. 一个质点在指向中心的力 $\vec{F} = -\frac{k}{r^2}\vec{r}$ (k 为正常数) 的作用下，作半径为 r 的圆周运动，则质点的动能为，机械能为。(选取距力心无穷远处的势能为零) [北京科技大学 2014 研]

【答案】 $\frac{k}{2r}$; $-\frac{k}{2r}$

【解析】质点做圆周运动，由向心力公式可得

$$\begin{aligned} \frac{k}{r^2} &= \frac{mv^2}{r} \\ \therefore mv^2 &= \frac{k}{r} \\ \therefore E_k &= \frac{1}{2}mv^2 = \frac{k}{2r} \end{aligned}$$

根据保守力的功能关系可得

$$E_p = \int \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_r^\infty -\frac{k}{r^2} dr = \frac{k}{r} \Big|_r^\infty = -\frac{k}{r}$$

由机械能与动能、势能的关系可得

$$E = E_k + E_p = \frac{k}{2r} - \frac{k}{r} = -\frac{k}{2r}$$

2. 某人拉住在河水中的船，使船相对于岸不动，以河岸为参考系，人对船所做的功，以流水为参考系，人对船所做的功。(填 >0 、 $=0$ 或 <0) [北京科技大学 2014 研]

【答案】 $=0$; >0

【解析】根据做功的表达式 $W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r}$ ，可得当以河岸为参考系时，船的位移为零，因此人对船做功为零；当以流水为参考系时，船相对于流水的位移是逆流而上，人对船的拉力方向也是逆流而上，力与位移方向一致，做正功。

3. 一质点系所受的合外力为零, 则该质点系的动量_____ (填一定、否或不一定) 守恒; 机械能_____ (填一定、否或不一定) 守恒. [湖南大学 2007 研]

【答案】一定; 不一定

三、计算题

1. 质量为 M 的匀质棒, 长为 L , 可绕水平轴 O 无摩擦地在竖直平面内转动. 从水平位置静止释放, 到达竖直位置时, 与静止在地面上的质量为 $M/3$ 的小球作完全弹性碰撞, 如图 3-5 所示. 求:

- (1) 棒从水平位置下摆至与水平方向夹角为 30° 时, 棒的角加速度 α ;
- (2) 碰撞后小球获得的速率 v . [北京科技大学 2014 研]

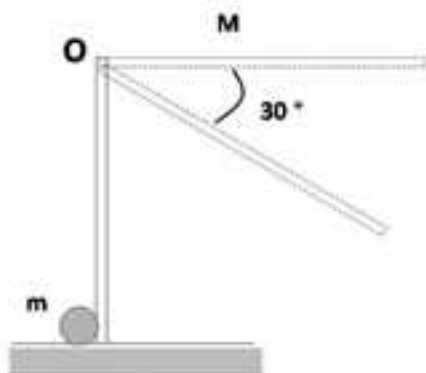


图 3-5

解: (1) 匀质杆运动过程中的受力分析如图 3-6 所示

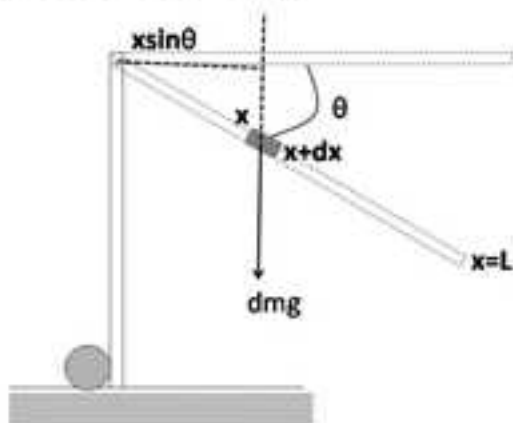


图 3-6

因为水平轴光滑, 匀质杆在运动过程中仅受到重力矩的作用, 如上图所示取线元 dx , 则线元 dx 的质量为

$$dm = \frac{M}{L} dx$$

线元所受重力大小为

$$dG = g dm = \frac{Mg}{L} dx$$

线元产生的重力矩大小为

$$dM = x \sin \theta dG = \frac{Mg \sin \theta}{L} x dx$$

积分可得匀质杆在运动过程中任意位置的重力矩

$$M = \int dM = \int_0^L \frac{Mg \sin \theta}{L} x dx = \frac{Mg \sin \theta}{L} \frac{x^2}{2} \Big|_0^L = \frac{MgL \sin \theta}{2}$$

匀质杆绕一端转动的转动惯量为

$$J = \frac{1}{3} ML^2$$

根据转动定律可得

$$M = J\alpha$$

$$\therefore \alpha = \frac{M}{J} = \frac{3g \sin \theta}{2L}$$

所以当棒从水平位置下摆至与水平方向夹角为 30° 时, 棒的角加速度

$$\alpha = \frac{3g \sin \theta}{2L} = \frac{3g}{4L}$$

(2) 由功能关系可得, 在碰撞前一瞬间

$$Mg \frac{L}{2} = \frac{1}{2} J\omega^2$$

$$\therefore Mg \frac{L}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} ML^2 \omega^2$$

$$\therefore \omega = \sqrt{\frac{3g}{L}}$$

与水平面上的小球发生碰撞时满足角动量守恒

$$J\omega = J\omega' + \frac{LMv}{3}$$

由于发生完全弹性碰撞, 能量守恒

$$\frac{1}{2} J\omega^2 = \frac{1}{2} J\omega'^2 + \frac{1}{2} mv^2$$

$$m = \frac{M}{3}$$

联立上式可得

$$v = \omega L = \sqrt{3gL}$$

2. 有一质量为 $m=5\text{kg}$ 的物体, 在 0 到 10 秒内, 受到如图 3-7 所示的变力 F 的作用, 由静止开始沿 x 轴正向运动, 而力的方向始终沿 x 轴的正方向, 则 10 秒内变力 F 作做的功为多大? [浙江大学 2007 研]

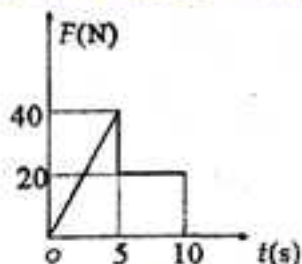


图 3-7

解: 由动量定理可得

$$I = \int F dt = m\Delta v \Rightarrow \int_0^5 8t dt = m\Delta v \Rightarrow \Delta v = \frac{8 \times \frac{1}{2} t^2 \Big|_0^5}{5} = 20\text{m/s}$$

所以, 0-5s

$$W = \Delta E_k = \frac{1}{2} m(\Delta v)^2 = \frac{1}{2} \times 5 \times 400 = 1000\text{J}$$

5-10s

$$a = \frac{F}{m} = 4\text{m/s}^2$$

$$v_{10} = v_5 + at = 40\text{m/s} \Rightarrow S_{5-10} = v_5 t = 30\text{m/s} \times 5\text{s} = 150\text{m}$$

$$W = 150\text{m} \times 20\text{N} = 3000\text{J}$$

所以

$$W_{\Delta} = 1000 + 3000 = 4000\text{J}$$

3. 如图 3-8 所示, 质量为 m 的弹丸 A 穿过摆锤 B 后, 弹丸 A 的速度由 v 减少到 $v/2$, 已知摆锤的质量为 m' , 摆线长度为 l , 如果摆锤能在垂直平面内完成一个完全的圆周运动, v 的最小值应为多少? [郑州大学 2008 研]

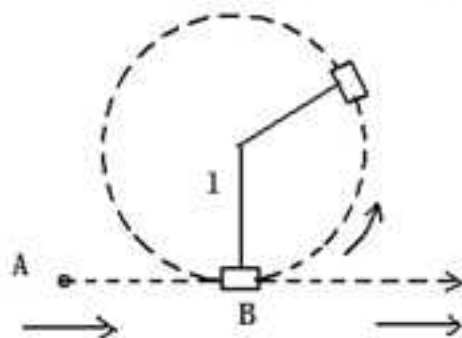


图 3-8

解: 设摆锤受撞击后的最小速度为 v' . 在最高点时, 重力提供向心力 $m'g = m' \frac{v'^2}{L}$, 可得

$$v'^2 = gl$$

从最低点到最高点, 摆锤的机械能守恒, 则有

$$\frac{1}{2} m' v'^2 + m' g \cdot 2l = \frac{1}{2} m' v^2$$

可得

$$v^2 = \frac{5}{2} gl$$

碰撞过程, 动量守恒, 则

$$mv = m \frac{v}{2} + m' v'$$

所以

$$v = \frac{5glm'}{m}$$

4.1 复习笔记

刚体是指内部任意两点间的距离都保持恒定的一种理想化的物体。

一、刚体的定轴转动

1. 概述

(1) 刚体的运动

①平动：刚体内任意两点间的连线总是平行于它们的初始位置间的连线时刚体所做的运动。

②转动：刚体中所有的点都绕同一直线作圆周运动时刚体所做的运动。该直线称为转轴。

(2) 转动的分类

①定轴转动：转轴的位置或方向固定不动且不随时间改变（如车床上工件的转动）时刚体所做的运动。此时的转轴为固定转轴。

②非定轴转动：转轴的位置或方向随时间改变时刚体所做的转动。此时的转轴为瞬时转轴（如旋转陀螺）。

2. 刚体转动的角速度和角加速度

(1) 角坐标

角坐标是指可确定刚体的方位的原点 O 到参考平面上的任一点 P 的位矢 r 与 Ox 轴的夹角 θ 。当刚体绕固定轴 Oz 轴转动时，角坐标 θ 是时间 t 的函数，即 $\theta = \theta(t)$ 。

(2) 刚体转动的方向规定

①当 r 从 Ox 轴开始沿逆时针方向转动时，角坐标 θ 为正；

②当 r 从 Ox 轴开始沿顺时针方向转动时，角坐标 θ 为负。

按照这个规定，转动正方向为逆时针转向。于是对于绕定轴转动的刚体，可由角坐标 θ 的正负来表示其方位。

(3) 角速度表达式

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

$d\theta$ 为刚体在 dt 时间内的角位移。

(4) 由角速度判断转动方向

按照上面关于角坐标 θ 正、负的规定：

①如 $d\theta > 0$ ，有 $\omega > 0$ ，这时刚体绕定轴作逆时针转动；

②如 $d\theta < 0$ ，有 $\omega < 0$ ，这时刚体绕定轴作顺时针转动。

只有刚体在绕定轴转动的情况下，其转动方向才可用角速度的正负来表示。

(5) 角速度矢量方向的判断

角速度 ω 的方向可由右手法则确定：角速度 ω 的方向是把右手的拇指伸直，其余四指弯曲，使弯曲的方向与刚体转动方向一致时拇指所指的方向。

(6) 角加速度

①概念

角加速度是指当时间间隔 Δt 趋近于零时， $\Delta\omega/\Delta t$ 趋近于的某一极限值，又称瞬时角加速度，即

$$\alpha = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt}$$

②方向

对于绕定轴转动的刚体，角加速度 α 的方向也可由其正负来表示。

a. 在如图 4-1 (a) 所示的情况下，角速度 ω_2 的方向与 ω_1 的方向相同，且 $\omega_2 > \omega_1$ ，那么 $\Delta\omega > 0$ ， α 为正值，刚体作加速转动；

b. 在如图 4-1 (b) 所示的情况下， ω_2 的方向虽与 ω_1 的方向相同，但 $\omega_2 < \omega_1$ ，那么 $\Delta\omega < 0$ ， α 为负值，刚体作减速转动。

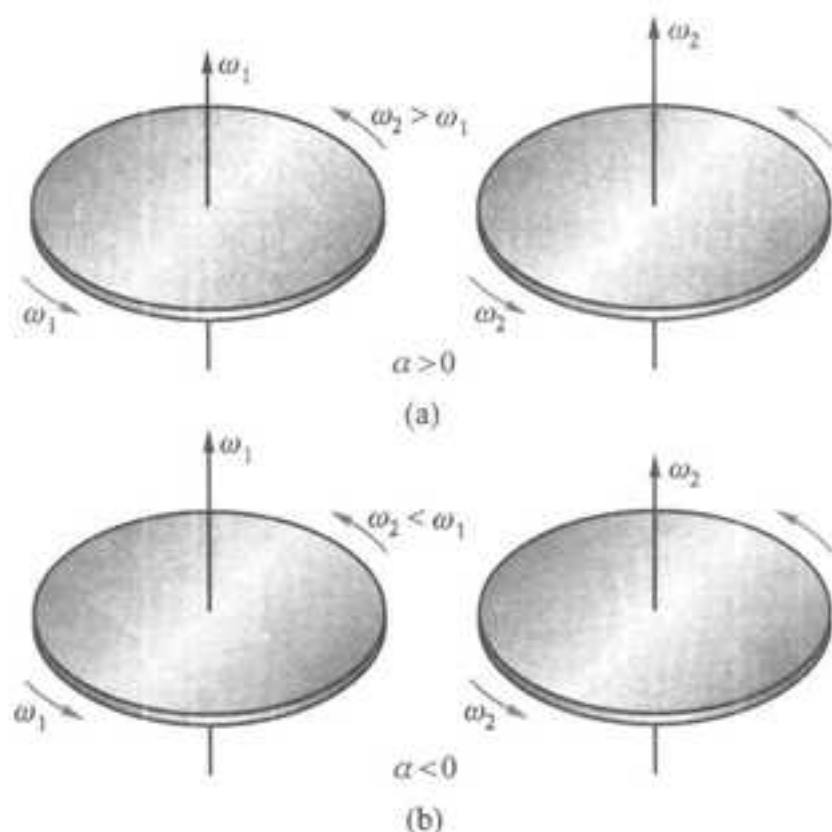


图 4-1 定轴转动的角加速度

3. 匀变速转动公式

(1) 匀变速转动的概念

匀变速转动是指刚体绕定轴转动，在任意相等时间间隔 Δt 内，角速度的增量都相等时的运动，匀变速转动的角加速度为一恒量，即 $\alpha = \text{恒量}$ 。

(2) 转动公式

刚体绕定轴作匀变速转动时角位移、角速度、角加速度和时间之间的关系式，它们与质点匀变速直线运动公式对比见表 4-1。

表 4-1

质点作匀变速直线运动	刚体绕定轴作匀变速转动
$v = v_0 + at$	$\omega = \omega_0 + \alpha t$
$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2$	$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2$
$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$	$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0)$

4. 角量与线量的关系

当刚体绕定轴转动时，组成刚体的所有质点都绕定轴作圆周运动。

(1) 速度关系

$$v = r\omega$$

可知，刚体上各点的线速度 v 与各点到转轴的垂直距离 r 成正比，距轴越远，线速度越大。

(2) 加速度关系

点 P 的切向加速度和法向加速度则分别为

$$a_t = r\alpha$$

$$a_n = r\omega^2$$

由上两式，同样可以看出，对一绕定轴转动的刚体，距轴越远处，其切向加速度和法向加速度也越大。

二、力矩、转动定律、转动惯量

1. 力矩

力矩用来描述力对刚体转动的作用。

(1) 力矩的概念

力矩是指力的大小与力臂的乘积。如图 4-2 所示平面是刚体在 Oxy 平面上的一个横截平面，它可绕通过点 O 且垂直于该平面的 Oz 轴旋转，力 F 亦作用在此平面上的点 P ，点 P 相对点 O 的位矢为 r ， F 和 r 之间的夹角为 θ ，而从点 O 到力 F 的作用线的垂直距离 d 称为力对转轴的力臂，其值 $d=r\sin\theta$ ，力 F 的大小和力臂 d 的乘积，称为力 F 对转轴的力矩，用 M 表示，即

$$M = Fd = Fr\sin\theta$$

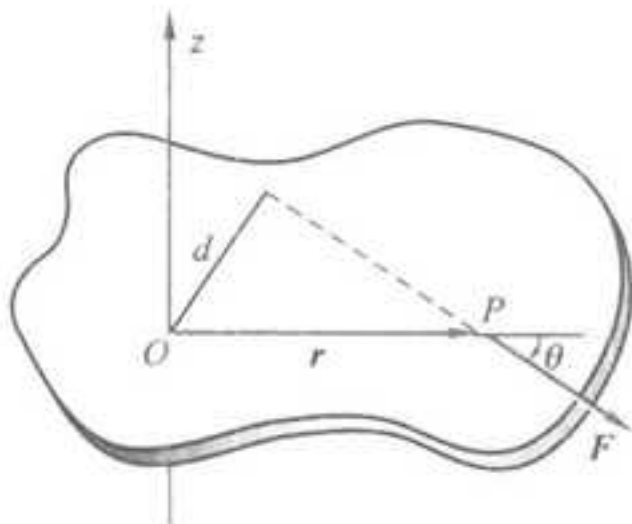


图 4-2 力矩

(2) 力矩的矢量

①表达式

力矩不仅有大小，而且有方向。

由矢量的矢积定义，力矩矢量 M 可用 r 和 F 的矢积表示，即

$$M = r \times F$$

M 的大小为

$$M = Fr\sin\theta$$

②方向判断

M 的方向垂直于 r 与 F 所构成的平面，力矩方向用右手法则：力矩的方向是把右手拇指伸直，其余四指弯曲，弯曲的方向是由 r 通过小于 180° 的角 θ 转向 F 的方向，此时拇指所指的方向。

对定轴转动来说，用矢积表示力矩的方向，与先规定转动正方向再按力矩的正负来确定力矩方向是一致的。

(3) 合力矩

合力矩是指在与转轴相垂直的平面内、同时作用在一个绕定轴转动的刚体上的所有外力的外力矩的代数和，即

$$M = -F_1 r_1 \sin\theta_1 + F_2 r_2 \sin\theta_2 + F_3 r_3 \sin\theta_3$$

若 $M > 0$ ，合力矩的方向沿 Oz 轴正向；若 $M < 0$ ，合力矩方向则与 Oz 轴正向相反。

注：由于刚体内质点间相互作用的内力总是成对出现的，并遵守牛顿第三定律，故刚体内各质点间的作用力对转轴的合内力矩亦应为零，即

$$M = \sum M_i = 0$$

(4) 力矩的单位

在国际单位制中，力矩的单位名称为牛顿米，符号为 $N \cdot m$ ，力矩的量纲为 ML^2T^{-2} 。

2. 转动定律

转动定律反映外力矩和角加速度之间的关系。

(1) 转动惯量概念

转动惯量是指绕定轴转动的刚体本身的性质和转轴的位置。表达式为 $\sum \Delta m_i r_i^2$ 。对于绕定轴转动的刚体，它为一恒量，以 J 表示，即

$$J = \sum \Delta m_i r_i^2$$

(2) 转动定律

转动定律是指刚体绕定轴转动时，刚体的角加速度与它所受的合外力矩成正比，与刚体的转动惯量成反比的关系，其表达式为

$$M = J\alpha$$

如同牛顿第二定律是解决质点运动问题的基本定律一样，转动定律是解决刚体定轴转动问题的基本方程。

3. 转动惯量

(1) 转动惯量的物理意义

将转动定律与牛顿第二定律相比可得：外力矩 M 和外力 F 相对应，角加速度 α 与加速度 a 相对应，转动惯量 J 与质量 m 相对应。

转动惯量的物理意义：当以相同的力矩分别作用于两个绕定轴转动的不同刚体时，它们所获得的角加速度一般是不一样的。转动惯量大的刚体所获得的角加速度小，即角速度改变得慢，也就是保持原有转动状态的惯性大；反之，转动惯量小的刚体所获得的角加速度大，即角速度改变得快，也就是保持原有转动状态的惯性小。

所以，转动惯量是描述刚体在转动中的惯性大小的物理量。

(2) 转动惯量的计算公式

由 $J = \sum (\Delta m_i r_i^2)$ 可以看出，转动惯量 J 等于刚体上各质点的质量与各质点到转轴的距离平方的乘积之和。如果刚体上的质点是连续分布的，则其转动惯量可以用积分进行计算，即

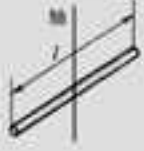





$$J = \int r^2 dm$$

(3) 转动惯量的单位

在国际单位制中，转动惯量的单位名称是千克二次方米，符号是 $\text{kg}\cdot\text{m}^2$ ，转动惯量的量纲是 ML^2 。

(4) 常见的几种刚体的转动惯量

表 4-2 几种刚体的转动惯量

 <p>细棒(转动轴通过中心与棒垂直)</p> $J = \frac{ml^2}{12}$ <p>(a)</p>	 <p>圆柱体(转动轴沿几何轴)</p> $J = \frac{mR^2}{2}$ <p>(b)</p>	 <p>薄圆环(转动轴沿几何轴)</p> $J = mR^2$ <p>(c)</p>
 <p>球体(转动轴沿球的任一直径)</p> $J = \frac{2mR^2}{5}$ <p>(d)</p>	 <p>圆筒(转动轴沿几何轴)</p> $J = \frac{m}{2}(R_1^2 + R_2^2)$ <p>(e)</p>	 <p>细棒(转动轴通过棒的一端与棒长垂直)</p> $J = \frac{ml^2}{3}$ <p>(f)</p>

(5) 影响转动惯量的因素

- ①与刚体的体密度 ρ 有关;
- ②与刚体的几何形状(及体密度 ρ 的分布)有关;
- ③与转轴的位置有关.

如表 4-2 中, 细棒对通过它中心点的轴和通过它一端的轴的转动惯量是不同的, 转轴通过质心的转动惯量可用 J_c 表示.

4. 平行轴定理

(1) 概念

平行轴定理是指刚体对通过质心的轴线的转动惯量与刚体对平行于该轴线的另一条轴线的转动惯量的关系. 如图 4-3 所示, 设通过刚体质心的轴线为 z_c 轴, 刚体相对这个轴线的转动惯量为 J_c . 如果有另一轴线 z 与通过质心的轴线 z_c 相平行, 可以证明, 刚体对通过 z 轴的转动惯量为

$$J = J_c + md^2$$

式中 m 为刚体的质量, d 为两平行轴之间的距离.

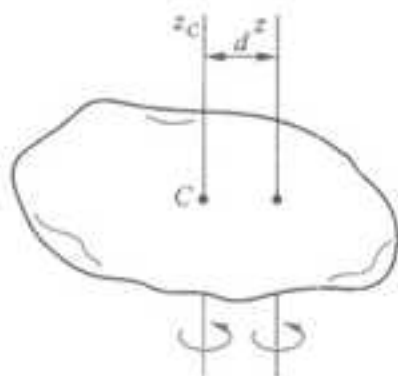


图 4-3 平行轴定理

(2) 结论

刚体对通过质心轴线的转动惯量最小, 而对任何与质心轴线相平行的轴线的转动惯量 J 都大于 J_c , 即 $J > J_c$. 平行轴定理不仅有助于计算转动惯量, 而且对研究刚体的滚动也是很有帮助的.

三、角动量角动量守恒定律

1. 质点的角动量定理和角动量守恒定律

(1) 质点的角动量

① 概念

质点的角动量如图 4-4 所示. 设有一个质量为 m 的质点位于直角坐标系中点 A , 该点相对原点 O 的位矢为 r , 并具有速度 v (即动量为 $p=mv$), 则定义, 质点 m 对原点 O 的角动量为

$$L = r \times p = mr \times v$$

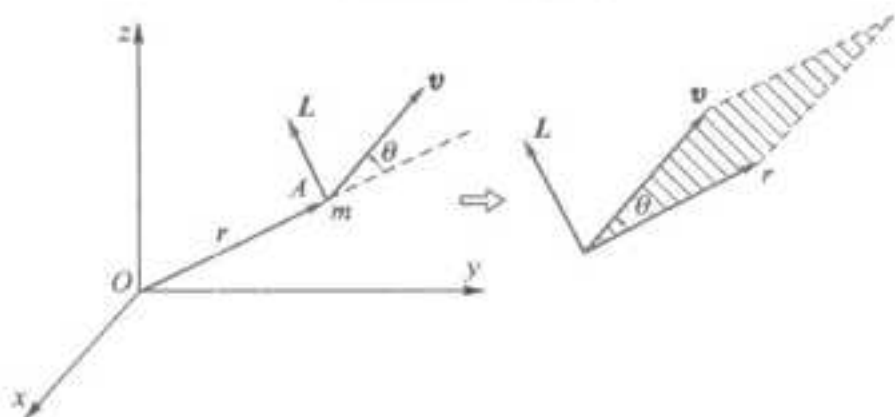


图 4-4 质点的角动量

② 方向及大小

质点的角动量 L 是一个矢量, 它的方向垂直于 r 和 v (或 p) 的平面, 并遵守右手法则: 质点的角动量的方向是右手拇指伸直, 当四指由 r 经小于 180° 的角 θ 转向 v (或 p) 时, 拇指的指向.

质点角动量 L 的值, 由矢量的矢积法可知

$$L = rmv \sin \theta$$

式中 θ 为 r 与 v (或 p) 之间的夹角.

注:

a. 质点的角动量是与位矢 r 和动量 p 有关的, 即与参考点 O 的选择有关. 因此在讲述质点的角动量时, 必须指明是对哪一点的角动量.

b. 若质点在半径为 r 的圆周上运动时, 如以圆心 O 为参考点, 那么 r 与 v (或 p) 总是相垂直的, 于是质点对圆心 O 的角动量 L 的大小为

$$L = rmv = mr^2 \omega$$

(2) 质点的角动量定理

① 冲量矩

冲量矩是指力矩与作用时间的乘积.

② 质点的角动量定理

质点的角动量定理是指对同一参考点 O , 质点所受的冲量矩等于质点角动量的增量.

设质量为 m 的质点, 在合力 F 作用下, 其运动方程可写成

$$M = \frac{d}{dt}(r \times m v) = \frac{dL}{dt}$$

上式表明, 作用于质点的合力对参考点 O 的力矩, 等于质点对该点 O 的角动量随时间的变化率. 取积分有

$$\int_{t_1}^{t_2} M dt = L_2 - L_1$$

式中 L_1 和 L_2 分别为质点在时刻 t_1 和 t_2 对参考点 O 的角动量, $\int_{t_1}^{t_2} M dt$ 为质点在时间间隔 $t_2 - t_1$ 所受的冲量矩. 上式的物理意义即为质点的角动量定理.

(3) 质点的角动量守恒定律

质点的角动量守恒定律是指当质点所受对参考点 O 的合力矩为零时, 质点对该参考点 O 的角动量为—恒量. 若质点所受合力矩为零, 即 $M=0$, 则有

$$L = r \times m v = \text{恒矢量}$$

注意: 质点的角动量守恒的条件是合力矩 $M=0$ 的两种情况

① 合力 $F=0$;

②合力 F 虽不为零，但合力 F 通过参考点 O ，致使合力矩为零。例如，质点作匀速圆周运动。

(4) 角动量的单位

在国际单位制中，角动量的单位是千克二次方米每秒，符号为 $\text{kg}\cdot\text{m}^2\cdot\text{s}^{-1}$ ，角动量的量纲为 ML^2T^{-1} 。

2. 刚体定轴转动的角动量定理和角动量守恒定律

(1) 刚体定轴转动的角动量

刚体对定轴转动的角动量是指刚体上所有质点对定轴的角动量之和。

设有一刚体以角速度 ω 绕定轴 Oz 转动，其中质点 m_i 对轴 Oz 的角动量为 $m_i v_i r_i = m_i r_i^2 \omega$ ，于是刚体上所有质点对轴 Oz 的角动量，即刚体对定轴 Oz 的角动量为

$$L = \sum_i m_i r_i^2 \omega = \left(\sum_i m_i r_i^2 \right) \omega$$

式中 $\sum_i m_i r_i^2$ 为刚体绕轴 Oz 的转动惯量 J ，于是刚体对定轴 Oz 的角动量为

$$L = J \omega$$

(2) 刚体定轴转动的角动量定理

①冲量矩

冲量矩是指力矩对作用时间的积分。

设有一转动惯量为 J 的刚体绕定轴转动，在合外力矩 M 的作用下，有

$$M = \frac{d}{dt}(J \omega) = \frac{dL}{dt}$$

上式表明，刚体绕某定轴转动时，作用于刚体的合外力矩等于刚体绕此定轴的角动量随时间的变化率。

注意：

a. 该式是转动定律的另一表达方式，但其意义更加普遍。即使在绕定轴转动物体的转动惯量 J 因内力作用而发生变化时，式 $M = J\alpha$ 已不适用，但该式仍然成立。

b. 只有在定轴转动的情况下， M 的方向与 L 的方向相平行。

将上式的 M 对时间积分得冲量矩（角冲量）为

$$\int_{t_1}^{t_2} M dt = \int_{L_1}^{L_2} dL = L_2 - L_1 = J \omega_2 - J \omega_1$$

②角动量定理

刚体定轴转动的角动量定理是指当转轴给定时，作用在物体上的冲量矩等于角动量的增量，它与质点的角动量定理在形式上很相似。

当物体在转动过程中，其内部各质点相对于转轴的位置发生了变化，那么物体的转动惯量 J 也必然随时间变化，则更普遍的式子有

$$\int_{t_1}^{t_2} M dt = J_2 \omega_2 - J_1 \omega_1$$

注意：在物理学中，量纲相同的物理量，多数有物理意义上的内在联系，但有的则没有。

(3) 刚体定轴转动的角动量守恒定律

角动量守恒定律是指如果物体所受的合外力矩等于零，或者不受外力矩的作用，物体的角动量保持不变。其表达式为

$$J \omega = \text{恒量}$$

四、力矩做功刚体绕定轴转动的动能定理

1. 力矩做功

力矩做功是指刚体在外力矩的作用下绕定轴转动而发生角位移。这是力矩的空间累积作用。

设刚体在对转轴的外力矩 M 下，转动的角位移为 $d\theta$ ，则力矩做的元功为

$$dW = M d\theta$$

上式表明，力矩所作的元功 dW 等于力矩 M 与角位移 $d\theta$ 的乘积。

(1) 恒外力矩做功

恒外力矩的大小和方向都不变。当刚体在此力矩作用下转过角 θ 时，力矩所做功为

$$W = \int_0^\theta dW = M \int_0^\theta d\theta = M\theta$$

即力矩对绕定轴转动的刚体所作的功，等于力矩的大小与转过的角度 θ 的乘积。

(2) 变力矩做功

如果作用在绕定轴转动的刚体上的力矩是变化的，那么，变力矩所作的功则为

$$W = \int M d\theta$$

注意：上述两式应理解为合外力矩对刚体所作的功。

2. 力矩的功率

力矩的功率是指单位时间力矩对刚体所作的功，用 P 表示。设刚体在力矩作用下绕定轴转动时，在时间 dt 内转过 $d\theta$ 角，则力矩的功率为

$$P = \frac{dW}{dt} = M \frac{d\theta}{dt} = M\omega$$

即力矩的功率等于力矩与角速度的乘积。当功率一定时，转速越低，力矩越大；反之，转速越高，力矩越小。

3. 转动动能

刚体绕定轴转动的转动动能等于刚体的转动惯量与角速度二次方的乘积的一半。

刚体可看成是由许许多多的质点所组成，当刚体以角速率 ω 绕定轴转动时，第 i 个质量元的动能为

$$\frac{1}{2} \Delta m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \Delta m_i r_i^2 \omega^2$$

整个刚体的动能为

$$E_k = \sum_i \frac{1}{2} \Delta m_i r_i^2 \omega^2 = \frac{1}{2} \left(\sum_i \Delta m_i r_i^2 \right) \omega^2$$

式中 $\sum_i \Delta m_i r_i^2$ 为刚体的转动惯量，故

$$E_k = \frac{1}{2} J \omega^2$$

即得刚体绕定轴转动的转动动能，这与质点的动能 $E_k = \frac{1}{2} mv^2$ ，在形式上完全相似。

4. 刚体绕定轴转动的动能定理

刚体绕定轴转动的动能定理是指合外力矩对绕定轴转动的刚体所作的功等于刚体转动动能的增量。

由合外力矩对刚体做功，使得刚体的角速率从 ω_1 变到 ω_2 ，合外力矩对刚体所作的功为

$$W = \int dW = J \int_{\omega_1}^{\omega_2} \omega d\omega$$

即

$$W = \frac{1}{2} J \omega_2^2 - \frac{1}{2} J \omega_1^2$$

由上式可得刚体绕定轴转动的动能定理。

5. 质点运动与刚体定轴转动的公式比较

把质点运动与刚体定轴转动的一些重要物理量和重要公式，类比列成表 4-3，供采用。

表 4-3 质点运动与刚体定轴转动对照表

质点运动		刚体定轴转动	
速度	$\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$	角速度	$\boldsymbol{\omega} = \frac{d\theta}{dt}$
加速度	$\boldsymbol{a} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt}$	角加速度	$\boldsymbol{\alpha} = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}$
力	\boldsymbol{F}	力矩	\boldsymbol{M}
质量	m	转动惯量	$J = \int r^2 dm$
动量	$\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$	角动量	$L = J\boldsymbol{\omega}$
牛顿第二定律	$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$ $\boldsymbol{F} = \frac{d\boldsymbol{p}}{dt}$	转动定律	$\boldsymbol{M} = J\boldsymbol{\alpha}$ $\boldsymbol{M} = \frac{dL}{dt}$
动量定理	$\int \boldsymbol{F} dt = m\boldsymbol{v}_2 - m\boldsymbol{v}_1$	角动量定理	$\int \boldsymbol{M} dt = J\boldsymbol{\omega}_2 - J\boldsymbol{\omega}_1$
动量守恒定律	$\boldsymbol{F} = 0, m\boldsymbol{v} = \text{恒矢量}$	角动量守恒定律	$\boldsymbol{M} = 0, J\boldsymbol{\omega} = \text{恒量}$
动能	$\frac{1}{2}mv^2$	转动动能	$\frac{1}{2}J\omega^2$
功	$W = \int \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}$	力矩的功	$W = \int \boldsymbol{M} d\theta$
动能定理	$W = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$	转动动能定理	$W = \frac{1}{2}J\omega_2^2 - \frac{1}{2}J\omega_1^2$

五、刚体的平面平行运动

1. 定义

刚体的平面平行运动是指刚体上各质点都在平行于一固定参考平面的平面内运动。

2. 刚体运动的动能

刚体的平面平行运动动能等于质心的平动动能与刚体绕质心的转动动能之和。

经分析可知，刚体的平面平行运动可归结为质心的运动和绕质心轴的转动，则刚体平面平行运动的动能可写成

$$E_k = \frac{1}{2}mv_c^2 + \frac{1}{2}J_c\omega^2$$

对于以半径为 R 的圆球、圆柱体或圆环等刚体，在平面上滚动时，其质心的速度 $v_c = R\omega$ ，于是上式也可以写成

$$E_k = \frac{1}{2}mR^2\omega^2 + \frac{1}{2}J_c\omega^2$$

对于刚体的势能则可视为是质心的势能，即

$$E_p = mgh_c$$

六、刚体进动

1. 进动概念

刚体的进动是指刚体在不倒下的情况下能绕轴旋转的运动。图 4-5 是一个较简单的陀螺示意图，图中 Ox 轴沿水平方向，陀螺轴的一端为球形，可将它放在竖直杆顶部 O 处的球形凹槽内，当它以较大的角速度绕自转轴转动时，陀螺不仅不会倒下，而且还能绕铅直轴旋转，陀螺的这种运动称之为刚体的进动，又称旋进。

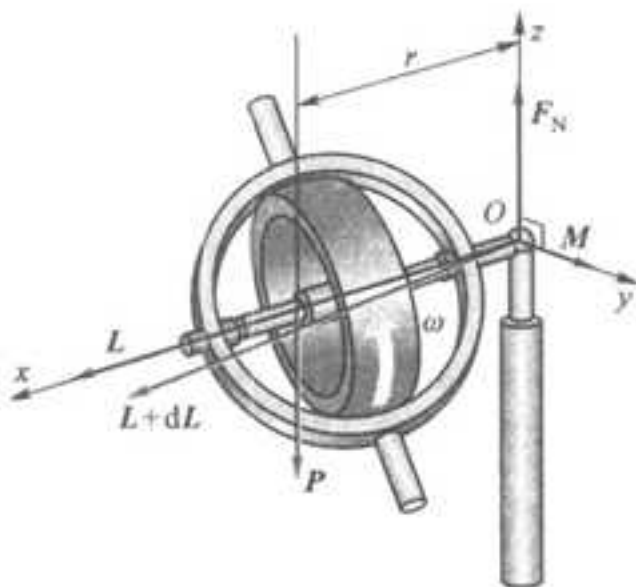


图 4-5 陀螺旋进示意图

2. 旋进的应用

- (1) 用于航天器调整姿态和变更轨道；
- (2) 直升机飞行时的稳定性。

七、万有引力的牛顿命题

1. 物体间引力的计算

(1) 引力与引力势能

① 引力

由万有引力定律得

$$F = -G \frac{mm'}{r^2} e_r$$

② 引力势能

质点 m 在质点 m' 的引力场中的引力势能为

$$E_p = -Gmm' \frac{1}{r}$$

③ 引力与引力势能的关系

$$F = -\frac{dE_p}{dr} e_r$$

④ 求引力的方法

a. 先分别求出 n 个质点的每一个对质点 m 的引力，再求这些引力的矢量和，对连续分布的物体则要用积分运算；

b. 先求出 n 个质点的每一个对质点 m 的引力势能，再求这些引力势能的代数和，并利用上式求导数即可。在

一般情况下，用第二种方法要简便些。

(2) 匀质球壳与质点间引力

① 引力势能

质点 m 在球壳外点 P 处的引力势能为

$$E_p = -G \frac{mm'}{r} \quad (r > R)$$

r 为球壳中心到球壳外点 P 的距离，上式表明，质点 m 放在匀质球壳外，其引力势能如同球壳的质量全部集中于球心的情况一样。

② 引力

球壳外质点 m 所受的引力为

$$F = -\frac{dE_p}{dr} e_r = -G \frac{mm'}{r^2} e_r \quad (r > R)$$

上式表明，匀质球壳外面的质点所受的引力，与把球壳的质量集中于球心时的一样，这是万有引力与距离二次方成反比的一个必然结论。

(3) 匀质球体间的引力

质量分别为 m_1' 和 m_2' 的两匀质球体之间的引力势能和引力为

$$E_p = -G \frac{m_1' m_2'}{r}$$

$$F = -G \frac{m_1' m_2'}{r^2} e_r$$

式中 r 为两球体球心间的距离，从上述结果可以看出，两匀质球体之间的引力，与把两球体的质量集中于球心——即视为质点之间的引力相同。

2. 椭圆轨道的论证

开普勒给出了太阳系中行星运动的椭圆轨道，而牛顿已能用万有引力定律验证出行星轨道是椭圆。

八、经典力学的成就和局限性

1. 经典力学只适用于处理物体的低速运动问题，而不能用于处理高速运动问题

经典力学把时间和空间看作是彼此无关的；把时间和空间的基本属性也看作与物质的运动没有任何关系而是绝对的、永远不变的。

(1) 高速运动时速度的相对性

按照爱因斯坦的狭义相对论可知，伽利略速度变换式在高速时的表示为

$$u_x = \frac{u'_x + v_x}{1 + \frac{u'_x v_x}{c^2}}$$

上式为狭义相对论的速度变换式，又称洛伦兹速度变换式。

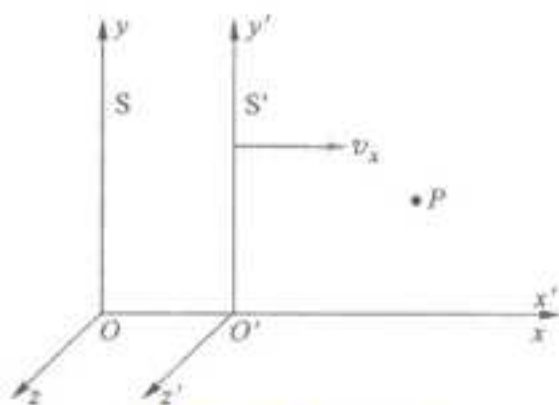


图 4-6 速度的相对性

(2) 高速运动时的动量和质量

①质点的动量应为

$$p = \frac{m_0 v}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}}$$

②质点在高速运动时的质量为

$$m = \frac{m_0}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}}$$

式中 m_0 称为静质量, m 可称为动质量或相对论性质量.

(3) 高速运动时的动能

当质点的速度 v 接近于光速 c 时, 质点的动能应为

$$E_k = m_0 c^2 \left[\frac{1}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}} - 1 \right]$$

(4) 质量与能量之间的关系

质量与能量的关系为

$$E = mc^2$$

式中 E 是物体的能量, m 是物体的质量, c 是光速, 上式又可写成

$$m = \frac{E}{c^2}$$

这个关系式深刻地反映了物质与其运动的不可分割性: 有质量必有能量, 有能量必有质量, 任何物体都具有质量和与之相对应的能量.

注意: 该关系只是说明质量和能量相互联系, 但不是说两者可以相互转化.

物体的质量有 Δm 的变化时, 其能量的相应变化为

$$\Delta E = c^2 \Delta m$$

2. 确定性与随机性

(1) 确定性

牛顿力学的确定性是指运动物体今后的行为, 是由过去的运动状态以及物体所受的作用力决定的.

(2) 混沌

混沌是指确定性运动具有的不确定性的现象.

3. 能量的连续性与能量量子化

(1) 能量连续性

经典力学的能量连续性是指物体的位置和动量的变化是连续的,因此,物体的能量变化亦是连续的。

(2) 能量量子化

普朗克认为频率为 ν 的一维振子的能量是不连续的,即量子化的,只能是其基元能量 $h\nu$ 的整数倍,即

$$E = nh\nu \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

式中 h 称为普朗克常数,按照上述说法,频率为 ν 的一维振子,其能量只能具有 $h\nu$ 、 $2h\nu$ 、 $3h\nu$... 中的任意一值。

4.2 课后习题详解

一、问题

4-1 以恒定角速度转动的飞轮上有两个点,一个点在飞轮的边缘,另一个点在转轴 t 、边缘之间的一半处。试问:在 Δt 时间内,哪一个点运动的路程较长?哪一个点转过的角度较大?哪一个点具有较大的线速度、角速度、线加速度和角加速度?

答:飞轮上各点的角速度 ω 、角加速度 α 均与半径 r 无关。由 $\Delta s = r \Delta \theta = r\omega \Delta t$ 、 $v = \omega r$ 、 $a_t = \omega^2 r$ 、 $a_n = \alpha r$ 可知,飞轮边缘处的点运动路程较长,线速度较大,线加速度也较大,而两个点转过的角度、角速度和角加速度均相等。

4-2 如果一个刚体所受合外力为零,其合力矩是否也一定为零?如果刚体所受合外力矩为零,其合外力是否也一定为零?

答:都不一定。因为 $M = r \times F$, 力矩不仅与力有关,还与力的作用点的径矢有关,当 $\sum F_i = 0$ 时, $\sum (r_i \times F_i)$ 不一定为零,反之亦然。例如力偶矩便是一个简单的实例,其合力为零,但合力矩不为零。又如一对垂直于刚体转轴且关于转轴为对称的大小相等、方向相同的一对平行力,其合力矩为零,而合外力不为零。显然,“合外力为零”与“合外力矩为零”,两者是彼此独立的。

4-3 在某一瞬时,物体在力矩作用下,其角速度可以为零吗?其角加速度可以为零吗?

答:角速度可以为零,但角加速度不能为零。因为在力矩的作用下,由转动定律 $M = J\alpha = Jd\omega/dt$ 可知,只要有力矩 M 存在,角加速度 α 就不会为零,但角速度有可能为零。例如当物体作匀变速转动时,有 $\omega = \omega_0 + \alpha t$, 显然,当 α 是负值时,在某一时刻就会有 $\omega = 0$ 的状态。

4-4 有两个飞轮。一个是木制的,周围镶上铁制的轮缘,另一个是铁制的,周围镶上木制的轮缘。若这两个飞轮的半径相同,总质量相等,以相同的角速度绕通过飞轮中心的轴转动,哪一个飞轮的动能较大。

答:由刚体的转动动能 $E_k = J\omega^2/2$ 可知,角速度 ω 一定时,转动惯量 J 的大小决定动能的大小。又因为 $J = \int r^2 dm$, 即使总质量相同,飞轮的半径相同,但质量分布不同时转动惯量还是不同。质量分布离轴越远,物体的转动惯量越大。因此镶上铁制的轮缘的飞轮转动动能较大。

4-5 为什么质点系动能的改变不仅与外力有关,而且也与内力有关,而刚体绕定轴转动动能的改变只与外力矩有关,而与内力矩无关呢?

答:在质点系里,内力作用在不同的物体上,各自产生的位移数值不一定相等,使内力功不一定相互抵消,所以质点系动能的改变还与内力做功有关。而在刚体定轴转动中,力矩是改变刚体转动状态的原因,而质点系中的内力矩成对出现,它们数值相等,方向相反,且转动的角位移相同,由此可知,合内力矩做功之和必定为零。所以刚体绕定轴转动动能的改变只与外力矩有关,而与内力矩无关。

4-6 斜面与水平面的夹角为 θ 。在斜面上分别放置一个薄圆盘和一个细圆环,它们的质量均为 m 、半径均为 R 。使它们分别从斜面上同一点自由向下作无滑动滚动。试问它们滚到斜面底部时的角加速度、角速度是否相同?它们边缘上一点的线加速度和线速度是否相同?其原因何在?

答:设薄圆盘、细圆环的物理量下标分别记作 1、2。

方法一：由机械能守恒和运动学量关系分析

因机械能守恒有

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}J_1\omega_1^2 = \frac{1}{2}mv_2^2 + \frac{1}{2}J_2\omega_2^2$$

由运动学关系 $v=R\omega$ 得

$$\frac{\omega_1^2}{\omega_2^2} = \frac{1 + \frac{J_2}{mR^2}}{1 + \frac{J_1}{mR^2}}$$

因

$$J_2 = mR^2 > J_1 = \frac{1}{2}mR^2$$

所以角速度关系为

$$\omega_1 > \omega_2$$

由无滑动滚动的条件 $v=R\omega$ 得线速度关系为

$$v_1 > v_2$$

则质心加速度必有

$$a_1 > a_2$$

又由无滑动滚动的条件 $a = R\alpha$ 得角加速度关系为

$$\alpha_1 > \alpha_2$$

方法二：由动力学方程和运动学关系分析

无滑动滚动的动力学和运动学方程如下：

$$\begin{cases} mgsin\theta - F_f = ma \\ F_f R = J\alpha \\ a = R\alpha \end{cases}$$

得

$$a = \frac{g \sin\theta}{1 + \frac{J}{mR^2}}$$

因

$$J_2 = mR^2 > J_1 = \frac{1}{2}mR^2$$

所以 $a_1 > a_2$ ，则分别可以推知

$$\begin{cases} \alpha_1 > \alpha_2 \\ v_1 > v_2 \\ \omega_1 > \omega_2 \end{cases}$$

上述结果还可如下得出：薄圆盘的转动惯量小于细圆环，在重力相对于瞬心力矩相同的两种情况下，前者转动加速度 α 就大，在考虑其他运动学关系后就可以得出上述结论。

4-7 对一个绕定轴转动的刚体来说，如果它受到两个外力的合力为零，这两个力的力矩也为零吗？反之，如两外力的力矩为零，它们的合力也为零吗？

答：都不一定。

(1) 首先，只要这两个力的力线不通过轴，这两个力无论是共点力（或共线力）、还是平行力，合力为零都不会使这两个力各自对轴的力矩为零，只是前者的合力矩等于零，后者的合力矩等于力偶矩；

(2) 其次, 两外力的大小、方向都不一样的话, 即使每个力的力矩为零(力线通过轴)也不能使它们的合力为零, 除非这两个力共线, 且大小相等, 方向相反, 则合力为零;

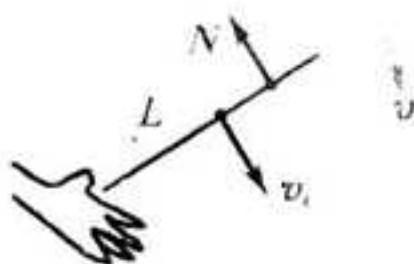
(3) 总之, 合力、力矩、合力矩是三个不同概念物理量, 一般不能由其中一个物理量为零而得到另一个物理量也为零的结论。

4-8 有两个质量和半径均相同的轮子, 一个为质量均匀分布的圆盘, 另一个质量均匀分布在圆环上, 它们的转轴均通过中心且垂直于盘面或环面。如果它们的角动量相同, 哪个转得快些? 如果它们的角速度相同, 哪个角动量要大些呢?

答: (1) 参见问题 4-6 解答可知, 圆盘的转动惯量小于圆环的转动惯量, 因此当角动量相同时, 圆盘比圆环转得快;

(2) 当角速度相同时, 圆环的角动量比圆盘的大。我们时常在自行车赛场上看到, 比赛用的自行车往往车轮是圆盘而不是圆环, 大概就是为了获得更大转速的缘故。

4-9 一人手持长为 L 的棒的一端打击岩石, 但又要避免手受到剧烈的冲击。请问: 此人应当用棒的哪点去打击岩石?



问题 4-9 图

答: 打击使棒制动, 制动前很短时间内, 棒的运动可处理成绕着手握端的定轴转动, 制动前角速度记为 ω , 如问题 4-9 图所示, 在击打时间 Δt 内, 棒受岩石的法向平均碰撞力 N 的作用(为满足打击时手受力最小, 即手受力为零, 且棒与手交点处速度为零, 略去其他力的作用), 制动使棒的质心速度降为零。分别根据动量定理和角动量定理, 可得

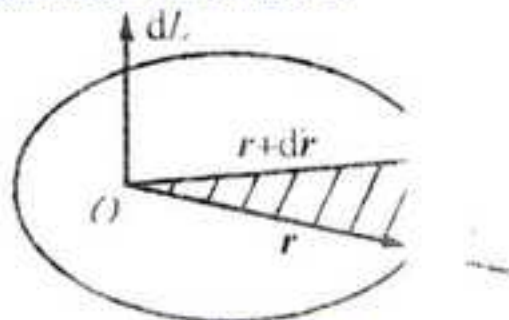
$$N\Delta t = Mv_c \quad (1)$$

$$Nl\Delta t = J\omega \quad (2)$$

将 $2v_c = \omega L/2$ 代入①、②, 解得 $l = \frac{2}{3}L$

所以, 应当用棒距手 $2/3$ 处击打岩石。

4-10 开普勒第二定律指出: “太阳系里的行星在椭圆轨道上运动时, 在相等的时间内, 太阳到行星的位矢扫过的面积是相等的”。你能用质点的角动量守恒定律证明吗?



问题 4-10 图

答: 如问题 4-10 图所示, 将行星视为质点, 在有心力场中运动, 当质点的位矢为 r 时, 质点的位矢在 dt 时间内扫过的面积为

$$dA = \frac{1}{2} |r| |dr| \sin\theta = \frac{1}{2} |r \times dr|$$

故面积速度为

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} \frac{|r \times dr|}{dt} = \frac{1}{2} |r \times v| = \frac{L}{2m}$$

因为质点在有心力作用下，角动量 $L = \text{恒量}$ ，所以在相等的时间内，行星对力心的位矢在空间扫过的面积相等。

4-11 如果一个质点系的总角动量等于零，能否说此质点系中每一个质点都是静止的？如果一质点系的总角动量为一常量，能否说作用在质点系上的合外力为零？

答：不能。在总角动量等于零时，说的是此质点系中所有质点角动量的矢量和为零，即 $\sum_i (r_i \times mv_i) = 0$ ，所以不能说每一个质点都是静止的；而当总角动量为一常量时，根据角动量的守恒定律，只能说明作用在质点系上的合外力矩为零，不能说明合外力为零。

4-12 一人坐在角速度为 ω_0 的转台上，手持一个旋转着的飞轮，其转轴垂直地面，角速度为 ω'_0 。如果突然使飞轮的转轴倒转，将会发生什么情况？设转台和人的转动惯量为 J ，飞轮的转动惯量为 J' 。

答：人、转台及飞轮组成的整个系统没有受到外力矩的作用，满足角动量守恒，即

$$J'\omega'_0 + J\omega_0 = 0$$

当飞轮倒转

$$\omega' = -\omega'_0$$

则由

$$J'\omega' + J\omega = 0$$

可知

$$\omega = -\omega_0$$

所以转台和人也将以相反的方向转动。

4-13 下面几个物理量中，哪些与原点的选择有关，哪些与原点的选择无关：

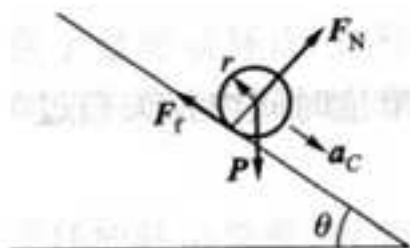
(1) 位矢；(2) 位移；(3) 速度；(4) 角动量。

答：位矢是从原点指向质点所在位置的有向线段，角动量是位矢与动量的矢积，所以，位矢、角动量与原点的选择有关；位移是质点前后所在的两个位置对应的位矢的矢量差，而速度则反映位移对时间的变化情况，所以，位移、速度与原点的选择无关。

4-14 卫星绕地球运动。设想卫星上有一个窗口，此窗口远离地球。若欲使卫星中的宇航员依靠自己的能力，从窗口看到地球。这位宇航员怎样做才能使窗口朝向地球呢？

答：由卫星和宇航员构成的系统在绕地球运动的转轴方向上角动量守恒，所以宇航员可绕与转轴平行的轴运动，迫使该卫星反向转动，使窗口朝向地球。

4-15 一密度均匀的小球，沿两个高度相同、倾角不同的斜面上无滑动地滚下。在这两种情况下，它们到达斜面下端的速率是否相同？



问题 4-15 图

答：相同。小球受力分析如上图所示，则

$$\begin{cases} mg \sin \theta - F_t = ma_c \\ F_N - mg \cos \theta = 0 \\ F_t r = J_c \alpha \\ a_c = r \alpha \end{cases}$$

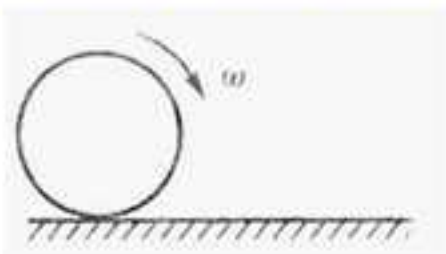
$$J_c = \frac{2}{5} mr^2$$

所以

$$a_c = \frac{5}{7} g \sin \theta, \quad v_c^2 = 2a_c s = \frac{10}{7} gh$$

式中 s 为斜面长度， h 为斜面高度，显然它们到达斜面下端的速率相同。

4-16 图中的圆盘在平面上滚动时，若以圆盘与平面的接触点来计算，其动能为多少？



问题 4-16 图

答：因为圆盘与平面的接触点是瞬时静止的，只有静摩擦力作用，设圆盘质量为 m ，半径为 r ，其动能为

$$E_k = \frac{1}{2} J \omega^2$$

其中 J 是圆盘相对于过瞬时触点处的转轴的转动惯量，由转动惯量的平行轴定理

$$J = J_c + mr^2 = \frac{3}{2} mr^2$$

解得动能为

$$E_k = \frac{3}{4} m (r\omega)^2 = \frac{3}{4} mv_c^2$$

4-17 水在截面均匀的管中流动，改变管的方位，会不会影响各截面处的流速？

答：只要管径不发生变化，由于水的不可压缩性，水流量必须处处相等，因此截面均匀的管子中水的流速不会改变。

二、习题

4-1 有两个力作用在一个有固定转轴的刚体上：

- (1) 这两个力都平行于轴作用时，它们对轴的合力矩一定是零；
- (2) 这两个力都垂直于轴作用时，它们对轴的合力矩可能是零；
- (3) 当这两个力的合力为零时，它们对轴的合力矩也一定是零；
- (4) 当这两个力对轴的合力矩为零时，它们的合力也一定是零。

对上述说法下述判断正确的是 ()

- A. 只有 (1) 是正确的
- B. (1)、(2) 正确，(3)、(4) 错误
- C. (1)、(2)、(3) 都正确，(4) 错误

D. (1)、(2)、(3)、(4) 都正确

【答案】B

【解析】力对轴之力矩通常有三种情况：其中两种情况下力矩为零：一是力的作用线通过转轴，二是力平行于转轴。不满足上述情况下的作用力对轴之矩不为零，但同时有两个力作用时，只要满足两力矩大小相等，方向相反，两力矩对同一轴的合外力矩也可以为零，由以上规则可知(1)(2)说法是正确的。对于(3)(4)两种说法，如作用于刚体上的两个力为共点力，当合力为零时，它们对同一轴的合外力矩也一定为零，反之亦然，但如这两个力为非共点力，则以上结论不成立，故(3)(4)说法不完全正确。

4-2 关于力矩有以下几种说法：

(1) 对某个定轴转动刚体而言，内力矩不会改变刚体的角加速度；

(2) 一对作用力和反作用力对同一轴的力矩之和必为零；

(3) 质量相等，形状和大小不同的两个刚体，在相同力矩的作用下，它们的运动状态一定相同。

对上述说法下述判断正确的是()

A. 只有(2)是正确的

B. (1)、(2)是正确的

C. (2)、(3)是正确的

D. (1)、(2)、(3)都是正确的

【答案】B

【解析】刚体中相邻质元之间的一对内力属于作用力与反作用力，且作用点相同，故对同一轴的力矩之和必为零，因此可推知刚体中所有内力矩之和为零，因而不会影响刚体的角加速度或角动量等，故(1)(2)说法正确。对说法(3)来说，题述情况中两个刚体对同一轴的转动惯量因形状、大小不同有可能不同，因而在相同力矩作用下，产生的角加速度不一定相同，因而运动状态未必相同。

4-3 均匀细棒 OA 可绕通过其一端 O 而与棒垂直的水平固定光滑轴转动，如图 4-1 所示，今使棒从水平位置由静止开始自由下落，在棒摆到竖直位置的过程中，下述说法正确的是()

A. 角速度从小到大，角加速度不变

B. 角速度从小到大，角加速度从小到大

C. 角速度从小到大，角加速度从大到小

D. 角速度不变，角加速度为零

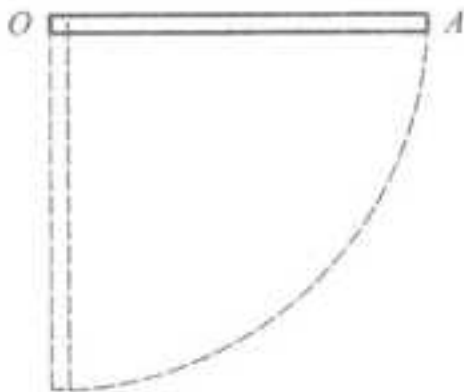


图 4-1

【答案】C

【解析】如图 4-1 所示，在棒下落过程中，重力对轴之矩是变化的，其大小与棒和水平面的夹角有关。当棒处于水平位置，重力矩最大，当棒处于竖直位置时，重力矩为零。因此在棒在下落过程中重力矩由大到小，由转动定律知，棒的角加速亦由大到小，而棒的角速度却由小到大。

4-4 一圆盘绕通过盘心且垂直于盘面的水平轴转动，轴间摩擦不计，如图 4-2 射来两个质量相同，速度大小相同，方向相反并在一条直线上的子弹，它们同时射入圆盘并且留在盘内，则子弹射入后的瞬间，圆盘和子弹系统的角动量 L 以及圆盘的角速度 ω 的变化情况为()

A. L 不变， ω 增大

- B. 两者均不变
 C. L 不变, ω 减小
 D. 两者均不确定

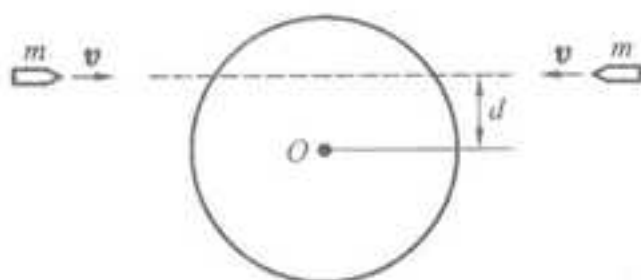


图 4-2

【答案】C

【解析】对于圆盘—子弹系统来说, 并无外力矩作用, 故系统对轴 O 的角动量守恒, 故 L 不变, 此时应有下式成立, 即

$$mv_d - mv_d + J_0\omega_0 = J\omega$$

式中 mv_d 为子弹对点 O 的角动量, ω_0 为圆盘初始角速度, J 为子弹留在盘中后系统对轴 O 的转动惯量, J_0 为子弹射入前盘对轴 O 的转动惯量. 由于 $J > J_0$, 则 $\omega < \omega_0$.

4-5 假设卫星环绕地球中心作椭圆运动, 则在运动过程中, 卫星对地球中心的 ()

- A. 角动量守恒, 动能守恒
 B. 角动量守恒, 机械能守恒
 C. 角动量不守恒, 机械能守恒
 D. 角动量不守恒, 动量也不守恒
 E. 角动量守恒, 动量也守恒

【答案】B

【解析】由于卫星一直受到万有引力作用, 故其动量不可能守恒, 但由于万有引力一直指向地球中心, 则万有引力对地球中心的力矩为零, 故卫星对地球中心的角动量守恒, 即 $r \times mv = \text{恒量}$, 式中 r 为地球中心指向卫星的位矢, 当卫星处于椭圆轨道上不同位置时, 由于 r 不同, 由角动量守恒知卫星速率不同, 其中当卫星处于近地点时速率最大, 处于远地点时速率最小, 故卫星动能并不守恒, 但由万有引力为保守力, 则卫星的机械能守恒, 即卫星动能与万有引力势能之和维持不变.

4-6 一汽车发动机曲轴的转速在 12s 内由 $1.2 \times 10^3 \text{ r} \cdot \text{min}^{-1}$ 均匀的增加到 $2.7 \times 10^3 \text{ r} \cdot \text{min}^{-1}$. (1) 求曲轴转动的角加速度; (2) 在此时间内, 曲轴转了多少转?

解: (1) 由于角速度 $\omega = 2\pi n$ (n 为单位时间内的转数), 根据角加速度的定义 $\alpha = \frac{d\omega}{dt}$, 在匀变速转动中角

加速度为

$$\alpha = \frac{\omega - \omega_0}{t} = \frac{2\pi(n - n_0)}{t} = 13.1 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-2}$$

(2) 发动机曲轴转过的角度为

$$\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 = \frac{\omega + \omega_0}{2}t = \pi(n + n_0)t$$

在 12s 内曲轴转过的圈数为

$$N = \frac{\theta}{2\pi} = \frac{n + n_0}{2}t = 390 \text{ 圈}$$

4-7 某种电动机启动后转速随时间变化的关系为 $\omega = \omega_0 (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$, 式中 $\omega_0 = 9.0 \text{ s}^{-1}$, $\tau = 2.0 \text{ s}$. 求:

(1) $t = 6.0 \text{ s}$ 时的转速; (2) 角加速度随时间变化的规律; (3) 启动后 6.0 s 内转过的圈数.

解: (1) 根据题意中转速随时间的变化关系, 将 $t = 6.0 \text{ s}$ 代入, 即得

$$\omega = \omega_0 (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) = 0.95 \omega_0 = 8.6 \text{ s}^{-1}$$

(2) 角速度随时间变化的规律为

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{\omega_0}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} = 4.5 e^{-\frac{t}{\tau}} (\text{rad} \cdot \text{s}^{-2})$$

(3) $t = 6.0 \text{ s}$ 时转过的角度为

$$\theta = \int_0^6 \omega dt = \int_0^6 \omega_0 (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) dt = 36.9 \text{ rad}$$

则 $t = 6.0 \text{ s}$ 时电动机转过的圈数: $N = \theta / 2\pi = 5.87$ 圈.

4-8 水分子的形状如图 4-3 所示, 从光谱分析知水分子对 AA' 轴的转动惯量 $J_{AA'} = 1.93 \times 10^{-47} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, 对 BB' 轴转动惯量 $J_{BB'} = 1.14 \times 10^{-47} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, 试由此数据和各原子质量求出氢和氧原子的距离 d 和夹角 θ . 假设各原子都可当质点处理.

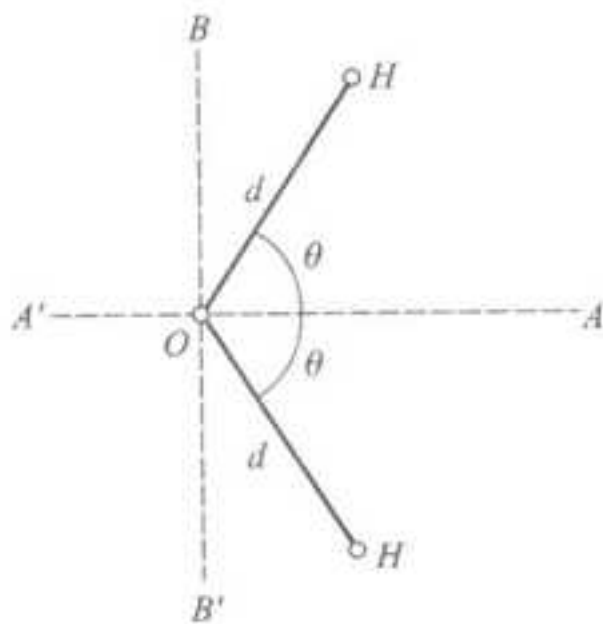


图 4-3

解: 由图可得

$$J_{AA'} = 2m_H d^2 \sin^2 \theta$$

$$J_{BB'} = 2m_H d^2 \cos^2 \theta$$

此二式相加, 可得 $J_{AA'} + J_{BB'} = 2m_H d^2$

则

$$d = \sqrt{\frac{J_{AA'} + J_{BB'}}{2m_H}} = 9.59 \times 10^{-11} \text{ m}$$

由二式相比, 可得 $J_{AA'} / J_{BB'} = \tan^2 \theta$

$$\text{则 } \theta = \arctan \sqrt{\frac{J_{AA'}}{J_{BB'}}} = \arctan \sqrt{\frac{1.93}{1.14}} = 52.3^\circ$$

4-9 一飞轮由一直径为 30cm, 厚度为 2.0cm 的圆盘和两个直径为 10cm, 长为 8.0cm 的共轴圆柱体组成, 设飞轮的密度为 $7.8 \times 10^3 \text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$, 求飞轮对轴的转动惯量.

解: 根据转动惯量的叠加性, 由匀质圆盘、圆柱体对轴的转动惯量公式可得

$$\begin{aligned} J &= J_1 + J_2 = 2 \times \frac{1}{2} m_1 \left(\frac{d_1}{2} \right)^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(\frac{d_2}{2} \right)^2 \\ &= \frac{1}{16} \pi \rho \left(l d_1^4 + \frac{1}{2} a d_2^4 \right) = 0.136 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \end{aligned}$$

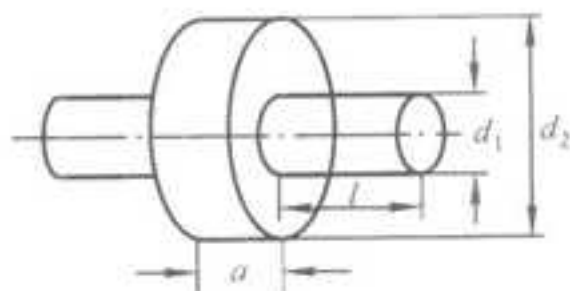


图 4-4

4-10 如图 4-5 (a) 所示, 圆盘的质量为 m , 半径为 R . 求: (1) 以 O 为中心, 将半径为 $R/2$ 的部分挖去, 剩余部分对 OO 轴的转动惯量; (2) 剩余部分对 $O'O'$ 轴 (即通过圆盘边缘且平行于盘中心轴) 的转动惯量.

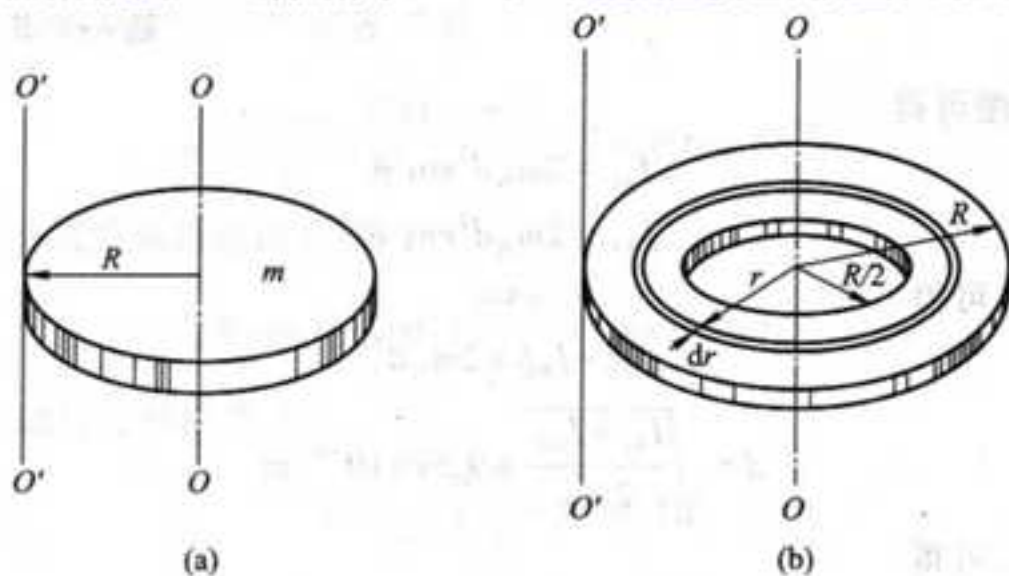


图 4-5

解: 挖去后的圆盘如图 4-5 (b) 所示.

(1) 解 1 由分析知

$$\begin{aligned} J_0 &= \int r^2 dm = \int_{R/2}^R r^2 \frac{m}{\pi R^2} 2\pi r dr \\ &= \frac{2m}{R^2} \int_{R/2}^R r^3 dr = \frac{15}{32} m R^2 \end{aligned}$$

解 2 整个圆盘对 OO 轴转动惯量为 $J_1 = \frac{1}{2} m R^2$, 挖去的小圆盘对 OO 轴转动惯量

$J_2 = \frac{1}{2} \left[\frac{m}{\pi R^2} \pi \left(\frac{R}{2} \right)^2 \right] \left(\frac{R}{2} \right)^2 = \frac{1}{32} m R^2$, 由分析知, 剩余部分对 OO 轴的转动惯量为

$$J_0 = J_1 - J_2 = \frac{15}{32} m R^2$$

(2) 由平行轴定理, 剩余部分对 O' O' 轴的转动惯量为

$$J_{O'} = \frac{15}{32} m R^2 + \left[m - \frac{m}{\pi R^2} \cdot \pi \left(\frac{R}{2} \right)^2 \right] R^2 = \frac{39}{32} m R^2$$

4-11 一燃气轮机在试车时, 燃气作用在涡轮上的力矩为 $2.03 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{m}$, 涡轮的转动惯量为 $25.0 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, 当轮的转速由 $2.80 \times 10^3 \text{ r} \cdot \text{min}^{-1}$ 增大到 $1.12 \times 10^4 \text{ r} \cdot \text{min}^{-1}$ 时, 所经历的时间 t 为多少?

解: 解 1 在匀变速转动中, 角加速度 $\alpha = \frac{\omega - \omega_0}{t}$, 由转动定律 $M = J\alpha$, 可得飞轮所经历的时间

$$t = \frac{\omega - \omega_0}{M} J = \frac{2\pi J}{M} (n - n_0) = 10.8 \text{ s}$$

解 2 飞轮在恒外力矩作用下, 根据角动量定理, 有

$$\int_0^t M dt = J(\omega - \omega_0)$$

则

$$t = \frac{\omega - \omega_0}{M} J = \frac{2\pi J}{M} (n - n_0) = 10.8 \text{ s}$$

4-12 用落体观察法测定飞轮的转动惯量, 是将半径为 R 的飞轮支承在 O 点上, 然后在绕过飞轮的绳子的一端挂一质量为 m 的重物, 令重物以初速度为零下落, 带动飞轮转动 (如图 4-6), 记下重物下落的距离和时间, 就可算出飞轮的转动惯量, 试写出它的计算式。(假设轴承间无摩擦)

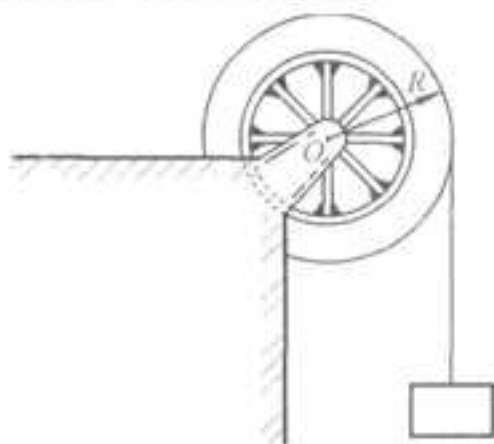


图 4-6

解: 解 1 设绳子的拉力为 F_T , 对飞轮而言, 根据转动定律, 有

$$F_T R = J\alpha \quad (1)$$

而对重物而言, 由牛顿定律, 有

$$mg - F_T = ma \quad (2)$$

由于绳子不可伸长, 因此, 有

$$a = R\alpha \quad (3)$$

重物作匀加速下落, 则有

$$h = \frac{1}{2} at^2 \quad (4)$$

由上述各式可解得飞轮的转动惯量为

$$J = mR^2 \left(\frac{gt^2}{2h} - 1 \right)$$

解2 根据系统的机械能守恒定律, 有

$$-mgh + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\omega^2 = 0 \quad (1')$$

而线速度和角速度的关系为

$$v = R\omega \quad (2')$$

又根据重物作匀加速运动时, 有

$$v = at \quad (3')$$

$$v^2 = 2ah \quad (4')$$

由上述各式可得

$$J = mR^2 \left(\frac{gt^2}{2h} - 1 \right)$$

若轴承处存在摩擦, 上述测量转动惯量的方法仍可采用。这时, 只需通过用两个不同质量的重物做两次测量即可消除摩擦力矩带来的影响。

4-13 如图 4-7 (a) 所示, 质量 $m_1 = 16 \text{ kg}$ 的实心圆柱体 A, 其半径为 $r = 15 \text{ cm}$, 可以绕其固定水平轴转动, 阻力忽略不计。一条轻的柔绳绕在圆柱体上, 其另一端系一个质量 $m_2 = 8.0 \text{ kg}$ 的物体 B。求: (1) 物体 B 由静止开始下降 1.0 s 后的距离; (2) 绳的张力 F_T 。

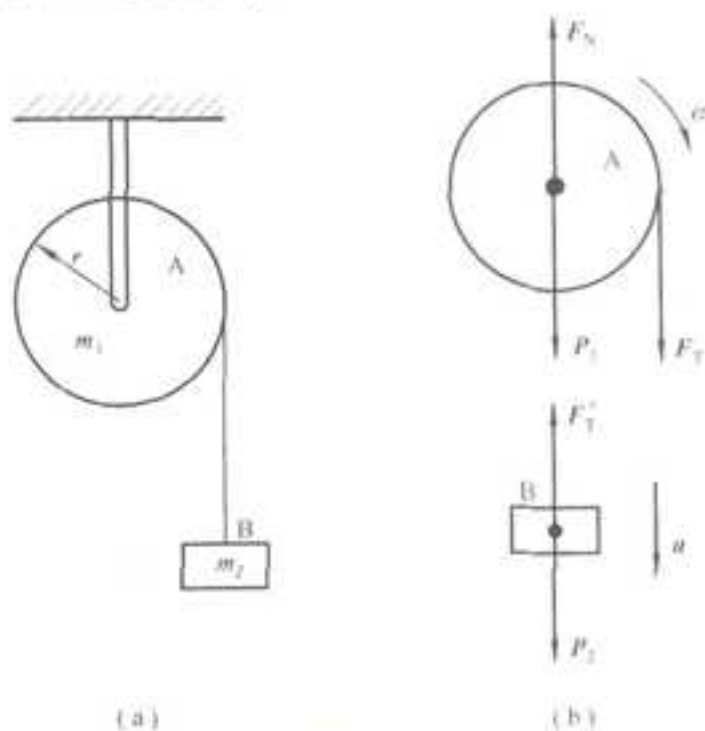


图 4-7

解: (1) 分别作两物体的受力分析, 如图 4-7 (b)。对实心圆柱体而言, 由转动定律得

$$F_T r = J\alpha = \frac{1}{2}m_1 r^2 \alpha \quad (1)$$

对悬挂物体而言, 依据牛顿定律, 有

$$P_2 - F'_T = m_2 g - F'_T = m_2 a \quad (2)$$

且 $F_T = F'_T$, 又由角量与线量之间的关系, 得

$$a = r\alpha \quad (3)$$

解上述方程组, 可得物体下落的加速度

$$a = \frac{2m_2g}{m_1 + 2m_2}$$

在 $t=1.0\text{s}$ 时, B 下落的距离为

$$s = \frac{1}{2}at^2 = \frac{m_2gt^2}{m_1 + 2m_2} = 2.45 \text{ m}$$

(2) 由式 (2) 可得绳中的张力为

$$F_T = m(g - a) = \frac{m_1m_2}{m_1 + 2m_2}g = 39.2 \text{ N}$$

4-14 质量为 m_1 和 m_2 的两物体 A、B 分别悬挂在图 4-8 (a) 所示的组合轮两端, 设两轮的半径分别为 R 和 r , 两轮的转动惯量分别为 J_1 和 J_2 , 轮与轴承间、绳索与轮间的摩擦力均略去不计, 绳的质量也略去不计, 试求两物体的加速度和绳的张力。

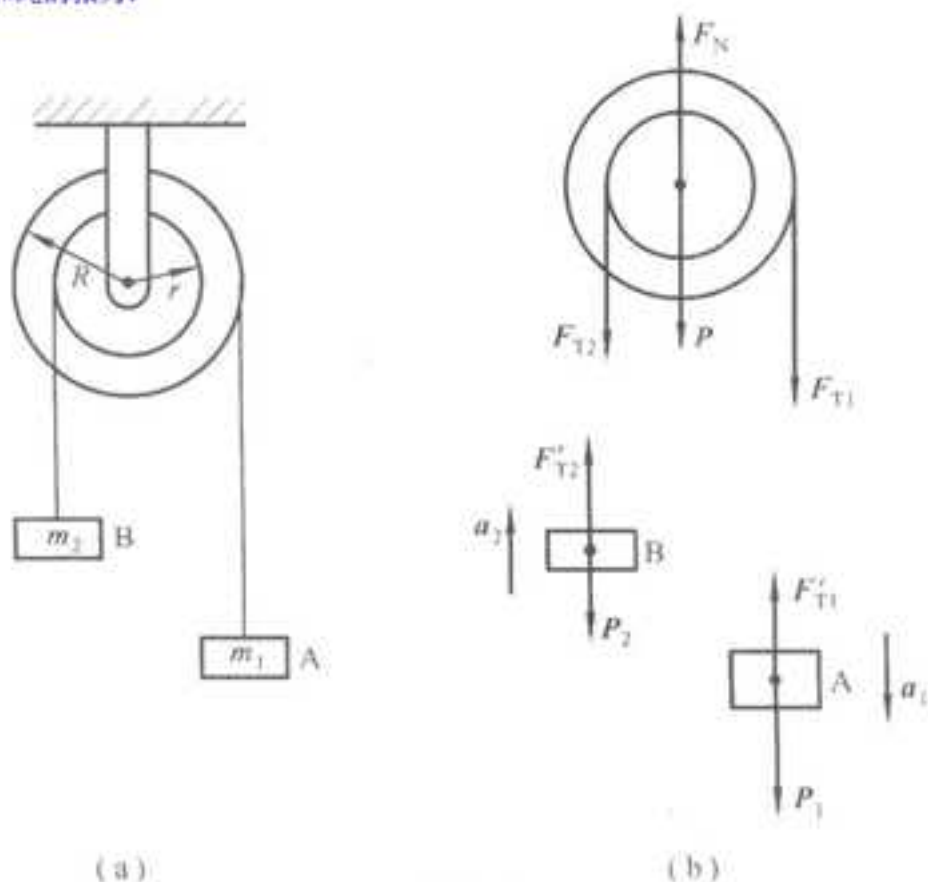


图 4-8

解: 分别对两物体及组合轮作受力分析, 如图 4-8 (b)。根据质点的牛顿定律和刚体的转动定律, 有

$$P_1 - F'_{T1} = m_1g - F_{T1} = m_1a_1 \quad (1)$$

$$F'_{T2} - P_2 = F_{T2} - m_2g = m_2a_2 \quad (2)$$

$$(F_{T1}R - F_{T2}r) = (J_1 + J_2)\alpha \quad (3)$$

$$F'_{T1} = F_{T1}, F'_{T2} = F_{T2} \quad (4)$$

由角加速度和线加速度之间的关系, 有

$$a_1 = R\alpha \quad (5)$$

$$a_2 = r\alpha \quad (6)$$

解上述方程组, 可得

$$a_1 = \frac{m_1 R - m_2 r}{J_1 + J_2 + m_1 R^2 + m_2 r^2} g R$$

$$a_2 = \frac{m_1 R - m_2 r}{J_1 + J_2 + m_1 R^2 + m_2 r^2} g r$$

$$F_{T1} = \frac{J_1 + J_2 + m_2 r^2 + m_2 R r}{J_1 + J_2 + m_1 R^2 + m_2 r^2} m_1 g$$

$$F_{T2} = \frac{J_1 + J_2 + m_1 R^2 + m_1 R r}{J_1 + J_2 + m_1 R^2 + m_2 r^2} m_2 g$$

4-15 如图 4-9 所示装置, 定滑轮的半径为 r , 绕转轴的转动惯量为 J , 滑轮两边分别悬挂质量为 m_1 和 m_2 的物体 A、B。A 置于倾角为 θ 的斜面上, 它和斜面间的摩擦因数为 μ , 若 B 向下作加速运动时, 求: (1) 其下落加速度的大小; (2) 滑轮两边绳子的张力。(设绳的质量及伸长均不计, 绳与滑轮间无滑动, 滑轮轴光滑。)

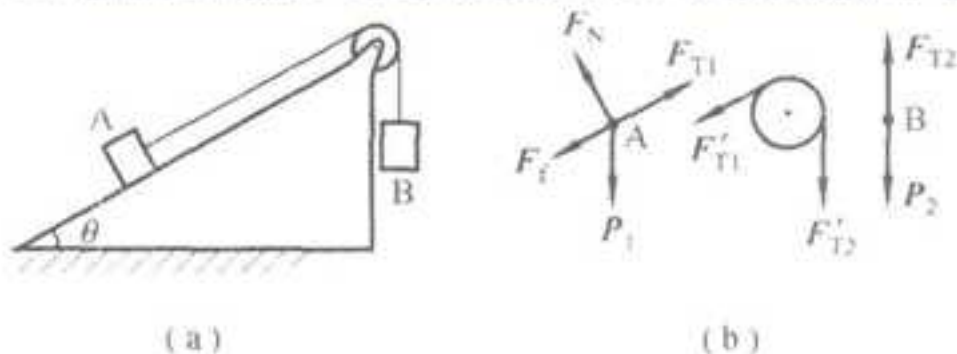


图 4-9

解: 作 A、B 和滑轮的受力分析, 如图 4-9 (b), 其中 A 是在张力 F_{T1} 、重力 P_1 、支持力 F_N 和摩擦力 F_f 的作用下运动, 根据牛顿定律, 沿斜面方向有

$$F_{T1} - m_1 g \sin \theta - \mu m_1 g \cos \theta = m_1 a_1 \quad (1)$$

而 B 则是在张力 F_{T2} 和重力 P_2 的作用下运动, 有

$$m_2 g - F_{T2} = m_2 a_2 \quad (2)$$

由于绳子不能伸长, 绳与轮之间无滑动, 则有

$$a_1 = a_2 = r\alpha \quad (3)$$

对滑轮而言, 根据定轴转动定律有

$$F'_{T2} r - F'_{T1} r = J\alpha \quad (4)$$

且有

$$F_{T1} = F'_{T1}, F_{T2} = F'_{T2} \quad (5)$$

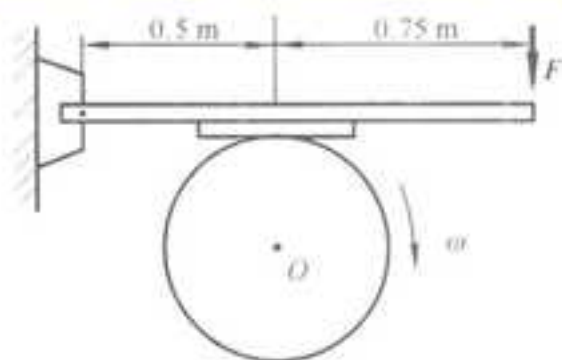
解上述各方程可得

$$a_1 = a_2 = \frac{m_2 g - m_1 g \sin \theta - \mu m_1 g \cos \theta}{m_1 + m_2 + \frac{J}{r^2}}$$

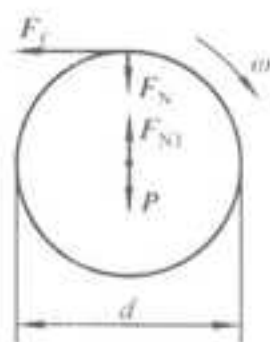
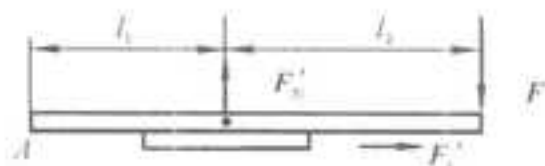
$$F_{T1} = \frac{m_1 m_2 g (1 + \sin \theta + \mu \cos \theta) + (\sin \theta + \mu \cos \theta) m_1 g J / r^2}{m_1 + m_2 + J / r^2}$$

$$F_{T2} = \frac{m_1 m_2 g (1 + \sin \theta + \mu \cos \theta) + m_2 g J / r^2}{m_1 + m_2 + J / r^2}$$

4-16 如图 4-10 (a) 所示, 飞轮的质量为 60 kg, 直径为 0.50 m, 转速为 $1.0 \times 10^3 \text{ r} \cdot \text{min}^{-1}$, 现用闸瓦制动使其在 5.0 s 内停止转动, 求制动力 F 。设闸瓦与飞轮之间的摩擦因数 $\mu = 0.40$, 飞轮的质量全部分布在轮缘上。



(a)



(b)

图 4-10

解: 飞轮和闸杆的受力分析, 如图 4-10 (b) 所示。根据闸杆的力矩平衡, 有

$$F(l_1 + l_2) - F'_s l_1 = 0$$

而 $F'_s = F'_f$, 则闸瓦作用于轮的摩擦力矩为

$$M = F_f \frac{d}{2} = \frac{1}{2} F'_s \mu d = \frac{l_1 + l_2}{2l_1} F \mu d \quad (1)$$

摩擦力矩是恒力矩, 飞轮作匀角加速转动, 由转动的运动规律, 有

$$\alpha = \left| \frac{\omega - \omega_0}{t} \right| = \frac{\omega_0}{t} = \frac{2\pi n}{t} \quad (2)$$

因飞轮的质量集中于轮缘，它绕轴的转动惯量 $J = md^2/4$ ，根据转动定律 $M = J\alpha$ ，由式 (1)、(2) 可得制动力

$$F = \frac{\pi n m d l_1}{\mu (l_1 + l_2) t} = 3.14 \times 10^2 \text{ N}$$

4-17 一半径为 R 、质量为 m 的匀质圆盘，以角速度 ω 绕其中心轴转动，现将它平放在一水平板上，盘与板表面的摩擦因数为 μ 。(1) 求圆盘所受的摩擦力矩。(2) 问经多少时间后，圆盘转动才能停止？

解：(1) 由分析可知，圆盘上半径为 r 、宽度为 dr 的同心圆环所受的摩擦力矩为

$$dM = r \times dF_f = -(2r^2 \mu mg dr / R^2) k$$

式中 k 为轴向的单位矢量，圆盘所受的总摩擦力矩大小为

$$M = \int dM = \int_0^R \frac{2r^2 \mu mg}{R^2} dr = \frac{2}{3} \mu mg R$$

(2) 由于摩擦力矩是一恒力矩，圆盘的转动惯量 $J = mR^2/2$ 。由角动量定理 $M\Delta t = \Delta(J\omega)$ ，可得圆盘停止的时间为

$$\Delta t = \frac{J\omega}{M} = \frac{3\omega R}{4\mu g}$$

4-18 如图 4-11 所示，一通风机的转动部分以初角速度 ω_0 绕其轴转动，空气的阻力矩与角速度成正比，比例系数 C 为一常量。若转动部分对其轴的转动惯量为 J_1 ，问：(1) 经过多少时间后其转动角速度减少为初角速度的一半？(2) 在此时间内共转过多少转？



图 4-11

解：(1) 通风机叶片所受的阻力矩为 $M = -C\omega$ ，由转动定律 $M = J\alpha$ ，可得叶片的角加速度为

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = -\frac{C\omega}{J} \quad (1)$$

根据初始条件对式 (1) 积分，有

$$\int_{\omega_0}^{\omega} \frac{d\omega}{\omega} = \int_0^t -\frac{C}{J} dt$$

由于 C 和 J 均为常量，得

$$\omega = \omega_0 e^{-\frac{C}{J}t} \quad (2)$$

当角速度由 $\omega_0 \rightarrow \frac{1}{2}\omega_0$ 时，转动所需的时间为

$$t = \frac{J}{C} \ln 2$$

(2) 根据初始条件对式 (2) 积分，有

$$\int_0^{\theta} d\theta = \int_0^t \omega_0 e^{-\frac{C}{J}t} dt$$

$$\text{即 } \theta = \frac{J\omega_0}{2C}$$

在时间 t 内所转过的圈数为

$$N = \frac{\theta}{2\pi} = \frac{J\omega_0}{4\pi C}$$

4-19 如果质点在 $\mathbf{r} = (-3.5\mathbf{i} + 1.4\mathbf{j})\text{m}$ 的位置时的速度为 $\mathbf{v} = (-2.5\mathbf{i} - 6.3\mathbf{j})\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$, 求此质点对坐标原点的角动量。已知质点的质量为 4.1kg 。

解: 由题意分析知

$$\begin{aligned} L_o &= \mathbf{r} \times \mathbf{p} = m(x\mathbf{i} + y\mathbf{j}) \times (v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j}) \\ &= m(xv_y\mathbf{i} \times \mathbf{j} + yv_x\mathbf{j} \times \mathbf{i}) \\ &= m(xv_y - yv_x)\mathbf{k} \end{aligned}$$

由题给条件将 m 和各分量值代入, 得

$$L_o = 105\mathbf{k} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$$

结果表明: 角动量矢量沿 z 轴正向, 按右手螺旋定则, 质点在 Oxy 平面作逆时针运动 (从上往下俯视)。

4-20 如图 4-12 所示, 一长为 $2l$ 的细棒 AB , 其质量不计, 它的两端牢固地联结着质量各为 m 的小球, 棒的中点 O 焊接在竖直轴 z 上, 并且棒与 z 轴夹角成 α 角。若棒在外力作用下绕 z 轴 (正向为竖直向上) 以角速度 $\omega = \omega_0(1 - e^{-t})$ 转动, 其中 ω_0 为常量。求 (1) 棒与两球构成的系统在时刻 t 对 z 轴的角动量; (2) 在 $t=0$ 时系统所受外力对 z 轴的合外力矩。

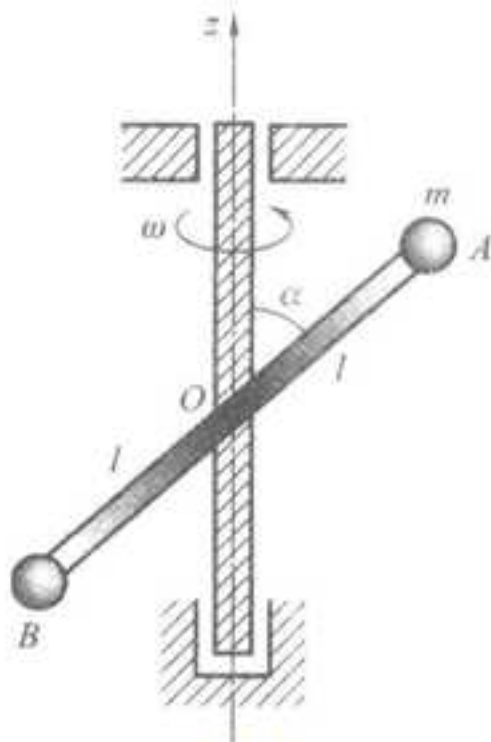


图 4-12

解: (1) 两小球对 z 轴的转动惯量为 $J = 2mr^2 = 2m(l\sin\alpha)^2$, 则系统对 z 轴的角动量为

$$L = J\omega = 2ml^2\omega_0(1 - e^{-t})\sin^2\alpha$$

此处也可先求出每个小球对 z 轴的角动量后再求和。

(2) 由角动量定理得

$$\begin{aligned} M &= \frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt} [2ml^2\omega_0(1 - e^{-t})\sin^2\alpha] \\ &= 2ml^2\omega_0\sin^2\alpha e^{-t} \end{aligned}$$

$t=0$ 时, 合外力矩为

$$M = 2ml^2\omega_0\sin^2\alpha$$

此处也可先求解系统绕 z 轴的角加速度表达式, 即 $\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \omega_0 e^{-t}$, 再由 $M=J\alpha$ 求得 M 。

4-21 一质量为 m' 、半径为 R 的均匀圆盘, 通过其中心且与盘面垂直的水平轴以角速度 ω 转动, 若在某时刻, 一质量为 m 的小碎块从盘边缘裂开, 且恰好沿垂直方向上抛, 问它可能达到的高度是多少? 破裂后圆盘的角动量为多大?

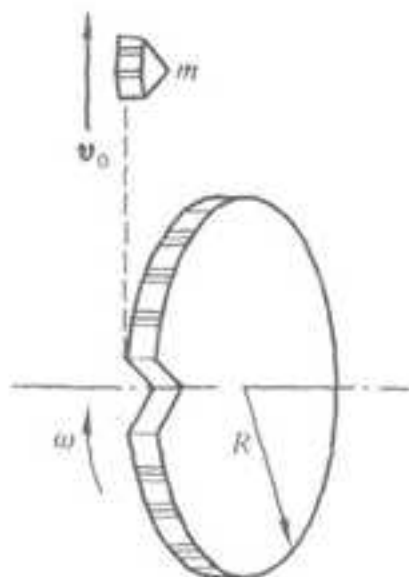


图 4-13

解: (1) 碎块抛出时的初速度为

$$v_0 = \omega R$$

由于碎块竖直上抛运动, 它所能到达的高度为

$$h = \frac{v_0^2}{2g} = \frac{\omega^2 R^2}{2g}$$

(2) 圆盘在裂开的过程中, 其角动量守恒, 故有

$$L = L_0 - L'$$

式中 $L_0 = \frac{1}{2}m'R^2\omega$ 为圆盘未碎时的角动量; $L' = mR^2\omega$ 为碎块被视为质点时, 碎块对轴的角动量; L 为破裂后盘的角动量, 则

$$L = \left(\frac{1}{2}m' - m \right) R^2 \omega$$

4-22 在光滑的水平面上有一木杆, 其质量 $m_1=1.0\text{ kg}$, 长 $l=40\text{ cm}$, 可绕通过其中点并与之垂直的轴转动, 一质量为 $m_2=10\text{ g}$ 的子弹, 以 $v=2.0\times 10^2\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ 的速度射入杆端, 其方向与杆及轴正交, 若子弹陷入杆中, 试求

所得到的角速度。

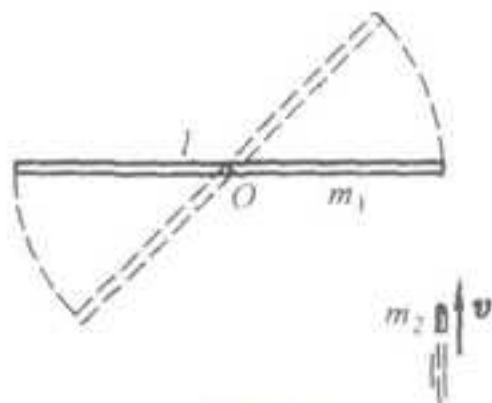


图 4-14

解：根据角动量守恒定理

$$J_2 \omega = (J_1 + J_2) \omega'$$

式中 $J_2 = m_2 (l/2)^2$ 为子弹绕轴的转动惯量， $J_2 \omega$ 为子弹在陷入杆前的角动量， $\omega = 2v/l$ 为子弹在此刻绕轴的角速度， $J_1 = m_1 l^2 / 12$ 为杆绕轴的转动惯量，可得杆的角速度为

$$\omega' = \frac{J_2 \omega}{J_1 + J_2} = \frac{6m_2 v}{(m_1 + 3m_2) l} = 29.1 \text{ s}^{-1}$$

4-23 半径分别为 r_1 、 r_2 的两个薄伞形轮，它们各自对通过盘心且垂直盘面转轴的转动惯量为 J_1 和 J_2 。开始时轮 I 以角速度 ω_0 转动，现与轮 II 成正交啮合后（如图 4-15 所示），两轮的角速度分别为多大？

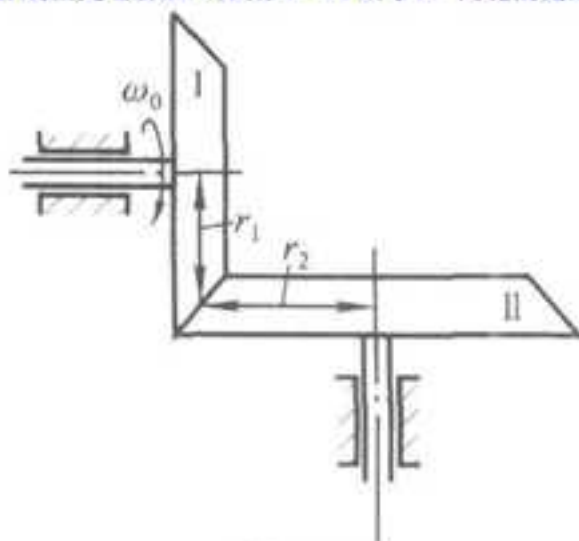


图 4-15

解：设相互作用力为 F ，在啮合的短时间 Δt 内，根据角动量定理，对轮 I、轮 II 分别有

$$-F r_1 \Delta t = J_1 (\omega_1 - \omega_0) \quad (1)$$

$$F r_2 \Delta t = J_2 \omega_2 \quad (2)$$

两轮啮合后应有相同的线速度，故有

$$r_1 \omega_1 = r_2 \omega_2 \quad (3)$$

由上述各式可解得啮合后两轮的角速度分别为

$$\omega_1 = \frac{J_1 \omega_0 r_2^2}{J_1 r_2^2 + J_2 r_1^2}, \omega_2 = \frac{J_1 \omega_0 r_1 r_2}{J_1 r_2^2 + J_2 r_1^2}$$

4-24 一质量为 20.0 kg 的小孩，站在一半径为 3.00 m、转动惯量为 450 kg·m² 的静止水平转台的边缘上，此转台可绕通过转台中心的竖直轴转动，转台与轴间的摩擦不计，如果此小孩相对转台以 1.00 m·s⁻¹ 的速率沿转台边缘行走，问转台的角速率有多大？

解：由相对角速度的关系，人相对地面的角速度为

$$\omega = \omega_0 + \omega_1 = \omega_0 + \frac{v}{R} \quad (1)$$

由于系统初始是静止的，根据系统的角动量守恒定律，有

$$J_0 \omega_0 + J_1 (\omega_0 + \omega_1) = 0 \quad (2)$$

式中 J_0 、 $J_1 = mR^2$ 分别为转台、人对转台中心轴的转动惯量，由式 (1)、(2) 可得转台的角速度为

$$\omega_0 = -\frac{mR^2}{J_0 + mR^2} \frac{v}{R} = -9.52 \times 10^{-2} \text{ s}^{-1}$$

式中负号表示转台转动的方向与人对地面的转动方向相反。

4-25 一转台绕其中心的竖直轴以角速度 $\omega_0 = \pi \text{ s}^{-1}$ 转动，转台对转轴的转动惯量为 $J_0 = 4.0 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ ，今有砂粒以 $Q = 2 \text{ t} \cdot \text{s}^{-1}$ 的流量竖直落至转台，并粘附于台面形成一圆环，若环的半径为 $r = 0.10 \text{ m}$ ，求砂粒下落 $t = 10 \text{ s}$ 时，转台的角速度。

解：在时间 $0 \rightarrow 10 \text{ s}$ 内落至台面的砂粒的质量为

$$m = \int_0^{10} Q dt = 0.10 \text{ kg}$$

根据系统的角动量守恒定律，有

$$J_0 \omega_0 = (J_0 + mr^2) \omega$$

则 $t = 10 \text{ s}$ 时，转台的角速度

$$\omega = \frac{J_0 \omega_0}{J_0 + mr^2} = 0.8 \pi \text{ s}^{-1}$$

4-26 为使运行中的飞船停止绕其中心轴的转动，可在飞船的侧面对称地安装两个切向控制喷管（如图 4-16 所示），利用喷管高速喷射气体来制止旋转。若飞船绕其中心轴的转动惯量 $J = 2.0 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ ，旋转的角速度 $\omega = 0.2 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ ，喷口与轴线之间的距离 $r = 1.5 \text{ m}$ ；喷气以恒定的流量 $Q = 1.0 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$ 和速率 $u = 50 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ 从喷口喷出，问为使该飞船停止旋转，喷气应喷射多长时间？

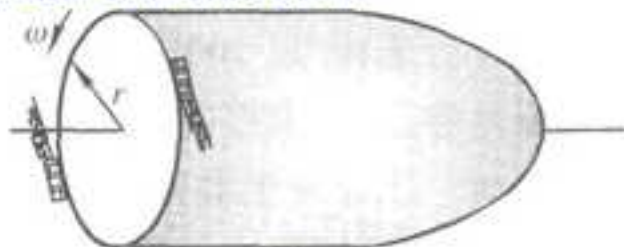


图 4-16

解：取飞船和喷出的气体为系统，根据角动量守恒定律，有

$$J\omega - mur = 0 \quad (1)$$

因喷气的流量恒定，故有

$$m = 2Qt \quad (2)$$

由式 (1)、(2) 可得喷气的喷射时间为

$$t = \frac{J\omega}{2Qur} = 2.67 \text{ s}$$

4-27 一位滑冰者伸开双臂以 $1.0\text{r}\cdot\text{s}^{-1}$ 绕身体中心轴转动, 此时她的转动惯量为 $1.44\text{kg}\cdot\text{m}^2$. 为了增加转速, 她收起了双臂, 转动惯量变为 $0.48\text{kg}\cdot\text{m}^2$. 求: (1) 她收起双臂后的转速; (2) 她收起双臂前后绕身体中心轴转动的转动动能.

解: (1) 由角动量守恒, 有 $J_1\omega_1 = J_2\omega_2$, 则

$$\omega_2 = \frac{J_1}{J_2}\omega_1 = 3 \times 2\pi \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

(2) 变形前

$$E_{k_1} = \frac{1}{2}J_1\omega_1^2 = 28.4 \text{ J}$$

变形后

$$E_{k_2} = \frac{1}{2}J_2\omega_2^2 = 85.2 \text{ J}$$

变形过程中由于运动员的内力做正功, 故有 $E_{k_2} > E_{k_1}$.

4-28 一质量为 m' 、半径为 R 的转台, 以角速度 ω_s 转动, 转轴的摩擦略去不计. (1) 有一质量为 m 的蜘蛛垂直地落在转台边缘上, 此时, 转台的角速度 ω_b 为多少? (2) 若蜘蛛随后慢慢地爬向转台中心, 当它离转台中心的距离为 r 时, 转台的角速度 ω_c 为多少? 设蜘蛛下落前距离转台很近.

解: (1) 蜘蛛垂直下落至转台边缘时, 由系统的角动量守恒定律, 有

$$J_0\omega_s = (J_0 + J_1)\omega_b$$

式中 $J_0 = \frac{1}{2}m'R^2$ 为转台对其中心轴的转动惯量, $J_1 = mR^2$ 为蜘蛛刚落至台面边缘时, 它对轴的转动惯量. 于是可得

$$\omega_b = \frac{J_0}{J_0 + J_1}\omega_s = \frac{m'}{m' + 2m}\omega_s$$

(2) 在蜘蛛向中心轴处慢慢爬行的过程中, 其转动惯量将随半径 r 而改变, 即 $J_2 = mr^2$. 在此过程中, 由系统角动量守恒, 有

$$J_0\omega_s = (J_0 + J_2)\omega_c$$

$$\text{则 } \omega_c = \frac{J_0}{J_0 + J_2}\omega_s = \frac{m'R^2}{m'R^2 + 2mr^2}\omega_s$$

4-29 一质量为 1.12kg 、长为 1.0m 的均匀细棒, 支点在棒的上端点, 开始时棒自由悬挂. 以 100N 的力打击它的下端点, 打击时间为 0.02s . (1) 若打击前棒是静止的, 求打击时其角动量的变化; (2) 棒的最大偏转角.

解: (1) 由刚体的角动量定理得

$$\begin{aligned} \Delta L &= J\omega_0 = \int M dt = Fl\Delta t \\ &= 2.0 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1} \end{aligned} \quad (1)$$

(2) 取棒和地球为一系统, 并选 O 处为重力势能零点. 在转动过程中, 系统的机械能守恒, 即

$$\frac{1}{2}J\omega_0^2 = \frac{1}{2}mgl(1 - \cos\theta) \quad (2)$$

由式 (1)、(2) 可得棒的偏转角度为

$$\theta = \arccos\left(1 - \frac{3F^2 \Delta t^2}{m^2 gl}\right) = 88^\circ 38'$$

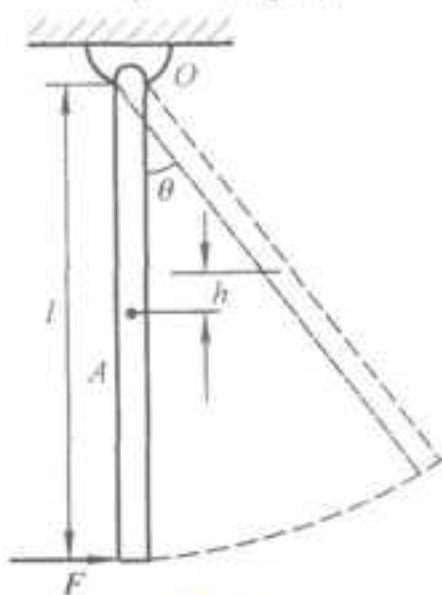


图 4-17

4-30 我国 1970 年 4 月 24 日发射的第一颗人造卫星, 其近地点为 $4.39 \times 10^5 \text{ m}$ 、远地点为 $2.38 \times 10^6 \text{ m}$ 。试计算卫星在近地点和远地点的速率。(设地球半径为 $6.38 \times 10^6 \text{ m}$)

解: 由于卫星在近地点和远地点处的速度方向与椭圆径矢垂直, 因此, 由角动量守恒定律有

$$mv_1 r_1 = mv_2 r_2 \quad (1)$$

又因卫星与地球系统的机械能守恒, 故有

$$\frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{Gmm_E}{r_1} = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{Gmm_E}{r_2} \quad (2)$$

式中 G 为引力常量, m_E 和 m 分别为地球和卫星的质量, r_1 和 r_2 是卫星在近地点和远地点时离地球中心的距离。由式 (1)、(2) 可解得卫星在近地点和远地点的速率分别为

$$v_1 = \sqrt{\frac{2Gm_E r_2}{r_1(r_1 + r_2)}} = 8.11 \times 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$v_2 = \frac{r_1}{r_2} v_1 = 6.31 \times 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

4-31 地球对自转轴的转动惯量为 $0.33m_E R^2$, 其中 m_E 为地球的质量, R 为地球的半径。(1) 求地球自转时的动能; (2) 由于潮汐的作用, 地球自转的速度逐渐减小, 一年内自转周期增加 $3.5 \times 10^{-5} \text{ s}$, 求潮汐对地球的平均力矩。

解: (1) 地球的质量 $m_E = 5.98 \times 10^{24} \text{ kg}$, 半径 $R = 6.37 \times 10^6 \text{ m}$, 所以, 地球自转的动能

$$E_k = \frac{1}{2}J\omega^2 = 2\pi^2 \times 0.33m_E R^2 / T^2 = 2.12 \times 10^{29} \text{ J}$$

(2) 对式 $\omega = \frac{2\pi}{T}$ 两边微分, 可得

$$d\omega = -\frac{2\pi}{T^2} dT$$

当周期变化一定量时, 有

$$\Delta\omega = -\frac{2\pi}{T^2}\Delta T = -\frac{\omega^2}{2\pi}\Delta T \quad (1)$$

由于地球自转减慢而引起动能的减少量为

$$\Delta E_k = J\omega\Delta\omega = -\frac{\omega^3}{2\pi}J\Delta T = -\frac{\omega}{\pi}E_k\Delta T \quad (2)$$

又根据动能定理

$$W = M\Delta\theta = \Delta E_k \quad (3)$$

由式(2)、(3)可得潮汐的摩擦力矩为

$$|\overline{M}| = \frac{E_k\omega\Delta T}{2\pi^2n} = 7.47 \times 10^{16} \text{ N} \cdot \text{m}$$

式中 n 为一年中的天数 ($n=365$), ΔT 为一天中周期的增加量。

4-32 如图 4-18 所示, 一质量为 m 的小球由一绳索系着, 以角速度 ω_0 在无摩擦的水平面上, 作半径为 r_0 的圆周运动。如果在绳的另一端作用一竖直向下的拉力, 使小球作半径为 $r_0/2$ 的圆周运动, 试求: (1) 小球新的角速度; (2) 拉力所作的功。

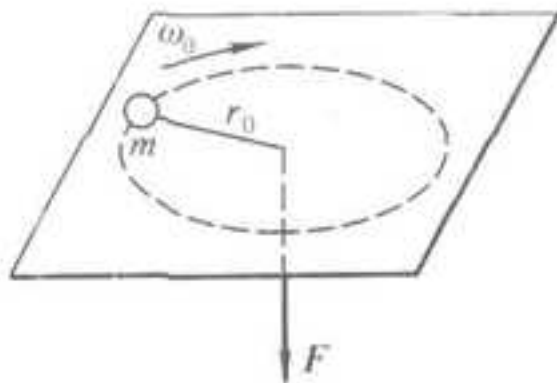


图 4-18

解: (1) 根据分析, 小球在转动的过程中, 角动量保持守恒, 故有

$$J_0\omega_0 = J_1\omega_1$$

式中 J_0 和 J_1 分别是小球在半径为 r_0 和 $\frac{1}{2}r_0$ 时对轴的转动惯量, 即 $J_0 = mr_0^2$ 和 $J_1 = \frac{1}{4}mr_0^2$, 则

$$\omega = \frac{J_0}{J_1}\omega_0 = 4\omega_0$$

(2) 随着小球转动角速度的增加, 其转动动能也增加, 这正是拉力做功的结果。由转动的动能定理可得拉力的功为

$$W = \frac{1}{2}J_1\omega_1^2 - \frac{1}{2}J_0\omega_0^2 = \frac{3}{2}mr_0^2\omega_0^2$$

4-33 质量为 0.50 kg , 长为 0.40 m 的均匀细棒, 可绕垂直于棒的一端的水平轴转动。如将此棒放在水平位置, 然后任其落下, 求: (1) 当棒转过 60° 时的角加速度和角速度; (2) 下落到竖直位置时的动能; (3) 下落到竖直位置时的角速度。

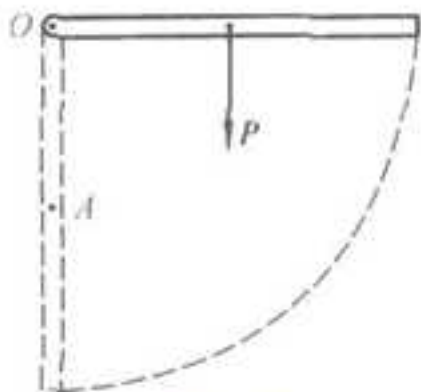


图 4-19

解：(1) 棒绕端点的转动惯量 $J = \frac{1}{3}ml^2$ ，由转动定律 $M = J\alpha$ 可得棒在 θ 位置时的角加速度为

$$\alpha = \frac{M(\theta)}{J} = \frac{3g\cos\theta}{2l} \quad (1)$$

当 $\theta = 60^\circ$ 时，棒转动的角加速度

$$\alpha = 18.4 \text{ s}^{-2}$$

由于 $\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{\omega d\omega}{d\theta}$ ，根据初始条件对式 (1) 积分，有

$$\int_0^{\omega} \omega d\omega = \int_0^{60^\circ} \alpha d\theta$$

则角速度为

$$\omega = \sqrt{\frac{3g\sin\theta}{l}} \Big|_0^{60^\circ} = 7.98 \text{ s}^{-1}$$

(2) 根据机械能守恒，棒下落至竖直位置时的动能为

$$E_k = \frac{1}{2}mgl = 0.98 \text{ J}$$

(3) 由于该动能也就是转动动能，即 $E_k = \frac{1}{2}J\omega'^2$ ，所以，棒落至竖直位置时的角速度为

$$\omega' = \sqrt{\frac{2E_k}{J}} = \sqrt{\frac{3g}{l}} = 8.57 \text{ s}^{-1}$$

4-34 如图 4-20 所示，A 与 B 两飞轮的轴杆由摩擦啮合器连接，A 轮的转动惯量 $J_A = 10.0 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ ，

开始时 B 轮静止，A 轮以 $n_1 = 600 \text{ r} \cdot \text{min}^{-1}$ 的转速转动，然后使 A 与 B 连接，因而 B 轮得到加速而 A 轮减速，直到两轮的转速都等于 $n = 200 \text{ r} \cdot \text{min}^{-1}$ 为止。求：(1) B 轮的转动惯量；(2) 在啮合过程中损失的机械能。

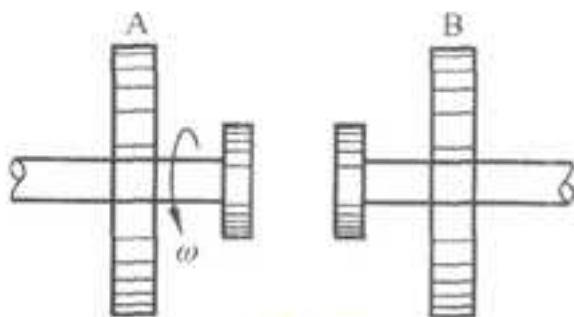


图 4-20

解：(1) 取两飞轮为系统，根据系统的角动量守恒，有

$$J_1 \omega_1 = (J_1 + J_2) \omega_2$$

则 B 轮的转动惯量为

$$J_2 = \frac{\omega_1 - \omega_2}{\omega_2} J_1 = \frac{n_1 - n_2}{n_2} J_1 = 20.0 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

(2) 系统在啮合过程中机械能的变化为

$$\Delta E = \frac{1}{2} (J_1 + J_2) \omega_2^2 - \frac{1}{2} J_1 \omega_1^2 = -1.32 \times 10^4 \text{ J}$$

式中负号表示啮合过程中机械能减少。

4-35 在题 3-30 的冲击摆问题中, 若以质量为 m' 的均匀细棒代替柔绳, 子弹速度的最小值应是多少?

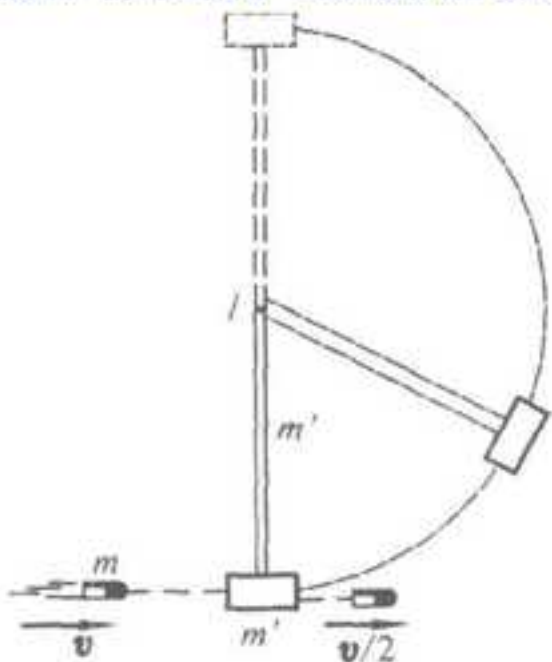


图 4-21

解: 取子弹与摆为系统, 根据系统的角动量守恒, 有

$$J_1 \frac{v}{l} = J_1 \left(\frac{v}{2l} \right) + (J_2 + J_3) \omega_0 \quad (1)$$

式中 $J_1 = ml^2$ 、 $J_2 = m'l^2$ 和 $J_3 = \frac{1}{3} m'l^2$ 分别为子弹、摆锤和杆对轴的转动惯量。

根据摆在转动过程中机械能守恒, 有

$$\frac{1}{2} (J_2 + J_3) \omega_0^2 + \frac{1}{2} m' gl = m' g (2l) + m' g \left(\frac{3}{2} l \right) \quad (2)$$

由式 (1)、(2) 可得子弹速度的最小值为

$$v = \frac{4m'}{m} \sqrt{2gl}$$

4-36 质量为 m_0 的门, 其宽为 L 。若有质量 m 的小球, 以速度 v 垂直于门平面撞到门的边缘上。设碰撞是完全弹性的, 试求碰撞后门和小球的运动速度 (门的转动惯量为 $J = \frac{1}{3} m_0 L^2$)。

解: 设碰撞后小球的速度和门的角速度分别为 v' 和 ω 。由两个守恒可有

$$mvl = mv'l + \left(\frac{1}{3} m_0 L^2 \right) \omega \quad (1)$$

$$\frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} mv'^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} m_0 L^2 \right) \omega^2 \quad (2)$$

由式 (1) 得

$$v - v' = \frac{1}{3} \frac{m_0}{m} L \omega \quad (3)$$

由式 (2) 得

$$v^2 - v'^2 = \frac{1}{3} \frac{m_0}{m} (L \omega)^2 \quad (4)$$

由式 (3) 和 (4) 得

$$v + v' = L \omega$$

由式 (3) 和 (5) 得

$$\omega = \frac{6m}{3m + m_0} \frac{v}{L}$$

$$v' = \frac{3m - m_0}{3m + m_0} v$$

小球通常较小, 满足 $3m < m_0$, 故 $v' < 0$, 说明撞后小球被反向弹回, 但若球的质量较大, 还可能出现以下两种情况:

如 $3m = m_0$, $v' = 0$, 球撞后瞬间静止, 然后下落。

如 $3m > m_0$, $v' > 0$, 球撞后继续向前运动。

4-37 如图 4-22 所示, 有一空心圆环可绕竖直轴 OO' 自由转动, 转动惯量为 J_0 , 环的半径为 R , 初始的角速度为 ω_0 , 今有一质量为 m 的小球静止在环内 A 点, 由于微小扰动使小球向下滑动, 问小球到达 B、C 点时, 环的角速度与小球相对于环的速度各为多少? (假设环内壁光滑。)

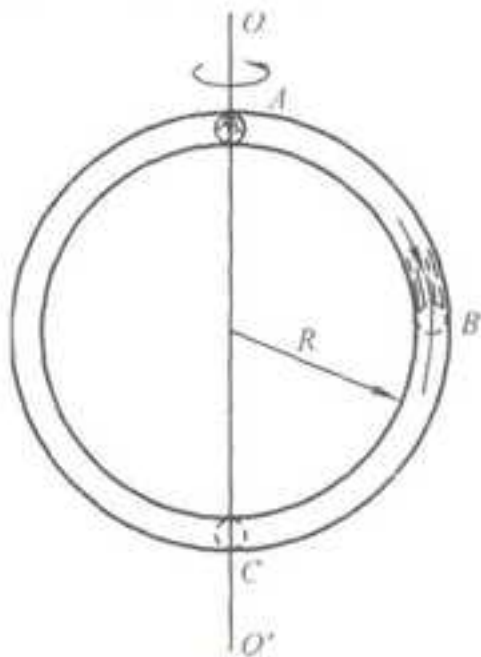


图 4-22

解: 以环和小球为转动系统, 由系统的角动量守恒有

$$J_0 \omega_0 = (J_0 + mR^2) \omega_B \quad (1)$$

取环、小球与地球为系统时, 由系统的机械能守恒可得

$$\frac{1}{2} J_0 \omega_0^2 + mgR = \frac{1}{2} (J_0 + mR^2) \omega_B^2 + \frac{1}{2} mv_B^2 \quad (2)$$

由式 (1)、(2) 可解得小球在 B 点时, 环的角速度与小球相对于环的线速度分别为

$$\omega_B = \frac{J_0 \omega_0}{J_0 + mR^2}$$

$$v_B = \sqrt{2gR + \frac{J_0 \omega_0^2 R^2}{J_0 + mR^2}}$$

小球在 C 点时，由于总的转动惯量不变，用同样的方法可得环的角速度和小球相对于环的速度分别为

$$\omega_C = \omega_0$$

$$v_C = \sqrt{4gR}$$

4-38 为使运行中飞船停止绕其中心轴转动，一种可能方案是将质量均为 m 的两质点 A、B，用长为 l 的两根轻线系于圆盘状飞船的直径两端（如图 4-23 所示），开始时轻线拉紧两质点靠在圆盘的边缘，圆盘与质点一起以角速度旋转；当质点离开圆盘边逐渐伸展至连线沿径向拉直的瞬时，割断质点与飞船的连线，为使此时的飞船正好停止转动，连线应取何长度？（设飞船可看作质量为 m' 、半径为 R 的匀质圆盘）

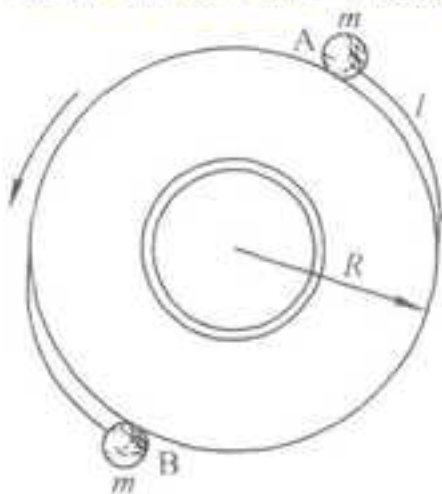


图 4-23

解：飞船绕其中心轴的转动惯量为 $J_1 = \frac{1}{2} m' R^2$ ，两质点在起始时和轻线割断瞬间的转动惯量分别为 $J_2 = 2mR^2$ 和 $J_2' = 2m(R+l)^2$ ，由于过程中系统的角动量守恒，为使轻线沿径向拉直时，飞船转动正好停止，则有

$$(J_1 + J_2) \omega = 2m(R+l)^2 \omega' \quad (1)$$

又根据过程中系统的机械能守恒，有

$$\frac{1}{2} (J_1 + J_2) \omega^2 = \frac{1}{2} 2m(R+l)^2 \omega'^2 \quad (2)$$

由上述两式可解得

$$l = R \left(\sqrt{1 + \frac{m'}{4m}} - 1 \right)$$

4-39 如图 4-24 所示，在光滑的水平面上有一轻质弹簧（其劲度系数为 k ），它的一端固定，另一端系一质量为 m' 的滑块，最初滑块静止时，弹簧呈自然长度 l_0 ，今有一质量为 m 的子弹以速度 v_0 沿水平方向并垂直于弹簧轴线射向滑块且留在其中，滑块在水平面内滑动，当弹簧被拉伸至长度 l 时，求滑块速度 v 的大小和方向。

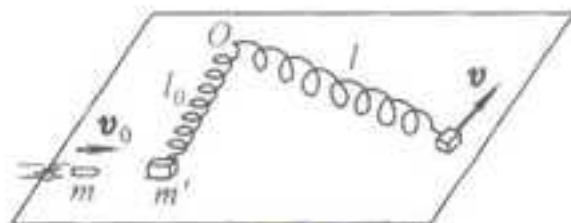


图 4-24

解：子弹射入滑块瞬间，因属非弹性碰撞，根据动量守恒定律有

$$mv_0 = (m' + m)v' \quad (1)$$

在弹簧的弹力作用下，滑块与子弹一起运动的过程中，若将弹簧包括在系统内，则系统满足机械能守恒定律，有

$$\frac{1}{2}(m' + m)v'^2 = \frac{1}{2}(m' + m)v^2 + \frac{1}{2}k(l - l_0)^2 \quad (2)$$

又在滑块绕固定点作弧线运动中，系统满足角动量守恒定律，故有

$$(m' + m)v'l_0 = (m' + m)vl \sin \theta \quad (3)$$

式中 θ 为滑块速度方向与弹簧线之间的夹角，联立解上述三式，可得

$$v = \sqrt{\left(\frac{m}{m' + m}\right)^2 v_0^2 - \frac{k(l - l_0)^2}{m' + m}}$$

$$\theta = \arcsin \frac{mv_0 l_0}{(m' + m)vl}$$

4-40 一长为 l 、质量为 m 的均匀细棒，在光滑的平面上绕质心作无滑动的转动，其角速度为 ω 。若棒突然改绕其一端转动，求：(1) 以端点为转轴的角速度 ω' ；(2) 在此过程中转动动能的改变。

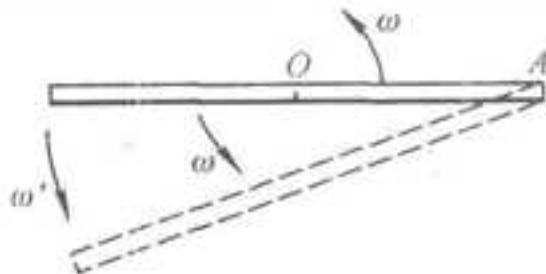


图 4-25

解：(1) 棒的质心的动量定理为

$$\bar{F} \Delta t = \Delta p = mv_c$$

式中 F 是棒所受的平均力， v_c 为棒质心的速度。棒在转动过程中受到外力矩作用，根据角动量定理，有

$$-\bar{F} \frac{l}{2} \Delta t = J\omega' - J\omega$$

式中 J 为棒绕质心的转动惯量（即 $J = \frac{1}{12}ml^2$ ）。

而根据角量与线量的关系

$$v_c = \frac{l}{2}\omega'$$

可解得

$$\omega' = \frac{J}{J + \frac{1}{4}ml^2} \omega = \frac{1}{4} \omega$$

(2) 在此过程中转动动能的改变为

$$\Delta E_k = \frac{1}{2} J' \omega'^2 - \frac{1}{2} J \omega^2 = -\frac{1}{32} m l^2 \omega^2$$

4-41 如图 4-26 所示, 一绕有细绳的大木轴放置在水平面上, 木轴质量为 m , 外轮半径为 R_1 , 内柱半径为 R_2 , 木轴对中心轴 O 的转动惯量为 J_c . 现用一恒定外力 F 拉细绳一端, 设细绳与水平面夹角 θ 保持不变, 木轴滚动时与地面无相对滑动, 求木轴滚动时的质心加速度 a_c 和木轴绕中心轴 O 的角加速度 α .

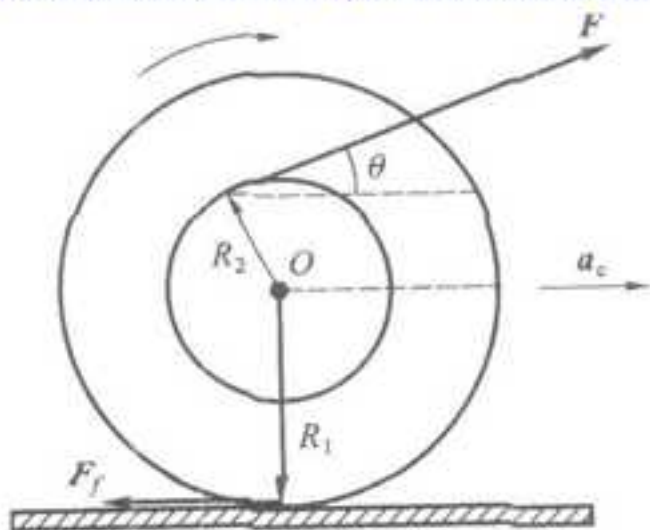


图 4-26

解: 设木轴所受静摩擦力 F_f 如图 4-26 所示, 则有

$$F \cos \theta - F_f = m a_c \quad (1)$$

$$F R_2 + F_f R_1 = J_c \alpha \quad (2)$$

$$a_c = R_1 \alpha \quad (3)$$

由 (1)、(2)、(3) 式可得

$$a_c = \frac{R_1^2 \cos \theta + R_1 R_2 F}{J_c + m R_1^2}$$

$$\alpha = \frac{a_c}{R_1} = \frac{R_1 \cos \theta + R_2 F}{J_c + m R_1^2} F$$

4-42 匀速地将水注入一容器中, 注入的流量为 $Q = 150 \text{ cm}^3 \cdot \text{s}^{-1}$. 容器底部有面积为 $S = 0.5 \text{ cm}^2$ 的小孔, 使水不断流出. 当容器中的水达到稳定状态后, 求容器中的水的深度 h .

解: 由分析知, 稳定时有

$$Q = S v = S \sqrt{2gh}$$

则

$$h = \frac{(Q/S)^2}{2g} = 0.46 \text{ m}$$

4.3 名校考研真题详解

一、选择题

花样滑冰运动员绕通过自身的竖直轴转动，开始时两臂伸开，转动惯量为 J_0 ，角速度为 ω_0 ，然后她将两臂收回，使转动惯量减少为 $\frac{1}{3}J_0$ ，这时她转动的角速度变为 ()。 [北京科技大学 2014 研]

- A. $\frac{\omega_0}{3}$
 B. $\frac{\omega_0}{\sqrt{3}}$
 C. $3\omega_0$ □
 D. $\sqrt{3}\omega_0$ □

【答案】 C

【解析】 花样滑冰运动员在转动过程中角动量守恒，因此

$$J_0\omega_0 = \frac{1}{3}J_0\omega$$

$$\therefore \omega = 3\omega_0$$

二、填空题

1. 一飞轮以 600 转/分钟的转速旋转，转动惯量为 $2.5\text{kg}\cdot\text{m}^2$ ，现加一恒定的制动力矩使飞轮在 1s 内停止转动，则该恒定制动力矩的大小 $M=$ 。 [北京科技大学 2014 研]

【答案】 $-157.1(\text{N}\cdot\text{m})$

【解析】 由飞轮的转速可得其角速度

$$n = 600\text{r}/\text{min} = 10\text{r}/\text{s}$$

$$\therefore \omega_0 = 2\pi n = 62.83\text{rad}/\text{s}$$

制动力矩使飞轮在 1s 内停止转动，则平均角加速度为

$$\alpha = \frac{\omega - \omega_0}{\Delta t} = -62.83\text{rad}/\text{s}^2$$

根据转动定律可得

$$M = J\alpha = 2.5 \times (-62.83) = -157.1(\text{N}\cdot\text{m})$$

2. 一个圆柱体质量为 M ，半径为 R ，可绕固定的通过其中心轴线的平滑轴转动，原来处于静止，现有一质量为 m 、速度为 v 的子弹，沿圆周切线方向射入圆柱体边缘，子弹嵌入圆柱体后的瞬间，圆柱体与子弹一起转动的角速度 $\omega =$ _____。(已知圆柱体绕固定轴的转动惯量 $J = \frac{1}{2}MR^2$) [电子科技大学 2011 研]

【答案】 $\frac{2mv}{(M+2m)R}$

三、计算题

1. 一质量为 m 的物体悬于一条轻绳的一端，绳的另一端绕在一个轮轴的轴上，如图 4-1 所示，绳子与轴的边缘无相对滑动，轴水平且垂直于轮轴面，其半径为 r ，整个装置架在光滑的固定轴承之上，当物体从静止释放后，在时间 t 内下降了一段距离 S ，试求整个轮轴的转动惯量 (用 m 、 r 、 t 和 S 表示)。 [北京科技大学 2014 研]

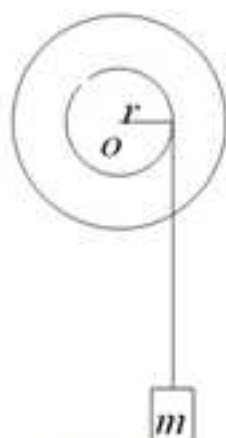


图 4-1

解：物体与轮轴系统的受力分析如图 4-2 所示

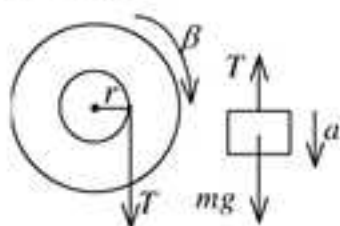


图 4-2

设绳子对轮轴的拉力为 T ，根据牛顿运动定律和转动定律可得

$$mg - T = ma$$

$$Tr = J\beta$$

由运动学方程可得

$$a = \beta r$$

$$S = \frac{1}{2}at^2$$

由上述三式解得

$$J = m(g - a)r^2 / a$$

已知 $v_0=0$ ， $a = 2S/t^2$ ，代入上式得

$$J = mr^2 \left(\frac{gt^2}{2S} - 1 \right)$$

2. 一质量为 m_1 ，长为 l 的均匀细棒，静止平放在水平光滑的水平桌面上，它可绕其通过端点 O 且与桌面垂直的固定轴转动，另有一水平运动的质量为 m_2 的小滑块，从侧面垂直于棒与棒另一端相碰，设碰撞时间极短，碰撞前后小滑块速度大小分别为 v_1 和 v_2 ，方向如图 4-3 所示，求碰撞后细棒开始转动时的角速度。[武汉科技大学 2016 研]

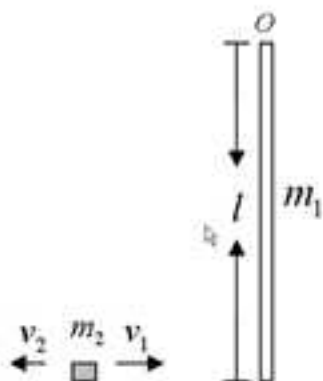


图 4-3

解：把细棒和滑块看成是一个系统，则在碰撞的过程当中，系统所受合外力矩为零，角动量守恒。设细棒开始转动时的角速度为 ω ，由角动量守恒定律可知，碰撞前后系统角动量相等，即有 $L_0 = L$

碰撞前系统的角动量为 $L_0 = m_2 v_1 l$ ，碰撞后系统的角动量为 $L = \frac{1}{3} m_1 l^2 \omega - m_2 v_2 l$

$$m_2 v_1 l = \frac{1}{3} m_1 l^2 \omega - m_2 v_2 l$$

则有

$$\omega = \frac{3m_2(v_1 + v_2)}{m_1 l}$$

所以

3. 一轴承光滑的定滑轮，质量为 $M=2\text{kg}$ ，半径为 $R=0.1\text{m}$ ，一根不能伸长的轻绳，一端固定在定滑轮上，另一端系有一质量为 $m=5\text{kg}$ 的物体，如图 4-4 所示，已知定滑轮的转动惯量为 $J = \frac{1}{2}MR^2$ ，其初角速度 $\omega_0 = 10\text{rad/s}$ ，方向垂直纸面向里，求：

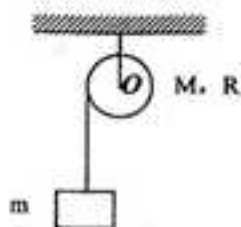


图 4-4

- (1) 定滑轮的角加速度；
- (2) 定滑轮的角速度变化到 $\omega=0$ 时，物体上升的高度；
- (3) 当物体回到原来位置时，定滑轮的角速度。[电子科技大学 2011 研]

解：(1)

$$\because mg - T = ma$$

$$TR = J\beta$$

$$a = R\beta$$

$$\begin{aligned} \therefore \beta &= mgR / (mR^2 + J) = \frac{mgR}{mR^2 + \frac{1}{2}mR^2} = \frac{2mg}{(2m + M)R} \\ &= 81.7\text{rad/s} \end{aligned}$$

方向垂直纸面向外，

(2)

$$\therefore \omega = \omega_0 + \beta t$$

当 $\omega = 0$ 时, $10 - 81.7t = 0$, 则 $t = 0.122s$,

$$\therefore \theta = \omega_0 t - \frac{1}{2} \beta t^2 = 0.612rad$$

物体上升的高度 $h = R\theta = 6.12 \times 10^{-2}m$

(3) $\omega = \sqrt{2\beta\theta} = 10rad/s$, 方向垂直纸面向外。

第5章 静电场

5.1 复习笔记

一、电荷的量子化、电荷守恒定律

1. 电荷的量子化

(1) 电荷的量子化

电荷的量子化是指电荷只能取离散的、不连续的量值的性质。

(2) 电子的电荷绝对值 e 称为元电荷，又称电荷的量子。

(3) 电荷的单位名称为库仑，简称库，符号为 C，在通常的计算中，电子电荷的近似值为

$$e = 1.602 \times 10^{-19} \text{ C}$$

2. 电荷守恒定律

电荷守恒定律是指不管系统中的电荷如何迁移，系统的电荷的代数和保持不变。

二、库仑定律

1. 定律表述

库仑定律是指在真空中，两个静止的电荷之间的相互作用力，其大小与它们电荷的乘积成正比，与它们之间距离的二次方成反比；作用力的方向沿着两点电荷的连线，同号电荷相斥，异号电荷相吸。

2. 数学公式表达式

两个点电荷分别为 q_1 和 q_2 ，由电荷 q_1 指向电荷 q_2 的矢量用 r 表示，那么，电荷 q_2 受到电荷 q_1 的作用力 F 为

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} e_r$$

式中 e_r 为从电荷 q_1 指向电荷 q_2 的单位矢量，即 $e_r = \vec{r}/r$ ， ϵ_0 称为真空电容率，是电学中常用到的一个物理量，一般计算时，其值为

$$\begin{aligned}\epsilon_0 &= 8.85 \times 10^{-12} \text{ C}^2 \cdot \text{N}^{-1} \cdot \text{m} \\ &= 8.85 \times 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}\end{aligned}$$

由上式可知，当 q_1 和 q_2 同号时， $q_1 q_2 > 0$ ， q_2 受到斥力作用；当 q_1 和 q_2 异号时， $q_1 q_2 < 0$ ， q_2 受到引力作用。

3. 库仑力

库仑力是指静止电荷间的电作用力，两静止点电荷之间的库仑力遵守牛顿第三定律。

三、电场强度

1. 静电场

(1) 概念

任何电荷在其周围都将激发起电场，静电场存在于静止电荷的周围，并分布在一定的空间。

(2) 场性质

① 场是一种特殊形态的物质，它和实物一起构成了丰富物质世界。

② 场和实物的最明显区别在于：场分布范围非常广泛，具有分散性，而实物则集在有限范围内，具有集中性。

2. 电场强度

(1) 概念

电场强度是指将一试验电荷放在电场中不同位置， F 与 q_0 相比得到的一不变矢量，它只与该点处的电场有关，用符号 E 表示，有

$$E = \frac{F}{q_0}$$

电场中某点处的电场强度 E 等于位于该点处的单位试验电荷所受的电场力，电场强度是空间位置的函数。

(2) 单位

在国际单位制中, 电场强度的单位为牛顿每库仑, 符号为 $\text{N}\cdot\text{C}^{-1}$; 电场强度的单位亦为伏特每米, 符号为 $\text{V}\cdot\text{m}^{-1}$, $\text{V}\cdot\text{m}^{-1}$ 与 $\text{N}\cdot\text{C}^{-1}$ 是一样的.

3. 点电荷电场强度

(1) 任一点的电场强度

若把试验电荷 q_0 置于场点 P , 可得空间任一场点 P 的电场强度为

$$E = \frac{F}{q_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} e_r$$

其中点电荷 Q 位于直角坐标系的原点 O , 由原点 O 指向场点 P 的位矢为 r .

(2) 场强的方向

①如果点电荷为正电荷 (即 $Q>0$), E 的方向与 e_r 的方向相同;

②如点点电荷为负电荷 (即 $Q<0$), E 的方向与 e_r 的方向相反.

(3) 结论

真空中点电荷的电场是具有对称性的非均匀场.

4. 电场强度叠加原理

(1) 点电荷的电场叠加

①点电荷系所激发的电场中某点处的电场强度等于各个点电荷单独存在时对该点所激起的电场强度的矢量和.

②数学表达式

$$E = \sum_{i=1}^n E_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{r_i^2} e_i$$

(2) 电荷连续分布的电荷系的电场强度

设有一体积为 V , 电荷连续分布的带电体;

①电荷元 dq 在点 P 的电场强度为

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} e_r$$

式中 e_r 为由 dq 指向点 P 的单位矢量.

②取各电荷元对点 P 处的电场强度, 并求矢量积分.

③得电荷系在点 P 处的电场强度 E 为

$$E = \int_V dE = \int_V \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e_r}{r^2} dq$$

④若 dV 为电荷元 dq 的体积元, ρ 为其电荷体密度, 则 $dq = \rho dV$. 于是, 上式亦可写成

$$E = \int_V \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho e_r}{r^2} dV$$

⑤对于电荷连续分布的线带电体和面带电体来说, 电荷元 dq 分别为 $dq = \lambda dl$ 和 $dq = \sigma dS$, 其中 λ 为电荷线密度, σ 为电荷面密度, 则可得它们的电场强度分别为

$$E = \int_V \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda e_r}{r^2} dl, E = \int_V \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma e_r}{r^2} dS$$

5. 电偶极子的电场强度

(1) 电偶极子的概念

电偶极子是指由两个电荷量相等、符号相反、相距为 r_0 的点电荷 $+q$ 和 $-q$ 构成的电荷系.

(2) 电偶极矩

电偶极矩是指电荷量与轴的乘积, 其中电偶极子的轴是指从 $-q$ 指向 $+q$ 的矢量 r_0 . 电偶极子的电偶极矩简称电矩, 用符号 p 表示, 有 $p = qr_0$.

(3) 电偶极子轴线延长线上一点的电场强度

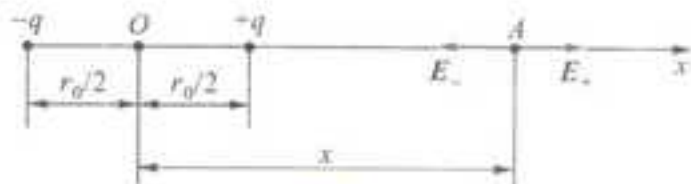


图 5-1

如图 5-1 所示，取电偶极子轴线的中点为坐标原点 O ，沿极轴的延长线为 Ox 轴，轴上任意点 A 距原点 O 的距离为 x 。则由电场强度叠加原理可知，点 A 处的 E 为

$$E = E_+ + E_- = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{2xr_0}{(x^2 - r_0^2/4)^{3/2}} \right] i$$

当场点 A 到电偶极子的距离比电偶极子中 $-q$ 和 $+q$ 之间的距离大得多时，即 $x \gg r_0$ 时，由于电矩 $p = qr_0 = qr_0 i$ ，所以上式为

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2p}{x^3}$$

该式表明，在电偶极子轴线的延长线上任意点 A 处的电场强度 E 的大小与电偶极子的电矩 p 的大小成正比，与电偶极子中点 O 到点 A 的距离 x 的三次方成反比；电场强度 E 的方向与电矩 p 的方向相同。

(4) 电偶极子轴线的中垂线上一点的电场强度

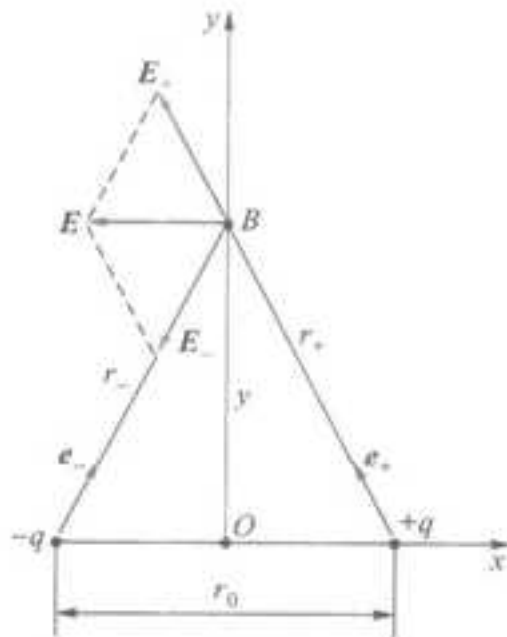


图 5-2

以电偶极子轴线中点为坐标原点 O ，并取 Ox 轴和 Oy 轴如图 5-2 所示，根据电场叠加原理，经计算可得点 B 出的电场强度 E 为

$$E = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{\left(y^2 + \frac{r_0^2}{4}\right)^{3/2}}$$

当 $y \gg r_0$ 时， $y^2 + (r_0/2)^2 \approx y^2$ ，于是上式为

$$E = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{y^3}$$

该式表明，在电偶极子的中垂线上任意点 B 处的电场强度 E 的大小与电矩 p 的大小成正比，与电偶极子的中点到点 B 的距离 y 的三次方成反比；电场强度 E 的方向与电矩的方向相反。

四、电场强度通量高斯定理

1. 电场线

(1) 常见电荷的电场线

图 5-3 是几种带电系统的电场线:

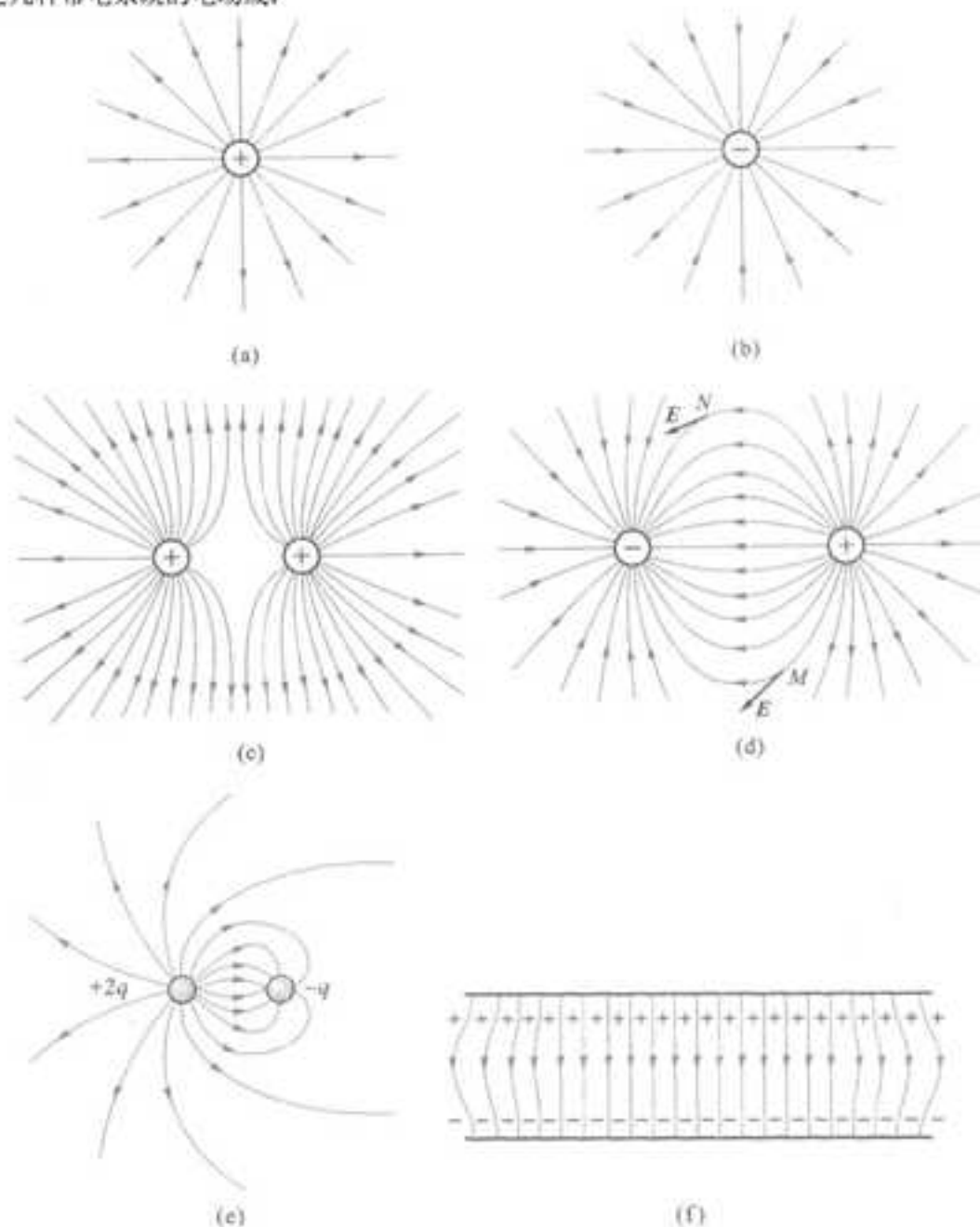


图 5-3 几种典型电场的电场线分布图形

(a) 正电荷 (b) 负电荷 (c) 两个等量正电荷 (d) 两个等量异号电荷

(e) 两个不等量异号电荷 (f) 带等值异号电荷的两平行板

在电场线上每一点处电场强度 E 的方向沿着该点的切线, 并以电场线箭头的指向表示电场强度的方向.

(2) 静电场的电场线的特点

- ① 电场线总是始于正电荷, 终止于负电荷, 不形成闭合曲线;
- ② 任何两条电场线都不能相交, 这是因为电场中每一点处的电场强度只能有一个确定的方向.

(3) 电场线的作用

- ① 电场线不仅能表示电场强度的方向, 而且电场线在空间的密度分布还能表示电场强度的大小.
- ② 在某区域内, 电场线的密度较大, 该处 E 也较强; 电场线的密度较小, 则该处 E 也较弱.

(4) 电场线密度的概念

电场线密度是指通过电场中某点垂直于 E 的单位面积的电场线数. 定义通过面积元 dS 的电场线数 dN 与该点的 E 的大小有如下关系

$$\frac{dN}{dS} = E$$

即电场线密度等于该点处电场强度 E 的大小。

2. 电场强度通量

(1) 概念

电场中某一个面的电场强度通量是指通过该面的电场线数目，用符号 Φ_e 表示。

(2) 电场强度通量的表达式

① 匀强电场中

a. 若平面 S 与匀强电场 E 垂直，则通过面 S 的电场强度通量为

$$\Phi_e = ES$$

b. 若平面 S 不垂直匀强电场 E ，则通过面 S 的电场强度通量为

$$\Phi_e = ES \cos \theta$$

其中 θ 为 e_n 与 E 的夹角， e_n 是 S 的单位法向量。

② 非匀强电场

将任意曲面分为无数面积元 dS ，则在这个面积元里的电场 E 是相等的，那么，所以通过曲面 S 的电场强度通量 Φ_e ，就等于通过面 S 上所有面积元 dS 电场强度通量 $d\Phi_e$ 的总和，即

$$\Phi_e = \int_S E \cdot dS$$

③ 如果曲面是闭合曲面，上式中的曲面积分应换成对闭合曲面积分，闭合曲面积分用 “ \oint_S ” 表示，故通过闭合曲面的电场强度通量为

$$\Phi_e = \oint_S E \cos \theta dS = \oint_S E \cdot dS$$

(3) 方向的规定

规定：曲面上某点的法线矢量的方向垂直指向曲面外侧。

如图 5-4 所示，在曲面的 A 处，电场线从外穿进曲面里， $\theta > 90^\circ$ ，所以 $d\Phi_e$ 为负；在 B 处，电场线从曲面里向外穿出， $\theta < 90^\circ$ ，所以 $d\Phi_e$ 为正；而在 C 处，电场线与曲面相切， $\theta = 90^\circ$ ，所以 $d\Phi_e$ 为零。

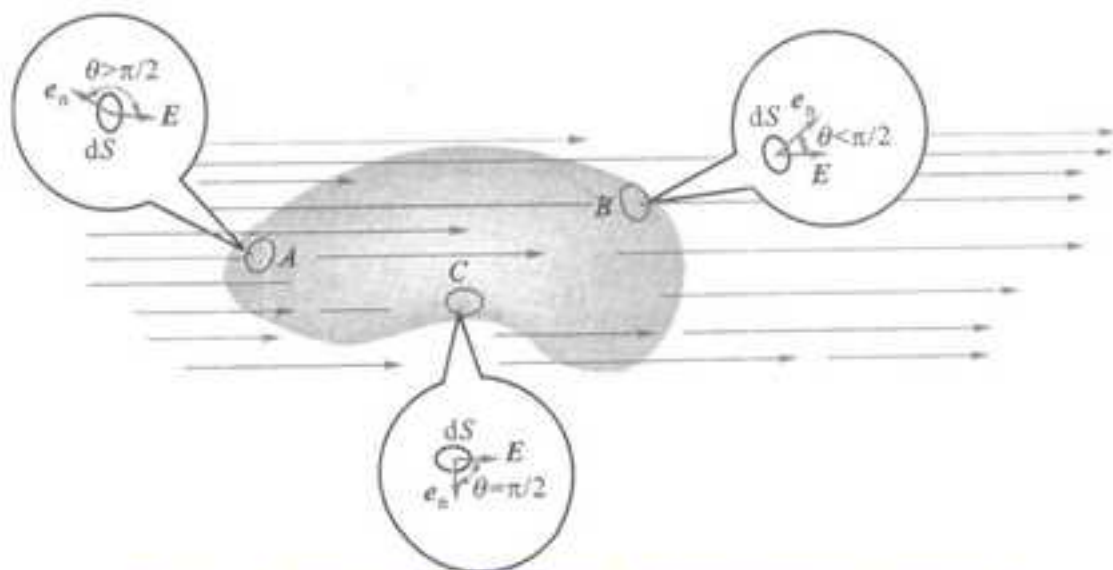


图 5-4 通过闭合曲面上不同地方面积元的电场强度通量正负的判别

3. 高斯定理

(1) 以点电荷为球心的闭合曲面

定理表述：通过球面的电场强度通量等于球面所包围的电荷 q 除以真空电容率，其数学表达式为

$$\Phi_e = \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

从电场线的观点看来，若 q 为正电荷，从 $+q$ 穿出球面的电场线数为 q/ϵ_0 ；

(2) 包围点电荷的闭合曲面形状是任意的

求得通过包围 q 的任意闭合曲面的电场强度通量仍为

$$\Phi_e = \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

(3) 点电荷位于闭合曲面之外

点电荷位于闭合曲面之外时穿过此闭合曲面的电场强度通量必为零，即

$$\Phi_e = \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (\text{闭合曲面内不含净电荷})$$

(4) 真空电场的高斯定理

在真空静电场中，穿过任意闭合曲面的电场强度通量等于该闭合曲面所包围的所有电荷的代数和除以 ϵ_0 ，数学表达式为

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^n q_i^{\text{in}}$$

式中 $\sum_{i=1}^n q_i^{\text{in}}$ 是闭合曲面内所含电荷的代数和。

在定理中，常把所选取的闭合曲面称为高斯面，所以，穿过任意高斯面的电场强度通量只与高斯面所包围的电荷系有关，而与高斯面的形状无关，也与电荷系的电荷分布情况无关。

(5) 高斯定理和库仑定律的区别

① 库仑定律是从电荷间的作用反映静电场的性质，而高斯定理则是从场和场源电荷间的关系反映静电场的性质。

② 从场的研究方面来看，高斯定理比库仑定律更基本，应用范围更广泛。库仑定律只适用于静电场，而高斯定理不但适用于静电场，而且对变化电场也是适用的，它是电磁场理论的基本方程之一。

五、静电场的环路定理电势能

1. 静电场力所作的功

(1) 正点电荷 q 固定于原点 O ，试验电荷 q_0 从点 A 移至点 B 的过程中，电场力所作的总功为

$$W = \int dW = \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_A}^{r_B} \frac{dr}{r^2} = \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right)$$

式中 r_A 和 r_B 分别为试验电荷移动时的起点和终点距点电荷 q 的距离。

(2) 在点电荷 q 的非匀强电场中，电场力对试验电荷 q_0 所作的功，只与其移动时的起始和终止位置有关，与所经历的路径无关。

(3) 任意带电体都可看成由许多点电荷组成的点电荷系，因此任意点电荷系的电场力对试验电荷 q_0 所作的功，等于组成此点电荷系的各点电荷的电场力所做功的代数和。

2. 静电场的环路定理

静电场的环路定理是指在静电场中，电场强度 \mathbf{E} 沿任意闭合路径的线积分（即 \mathbf{E} 的环流）为零，其数学表达式为

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

上式与高斯定理一样，也是表述静电场性质的一个重要定理。

静电力也是保守力，静电场是保守场。

3. 电势能

(1) 电势能

电势能是电荷在静电场中的一定位置上具有的一定的势能, 这个电势能是属于电荷—电场系统的, 常用 E_p 表示。

(2) 电场力做功与电势能关系

静电力对电荷所作的功就等于电荷电势能的变化量。

如果以 E_{pA} 和 E_{pB} 分别表示试验电荷 q_0 在电场中点 A 和点 B 处的电势能, 则试验电荷从 A 移动到 B, 静电力对它作的功为

$$W_{AB} = E_{pA} - E_{pB} = -(E_{pB} - E_{pA}) \text{ 或 } q_0 \int_{AB} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = E_{pA} - E_{pB} = -(E_{pB} - E_{pA})$$

电势能也和重力势能一样, 是一个相对的量, 在决定电荷在电场中某点的电势能的值时, 必须先选择一个电势能参考点, 并设该点的电势能为零, 才能说某一点的电势能。

(3) 一般表达式

若选 q_0 在点 B 处的电势能为零, 即 $E_{pB} = 0$, 则有

$$E_{pA} = q_0 \int_{AB} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (E_{pB} = 0)$$

这表明, 试验电荷 q_0 在电场中某点处的电势能, 在数值上就等于把它从该点移到零势能处静电力所作的功。

(4) 单位

在国际单位制中, 电势能的单位是焦耳, 符号为 J。

六、电势

1. 电势

(1) 概念

电势是描述静电场性质的另一个重要物理量。

$$V_A = E_{pA}/q_0, \quad V_B = E_{pB}/q_0$$

其中 V_A 和 V_B 分别称作点 A 和点 B 的电势。

(2) 电势大小

电场中某一点 A 的电势 V_A , 在数值上等于把单位正试验电荷从点 A 移到无限远处时, 静电力所作的功, 也等于把单位正试验电荷从无限远处移到点 A 时, 电场力所做功的负值, 其数学表达式为

$$V_A = \int_{A\infty} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

电势是标量, 在国际单位制中, 电势的单位是伏特简称伏, 符号为 V。

(3) 电势差

电场中点 A 和点 B 两点间的电势差用符号 U_{AB} 表示。

$$U_{AB} = V_A - V_B = -(V_B - V_A) = \int_{AB} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

上式表明静电场中 A、B 两点的电势差, 在数值上等于把单位正试验电荷从 U_{AB} 点 A 移到点 B 时, 静电力所作的功。

在原子、核子物理中, 电子、质子等粒子的能量常用电子伏特 (eV) 为单位, 1eV 表示 1 个电子通过 1V 电势差时所获得的能量, eV 与 J 间的关系为

$$1 \text{ eV} = 1.602 \times 10^{-19} \text{ J}$$

2. 点电荷电场的电势

设在点电荷 q 的电场中, 点 A 距点电荷 q 的距离为 r, 可得点 A 的电势为

$$V = \int_{\infty}^r \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}$$

上式表明，当 $q > 0$ 时，电场中各点的电势都是正值，随 r 的增加而减小；但当 $q < 0$ 时，电场中各点的电势则是负值，而在无限远处的电势虽为零，但电势却最高。

3. 电势的叠加原理

(1) 点电荷

静电场的电势叠加原理是指点电荷系所激发的电场中某点的电势，等于各点电荷单独存在时在该点建立的电势的代数和，数学表达式为

$$V_A = \sum_{i=1}^n \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{r_i}$$

(2) 连续分布带电体

若一带电体上的电荷是连续分布的，则可把它分成无限多个电荷元 dq ，这些电荷元在电场中点 A 建立的电势积分，即为 A 点的电势

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r}$$

(3) 计算电势的方法

在真空中，当电荷系的电荷分布已知时，计算电势的方法有两种。

①利用定义式 $V_A = \int_{A\infty} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + V_B$ 计算点 A 的电势。

注意：只有电荷分布在有限空间里，才能选参考点 B 在无限远处，且其电势为零；在积分路径上 \mathbf{E} 的函数表达式必须是知道的。

②利用连续分布带电体所表达的点电荷电势的叠加原理，即

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r}$$

七、电场强度与电势梯度

1. 等势面

(1) 概念

等势面是指电场中电势相等的点所构成的面。

(2) 特点

- ①某点的电场强度与通过该点的等势面垂直；
- ②等势面越密的地方，电场强度也越大；
- ③对等势面的疏密作这样的规定：电场中任意两个相邻等势面之间的电势差都相等。

2. 电场强度与电势梯度

电场强度与电势的关系为：电场中某点的电场强度沿任一方向的分量，等于这一点的电势沿该方向的电势变化率的负值。

(1) 数学表达式为

$$E_l = -\frac{dV}{dl}$$

dV/dL 是沿 L 方向单位长度的电势变化率。

(2) 矢量表达式为

$$\mathbf{E} = -\frac{dV}{dl_n} \mathbf{e}_n$$

式中 \mathbf{e}_n 为两等势面法线方向的单位法线矢量。

上式表明，在电场中任意一点的电场强度 \mathbf{E} ，等于该点的电势沿等势面法线方向的变化率的负值，即在电场中任一点 \mathbf{E} 的大小，等于该点电势沿等势面法线方向的空间变化率， \mathbf{E} 的方向与法线方向相反。

(3) 坐标表达式为:

一般说来, 在直角坐标系中, 电势 V 是坐标 x , y 和 z 的函数, 因此, 如果把 x 轴、 y 轴和 z 轴正方向分别取作参考方向, 则可得, 电场强度在这三个方向上的分量分别为

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

于是电场强度与电势关系的矢量表达式可写成

$$\mathbf{E} = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\mathbf{k}\right) = -\frac{dV}{dl_n}\mathbf{e}_n$$

(4) 梯度符号的表达式

$$\mathbf{E} = -\text{grad } V = -\nabla V$$

即电场强度 \mathbf{E} 等于电势梯度的负值。

八、电场中的电偶极子

1. 外电场对电偶极子的力矩和取向作用

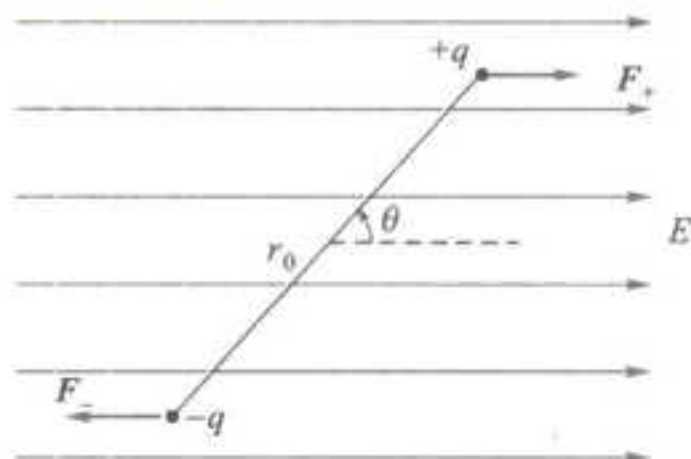


图 5-5 在均匀电场中电偶极子所受的力矩

(1) 合力

作用在电偶极子上的合力为

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_+ + \mathbf{F}_- = q\mathbf{E} - q\mathbf{E} = 0$$

即, 在均匀电场中, 电偶极子不受电场力的作用。

(2) 力矩

由于力和的作用线不在同一直线上, 它们构成为力矩, 根据定义, 电偶极子所受的力矩为

$$M = qr_0 E \sin \theta = pE \sin \theta$$

上式的矢量形式为 $\mathbf{M} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}$ 。

(3) 平衡位置

在力矩作用下, 电偶极子将在图 5-5 所示情况下作顺时针转动, 平衡位置是指当 $\theta = 0$, 即电偶极子的电矩 \mathbf{p} 的方向与电场强度 \mathbf{E} 的方向相同, 电偶极子所受力矩为零时所在的位置。

2. 电偶极子在电场中的电势能和平衡位置

(1) 电势能表达式

如图 5-5 所示, 电矩为 $\mathbf{p} = qr_0$ 的电偶极子处于电场强度为 \mathbf{E} 的匀强电场中, 设 $+q$ 和 $-q$ 所在处的电势分别为 V_+ 和 V_- , 此电偶极子的电势能为

$$E_p = qV_+ - qV_- = -q\left(-\frac{V_+ - V_-}{r_0 \cos \theta}\right)r_0 \cos \theta = -qr_0 E \cos \theta$$

有

$$E_p = -p \cdot E$$

上式表明，在均匀电场中电偶极子的电势能与电偶极矩在电场中的方位有关。

(2) 电势能的大小

①当电偶极子的电偶极矩 p 的方向与 E 一致时 ($\theta=0$)，其电势能 $E_p = -pE$ ，此时，电势能最低；

②当 p 与 E 垂直时 ($\theta=\pi/2$)，其电势能为零；

③当 p 的方向与 E 的方向相反时 ($\theta=\pi$)，其电势能 $E_p = pE$ ，此时，电势能最大。

从能量的观点来看，能量越低，系统的状态越稳定。由此可见，电偶极子电势能最低的位置，即为稳定平衡位置。在电场中的电偶极子，一般情况下总具有使自己的 p 转向 $\theta=0$ 的趋势。

5.2 课后习题详解

一、问题

5-1 什么是电荷的量子化？你能举出其他具有量子化的物理量吗？

答：电荷具有的只能取离散的、不连续量值的性质称为电荷的量子化。其他具有量子化的物理量有“角动量”“能量”“电子绕原子核运动的轨道半径”“干涉、衍射光谱的位置”等等。

5-2 两静止点电荷之间的相互作用力遵守牛顿第三定律吗？

答：遵守。牛顿第三定律适用于一切同性质的力。

5-3 设电荷均匀分布在一空心均匀带电的球面上，若把另一点电荷放在球心上，这个电荷能处于平衡状态吗？如果把它放在偏离球心的位置上又将如何呢？

答：把一点电荷放在均匀带电球面的球心上或者放在偏离球心的位置上，该电荷均能处于平衡状态，因为均匀带电球面内的场强处处为零，由 $F=qE$ 可知，处于均匀带电球面内的任一点电荷均不受电场力的作用。

5-4 在电场中某一点的电场强度定义为 $E = \frac{F}{q_0}$ ，若该点没有试验电荷，那么该点的电场强度又如何？为什么？

答：该点的电场强度不变。因为电场中某一点的电场强度反映的是电场对放置在该点的单位电量电荷的作用情况，电场强度属于电场所具有，与放置试验电荷与否无关。

5-5 有人说，点电荷在电场中一定是沿电场线运动的，电场线就是电荷的运动轨迹，这样说对吗，为什么？

答：引入电场线的目的是为了形象地反映电场方向、强弱和电场的分布范围，与放入电荷与否无关。点电荷在电场中的运动轨迹除了与所受到的电场力有关外，还与点电荷进入电场时的初速度有关，一般情况下不与电场线重合。

5-6 我们分别介绍了静电场的库仑力的叠加原理和电场强度的叠加原理。这两个叠加原理是彼此独立没有联系的吗？

答：不是。当真空中存在由 n 个点电荷构成的电荷源时，则在场点 P 处的电场强度可由作用在试验电荷 q_0 上的库仑力按叠加原理得到

$$E = \frac{F}{q_0} = \sum_{i=1}^n \frac{F_i}{q_0} = \sum_{i=1}^n E_i$$

即点电荷系的电场强度在某场点的场强等于各个点电荷在该点场强的矢量和需要指出的是：电场强度的叠加原理似乎是库仑力叠加原理的推论，但从场的观点看遵从叠加原理应属于电场的的一个基本性质，正是电场遵从叠加原理才导致电场力遵从叠加原理。

5-7 在点电荷的电场强度公式

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \mathbf{e}_r$$

这里，如 $r \rightarrow 0$ ，则电场强度 \mathbf{E} 将趋于无限大，对此，你有什么看法呢？

答：当一个带电体本身的线度比所研究的问题中涉及的距离（如带电体间的距离、场点和带电体之间的距离）小很多时，该带电体的形状与电荷在其上的分布状况均对受力分析无影响，该带电体才可看作一个带电的点。上面的点电荷的电场强度公式也只能在这样的情况下才能成立。当 $r \rightarrow 0$ 时，带电体已不能看作点电荷了，所以上述的场强公式也就不再适用了。

5-8 电场是矢量场，你能举出另外两个矢量场的名字来吗，如果你目前尚举不出，学完大学物理后应当能举出来，对吗？

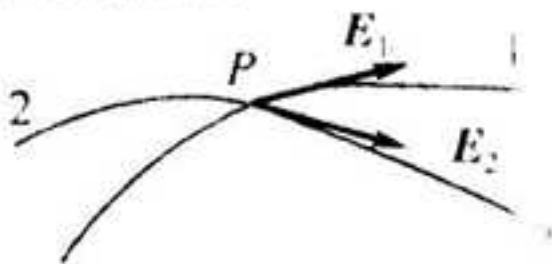
答：中学所学的引力场、后面章节所介绍的磁场均是矢量场。

5-9 在均匀电场中，一点电荷由静止释放，它能沿电场线运动吗？如把点电荷放在非均匀电场中又如何呢？

答：在均匀电场中，点电荷由静止释放，若是正电荷（负电荷则相反）它将沿电场线运动；如把点电荷放在非均匀电场中，若是正电荷（负电荷则相反）它将沿该点电场线的切线方向运动。

5-10 电场线能相交吗？为什么？

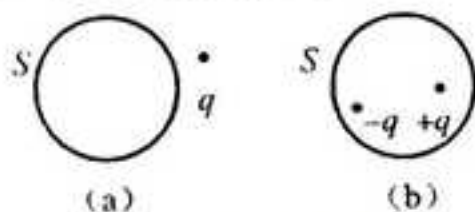
答：不能。因为电场线上某一点的切线方向即该点场强方向，如果空间某点有几条电场线相交，过交点 P 对每条电场线都可做一条切线（如问题 5-10 图），则交点处的场强就有几个方向，这将与电场中任意一点的场强都具有确定方向相矛盾，故空间中的电场线不能相交。



问题 5-10 图

5-11 如果在一曲面上每点的电场强度 $\mathbf{E}=0$ ，那么穿过此曲面的电场强度通量 Φ_e 也为零吗？如果穿过曲面的电场强度通量 $\Phi_e = 0$ ，那么，能否说此曲面上每一点的电场强度 \mathbf{E} 也必为零呢？

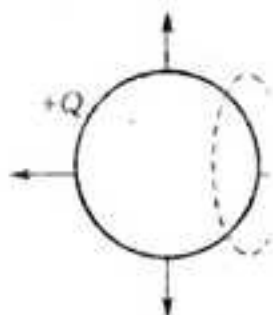
答：如果在一曲面上每点的电场强度 $\mathbf{E}=0$ ，那么穿过此曲面的电场强度通量也必为零；反之，若闭合曲面 S 上的 $\Phi_e = \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$ 为零，却不能说明被积函数 \mathbf{E} 在 S 上处处为零。例如，（图（a））点电荷 q 在高斯面 S 之外， S 上的电通量为零，但 S 上各处电场强度均不为零；另外如图（b）所示，高斯面 S 内有两个等量异号的点电荷，同样是 S 上的电通量为零，但 S 上各处电场强度均不为零。



问题 5-11 图

5-12 若穿过一闭合曲面的电场强度通量不为零，是否在此闭合曲面上的电场强度一定是处处不为零？

答：不一定。由 $\Phi_e = \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$ 可知， $\Phi_e = 0$ 可分两种情况：一是高斯面上处处都有电场线穿过，只是穿入的电场线数与穿出的不等，因而穿过高斯面的总通量 $\Phi_e \neq 0$ ，此时高斯面上各点的 \mathbf{E} 处处不为零（当高斯面包围不等量二异号电荷中的一个时即如此）；另一个可能是只有电场线从一部分高斯面上穿入（或穿出），如问题 5-12 图所示的带电导体，当高斯面 S 的一部分在导体内时即属此例，此时 $\Phi_e \neq 0$ ，但导体内那一部分高斯面上的 $\mathbf{E}=0$ 。



问题 5-12 图

5-13 在高斯定理 $\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{\sum q_i}{\epsilon_0}$ 中， $\sum q_i$ 是闭合曲面内的电荷代数和，那么，闭合曲面上每点的电场强度 \mathbf{E} 是否仅由 $\sum q_i$ 所确定？

答：在高斯定理 $\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{\sum q_i}{\epsilon_0}$ 中，闭合曲面上每点的电场强度 \mathbf{E} 是由闭合曲面内、外电荷共同决定。

5-14 如果在一高斯面内没有净电荷，那么，此高斯面上每一点的电场强度 \mathbf{E} 必为零吗？穿过此高斯面的电场强度通量又如何呢？

答：若一高斯面内没有净电荷，此高斯面上每一点的电场强度 \mathbf{E} 不一定为零；但穿过此高斯面的电场强度通量必为零。

5-15 一点电荷放在球形高斯面的球心处。试讨论下列情形下电场强度通量的变化情况：(1) 若此球形高斯面被——与它相切的正方体表面所代替；(2) 点电荷离开球心，但仍在球内；(3) 有另一个电荷放在球面外；(4) 有另一个电荷放在球面内。

答：(1) 因电场强度通量与高斯面的大小无关，而仅由面内电荷量代数和决定。由于本题中高斯面内电荷总量未变，故电场强度通量不变，仍为 $\Phi_e = q_1 / \epsilon_0$ 。

(2) 由于穿过高斯面的电场强度通量仅与面内电荷量代数和有关。与电荷在高斯面内的位置无关，故电场强度通量不变，仍为 $\Phi_e = q_1 / \epsilon_0$ 。

(3) 电场强度通量不变，电场强度通量与面外电荷量无关。

(4) 电场强度通量变为 $\Phi_e = (q_1 + q_2) / \epsilon_0$ 。

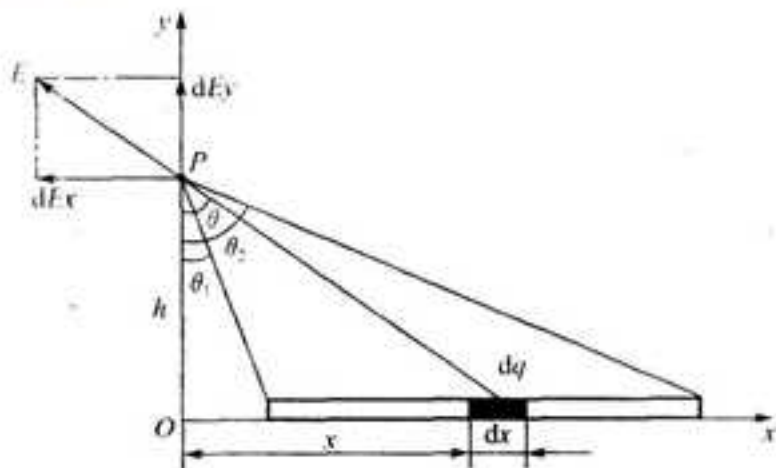
5-16 在应用高斯定理计算电场强度时，高斯面应怎样选取？

答：由高斯定理 $\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{\sum q_i}{\epsilon_0}$ 可知，若想由它求出电场分布，就必须把 \mathbf{E} 以标量形式从积分号中提出来。

这要求：(1) 各点的电场强度大小在高斯面 S 上处处相等；(2) 在 S 上的 E 处处和所在处的面元 dS 垂直，即电通量式中的 θ 处处为零。

5-17 下列几个带电体能否用高斯定理来计算电场强度？为什么？作为近似计算，应如何考虑呢？

- (1) 电偶极子；
- (2) 长为 l 的均匀带电直线；
- (3) 半径为 R 的均匀带电圆盘。



问题 5-17 图

答：不能。因为上述三种带电体的电场不具有对称性特点，不满足题 5-16 所述的应用高斯定理来计算电场强度的条件。

(1) 作为近似计算，对电偶极子，若满足 $r \gg l$ ，则可由：①在其延长线上，由 $E = \frac{P_r}{2\pi\epsilon_0 r^3}$ 计算；②在其中垂线上，由 $E = \frac{P_r}{2\pi\epsilon_0 y^3}$ ，负号说明 E 的方向与 P 的方向相反。

(2) 对长为 L 的均匀带电直线，设场点 P 距离带电直线为 h ，如问题 5-17 图所示，则有

$$\mathbf{E} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 h} (\cos\theta_2 - \cos\theta_1) \mathbf{i} + \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 h} (\sin\theta_2 - \sin\theta_1) \mathbf{j}$$

作为近似计算

①若 $L \gg h$ 时，带电直线可看作“无限长”，这时

$$\theta_1 = -\pi/2, \theta_2 = \pi/2$$

于是

$$\mathbf{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 h} \mathbf{j}$$

②若 $L \leq h$ 时

$$h^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 \approx h^2$$

于是

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 h^2} \mathbf{j}$$

这与点电荷的电场强度公式相同， q 为带电直线所带的电荷。可见，在 $L \leq h$ 的情况下，带电直线可看作是点电荷。

(3) 对半径为 R 的均匀带电圆盘，由

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma x}{2\epsilon_0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + R^2}} \right) \mathbf{i}$$

可知，作为近似计算，若 $x \ll R$ ，带电圆盘可看作“无限大”带电平面，这时

$$\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + R^2}} \right) \approx \frac{1}{x},$$

于是

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} i$$

5-18 静电场与万有引力场一样，都是保守场。你能像得出静电场的高斯定理那样，也能得到万有引力场的高斯定理吗？

答：能够得到。静电场中的高斯定理是依据电荷作用力与距离平方成反比而得出的。引力场中的质量元间的作用亦如此。所以可以想象，引力场中也一定有类似的“引力场高斯定理”，但只有类似于负电荷场的高斯定理，即引力场中的封闭面通量取负值（只有力线穿进，无力线穿出）。形式为式中 dm_i 为质量元：

$$\oint E_{\text{引}} \cdot dS = -4\pi G \sum_i dm_i$$

G 为引力常量。

下面用“对比法”推论引力场中的“高斯定理”。

引进“引力场强

$$E_{\text{引}} = \frac{F_{\text{引}}}{m}$$

对“点引力源 m_i ”而言

$$E_{\text{引}} = -G \frac{m_i m}{r^2} e_r / m = -G \frac{m_i}{r^2} e_r$$

负号表示“引力”，对比“点电荷源 q_i ”电场强度

$$E_{\text{电}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i q}{r^2} e_r / q = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{r^2} e_r$$

知

$$\begin{array}{c} m_i \longleftrightarrow q_i \\ -G \longleftrightarrow \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \end{array}$$

引进引力场中的“电容率 ϵ' ”有

$$\epsilon' = -\frac{1}{4\pi G}$$

则引力场中的“引力强度 $E_{\text{引}}$ ”为

$$E_{\text{引}} = \frac{1}{4\pi\epsilon'} \frac{m_i}{r^2} e_r$$

形式上完全与点电荷电场强度一致。

所以，点引力源中的“高斯定理”应该为

$$\oint E_{\text{引}} \cdot dS = \frac{m_i}{\epsilon'} = -4\pi G m_i$$

则在“点引力系”中的“高斯定理”为

$$\oint E_{\text{引}} \cdot dS = -4\pi G \sum_i m_i$$

还可仿造电场中的高斯定理证明法，严格地用数学方法推导出上式，留给读者自行推导。

5-19 你能对描述静电场和万有引力场的物理量以及研究方法作一比较，从而认识它们之间的异同吗？

答：静电场和万有引力场相同之处在于：

- (1) 二者均为保守场，故针对保守场量的研究方法对二者均适用；
- (2) 均能对处于场中的物体（带电体）施以力的作用；
- (3) 均能对处于场中的物体（带电体）做功；

(4) 均由场的强度来描述场的力的性质;

(5) 均由势能来描述场的能的性质;

(6) 均有在量值上场强与势的梯度相等、方向上相反的特征;

(7) 描述两种场的场量均满足叠加原理和高斯定理。静电场和万有引力场的不同之处在于万有引力场中某点 P 的场强定义为: 若质量为 m 的质点在 P 点所受到的引力为 F, 那么 F/m 就表示该点的引力强度, 以 g 表示, 即

$$\mathbf{g} = \frac{\mathbf{F}}{m} = -G \frac{mm_E}{r^2} \mathbf{e}_r / m = -G \frac{m_E}{r^2} \mathbf{e}_r$$

引力强度 g 是矢量, 其方向与该点的 F 一致。 m_E 为施力物体 (场源) 的质量。可以看出, 引力场强度 g 只与场源的质量 m_E 和场点的位置有关, 而与质点 m 无关。这点与电场强度 $\mathbf{E} = \mathbf{F}/q$ 的相关性质非常相似。但是, 由引力强度公式还可看出, 引力场中某点的引力场强度 g 的方向却总是与该点沿径矢的单位矢量 \mathbf{e}_r 的方向相反。这点与电场强度的相关性质却不太相同。

5-20 在点电荷的电场中, 有一正电荷在电场力作用下沿径向运动, 其电势是增加、减少还是不变?

答: 减小。正电荷在电场力作用下将沿着电场线的方向运动, 而电场线的方向指向电势降低的方向。

5-21 电荷 q 从电场中的点 A 移到点 B, 若使点 B 的电势比点 A 的电势低, 而点 B 的电势能又比点 A 的电势能要大, 这可能吗? 说明之。

答: 可能。只要移动负电荷由点 A 至点 B 即可。根据题意, 由于点 B 的电势比点 A 的电势低, 可知点 A、B 之间的电场线方向为由 A 到 B。而顺着电场线方向移动负电荷, 电场力作负功, 则电荷的电势能要增加, 故该负电荷在点 B 的电势能比在点 A 的电势能要大。

5-22 当我们认为地球的电势为零时, 是否意味着地球没有净电荷呢?

答: 不是。因为电势是一个相对的量, 而电势零点的选择是任意的。即使地球的净电荷不为零, 也一样可以选取地球作为电势的标准参考点, 仍可以指定地球上的电势为零。

5-23 在雷雨季节, 两带正、负电荷的云团间的电势差可达 10^{10} V, 在它们之间产生闪电可通过 30 C 的电荷。请说明在此过程中闪电所消耗的电能相当于 10 kW 发电机在多长时间里发出的电能。

答: 由

$$\Delta E = qU = 3.0 \times 10^{11} \text{ J}$$
$$t = \frac{\Delta E}{P} = \frac{3.0 \times 10^{11}}{10^4} = 3.0 \times 10^7 \text{ s} = 8333.33 \text{ h}$$

5-24 已知无限长带电直线的电场强度为 $\mathbf{E}(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \mathbf{e}_r$, 我们能否利用

$$V_A = \int_{A\infty} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + V$$

并使无限远处的电势为零 ($V_\infty = 0$), 来计算“无限长”带电直线附近点 A 的电势?

答: 对分布在无限范围内的带电系统不能选无限远处电势为零。否则根据电势的定义式进行计算, 场中各点的电势都是无限大, 没有意义。可以证明, 只有电场强度 E 随距离 r 的增加而不断减弱, $E \propto \frac{1}{r^n}$ 而且减弱的比较迅速, 且满足 $n > 1$ 的条件时, 积分 $V_A = \int_{A\infty} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$ 才是收敛的, 场中各点的电势才是有限值。而无限长带电直线的电场强度 E 虽然随 r 的增大在减小, 但 $n = 1$, 不满足 $n > 1$ 的条件, 场强对无限远处的积分是发散的。因此,

对于无限大带电系统，不能选无限远处的电势为零参考点，通常选带电直线上的电势为零。

5-25 在电场中，电场强度为零的点，电势是否一定为零；电势为零的点，电场强度是否一定为零，试举例说明。

答：在电场中，电场强度为零的点，电势不一定为零，参见问题 5-25 图 (a)



问题 5-25 图

例如，在两个点电荷 $+q$ 连线的中点 O 的场强为零，但该点的电势不为零。电场中某一点的电势并不只取决于这一点的场强。根据电势的定义，是取决于从这一点到电势零点间所选路径上的所有点的场强。当路径上所有点的场强均为零时，这一点的电势才为零。在图 (a) 中只有在选点 O 为电势零点的情形下，才能说点 O 的场强为零，电势也为零。

在问题 5-25 图 (b) 中，两个点电荷 $+q$ 、 $-q$ 连线的中点 O 的电势为零，但该点的场强不为零。一般来讲，电场中某一点的场强并不只取决于这一点的电势，而是取决于这一点附近区域中电势的空间变化率。仅当某一点附近区域中电势的空间变化率为零时，这一点和区域中的其他点的场强才为零。

5-26 利用 $E = -\frac{dV}{dl}$ 讨论：若某空间内电场强度处处为零，则该空间中各点的电势必处处相等。

答：若某空间内电场强度处处为零，则说明在这一空间中任意两点（例如 a 、 b 两点）之间移动单位电荷的过程中，电场力做功为零，即 $W_{AB} = V_A - V_B = \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$ 。在电场强度处处为零的空间内，电势必处处相等。

5-27 电场中，有两点的电势差为零，如在两点间选一路径，在这路径上，电场强度也处处为零吗？试说明。

答：不一定。设这两点为 A 、 B ，若在这两点间任选一路径，计算沿该路径移动单位电荷时电场力做的功，根据题意应有 $W_{AB} = V_A - V_B = \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$ 。原理上讲，此积分为零的原因有两种可能，一是该空间区域中电场强度处处为零；另一个是该空间区域中电场强度处处都与所取积分路径垂直。如果 A 、 B 两点只是电场中任意两点（而非导体表面），则积分为零的原因为前者；若 A 、 B 两点均在导体表面，则导致积分为零的原因为后者。

5-28 设有两个电偶极矩分别为 p_1 和 p_2 的电偶极子。如果它们重叠在一起，此带电系统的电偶极矩为多少？

答： $p = p_1 + p_2$

5-29 电偶极子在均匀电场中总是要使自己转向稳定平衡的位置。若此电偶极子处在非均匀电场中，它将怎样运动呢？你能说明吗？

答：电偶极子在非均匀电场中所受合力不为零，而是指向场强大的地方；所受合力矩也不为零；故在非均匀电场中的电偶极子的运动是既转动（其方向由 $\mathbf{M} = \mathbf{P} \times \mathbf{E}$ 确定），同时又向场强大的方向做平动。

5-30 富兰克林从实验中发现：在一带电的空腔导体球壳内，放置一带电的通草球，通草球不受电力作用，而放在球壳外面则要受电力作用。富兰克林不得其解，化学家普利斯特利则猜想这是由于电荷间的作用力与万有引力一样也与距离的二次方成反比的缘故。你同意这个看法吗？你能否试着用第四章第 4-8 节的方法来帮助富兰克林解决困惑并证明普利斯特利的猜想呢？进而增强对物质世界的相似性和统一性的认识。

答：略。

二、习题

5-1 电荷面密度均为 $+\sigma$ 的两块“无限大”均匀带电的平行平板如图 5-1 (a) 放置, 其周围空间各点电场强度 E (设电场强度方向向右为正、向左为负) 随位置坐标 x 变化的关系曲线为图 5-1 (b) 中的 ()

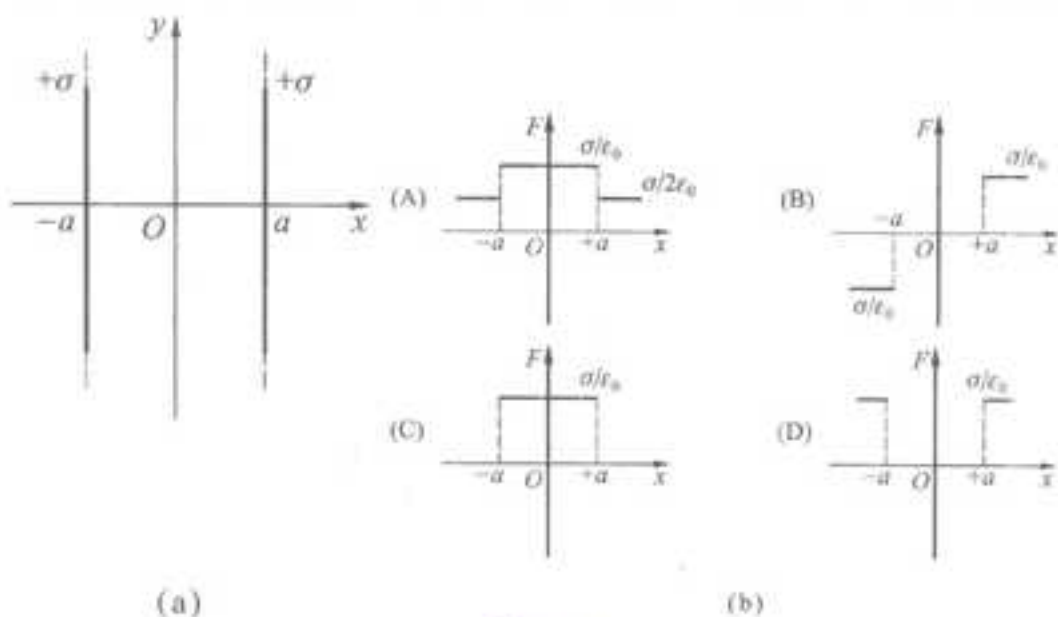


图 5-1

【答案】B

【解析】“无限大”均匀带电平板激发的电场强度为 $\frac{\sigma}{2\epsilon_0}$, 方向沿带电平板法向向外, 依照电场叠加原理可以求得各区域电场强度的大小和方向。

5-2 下列说法正确的是 ()

- A. 闭合曲面上各点电场强度都为零时, 曲面内一定没有电荷
- B. 闭合曲面上各点电场强度都为零时, 曲面内电荷的代数和必定为零
- C. 闭合曲面的电通量为零时, 曲面上各点的电场强度必定为零
- D. 闭合曲面的电通量不为零时, 曲面上任意一点的电场强度都不可能为零

【答案】B

【解析】依照静电场中的高斯定理, 闭合曲面上各点电场强度都为零时, 曲面内电荷的代数和必定为零, 但不能肯定曲面内一定没有电荷; 闭合曲面的电通量为零时, 表示穿入闭合曲面的电场线数等于穿出闭合曲面的电场线数或没有电场线穿过闭合曲面, 不能确定曲面上各点的电场强度必定为零; 同理闭合曲面的电通量不为零, 也不能推断曲面上任意一点的电场强度都不可能为零。

5-3 下列说法正确的是 ()

- A. 电场强度为零的点, 电势也一定为零
- B. 电场强度不为零的点, 电势也一定不为零
- C. 电势为零的点, 电场强度也一定为零
- D. 电势在某一区域内为常量, 则电场强度在该区域内必定为零

【答案】D

【解析】电场强度与电势是描述电场的两个不同物理量, 电场强度为零表示试验电荷在该点受到的电场力为零, 电势为零表示将试验电荷从该点移到参考零电势点时, 电场力做功为零, 电场中一点的电势等于单位正电荷从该点沿任意路径到参考零电势点电场力所作的功; 电场强度等于负电势梯度。

*5-4 在一个带负电的带电棒附近有一个电偶极子, 其电偶极矩 p 的方向如图 5-2 所示, 当电偶极子被释放后, 该电偶极子将 ()



图 5-2

- A. 沿逆时针方向旋转直到电偶极矩 p 水平指向棒尖端而停止
 B. 沿逆时针方向旋转至电偶极矩 p 水平指向棒尖端，同时沿电场线方向朝着棒尖端移动
 C. 沿逆时针方向旋转至电偶极矩 p 水平指向棒尖端，同时逆电场线方向朝远离棒尖端移动
 D. 沿顺时针方向旋转至电偶极矩 p 水平方向沿棒尖端朝外，同时沿电场线方向朝着棒尖端移动

【答案】B

【解析】电偶极子在非均匀外电场中，除了受到力矩作用使得电偶极子指向电场方向外，还将受到一个指向电场强度增强方向的合力作用。

5-5 精密实验表明，电子与质子电量差值的最大范围不会超过 $+10^{-21}e$ ，而中子电量与零差值的最大范围也不会超过 $+10^{-21}e$ ，由最极端的情况考虑，一个有 8 个电子，8 个质子和 8 个中子构成的氧原子所带的最大可能净电荷是多少？若将原子视作质点，试比较两个氧原子间的库仑力和万有引力的大小。

解：一个氧原子所带的最大可能净电荷为

$$q_{\max} = (1 + 2) \times 8 \times 10^{-21} e$$

二个氧原子间的库仑力与万有引力之比为

$$\frac{F_e}{F_g} = \frac{q_{\max}^2}{4\pi\epsilon_0 G m^2} = 2.8 \times 10^{-6} \ll 1$$

显然即使电子、质子、中子等微观粒子带电量存在差异，其差异在 $+10^{-21}e$ 范围内时，对于像天体一类电中性物体的运动，起主要作用的还是万有引力。

5-6 1964 年，盖尔曼等人提出基本粒子是由更基本的夸克构成，中子就是由一个带 $2/3e$ 的上夸克和两个带 $-1/3e$ 的下夸克构成，若将夸克作为经典粒子处理（夸克线度约为 $10^{-20}m$ ），中子内的两个下夸克之间相距 $2.60 \times 10^{-15}m$ ，求它们之间的相互作用力。

解：由于夸克可视为经典点电荷，由库仑定律

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} e^2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{9r^2} e^2 = (3.78 \text{ N}) e^2$$

F 与径向单位矢量 e_r 方向相同表明它们之间为斥力。

5-7 质量为 m ，电荷为 $-e$ 的电子以圆轨道绕氢核旋转，其动能为 E_k ，证明电子的旋转频率满足

$$v^2 = \frac{32\epsilon_0^2 E_k^3}{m e^4}$$

其中 ϵ_0 是真空电容率，电子的运动可视为遵守经典力学规律。

证明：根据题意将电子作为经典粒子处理，电子、氢核的大小约为 $10^{-15}m$ ，轨道半径约为 $10^{-10}m$ ，故电子、氢核都可视为点电荷，点电荷间的库仑引力是维持电子沿圆轨道运动的向心力，故有

$$m \frac{v^2}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2}$$

由上述分析可得电子的动能为

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r}$$

电子旋转角速度为

$$\omega^2 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 mr^3}$$

由上述两式消去 r , 得

$$\nu^2 = \frac{\omega^2}{4\pi^2} = \frac{32\epsilon_0^2 E_k^3}{me^4}$$

5-8 在氯化铯晶体中, 一价氯离子 Cl^- 与其最邻近的八个一价铯离子 Cs^+ 构成如图 5-3 所示的立方晶格结构。(1) 求氯离子所受的库仑力;(2) 假设图 5-3 中箭头所指处缺少一个铯离子(称作品格缺陷), 求此时氯离子所受的库仑力。

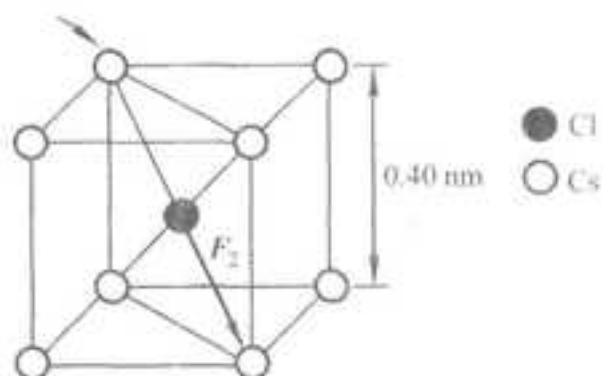


图 5-3

解:(1) 由对称性, 每条对角线上的一对铯离子与氯离子间的作用合力为零, 故 $F_1=0$,

(2) 除了有缺陷的那条对角线外, 其它铯离子与氯离子的作用合力为零, 所以氯离子所受的合力 F_2 的值为

$$F_2 = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{e^2}{3\pi\epsilon_0 a^2} = 1.92 \times 10^{-9} \text{ N}$$

F_2 方向如图 5-3 所示。

5-9 如图 5-4 所示, 电荷 Q 均匀分布在半径为 R 的圆环上, 现在环中央放置一个电荷量为 q 的点电荷, 试求由于 q 的出现而在环中出现的张力。

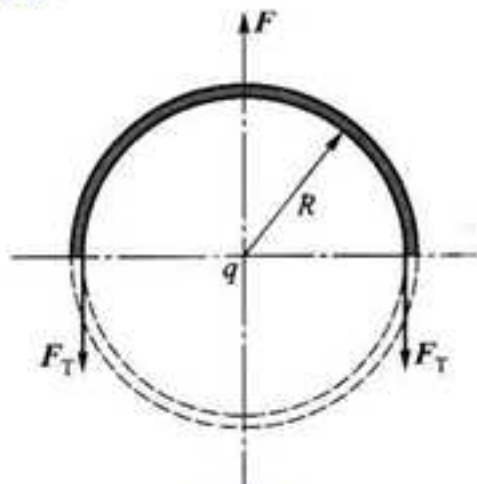


图 5-4

解: 在圆环上取线元, 即电荷元 $dq' = \frac{Q}{2\pi} d\theta$, 由电荷对称性, 半圆环受到的库仑力必定平行于对称轴, 由

$$dF = \frac{q dq'}{4\pi\epsilon_0 R^2} e,$$

$$F = \int_0^\pi dF \sin \theta = \int_0^\pi \frac{qQ d\theta}{8\pi^2 \epsilon_0 R^2} \sin \theta = \frac{qQ}{4\pi^2 \epsilon_0 R^2}$$

$$F_\tau = \frac{1}{2} F = \frac{qQ}{8\pi^2 \epsilon_0 R^2}$$

5-10 若电荷 Q 均匀地分布在长为 L 的细棒上, 求证: (1) 在棒的延长线, 且离棒中心为 r 处的电场强度为

$$E = \frac{1}{\pi\epsilon_0} \frac{Q}{4r^2 - L^2}$$

(2) 在棒的垂直平分线上, 离棒为 r 处的电场强度为

$$E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0 r} \frac{Q}{\sqrt{4r^2 + L^2}}$$

若棒为无限长 (即 $L \rightarrow \infty$), 试将结果与无限长均匀带电直线的电场强度相比较.

证: (1) 延长线上一点 P 的电场强度 $E = \int_L \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r'^2}$, 利用几何关系 $r' = r - x$ 统一积分变量, 则

$$E_P = \int_{-L/2}^{L/2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q dx}{L(r-x)^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 L} \left[\frac{1}{r-L/2} - \frac{1}{r+L/2} \right] = \frac{1}{\pi\epsilon_0} \frac{Q}{4r^2 - L^2}$$

电场强度的方向沿 x 轴.

(2) 中垂线上一点 P 的电场强度 E 的方向沿 y 轴, 如图 5-4 (a), 大小为

$$E = \int_L \frac{\sin \alpha dq}{4\pi\epsilon_0 r'^2}$$

利用几何关系 $\sin \alpha = r/r'$, $r' = \sqrt{r^2 + x^2}$ 统一积分变量, 则

$$E = \int_{-L/2}^{L/2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{rQ dx}{L(x^2 + r^2)^{3/2}} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 r} \frac{1}{\sqrt{L^2 + 4r^2}}$$

当棒长 $L \rightarrow \infty$ 时, 若棒单位长度所带电荷 λ 为常量, 则 P 点电场强度

$$E = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi\epsilon_0 r} \frac{Q/L}{\sqrt{1 + 4r^2/L^2}} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$$

此结果与无限长带电直线周围的电场强度分布相同[图 5-5 (b)]. 这说明只要满足 $r^2/L^2 \ll 1$, 带电长直细棒可视为无限长带电直线.

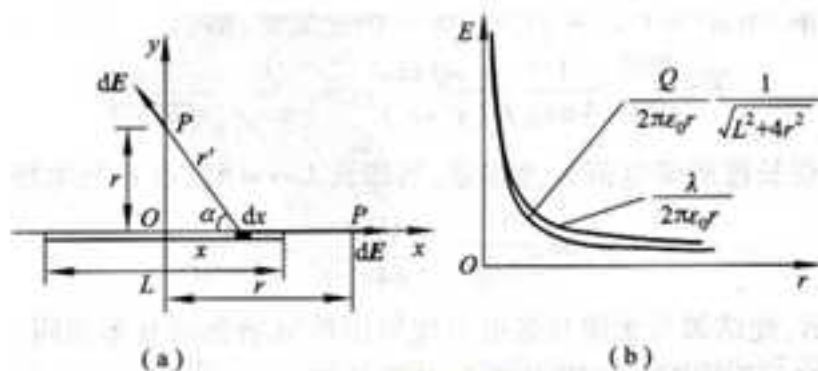


图 5-5

5-11 一半径为 R 的半球壳，均匀地带有电荷，电荷面密度为 σ ，求球心处电场强度的大小。

解：将半球壳分割为一组平行细圆环，任一个圆环所带电荷元 $dq = \sigma dS = \sigma \cdot 2\pi R^2 \cdot \sin\theta d\theta$ ，在点 O 激发的电场强度为

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{x dq}{(x^2 + r^2)^{3/2}} i$$

由于平行细圆环在点 O 激发的电场强度方向相同，利用几何关系 $x = R \cos\theta$ $r = R \sin\theta$ 统一积分变量，有

$$\begin{aligned} dE &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{x dq}{(x^2 + r^2)^{3/2}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{R \cos\theta}{R^3} \sigma \cdot 2\pi R^2 \sin\theta d\theta \\ &= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \sin\theta \cos\theta d\theta \end{aligned}$$

积分得

$$E = \int_0^{\pi/2} \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \sin\theta \cos\theta d\theta = \frac{\sigma}{4\epsilon_0}$$

5-12 水分子 H_2O 中氧原子和氢原子的等效电荷中心如图 5-6 所示，假设氧原子和氢原子等效电荷中心间距为 r_0 ，试计算在分子的对称轴线上，距分子较远处的电场强度。

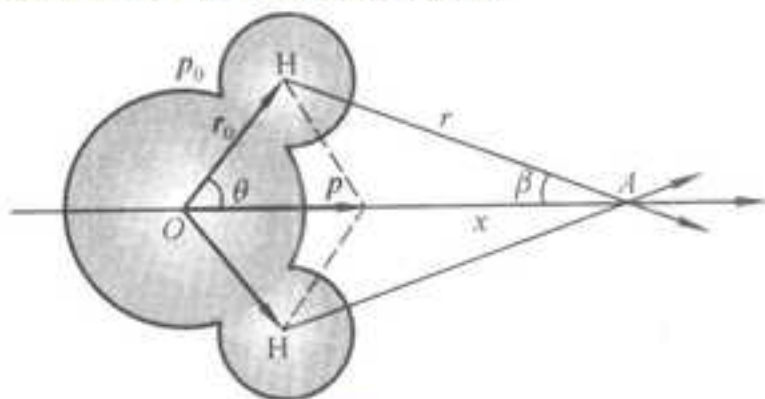


图 5-6

解：解 1 水分子的电偶极矩

$$p = 2p_0 \cos\theta = 2er_0 \cos\theta$$

在电偶极矩延长线上

$$E = \frac{2p}{4\pi\epsilon_0 x^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{4er_0 \cos\theta}{x^3} = \frac{1}{\pi\epsilon_0} \frac{er_0 \cos\theta}{x^3}$$

解 2 在对称轴上任取一点 A, 则该点的电场强度

$$E = E_+ + E_-$$

$$E = 2E_+ \cos \beta - E_- = \frac{2e r \cos \theta}{4\pi \epsilon_0 r^2} - \frac{2e}{4\pi \epsilon_0 x^2}$$

由于

$$r^2 = x^2 + r_0^2 - 2xr_0 \cos \theta$$

$$\cos \beta = \frac{x - r_0 \cos \theta}{r}$$

代入得

$$E = \frac{2e}{4\pi \epsilon_0} \left[\frac{x - r_0 \cos \theta}{(x^2 + r_0^2 - 2xr_0 \cos \theta)^{3/2}} - \frac{1}{x^2} \right]$$

测量分子的电场时, 总有 $x \gg r_0$,
因此, 式中

$$(x^2 + r_0^2 - 2xr_0 \cos \theta)^{3/2} \approx x^3 \left(1 - \frac{2r_0 \cos \theta}{x} \right)^{3/2} \approx x^3 \left(1 - \frac{3}{2} \cdot \frac{2r_0 \cos \theta}{x} \right)$$

将上式化简并略去微小量后, 得

$$E = \frac{1}{\pi \epsilon_0} \frac{r_0 e \cos \theta}{x^3}$$

5-13 两条无限长平行直导线相距为 r_0 , 均匀带有等量异号电荷, 电荷线密度为 λ . (1) 求两导线构成的平面上任一点的电场强度 (设该点到其中一导线的垂直距离为 x); (2) 求每一根导线上单位长度导线受到另一根导线上电荷作用的电场力.

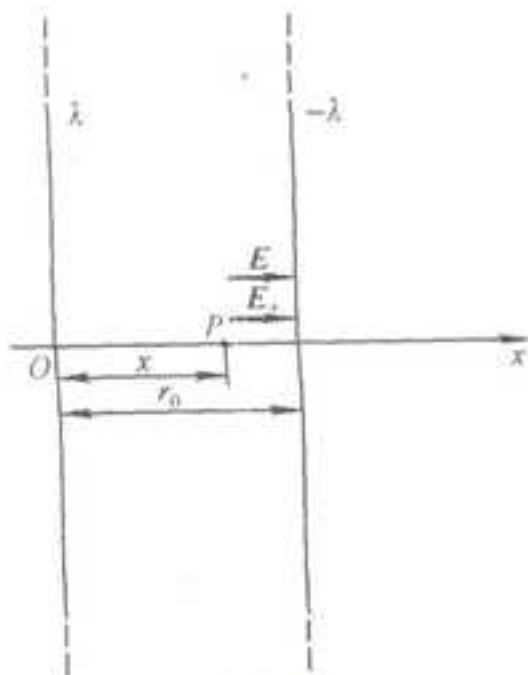


图 5-7

解: (1) 设点 P 在导线构成的平面上, E_+ 、 E_- 分别表示正、负带电导线在 P 点的电场强度, 则有

$$E = E_+ + E_- = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{r_0 - x} \right) i = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0} \frac{r_0}{x(r_0 - x)} i$$

(2) 设 F_+ 、 F_- 分别表示正、负带电导线单位长度所受的电场力, 则有

$$F_+ = \lambda E_- = \frac{\lambda^2}{2\pi\epsilon_0 r_0} i$$

$$F_- = -\lambda E_+ = -\frac{\lambda^2}{2\pi\epsilon_0 r_0} i$$

显然有 $F_+ = -F_-$, 相互作用力大小相等, 方向相反, 两导线相互吸引。

5-14 如图 5-8 为电四极子, 电四极子是由两个大小相等、方向相反的电偶极子组成, 试求在两个电偶极子延长线上距中心为 z 的一点 P 的电场强度 (假设 $z \gg d$)。

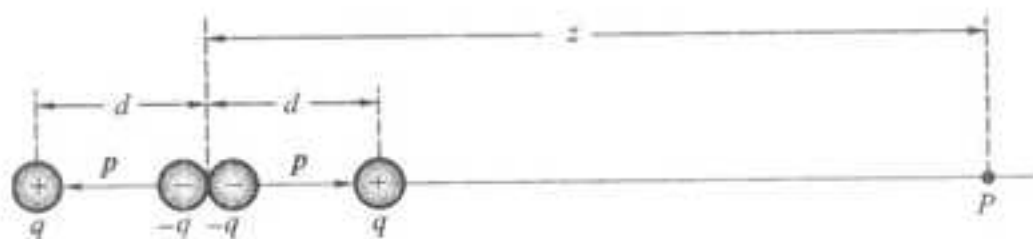


图 5-8

解: 由点电荷电场公式, 得

$$E = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2q}{z^2} k + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{(z-d)^2} k + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{(z+d)^2} k$$

考虑到 $z \gg d$, 简化上式得

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ -\frac{2}{z^2} + \frac{1}{z^2} \left(\frac{1}{(1-d/z)^2} + \frac{1}{(1+d/z)^2} \right) \right\} k$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ -\frac{2}{z^2} + \frac{1}{z^2} \left(1 + \frac{2d}{z} + \frac{3d^2}{z^2} + \dots + 1 - \frac{2d}{z} + \frac{3d^2}{z^2} + \dots \right) \right\} k$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{6qd^2}{z^4} k$$

通常将 $Q = 2qd^2$ 称作电四极矩, 代入得 P 点的电场强度 $E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3Q}{z^4} k$ 。

5-15 设匀强电场的电场强度 E 与半径为 R 的半球面的对称轴平行, 试计算通过此半球面的电场强度通量。

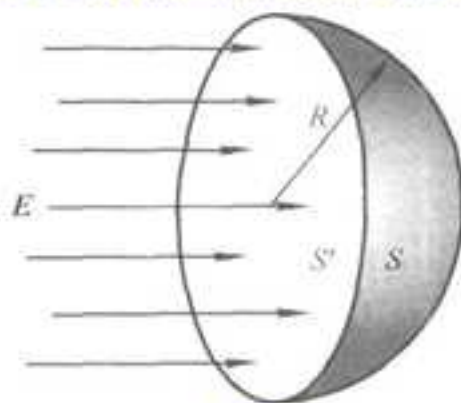


图 5-9

解: 解 1 由于闭合曲面内无电荷分布, 根据高斯定理, 有

$$\Phi = \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = - \int_{S'} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$$

依照约定取闭合曲面的外法线方向为面元 $d\mathbf{S}$ 的方向,

$$\Phi = -E \cdot \pi R^2 \cdot \cos \pi = \pi R^2 E$$

解 2 取球坐标系, 电场强度矢量和面元在球坐标系中可表示为

$$\mathbf{E} = E(\cos \varphi \mathbf{e}_\varphi + \sin \varphi \cos \theta \mathbf{e}_\theta + \sin \theta \sin \varphi \mathbf{e}_\rho)$$

$$d\mathbf{S} = R^2 \sin \theta d\theta d\varphi \mathbf{e}_\rho$$

$$\Phi = \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \int_S ER^2 \sin^2 \theta \sin \varphi d\theta d\varphi$$

$$= \int_0^\pi ER^2 \sin^2 \theta d\theta \int_0^\pi \sin \varphi d\varphi$$

$$= \pi R^2 E$$

5-16 边长为 a 的立方体如图 5-10 所示, 其表面分别平行于 Oxy 、 Oyz 和 Ozx 平面, 立方体的一个顶点

为坐标原点, 现将立方体置于电场强度 $\mathbf{E} = (E_1 + kx)\mathbf{i} + E_2\mathbf{j}$ (k, E_1, E_2 为常数) 的非均匀电场中, 求电场对立方体各表面及整个立方体表面的电场强度通量。

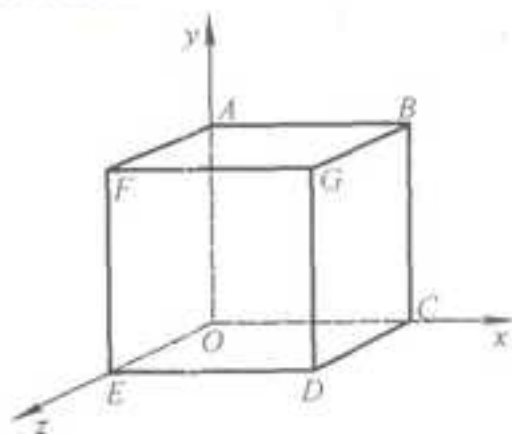


图 5-10

解: 如图 5-10 所示, 由题意 \mathbf{E} 与 Oxy 面平行, 所以任何相对 Oxy 面平行的立方体表面, 电场强度的通量为零, 即 $\Phi_{OABC} = \Phi_{DEFG} = 0$, 而

$$\Phi_{ABGF} = \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \int [(E_1 + kx)\mathbf{i} + E_2\mathbf{j}] \cdot (dS\mathbf{j}) = E_2 a^2$$

考虑到面 $CDEO$ 与面 $ABGF$ 的外法线方向相反, 且该两面的电场分布相同, 故有

$$\Phi_{CDEO} = -\Phi_{ABGF} = -E_2 a^2$$

同理

$$\Phi_{ADEF} = \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \int [E_1\mathbf{i} + E_2\mathbf{j}] \cdot (-dS\mathbf{i}) = -E_1 a^2$$

$$\Phi_{BCDE} = \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \int [(E_1 + ka)\mathbf{i} + E_2\mathbf{j}] \cdot (dS\mathbf{i}) = (E_1 + ka) a^2$$

因此, 整个立方体表面的电场强度通量

$$\Phi = \sum \Phi = ka^3$$

5-17 地球周围的大气犹如一部大电机, 由于雷雨云和大气气流的作用, 在晴天区域, 大气电离层总是带有大量的正电荷, 云层下地球表面必然带有负电荷, 晴天大气电场平均电场强度约为 $120\text{V}\cdot\text{m}^{-1}$, 方向指向地面. 试求地球表面单位面积所带的电荷 (以每平方厘米的电子数表示).

解: 在大气层临近地球表面处取与地球表面同心的球面为高斯面, 其半径 $R \approx R_E$ (R_E 为地球平均半径). 由高斯定理

$$\oint E \cdot dS = -E4\pi R_E^2 = \frac{1}{\epsilon_0} \Sigma q$$

地球表面电荷面密度

$$\sigma = \Sigma q / 4\pi R_E^2 \approx -\epsilon_0 E = -1.06 \times 10^{-9} \text{C} \cdot \text{m}^{-2}$$

单位面积额外电子数

$$n = \sigma / (-e) = 6.63 \times 10^8 \text{cm}^{-2}$$

5-18 设在半径为 R 的球体内, 其电荷为球对称分布, 电荷体密度为

$$\rho = kr \quad (0 \leq r \leq R)$$

$$\rho = 0 \quad (r > R)$$

k 为一常量. 试分别用高斯定理和电场叠加原理求电场强度 E 与 r 的函数关系.

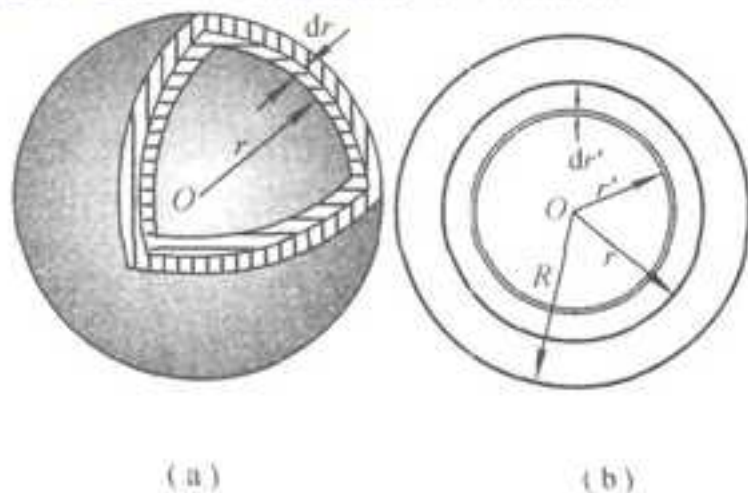


图 5-11

解: 解 1 因电荷分布和电场分布均为球对称, 球面上各点电场强度的大小为常量, 由高斯定理 $\oint E \cdot dS = \frac{1}{\epsilon_0} \int \rho dV$ 得球体内 ($0 \leq r \leq R$)

$$E(r)4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0} \int_0^r kr4\pi r'^2 dr' = \frac{\pi k}{\epsilon_0} r^4$$

$$E(r) = \frac{kr^2}{4\epsilon_0} e_r$$

球体外 ($r > R$)

$$E(r) \cdot 4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0} \int_0^R kr4\pi r'^2 dr' = \frac{\pi k}{\epsilon_0} R^4$$

$$E(r) = \frac{kR^4}{4\epsilon_0 r^2} e_r$$

解 2 将带电球分割成球壳, 球壳带电

$$dq = \rho dV = kr'4\pi r'^2 dr'$$

球壳外激发的电场

$$dE = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r^2} e_r$$

由电场叠加可得, 球体内 ($0 \leq r \leq R$)

$$E(r) = \int_0^r \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{kr' \cdot 4\pi r'^2 dr'}{r^2} e_r = \frac{kr^2}{4\epsilon_0} e_r$$

球体外 ($r > R$)

$$E(r) = \int_0^R \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{kr' \cdot 4\pi r'^2 dr'}{r^2} e_r = \frac{kR^3}{4\epsilon_0 r^2} e_r$$

5-19 一无限大均匀带电薄平板, 电荷面密度为 σ , 在平板中部有一半径为 r 的小圆孔, 求圆孔中心轴线上与平板相距为 x 的一点 P 的电场强度.

解: 在无限大带电平面附近

$$E_1 = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} e_n$$

e_n 为沿平面外法线的单位矢量; 圆盘激发的电场

$$E_2 = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + r^2}} \right) e_n$$

它们的合电场强度为

$$E = E_1 + E_2 = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{x}{\sqrt{x^2 + r^2}} e_n$$

在圆孔中心处 $x=0$, 则

$$E = 0$$

在距离圆孔较远时 $x \gg r$, 则

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{1 + r^2/x^2}} e_n \approx \frac{\sigma}{2\epsilon_0} e_n$$

上述结果表明, 在 $x \gg r$ 时, 带电平板上小圆孔对电场分布的影响可以忽略不计.

5-20 在电荷体密度为 ρ 的均匀带电球体中, 存在一个球形空腔, 若将带电体球心 O 指向球形空腔球心 O' 的矢量用 a 表示 (如图 5-12 所示), 试证明球形空腔中任一点的电场强度为

$$E = \frac{\rho}{3\epsilon_0} a$$

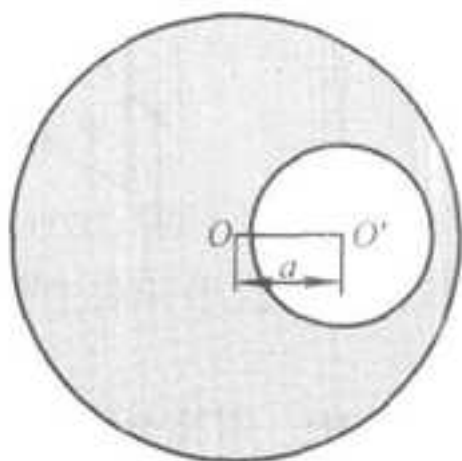


图 5-12

证明：带电球体内部一点的电场强度为

$$E = \frac{\rho}{3\epsilon_0} r$$

所以

$$E_1 = \frac{\rho}{3\epsilon_0} r_1, \quad E_2 = -\frac{\rho}{3\epsilon_0} r_2$$

$$E = E_1 + E_2 = \frac{\rho}{3\epsilon_0} (r_1 - r_2)$$

根据几何关系 $r_1 - r_2 = a$ ，上式可改写为

$$E = \frac{\rho}{3\epsilon_0} a$$

5-21 如图 5-13 所示，空间有两个球，球心间距离小于它们的半径之和，因而两球部分重叠，且 $\vec{OO}' = a$ 。若让两个球都均匀充满电荷，电荷体密度分别为 ρ 和 $-\rho$ ，重叠部分由于正负电荷中和而无电荷，求重叠区域内的电场强度。

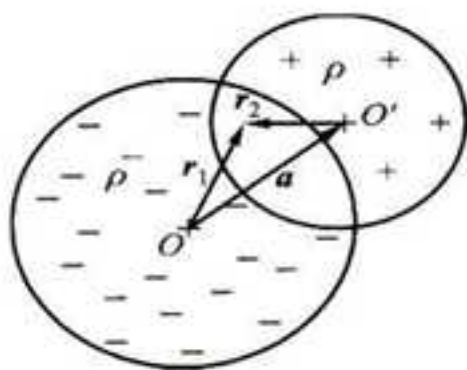


图 5-13

解：带电球体内部一点的电场强度为

$$E = \frac{\rho}{3\epsilon_0} r$$

所以

$$E_1 = -\frac{\rho}{3\epsilon_0} r_1, \quad E_2 = \frac{\rho}{3\epsilon_0} r_2$$

$$E = E_1 + E_2 = -\frac{\rho}{3\epsilon_0} (r_1 - r_2)$$

由几何关系， $r_1 - r_2 = a$ ，上式可以改写为

$$\mathbf{E} = -\frac{\rho}{3\epsilon_0}\mathbf{a}$$

5-22 一个内外半径分别为 R_1 和 R_2 的均匀带电球壳，总电荷为 Q_1 ，球壳外同心罩一个半径为 R_3 的均匀带电球面，球面带电荷为 Q_2 。求电场分布。电场强度是否为离球心距离 r 的连续函数？试分析。

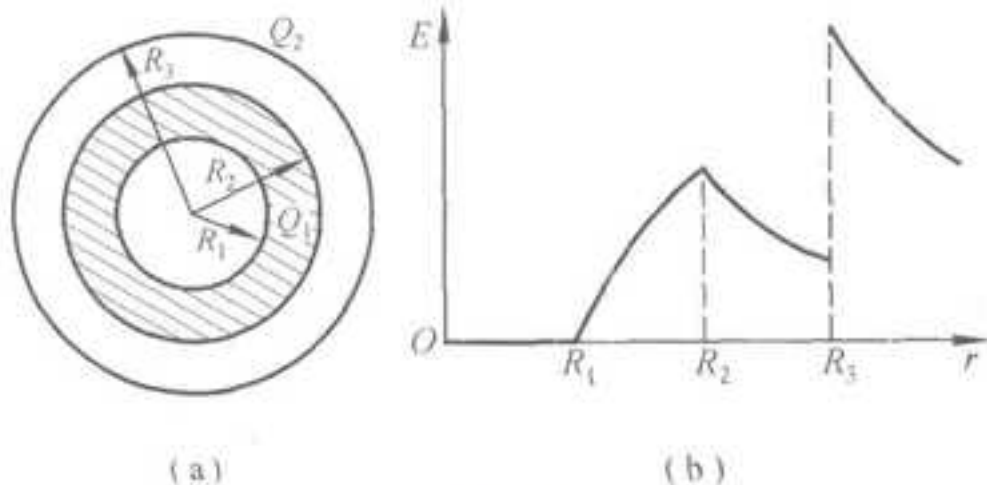


图 5-14

解：取半径为 r 的同心球面为高斯面，由于电荷呈球对称分布，电场强度也为球对称分布，高斯面上电场强度沿径矢方向，且大小相等，因而 $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = E \cdot 4\pi r^2$ ，在确定高斯面内的电荷 Σq 后，利用高斯定理

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \Sigma q / \epsilon_0, \text{ 可得}$$

$$E \cdot 4\pi r^2 = \Sigma q / \epsilon_0$$

$r < R_1$ ，该高斯面内无电荷， $\Sigma q = 0$ ，故

$$E_1 = 0$$

$R_1 < r < R_2$ ，高斯面内电荷 $\Sigma q = \frac{Q_1 (r^3 - R_1^3)}{R_2^3 - R_1^3}$ ，故

$$E_2 = \frac{Q_1 (r^3 - R_1^3)}{4\pi\epsilon_0 (R_2^3 - R_1^3) r^2}$$

$R_2 < r < R_3$ ，高斯面内电荷为 Q_1 ，故

$$E_3 = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

$r > R_3$ ，高斯面内电荷为 $Q_1 + Q_2$ ，故

$$E_4 = \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

电场强度的方向均沿径矢方向，各区域的电场强度分布曲线如图 5-14 (b) 所示。

在带电球面的两侧，电场强度的左右极限不同，电场强度不连续，而在紧贴 $r = R_3$ 的带电球面两侧，电场强度的跃变量

$$\Delta E = E_4 - E_3 = \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 R_3^2} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

这一跃变是将带电球面的厚度抽象为零的必然结果，且具有普遍性。实际带电球面应是有一定厚度的球壳，壳层内外的电场强度也是连续变化的，本题中带电球壳内外的电场，在球壳的厚度变小时，E的变化就变陡，最后当厚度趋于零时，E的变化成为一跃变。

5-23 半径为R的无限长直圆柱体内均匀分布着电荷，电荷体密度为ρ，试求离轴线为r处的电场强度E，并画出E-r曲线。

解：作同轴圆柱面为高斯面，根据高斯定理

$$E \cdot 2\pi rL = \sum q / \epsilon_0$$

$$r < R \quad E \cdot 2\pi rL = \rho \cdot \pi r^2 L / \epsilon_0$$

$$E = \frac{\rho r}{2\epsilon_0} e_r$$

$$r \geq R \quad E \cdot 2\pi rL = \rho \cdot \pi R^2 L / \epsilon_0$$

$$E = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0 r} e_r$$

E-r曲线如图5-15(b)所示。

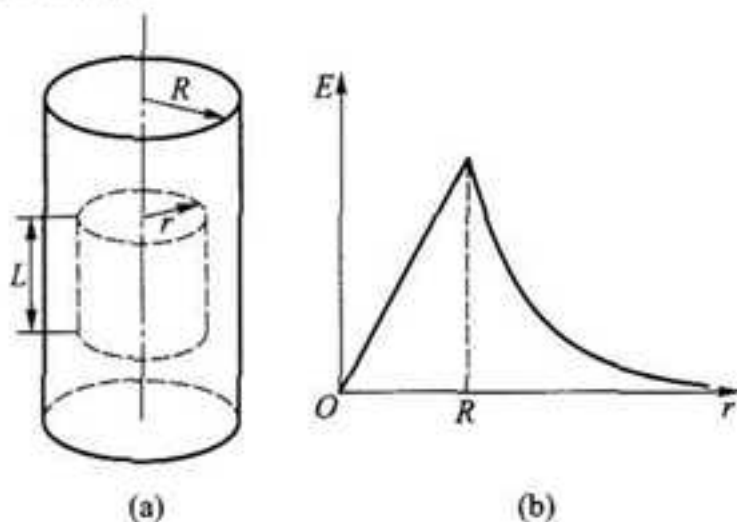


图 5-15

5-24 两个带有等量异号电荷的无限长同轴圆柱面，半径分别为 R_1 和 R_2 ($R_2 > R_1$)，单位长度上的电荷为 λ ，求离轴线为 r 处的电场强度：(1) $r < R_1$ ，(2) $R_1 < r < R_2$ ，(3) $r > R_2$ 。

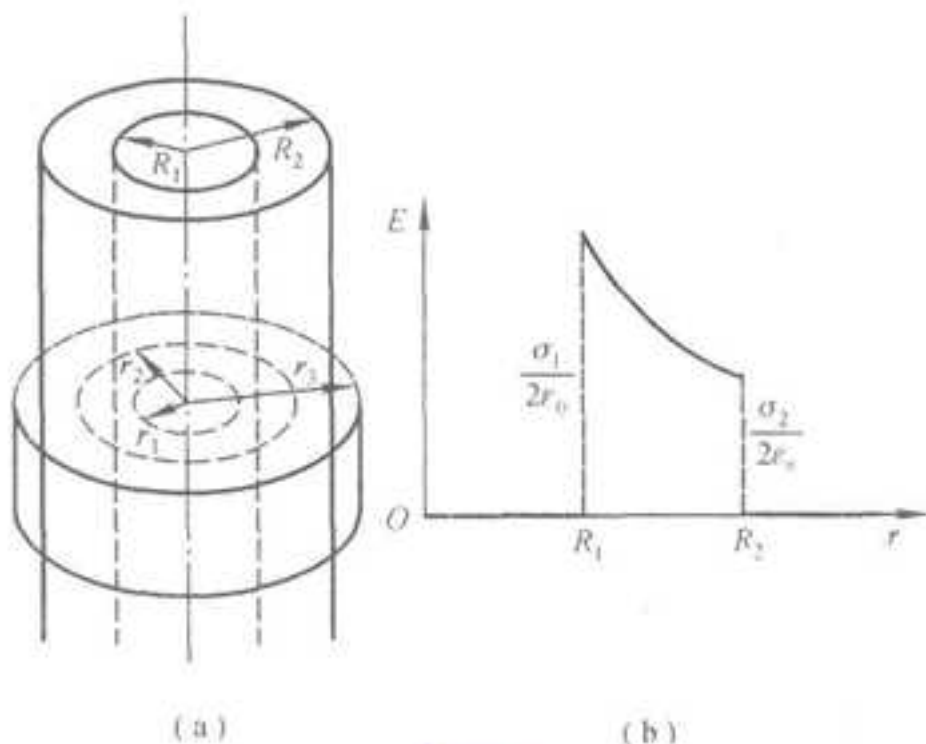


图 5-16

解：作同轴圆柱面为高斯面，根据高斯定理

$$E \cdot 2\pi rL = \Sigma q / \epsilon_0$$

$r < R_1$,

$$\Sigma q = 0$$

$$E_1 = 0$$

$R_1 < r < R_2$,

$$\Sigma q = \lambda L$$

$$E_2 = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$$

$r > R_2$,

$$\Sigma q = 0$$

$$E_3 = 0$$

在带电面附近，电场强度大小不连续，电场强度有一跃变

$$\Delta E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} = \frac{\lambda L}{2\pi\epsilon_0 rL} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

5-25 如图 5-17 所示，有三个点电荷 Q_1 、 Q_2 、 Q_3 沿一条直线等间距分布且 $Q_1 = Q_3 = Q$ 。已知其中任一点电荷所受合力均为零，求在固定 Q_1 、 Q_3 的情况下，将 Q_2 从点 O 移到无穷远处外力所作的功。



图 5-17

解: 解1 由题意 Q_1 所受的合力为零

$$Q_1 \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 d^2} + Q_1 \frac{Q_3}{4\pi\epsilon_0 (2d)^2} = 0$$

$$\text{解得 } Q_2 = -\frac{1}{4}Q_3 = -\frac{1}{4}Q$$

由点电荷电场的叠加, Q_1 、 Q_3 激发的电场在 y 轴上任意一点的电场强度为

$$E = E_{1y} + E_{3y} = \frac{Qy}{2\pi\epsilon_0 (d^2 + y^2)^{3/2}}$$

将 Q_2 从点 O 沿 y 轴移到无穷远处, 外力所作的功为

$$W' = - \int_0^{\infty} Q_2 E \cdot dl = - \int_0^{\infty} \left(-\frac{1}{4}Q \right) \cdot \frac{Qy}{2\pi\epsilon_0 (d^2 + y^2)^{3/2}} dy = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 d}$$

解2 与解1 相同, 在任一点电荷所受合力均为零时 $Q_2 = -\frac{1}{4}Q$, 并由电势的叠加得 Q_1 、 Q_3 在点 O 的电势

$$V_0 = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 d} + \frac{Q_3}{4\pi\epsilon_0 d} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 d}$$

将 Q_2 从点 O 推到无穷远处的过程中, 外力做功

$$W' = -Q_2 V_0 = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 d}$$

比较上述两种方法, 显然用功与电势能变化的关系来求解较为简洁, 这是因为在许多实际问题中直接求电场分布困难较大, 而求电势分布要简单得多。

5-26 已知均匀带电长直线附近的电场强度近似为

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} e_r$$

λ 为电荷线密度。(1) 求在 $r=r_1$ 和 $r=r_2$ 两点间的电势差; (2) 在点电荷的电场中, 我们曾取 $r \rightarrow \infty$ 处的电势为零, 求均匀带电长直线附近的电势时, 能否这样取? 试说明。

解: (1) 由于电场力做功与路径无关, 若沿径向积分, 则有

$$U_{12} = \int_{r_1}^{r_2} E \cdot dr = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

(2) 不能。严格地讲, 电场强度 $E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} e_r$, 只适用于无限长的均匀带电直线, 而此时电荷分布在无限空间, $r \rightarrow \infty$ 处的电势应与直线上的电势相等。

5-27 水分子的电偶极矩 p 的大小为 6.20×10^{-30} C·m。求在下述情况下, 距离分子为 $r = 5.00 \times 10^8$ m 处的电势。(1) $\theta = 0^\circ$; (2) $\theta = 45^\circ$; (3) $\theta = 90^\circ$, θ 为 r 与 p 之间的夹角。

解: 由点电荷电势的叠加

$$V_r = V_+ + V_- = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_+} + \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 r_-} = \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

$$(1) \text{ 若 } \theta = 0^\circ V_p = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^2} = 2.23 \times 10^{-3} \text{ V}$$

$$(2) \text{ 若 } \theta = 45^\circ V_p = \frac{p \cos 45^\circ}{4\pi\epsilon_0 r^2} = 1.58 \times 10^{-3} \text{ V}$$

$$(3) \text{ 若 } \theta = 90^\circ V_p = \frac{p \cos 90^\circ}{4\pi\epsilon_0 r^2} = 0$$

5-28 一个球形雨滴半径为 0.40 mm，带有电量 1.6pC，它表面的电势有多大？两个这样的雨滴相遇后合并为一个较大的雨滴，这个雨滴表面的电势又是多大？

解：取无穷远处为零电势参考点，根据已知条件球形雨滴半径 $R_1 = 0.40 \text{ mm}$ ，带有电量 $q_1 = 1.6\text{pC}$ ，可以求得带电球形雨滴表面电势

$$V_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{R_1} = 36 \text{ V}$$

当两个球形雨滴合并为一个较大雨滴后，雨滴半径 $R_2 = \sqrt[3]{2} R_1$ ，带有电量 $q_2 = 2q_1$ ，雨滴表面电势

$$V_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2q_1}{\sqrt[3]{2} R_1} = 57 \text{ V}$$

5-29 电荷面密度分别为 $+\sigma$ 和 $-\sigma$ 的两块“无限大”均匀带电的平行平板，如图 5-18 (a) 所示，取坐标原点为零电势点，求空间各点的电势分布并画出电势随位置坐标 x 变化的关系曲线。

解：由“无限大”均匀带电平板的电场强度 $\pm \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \mathbf{i}$ ，叠加求得电场强度的分布，

$$E = \begin{cases} 0 & (x < -a) \\ \frac{\sigma}{\epsilon_0} \mathbf{i} & (-a < x < a) \\ 0 & (x > a) \end{cases}$$

电势等于移动单位正电荷到零电势点电场力所作的功

$$V = \int_x^0 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} x \quad (-a < x < a)$$

$$V = \int_x^{-a} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \int_{-a}^0 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} a \quad (x < -a)$$

$$V = \int_x^a \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \int_a^0 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} a \quad (x > a)$$

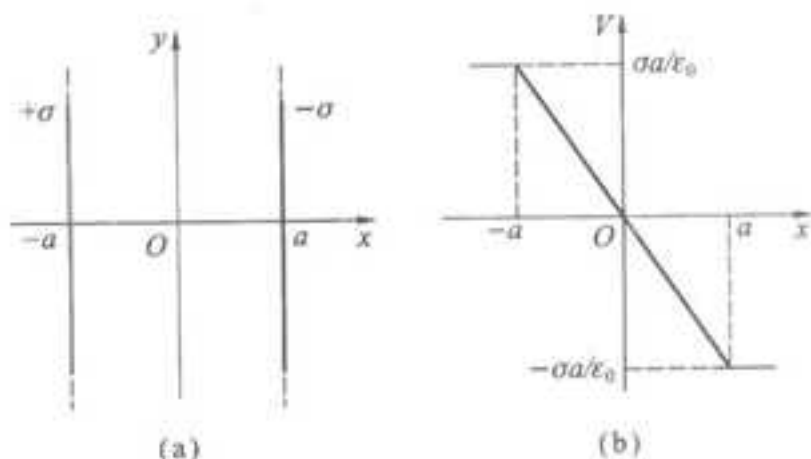


图 5-18

电势变化曲线如图 5-18 (b) 所示。

5-30 两个同心球面的半径分别为 R_1 和 R_2 , 各自带有电荷 Q_1 和 Q_2 . 求: (1) 各区域电势分布, 并画出分布曲线; (2) 两球面间的电势差为多少?

解: 解 1 (1) 由高斯定理可求得电场分布

$$E_1 = 0 \quad (r < R_1)$$

$$E_2 = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2} e_r \quad (R_1 < r < R_2)$$

$$E_3 = \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} e_r \quad (r > R_2)$$

由电势 $V = \int_r^\infty E \cdot dl$ 可求得各区域的电势分布。

当 $r \leq R_1$ 时, 有

$$\begin{aligned} V_1 &= \int_r^{R_1} E_1 \cdot dl + \int_{R_1}^{R_2} E_2 \cdot dl + \int_{R_2}^\infty E_3 \cdot dl \\ &= 0 + \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) + \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\epsilon_0 R_2} \\ &= \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R_1} + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 R_2} \end{aligned}$$

当 $R_1 \leq r \leq R_2$ 时, 有

$$\begin{aligned} V_2 &= \int_r^{R_2} E_2 \cdot dl + \int_{R_2}^\infty E_3 \cdot dl \\ &= \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_2} \right) + \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\epsilon_0 R_2} \\ &= \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 R_2} \end{aligned}$$

当 $r \geq R_2$ 时, 有 $V_3 = \int_r^\infty E_3 \cdot dl = \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\epsilon_0 r}$

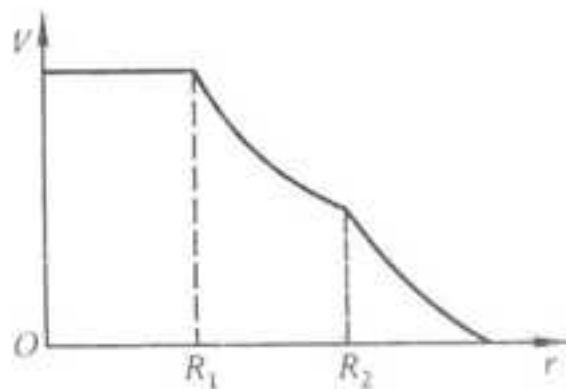


图 5-19

(2) 两个球面间的电势差

$$U_{12} = \int_{R_1}^{R_2} E_2 \cdot dl = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

解 2 (1) 由各球面电势的叠加计算电势分布. 若该点位于两个球面内, 即 $r \leq R_1$, 则

$$V_1 = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R_1} + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 R_2}$$

若该点位于两个球面之间, 即 $R_1 \leq r \leq R_2$, 则

$$V_2 = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 R_2}$$

若该点位于两个球面之外, 即 $r \geq R_2$, 则

$$V_3 = \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

(2) 两个球面间的电势差

$$U_{12} = (V_1 - V_2) \Big|_{r=R_2} = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R_1} - \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R_2}$$

5-31 一半径为 R 的无限长带电细棒, 其内部的电荷均匀分布, 电荷的体密度为 ρ . 现取棒表面为零电势, 求空间电势分布并画出分布曲线.

解: 取高度为 l , 半径为 r 且与带电棒同轴的圆柱面为高斯面, 由高斯定理

当 $r \leq R$ 时

$$E \cdot 2\pi r l = \pi r^2 l \rho / \epsilon_0$$

得 $E(r) = \frac{\rho r}{2\epsilon_0}$

当 $r \geq R$ 时

$$E \cdot 2\pi r l = \pi R^2 l \rho / \epsilon_0$$

$$E(r) = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0 r}$$

得
取棒表面为零电势，空间电势的分布有
当 $r \leq R$ 时

$$V(r) = \int_r^R \frac{\rho r}{2\epsilon_0} dr = \frac{\rho}{4\epsilon_0} (R^2 - r^2)$$

当 $r \geq R$ 时

$$V(r) = \int_r^R \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0 r} dr = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0} \ln \frac{R}{r}$$

如图 5-20 所示是电势 V 随空间位置 r 的分布曲线。

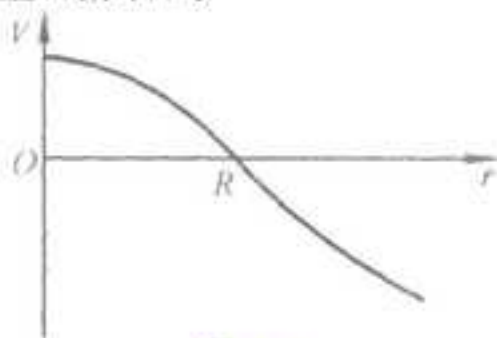


图 5-20

5-32 一圆盘半径 $R=3.00 \times 10^{-2} \text{m}$ 圆盘均匀带电，电荷面密度 $\sigma=2.00 \times 10^{-5} \text{C} \cdot \text{m}^{-2}$ 。(1) 求轴线上的电势分布；(2) 根据电场强度与电势梯度的关系求电场分布；(3) 计算离盘心 30.0 cm 处的电势和电场强度。

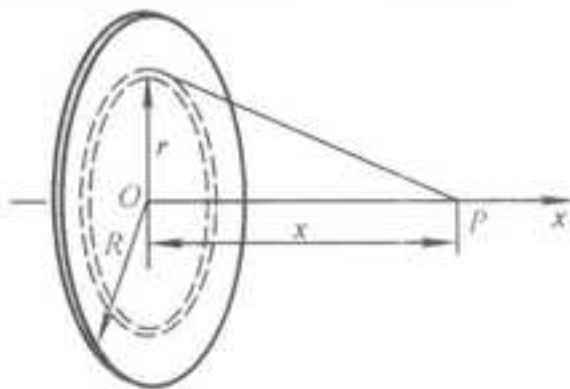


图 5-21

解：(1) 带电圆环激发的电势

$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma 2\pi r dr}{\sqrt{r^2 + x^2}}$$

由电势叠加，轴线上任一点 P 的电势的

$$V = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \int_0^R \frac{r dr}{\sqrt{r^2 + x^2}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (\sqrt{R^2 + x^2} - x) \quad (1)$$

(2) 轴线上任一点的电场强度为

$$E = -\frac{dV}{dx} \mathbf{i} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{x}{\sqrt{R^2 + x^2}} \right) \mathbf{i} \quad (2)$$

电场强度方向沿 x 轴方向。

(3) 将场点至盘心的距离 $x=30.0 \text{cm}$ 分别代入式 (1) 和式 (2)，得

$$V = 1\,691\text{ V}$$

$$E = 5\,607\text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$$

当 $x \gg R$ 时, 圆盘也可以视为点电荷, 其电荷为 $q = \pi R^2 \sigma = 5.65 \times 10^{-8}\text{ C}$. 依照点电荷电场中电势和电场强度的计算公式, 有

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 x} = 1\,695\text{ V}$$

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 x^2} = 5\,649\text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$$

由此可见, 当 $x \gg R$ 时, 可以忽略圆盘的几何形状, 而将带电的圆盘当作点电荷来处理. 在本题中作这样的近似处理, E 和 V 的误差分别不超过 0.3% 和 0.8%, 这已足以满足一般的测量精度.

5-33 两个很长的共轴圆柱面 ($R_1 = 3.0 \times 10^{-2}\text{ m}$, $R_2 = 0.10\text{ m}$), 带有等量异号的电荷, 两者的电势差为 450 V. 求: (1) 圆柱面单位长度上带有多少电荷? (2) $r = 0.05\text{ m}$ 处的电场强度.

解: (1) 两圆柱面之间的电场强度为

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$$

根据电势差的定义有

$$U_{12} = \int_{R_1}^{R_2} E \cdot dl = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

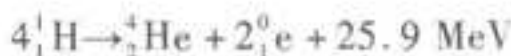
解得

$$\lambda = 2\pi\epsilon_0 U_{12} / \ln \frac{R_2}{R_1} = 2.1 \times 10^{-8}\text{ C} \cdot \text{m}^{-1}$$

(2) 解得两圆柱面之间 $r = 0.05\text{ m}$ 处的电场强度

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} = 7475\text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$$

5-34 轻原子核 (如氢及其同位素氘、氚的原子核) 结合成为较重原子核的过程, 叫做核聚变. 在此过程中可以释放出巨大的能量. 例如四个氢原子核 (质子) 结合成一个氦原子核 (α 粒子) 时, 可释放出 25.9 MeV 的能量. 即



这类聚变反应提供了太阳发光、发热的能源. 如果我们能在地球上实现核聚变, 就能获得丰富廉价的能源. 但是要实现核聚变难度相当大, 只有在极高的温度下, 使原子热运动的速度非常大, 才能使原子核相碰而结合, 故核聚

变反应又称作热核反应. 试估算: (1) 一个质子 (${}^1\text{H}$) 以多大的动能 (以电子伏特表示) 运动, 才能从很远处到达与另一个质子相接触的距离? (2) 平均热运动动能达到此值时, 温度有多高? (质子的半径约为 $1.0 \times 10^{-15}\text{ m}$)

解: (1) 两个质子相接触时势能最大, 根据能量守恒

$$E_{k0} \geq eV_{2R} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{2R} = 7.2 \times 10^5\text{ eV}$$

由 $E_{k0} = \frac{1}{2}mv_0^2$ 可估算出质子初始速率

$$v_0 = \sqrt{2E_{k0}/m} = 1.2 \times 10^7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

该速度已达到光速的4%.

(2) 假设质子的初始动能等于氢分子的平均动能

$$E_{k0} = \bar{E}_k = \frac{3}{2}kT$$

得

$$T = \frac{2E_{k0}}{3k} \approx 5.6 \times 10^9 \text{ K}$$

实际上在这么高的温度下,中性原子已被离解为电子和正离子,称作等离子态,高温的等离子体不能用常规的容器来约束,只能采用磁场来约束(托卡马克装置).

5-35 在一次典型的闪电中,两个放电点间的电势差约为 10^9 V ,被迁移的电荷约为 30 C . (1) 如果释放出来的能量都用来使 0°C 的冰融化成 0°C 的水,则可溶解多少冰?(冰的融化热 $L=3.34 \times 10^5 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1}$) (2) 假设每一个家庭一年消耗的能量为 $3000 \text{ kW} \cdot \text{h}$, 则可为多少个家庭提供一年的能量消耗?

解: (1) 若闪电中释放出来的全部能量为冰所吸收,故可融化冰的质量

$$m = \frac{\Delta E}{L} = \frac{qU}{L} = 8.98 \times 10^4 \text{ kg}$$

即可融化约 90 吨冰.

(2) 一个家庭一年消耗的能量为

$$E_0 = 3000 \text{ kW} \cdot \text{h} = 1.08 \times 10^{10} \text{ J}$$

$$n = \frac{\Delta E}{E_0} = \frac{qU}{E_0} = 2.8$$

一次闪电在极短的时间内释放出来的能量约可维持 3 个家庭一年消耗的电能.

5-36 两个半径为 R 的圆环分别带等量异号电荷 $\pm q$, 圆环如图 5-22 相对 O 点对称平行放置, 其间距为 l , 并且有 $l \ll R$.

(1) 以两环的对称中心 O 为坐标原点, 两环圆心连线为 x 轴, 求 x 轴上的电势分布.

(2) 若取无穷远处为零电势, 证明当 $x \gg R$ 时, 轴线上电势 $V = \frac{ql}{4\pi\epsilon_0 x^2}$.

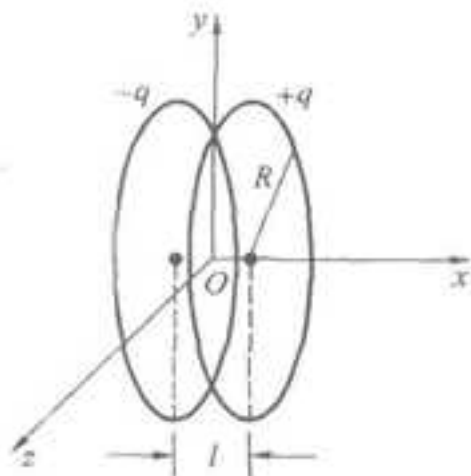


图 5-22

解: (1) 由带电圆环电势的叠加, 两环圆心连线的 x 轴上的电势为

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{R^2 + (x - l/2)^2}} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{R^2 + (x + l/2)^2}}$$

(2) 当 $x \gg l$, $x \gg R$ 时, 化简整理得

$$\begin{aligned} V &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{R^2 + x^2 - lx + l^2/4}} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{R^2 + x^2 + xl + l^2/4}} \\ &\approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0 x} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - l/x}} - \frac{1}{\sqrt{1 + l/x}} \right) \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 x} \left[\left(1 + \frac{l}{2x} + \dots \right) - \left(1 - \frac{l}{2x} + \dots \right) \right] \\ &= \frac{ql}{4\pi\epsilon_0 x^2} \end{aligned}$$

在 $x \gg R$ 时带电圆环等效于一对带等量异号的点电荷, 即电偶极子, 上式就是电偶极子延长线上一点的电势。

5-37 在 Oxy 面上倒扣着半径为 R 的半球面, 半球面上电荷均匀分布, 电荷面密度为 σ , A 点的坐标为 $(0, R/2)$, B 点的坐标为 $(3R/2, 0)$, 求电势差 U_{AB} 。

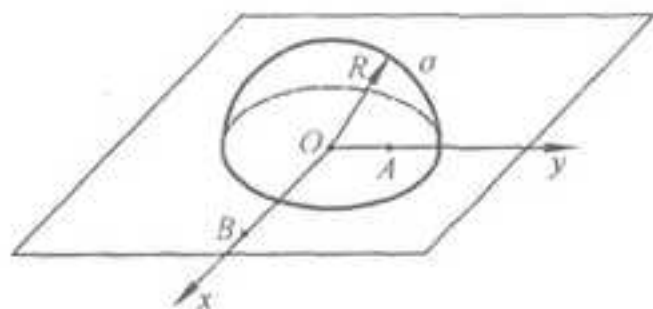


图 5-23

解: 假设将半球面扩展为带有相同电荷面密度 σ 的一个完整球面, 此时在 A 、 B 两点的电势分别为

$$\begin{aligned} V'_A &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{\sigma R}{\epsilon_0} = V'_R \\ V'_B &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 r} = \frac{2\sigma R}{3\epsilon_0} \end{aligned}$$

则半球面在 A 、 B 两点的电势差

$$U_{AB} = \frac{1}{2}(V'_R - V'_B) = \frac{\sigma R}{6\epsilon_0}$$

5-38 在玻尔的氢原子模型中, 电子沿半径为 $0.53 \times 10^{-10} \text{ m}$ 的圆围绕原子核旋转。(1) 若把电子从原子中拉出来需要克服电场力作多少功? (2) 电子的电离能为多少?

解: (1) 电子在玻尔轨道上作圆周运动时, 它的电势能为

$$E_p = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r}$$

因此, 若把电子从原子中拉出来需要克服电场力做功

$$W' = |E_p| = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} = 27.2 \text{ eV}$$

(2) 电子在玻尔轨道上运动时, 静电力提供电子作圆周运动所需的向心力, 即 $e^2/(4\pi\epsilon_0 r^2) = mv^2/r$ 。此时, 电子的动能为

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r}$$

其总能量

$$E = E_k + E_p = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r} = -13.6 \text{ eV}$$

电子的电离能等于外界把电子从原子中拉出来需要的最低能量

$$E_0 = |E| = 13.6 \text{ eV}$$

由于电子围绕原子核高速旋转具有动能, 使电子脱离原子核的束缚所需的电离能小于在此过程中克服电场力所作的功。

5.3 名校考研真题详解

一、选择题

1. 在空间有一非均匀电场, 其电场线分布如图 5-1 所示。在电场中作一半径为 R 的闭合球面 S , 已知通过球面上某一面元 ΔS 的电场强度通量为 Φ_e , 则通过该球面其余部分的电场强度通量为 ()。[北京科技大学 2014 研]

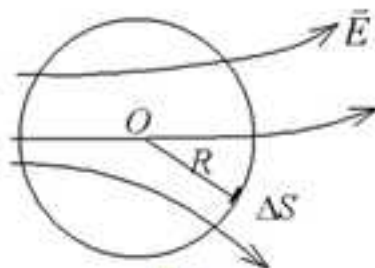


图 5-1

- A. $-\Phi_e$
 B. $\frac{4\pi R^2}{\Delta S}\Phi_e$
 C. $\frac{4\pi R^2 - \Delta S}{\Delta S}\Phi_e$
 D. 0

【答案】A

【解析】选取该闭合球面为高斯面, 根据高斯定理可得

$$\begin{aligned} \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} &= \frac{\sum q_i}{\epsilon_0} = 0 \\ \therefore \int_{S-\Delta S} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \int_{\Delta S} \vec{E} \cdot d\vec{S} &= \int_{S-\Delta S} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \Phi_e = 0 \\ \therefore \int_{S-\Delta S} \vec{E} \cdot d\vec{S} &= -\Phi_e \end{aligned}$$

2. 如图 5-2 所示, 直线 MN 长为 $2l$, 弧 OCD 是以 N 点为中心, l 为半径的半圆弧, N 点有正电荷 q , M 点有负电荷 $-q$ 。今将一试验电荷 $+q_0$ 从 O 点出发沿路径 OCPD 移到无穷远处, 设无穷远处电势为零, 则电场力

做功 ()。 [北京科技大学 2014 研]

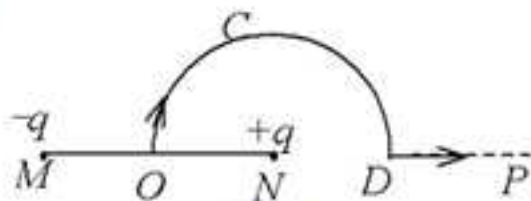


图 5-2

- A. $A < 0$, 且为有限常量
 B. $A = \infty$
 C. $A > 0$, 且为有限常量
 D. $A = 0$

【答案】D

【解析】电场力为保守力，做功与路径无关，只与始末位置有关，因此电场力做功的大小等于电势能的改变量，O 点电势

$$\varphi_O = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 l} + \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 l} = 0$$

因此，电场力做功为

$$W = -\Delta E_p = E_O - E_\infty = 0 - 0 = 0$$

3. 下面列出的真空中静电场的场强公式，其中哪个是正确的？ () [电子科技大学 2011 研]

A. 点电荷 q 的电场: $\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{r}$

B. “无限长”均匀带电直线（电荷线密度）的电场: $\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r^2} \vec{r}$

C. “无限长”均匀带电平面（电荷面密度）的电场: $\vec{E} = \pm \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$

D. 半径为 R 的均匀带电球面（电荷面密度）外的电场: $\vec{E} = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 r^2} \vec{r}$

【答案】D

二、填空题

1. 两个“无限长”的共轴圆柱面，内外半径分别为 R_1 和 R_2 ，其上均匀带电，沿轴线方向内外圆柱面单位长度上的带电量分别为 λ_1 和 λ_2 ，则在两圆柱面之间、距离轴线为 r 的 P 点处的场强大小 E 为_____。 [北京科技大学 2014 研]

【答案】 $\frac{\lambda_1}{2\pi\epsilon_0 r}$

【解析】由题得电场分布图如图 5-3 所示。

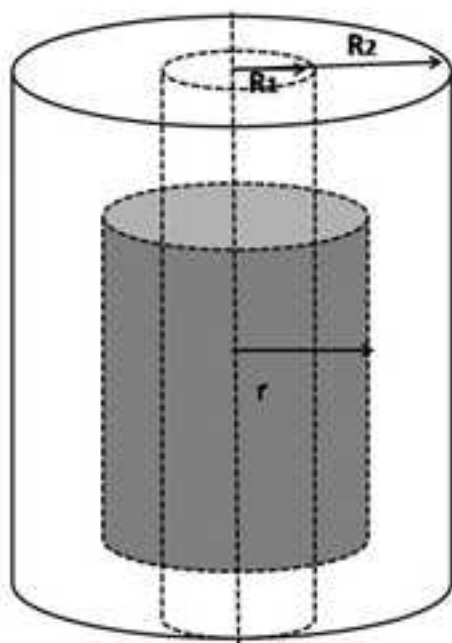


图 5-3

取闭合的阴影部分曲面为高斯面，设阴影部分高度为 h ，由高斯定理可得

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{\sum q_i}{\epsilon_0}$$

$$\therefore 0 + 0 + E \times 2\pi r h = \frac{\lambda_1 h}{\epsilon_0}$$

$$\therefore E = \frac{\lambda_1}{2\pi\epsilon_0 r}$$

2. 一半径为 R 的非均匀带电球面，带电量为 Q ，设距球心无穷远处为电势零点，则球心的电势为 _____。 [北京科技大学 2014 研]

【答案】 $\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$

【解析】在球面上取电荷元 dq ，则电荷元在球心处的电势为

$$dE_p = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 R}$$

由于电势为标量，总电荷在球心处的电势为电荷元的代数和，因此

$$E_p = \int dE_p = \int \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$$

3. 由一根绝缘细线围成的边长为 l 的正方形线框，今使它均匀带电，其电荷线密度为 λ ，则在正方形中心处的电场强度的大小 $E =$ _____。 [电子科技大学 2011 研]

【答案】 0

三、计算题

1. 三块平行放置的金属板 A、B 和 C，面积均为 S 。A、B 相距 d_1 ，A、C 相距 d_2 ，A 板带有正电荷 Q ，B、C 板接地忽略边缘效应，如图 5-4 所示。

- (1) 分别求 B、C 板上的感应电荷量 Q_B 和 Q_C 以及 A 板电势 U_A ；
 (2) 求 B、C 板接地时系统的静电场能量 W_e 。 [北京科技大学 2014 研]

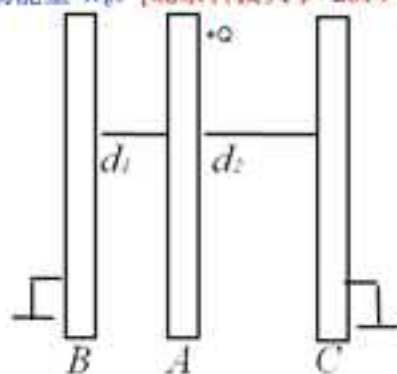


图 5-4

解：方法一

(1) 三块金属板构成一对并联的电容器，其等效电路图如图 5-5 所示

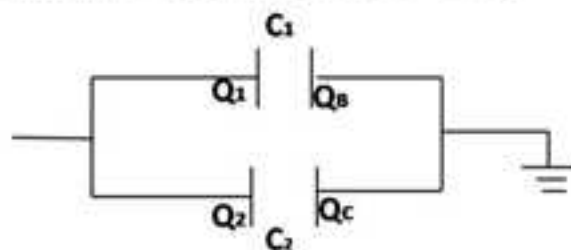


图 5-5

根据电容器的表达式可得，电容 C_1 为

$$C_1 = \frac{\epsilon_r \epsilon_0 S}{d_1} = \frac{\epsilon_0 S}{d_1}$$

电容 C_2 为

$$C_2 = \frac{\epsilon_r \epsilon_0 S}{d_2} = \frac{\epsilon_0 S}{d_2}$$

根据平板电容器的定义可得

$$\begin{aligned} Q_1 &= Q_B \\ Q_2 &= Q_C \end{aligned}$$

由电容器储存电量与电容的关系式可得

$$\begin{aligned} Q_1 = Q_B &= C_1 U_A = \frac{\epsilon_0 S}{d_1} U_A \\ Q_2 = Q_C &= C_2 U_A = \frac{\epsilon_0 S}{d_2} U_A \end{aligned}$$

由题得 A 板上储存电荷之和为 Q ，因此

$$Q_1 + Q_2 = Q$$

$$\therefore Q = \frac{\varepsilon_0 S}{d_1} U_A + \frac{\varepsilon_0 S}{d_2} U_A$$

$$\therefore U_A = \frac{Q d_1 d_2}{\varepsilon_0 S (d_1 + d_2)}$$

故金属板 B、C 上的电荷分别为

$$Q_B = C_1 U_A = \frac{\varepsilon_0 S}{d_1} \times \frac{Q d_1 d_2}{\varepsilon_0 S (d_1 + d_2)} = \frac{Q d_2}{d_1 + d_2}$$

$$Q_C = C_2 U_A = \frac{\varepsilon_0 S}{d_2} \times \frac{Q d_1 d_2}{\varepsilon_0 S (d_1 + d_2)} = \frac{Q d_1}{d_1 + d_2}$$

(2) 根据等效电路图可得电容器 C_1 储存的能量为

$$W_B = \frac{1}{2} Q_B U_A = \frac{1}{2} \frac{Q d_2}{d_1 + d_2} \times \frac{Q d_1 d_2}{\varepsilon_0 S (d_1 + d_2)} = \frac{Q^2 d_1^2 d_2}{2 \varepsilon_0 S (d_1 + d_2)^2}$$

电容器 C_2 储存的能量为

$$W_C = \frac{1}{2} Q_C U_A = \frac{1}{2} \frac{Q d_1}{d_1 + d_2} \times \frac{Q d_1 d_2}{\varepsilon_0 S (d_1 + d_2)} = \frac{Q^2 d_1^2 d_2}{2 \varepsilon_0 S (d_1 + d_2)^2}$$

系统储存的全部能量

$$W_e = W_B + W_C = \frac{Q^2 d_1^2 d_2}{2 \varepsilon_0 S (d_1 + d_2)^2} + \frac{Q^2 d_1^2 d_2}{2 \varepsilon_0 S (d_1 + d_2)^2} = \frac{Q^2 d_1 d_2}{2 \varepsilon_0 S (d_1 + d_2)}$$

方法二

(1) 同方法一。

(2) 对于并联的电容器 C_1 和 C_2 ，由电容器并联公式可得其并联后的等效电容 C

$$C = C_1 + C_2 = \frac{\varepsilon_0 S}{d_1} + \frac{\varepsilon_0 S}{d_2} = \frac{\varepsilon_0 S (d_1 + d_2)}{d_1 d_2}$$

由电容器的储能公式可得系统储存的能量为

$$W_e = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{Q^2 d_1 d_2}{2 \varepsilon_0 S (d_1 + d_2)}$$

2. 一环形薄片有细绳悬吊着，环的外半径为 R ，内半径为 $R/2$ ，并有电荷 Q 均匀分布在环面上，设绳长为 $3R$ ，且也有电荷 Q 均匀分布其上，求圆环中心 O 处的场强。(圆环中心在细绳的延长线上) [武汉科技大学 2016 研]

解：由对称性可知，环形薄片在圆心 O 处产生的合场强为 0

$$\text{在绳上取元电荷 } dq = \frac{Q}{3R} dy, \quad dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{dq}{y^2}$$

$$E = \int dE = \int_x^{4R} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{3R} \frac{dy}{y^2} = \frac{Q}{16\pi\varepsilon_0 R^2}$$

$$\vec{E}_O = \vec{E}_{\text{环}} + \vec{E}_{\text{绳}}$$

$$= 0 + \frac{Q}{16\pi\varepsilon_0 R^2} = \frac{Q}{16\pi\varepsilon_0 R^2}$$

3. 一电偶极子由电量 $q=1.0 \times 10^{-6} \text{C}$ 的两个异号点电荷所组成, 两电荷相距 $l=2.0 \text{cm}$. 把这电偶极子放在场强大小为 $E=1.0 \times 10^5 \text{N/C}$ 的均匀电场中, 试求: (1) 电场作用于电偶极子的最大力矩; (2) 电偶极子从受最大力矩的位置转到平衡位置的过程, 电场力作的功. [暨南大学 2011 研]

解: (1) 此电偶极子的电偶极距大小为

$$p_e = ql$$

电场力作用于电偶极子的力矩大小为

$$\tau = |\mathbf{p}_e \times \mathbf{E}| = p_e E \sin \theta$$

其中 θ 是电场方向与电偶极距方向的夹角, 当垂直时力矩最大,

$$\tau_{\max} = p_e E = 2.0 \times 10^{-3} \text{N} \cdot \text{m}$$

(2) 当电偶极距和外电场同向时达到平衡状态, 电场力做功为

$$W = Eq|l_+ - l_-| = Eq l = 2.0 \times 10^{-3} \text{N} \cdot \text{m}$$

4. 如图 5-6 所示, 一内半径为 a , 外半径为 b 的金属球壳, 带有电量 Q , 在球心处有一点电荷 q . 设无限远处为电势零点, 求:

(1) 空间的电势分布;

(2) 球壳内、外表面的电荷分布;

(3) 若将球壳接地, 求球壳上的电荷分布. [暨南大学 2010 研]

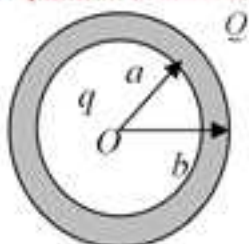


图 5-6

解: (1) 首先由对称性, 空间电场及电势分布呈球对称, 根据高斯定理和电势定义, 对于 $r > b$,

$$E_1(r) = \frac{Q+q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

所以电势为

$$U_1(r) = \int_r^\infty E dr = \frac{Q+q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

对于 $a < r < b$, 金属中电场强度为 0, 是等势体.

对于 $r < a$,

$$E_2(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

所以电势为

$$U_2(r) = \int_b^\infty E_1 dr + \int_r^a E_2 dr = \frac{Q+q}{4\pi\epsilon_0 b} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a} \right)$$

综上所述

$$U(r) = \begin{cases} \frac{Q+q}{4\pi\epsilon_0 r}, & (r > b) \\ 0, & (a < r < b) \\ \frac{Q+q}{4\pi\epsilon_0 b} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a}\right), & (r < a) \end{cases}$$

(2) 首先由于金属壳内无电场，故电荷均匀分布在内外表面。在外表面附近应用高斯定理，

$$\sigma(b) = \frac{\epsilon_0 E_1(b) \Delta S}{\Delta S} = \frac{Q+q}{4\pi b^2}$$

在内表面应用高斯定理，

$$\sigma(a) = -\frac{\epsilon_0 E_2(a) \Delta S}{\Delta S} = -\frac{q}{4\pi a^2}$$

(3) 接地后，导体壳的电荷将会向地转移，使电势分布发生变化，稳定后导体壳与大地等势，电势为 0。所以壳外电场为 0，由高斯定理，外表面带电为 0。

壳内电场分布只由 q 决定，受电磁屏蔽而不受外电场的影响，所以内表面电荷分布为，

$$\sigma(a) = -\frac{q}{4\pi a^2}$$

6.1 复习笔记

一、静电场中的导体

1. 静电平衡条件

(1) 静电感应现象

静电感应现象是指将金属导体放在外电场中, 导体中的自由电子在作无规则运动的同时, 还将在电场力作用下作宏观定向运动, 从而使导体中的电荷重新分布的现象。

(2) 静电平衡状态

①概念

静电平衡状态是指在电场中, 导体电荷重新分布后达到的导体内部的电场强度等于零, 即 $E=0$ 时的状态。这时, 导体内没有电荷作定向运动。

②导体处于静电平衡状态时, 必须满足的两个条件:

- 导体内部任何一点处的电场强度为零;
- 导体表面处电场强度的方向, 都与导体表面垂直。

(3) 导体静电平衡的电势表述

①导体内部

在静电平衡时, 导体内任意两点间的电势相等。

由于在静电平衡时, 导体内部的电场强度为零, 所以, 如在导体内取任意两点 A 和 B, 这两点间的电势差 U 为零, 即

$$U = \int_{AB} E \cdot dl = 0$$

②导体的表面

在静电平衡时, 导体表面的电场强度 E 与表面垂直, 其切向分量 E_t 为零, 因此导体表面上任意两点的电势差亦应为零。故在静电平衡时, 导体表面为一等势面。

总之, 当导体处于静电平衡时, 导体上的电势处处相等, 导体为一等势体。

2. 静电平衡时导体上电荷的分布

(1) 对于导体

在静电平衡时, 导体所带的电荷只能分布在导体的表面上, 导体内没有静电荷。

(2) 对于带电的空腔导体

如果有一空腔的导体带有电荷 $+q$, 按静电平衡条件可知, 空腔内表面不会出现任何形式的分布电荷, 电荷只能全部分布在空腔导体的外表面上。

(3) 带电导体表面的电荷面密度与其邻近的电场强度关系

带电导体处于静电平衡时, 导体表面之外非常邻近表面处的电场强度 E , 其数值与该处电荷面密度 σ 成正比, 其方向与导体表面垂直, 其表达式为

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

上式表明, 当表面带正电时, E 的方向垂直表面向外; 当表面带负电荷时, E 的方向则垂直表面指向导体。

(4) 带尖端的导体

当到达静电平衡时, 带尖端导体虽为一等势体, 导体表面为一等势面, 但在曲率半径较小的地方, 其电荷面密度和电场强度的值较大; 而在曲率半径较大的地方, 其电荷面密度和电场强度的值较小。

(5) 尖端放电危害及预防措施

尖端放电会使电能白白损耗, 还会干扰精密测量和通讯。

所以, 在许多高压电器设备中, 所有金属元件都应避免带有尖棱, 最好做成球形, 并尽量使导体表面光滑而平坦, 这都是为了避免尖端放电的产生。

3. 静电屏蔽

(1) 静电屏蔽现象

静电屏蔽是指在静电场中，因导体的存在使某些特定的区域不受电场影响的现象。

(2) 空腔导体的静电屏蔽作用

空腔导体的静电屏蔽作用是指空腔导体（无论接地与否）将使腔内空间不受外电场的影响，而接地空腔导体将使外部空间不受空腔内的电场的影响。

(3) 静电屏蔽的应用

在实际工作中，常用编织得相当紧密的金属网来代替金属壳体，它在生活中有如下应用：

- ① 高压设备周围的金属网；
- ② 检测电子仪器的金属网屏蔽室都能起静电屏蔽作用；
- ③ 工作人员穿上屏蔽服在高压输电线下工作。

二、静电场中的电介质

静电场与物质的相互作用，既表现在静电场对物质的影响，也表现在物质对静电场的影响。

1. 电介质对电场的影响相对电容率

(1) 影响

真空中，两无限大均匀带有电荷面密度分别为 $+\sigma$ 和 $-\sigma$ 的平行平板之间的电场强度为 $E_0 = \sigma/\epsilon_0$ ， ϵ_0 为真空电容率，现若维持两板上的电荷面密度 σ 不变，而在两板之间充满均匀的各向同性的电介质，则两板之间的电场强度会发生变化。

(2) 相对电容率

相对电容率表现了电介质对电场强度的影响程度。

实验测得两板间的电场强度 E 的值仅为真空时两板间电场强度 E_0 的 $1/\epsilon_r$ 倍（ $\epsilon_r > 1$ ），即

$$E = \frac{E_0}{\epsilon_r}$$

ϵ_r 称为电介质的相对电容率，相对电容率 ϵ_r 与真空电容率 ϵ_0 的乘积 $\epsilon_0\epsilon_r = \epsilon$ 称为电容率。

2. 电介质的极化

(1) 分子的分类

- ① 无极分子：分子正、负电荷中心在无外电场时是重合的，如氢、甲烷、石蜡、聚苯乙烯等。
- ② 有极分子：分子正、负电荷中心也是不重合的，这种分子相当于一个有着固有电偶极矩的电偶极子，如水、有机玻璃、纤维素、聚氯乙烯等。

(2) 无极分子

① 诱导电偶极矩

诱导电偶极矩是指在外电场 E 的作用下，无极分子均可认为是电偶极子，其中的正、负电荷将偏离原来的位置，正、负电荷中心将产生相对的位移 r_0 ，此时产生的和外电场 E 的方向大体一致的电偶极矩 p 。

② 极化电荷或束缚电荷

极化电荷或束缚电荷是指在均匀电介质内，任一小体积内所含有的异号电荷数量相等，即电荷体密度仍然保持为零时，在电介质与外电场垂直的两个表面上分别出现的正电荷和负电荷。

注：束缚电荷是不能用接地之类的方法来消除的。

③ 极化现象

电介质的极化现象是指在外电场作用下介质表面产生极化电荷的现象。

(3) 有极分子

- ① 在没有外电场的情况下，由于分子的热运动，电介质中各电偶极子的电偶极矩的排列是无序的。
- ② 在有外电场作用的情况下，电偶极子都要受到力矩（ $M = p \times E$ ）的作用，由于分子的热运动，各电偶极子也不能排列整齐，但对于均匀的电介质，在垂直于电场方向的两表面上，还是有极化电荷出现。

(4) 电晕现象

电晕现象是指在潮湿或阴雨天的日子里，高压输电线（如 220kV、550kV 等）附近出现的淡蓝色辉光的放电现象。

3. 电极化强度

电介质的极化强度是指单位体积中分子电偶极矩的矢量和，其数学表达式为

$$P = \frac{\sum p}{\Delta V}$$

P 称为电极化强度，电极化强度的单位是 $C \cdot m^{-2}$ 。

两平板间均匀电介质的电极化强度的大小，等于极化电荷面密度，即

$$P = \frac{\sum p}{\Delta V} = \frac{\sigma' \Delta S'}{\Delta S'} = \sigma'$$

4. 极化荷与自由电荷的关系

(1) 极化电荷与自由电荷的关系

$$\sigma' = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \sigma_0$$

由于 $Q_0 = \sigma_0 S$ 、 $Q' = \sigma' S$ ，故上式亦可写成

$$Q' = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} Q_0$$

该式就是极化电荷面密度 σ' 与自由电荷面密度 σ_0 和电介质的相对电容率 ϵ_r 之间的关系。

(2) 极化强度与电场强度的关系

将 $E_0 = \sigma_0 / \epsilon_0$ 、 $E = E_0 / \epsilon_r$ 以及 $\sigma' = P$ 代入上式，可得电介质中电极化强度 P 与电场强度 E 之间的关系为

$$P = (\epsilon_r - 1) \epsilon_0 E$$

写成矢量有

$$P = (\epsilon_r - 1) \epsilon_0 E$$

上式表明电介质中的 P 与 E 呈线性关系，如取 $\chi = \epsilon_r - 1$ ，上式亦为

$$P = \chi \epsilon_0 E$$

χ 称为电介质的电极化率。

注：在高频条件下，电介质的相对电容率 ϵ_r 是和外电场的频率 f 有关的。

三、电位移有电介质时的高斯定理

1. 电位移

(1) 定义

$$D = \epsilon_0 \epsilon_r E = \epsilon E$$

其中 $\epsilon_0 \epsilon_r = \epsilon$ 为电介质的电容率。

(2) 电位移通量

$$\oint_S D \cdot dS = Q_0$$

式中 D 称为电位移，而 $\oint_S D \cdot dS$ 则是通过任意闭合曲面 S 的电位移通量， D 的单位为 $C \cdot m^{-2}$ 。

2. 有电介质时的高斯定理

有电介质时的高斯定理是指在静电场中，通过任意闭合曲面的电位移通量等于该闭合曲面内所包围的自由电荷的代数和，其数学表达式为

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \sum_{i=1}^n Q_{0i}$$

四、电容电容器

电容反映导体的容电本领。

1. 孤立导体的电容

(1) 概念

孤立导体的电容是指孤立导体所带的电荷 Q 与其电势 V 的比值，电容的符号为 C ，有

$$C = \frac{Q}{V}$$

注： C 的值既不依赖于 V 也不依赖于 Q ，仅与导体的形状和尺寸有关，就像导体的电阻与导体是否通有电流无关一样。

(2) 真空中孤立球形导体

其电容为

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R}} = 4\pi\epsilon_0 R$$

由上式可以看出，真空中球形孤立导体的电容正比于球的半径。

(3) 单位

在国际单位制中，电容的单位为法拉 (Farad)，符号为 F ，常用微法 (μF)、皮法 (pF) 等作为电容的单位，它们之间的关系为

$$1F = 10^6 \mu F = 10^{12} pF$$

2. 电容器

将两个能够带有等值而异号电荷的导体所组成的系统，称为电容器。

(1) 电容定义

电容器的电容是指两导体中任何一个导体所带的电荷 (Q) 与两导体间电势差 U 的比值，即

$$C = \frac{Q}{U}$$

导体 A 和 B 常称为电容器的两个电极或极板。

(2) 电容器的应用

①现代电工技术和电子技术中的重要元件；

②利用高功率电容器可以获得高强度的激光束，为实现人工控制热核聚变的良好前景提供了条件。

(3) 电容器的击穿概念

电介质被击穿是指当电场强度增大到某一最大值 E_b 时，电介质中分子发生电离，从而使电介质失去绝缘性。电介质能承受的最大电场强度 E_b 称为电介质的击穿场强 (也称绝缘强度)，此时两极板的电压称击穿电压 U_b 。

对于平行平板电容器来说，击穿场强 E_b 与击穿电压 U_b 之间的关系为

$$E_b = \frac{U_b}{d}$$

式中 d 为两极板之间的距离。

(4) 常见电容器的电容

①平板电容器

$$C = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r S}{d}$$

②圆柱形电容器

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0\epsilon_r L}{\ln(R_2/R_1)}$$

其中筒的长度为 L ，两筒的半径分别为 R_1 和 R_2 ，两筒之间充满相对介电常数为 ϵ_r 的电介质。

③球形电容器

$$C = \frac{4\pi\epsilon_0\epsilon_r R_1 R_2}{R_2 - R_1}$$

式中 R_1 和 R_2 分别表示内球壳外表面和外球壳内表面的半径。

④两长直导线单位长度的电容

$$C = \frac{\lambda}{U} = \frac{\pi\epsilon_0}{\ln \frac{d}{R}}$$

式中 d 为两直线距离， R 为直导线的半径。

3. 电容器的并联和串联

(1) 电容器的并联

当几个电容器并联时，其等效电容等于这几个电容器电容之和。示意图如 6-1 所示，即

$$C = C_1 + C_2$$

可见，并联电容器组的等效电容较电容器组中任何一个电容器的电容都要大，但各电容器上的电压却是相等的。

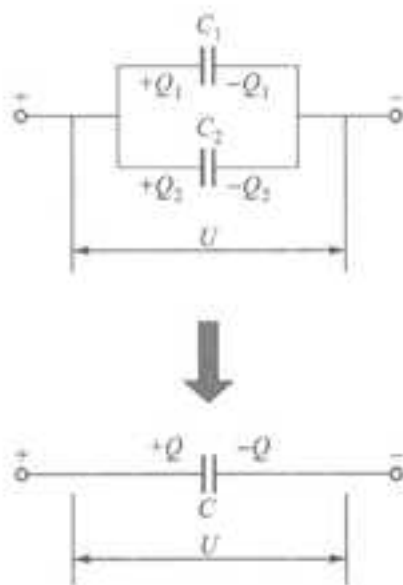


图 6-1 C_1 和 C_2 两个电容器并联， C 为它们的等效电容

(2) 电容器的串联

串联电容器组等效电容的倒数等于电容器组中各电容倒数之和。示意图如 6-2 所示，即

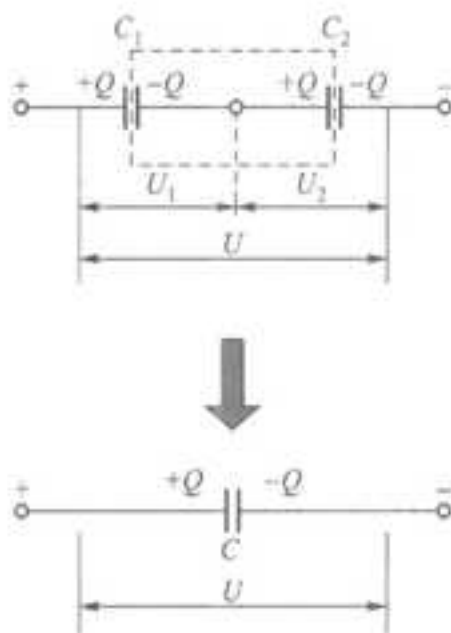


图 6-2 两个电容器 C_1 和 C_2 串联, C 为它们的等效电容

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

$$C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$$

可见, 串联电容器组的等效电容比电容器组中任何一个电容器的电容都小, 但每一电容器上的电压却小于总电压。

五、静电场的能量能量密度

1. 电容器的电能

根据广义的功能原理, 电容器在充电时要克服外力做功, 这将使电容器的能量增加, 也就是电容器贮存了电能 W_e , 于是有

$$W_e = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} CU^2 = \frac{1}{2} QU$$

2. 静电场的能量能量密度

(1) 平板电容器的能量

对于极板面积为 S , 间距为 d 的平板电容器, 若不计边缘效应, 则电场所占有的空间体积为 Sd , 于是此电容器贮存的能量也可以写成

$$W_e = \frac{1}{2} CU^2 = \frac{1}{2} \frac{\epsilon S}{d} (Ed)^2 = \frac{1}{2} \epsilon E^2 Sd$$

注: 该式与上式中的电能表达式是两种不同的物理意义, 上式表明能量的携带者是电荷, 而此式说明能量的携带者是电场。

经实验确定, 在电磁波的传播过程中, 并没有电荷伴随着传播, 所以不能说电磁波能量的携带者是电荷, 而只能说电磁波能量的携带者是电场和磁场, 因此如果某一空间具有电场, 那么该空间就具有电场能量。

(2) 能量密度

电场的能量密度是指单位体积电场内所具有的电场能量, 即

$$w_e = \frac{1}{2} \epsilon E^2$$

该式表明, 电场的能量密度与电场强度的二次方成正比, 电场强度越大的区域, 电场的能量密度也越大。

六、电容器的充放电

在一般的直流电路中，只含有电源和电阻。如果在电路中加入一个电容，它在电路中将起充电作用，并使电路中电流发生变化。这又称暂态过程。

1. 电容的充电

电容的充电过程是电容器的极板上的电荷增加，极板间的电势差增大，电路中电流减小的过程。

(1) 电荷变化公式

$$q = C \mathcal{E} (1 - e^{-\frac{t}{RC}})$$

由该式可知，当 $t \rightarrow \infty$ 时， q 趋于 $C \mathcal{E}$ 。即当电容长时间充电以后，电容所带的电荷趋于极大值 $C \mathcal{E}$ ，变化曲线如图 6-3 (a) 所示，用 q_0 来代表它，则有

$$q = q_0 (1 - e^{-\frac{t}{RC}})$$

(2) 电流的变化公式

由 $I = dq/dt$ ，有

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-\frac{t}{RC}} = I_0 e^{-\frac{t}{RC}}$$

式中 I_0 为电流的最大值，也就是 $t=0$ 时的电流值，变化曲线如图 6-3 (b) 所示。

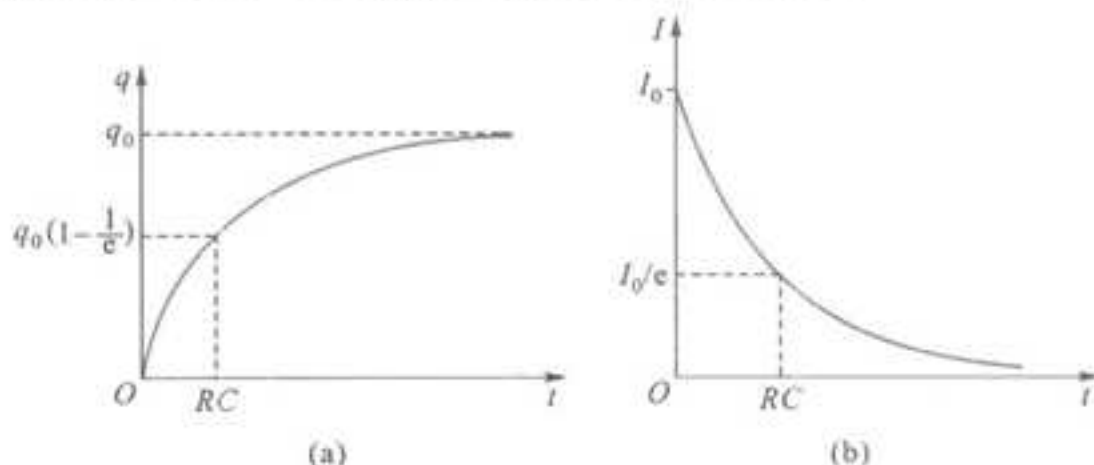


图 6-3 充电时，电容上的电荷和电路中的电流随时间变化

(3) 时间常数

由图 6-3 (a) 可看出，乘积 RC 可以反映出充电过程的特征，故 $\tau = RC$ 称为 RC 电路的时间常数。

2. 电容的放电

电容的放电过程是指将电容看做一个电源，当回路中的开关接后，电容上的电荷和电势差逐渐减小的过程。

(1) 电荷变化表达式

$$q = q_0 e^{-\frac{t}{RC}}$$

式中 RC 为时间常数 τ ，示意图如图 6-4 所示。

(2) 电流变化表达式

由 $I = -dq/dt$ ，有

$$I = \frac{q_0}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} = I_0 e^{-\frac{t}{RC}}$$

式中 $\frac{q_0}{RC} = \frac{U_0}{R} = I_0$ ，为 $t=0$ 时刻（即开关刚闭合）时电路中的电流，示意图如图 6-4 所示。

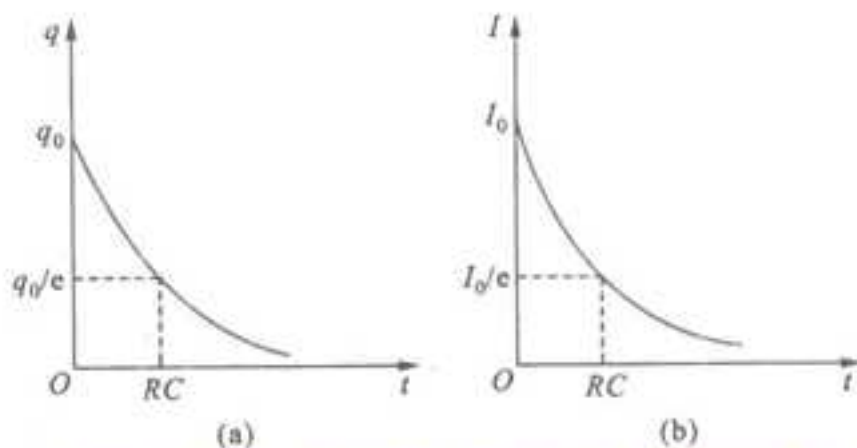


图 6-4 放电时，电容上的电荷与电路中的电流随时间而变化

七、静电的应用

1. 范德格拉夫静电起电机

静电起电机主要用来产生高达数百万伏的电压，这种电压用来在静电加速器中加速质子、 α 粒子、电子等带电粒子，最常用的静电起电机是范德格拉夫静电起电机，其工作原理图如图 6-5 所示。

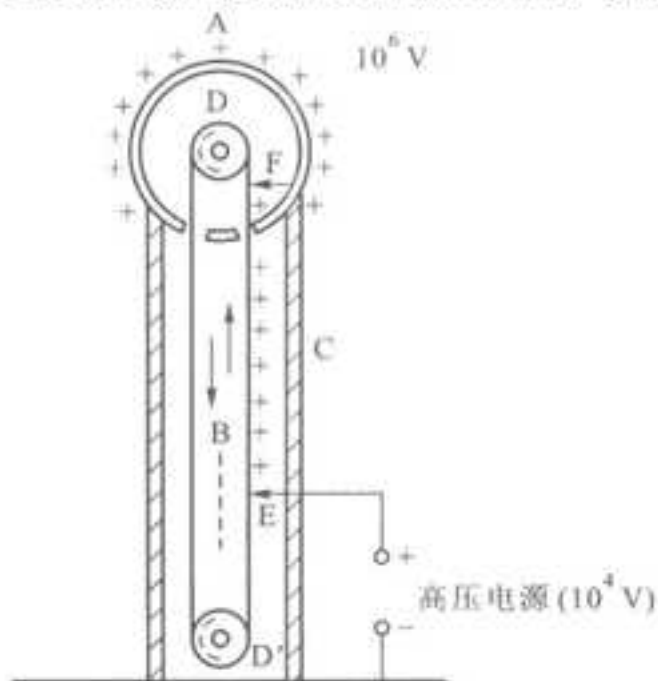


图 6-5 范德格拉夫起电机原理图

静电加速器除用于核物理的研究外，在医学、化学、生物学和材料的辐射处理等方面都有广泛的应用。

2. 静电除尘

如图 6-6 所示是一种静电除尘装置示意图。

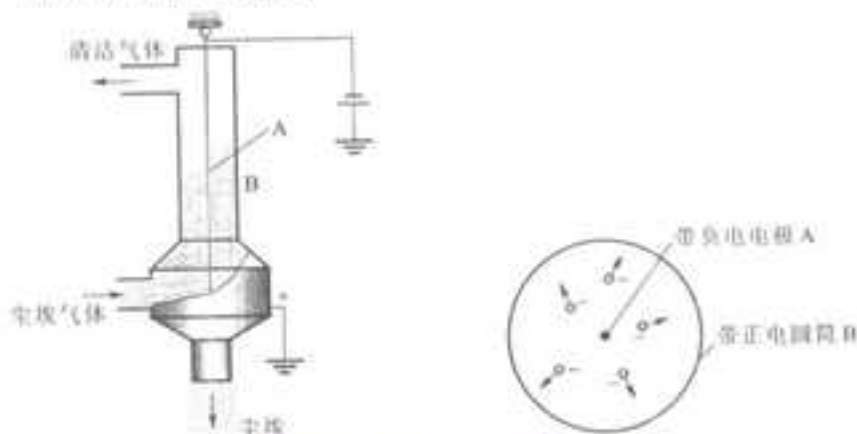


图 6-6 静电除尘装置示意图

3. 静电分离

静电分离的原理是通过装置的震动导致物体的摩擦，使物体带不同的正负电荷，正负电荷在电场力的作用下会由不同的运动轨迹，从而能将物体分离出来。

如图 6-7 所示是一种分离矿石的装置。

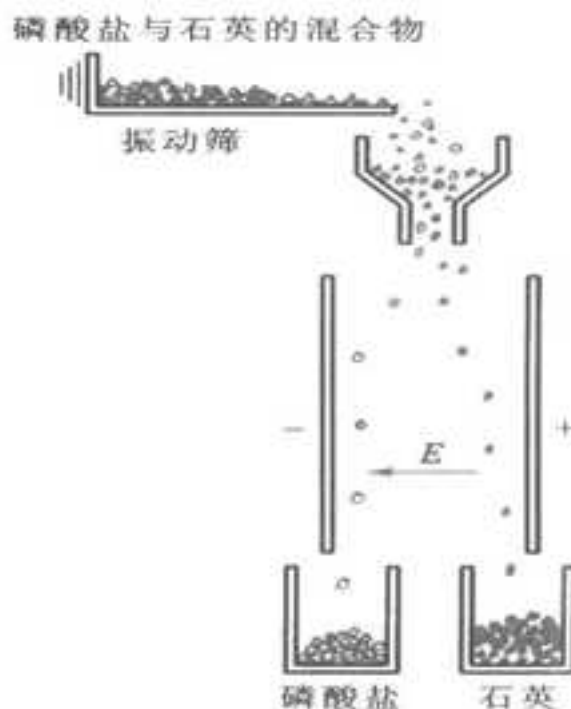


图 6-7 依赖静电力作用使矿石分离

6.2 课后习题详解

一、问题

6-1 有人说：“某一高压输电线的电压有 500kV，因此你不可与之接触”。这句话是对，还是不对？维修工人在高压输电线路是如何工作的呢？

答：不对。因为此情形下人和该高压输电线电势相等，在人的身体中不会形成电流，故对人没有危害。维修工人在高压输电线路工作时，绝对不可让身体同时接触两根输电线，如果要接触，则应采取绝缘、防护措施。

6-2 有一个绝缘的金属筒，上面开一小孔，通过小孔放入一用丝线悬挂的带正电的小球。试讨论在下列各种情形下，金属筒外壁带何种电荷？

(1) 小球跟筒的内壁不接触；(2) 小球跟筒的内壁接触；(3) 小球不跟筒接触，但人用手接触一下筒的外壁，松开手后再把小球移出筒外。

答：(1) 此情形下金属筒外壁带正电荷；(2) 此情形下金属筒外壁带正电荷；(3) 此情形下金属筒外壁带负电荷。

6-3 将一个带电小金属球与一个不带电的大金属球相接触，小球上的电荷会全部转移到大球上去吗？

答：不会。由 $\sigma \propto 1/R$ 可知，电荷易聚集在曲率半径较小的导体表面，但也会分布在别处表面。

6-4 为什么高压电器设备上金属部件的表面要尽可能不带棱角？

答：对孤立带电导体的分析表明，导体表面附近场强与其表面电荷面密度成正比，而电荷面密度又与导体表面的曲率半径有关，曲率半径越小，电荷面密度也越大。因而在金属导体的突起部位往往积聚起大量电荷，使得局部场强变得很大，容易使空气击穿，发生放电。高压电器设备上金属部件表面往往有大量的感应电荷，如果有棱角就很容易发生放电，损害设备，所以应尽量避免表面上出现突起或棱角。

6-5 在高压电器设备周围，常围上一接地的金属栅网，以保证栅网外的人身安全。试说明其道理。

答：高压电器设备周围具有很强的电场，为保证对靠近高压电器设备的人、畜不造成伤害，利用接地导体壳可保护壳外空间不受壳内带电体的影响，静电屏蔽内电场的原理，采用在高压电器设备周围，围上一接地的金属栅网，以保证栅外的人、畜的安全。

6-6 在导体处于静电平衡时，若导体表面某处电荷面密度为 σ ，那么在导体表面附近处的电场强度为 $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$ ，而在均匀无限大的带电平面的两侧，其电场强度则是 $E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$ 为何减小了一半呢？

答：(1) 相同点：题设中的两个电场强度都是所有带电部分对电场强度的总贡献，即合场强。

(2) 不同处：

① 均匀无限大带电平面的电荷面密度 σ 是常量，而导体电荷面密度并非常量，不同位置处的 σ 一般不等；

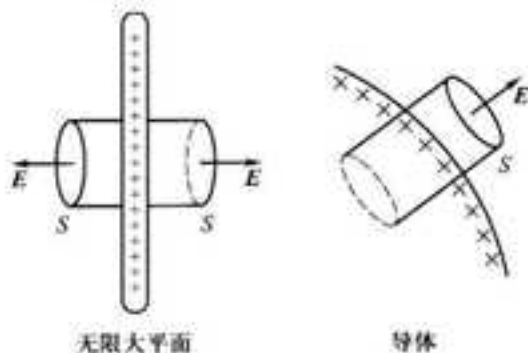
② 只在导体表面附近处，场强垂直于导体面，且为 $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$ ，而均匀无限大带电平面周围空间的场强都垂直于平面，且为 $E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$ ；

③ 导体静电平衡后的总电场只在导体外侧存在，而均匀无限大带电平面的总电场在两侧都有。综上所述，当用一扁平柱形高斯面包围电荷面密度相等的导体或均匀无限大带电平面时（见问题 6-6 图），所围电荷对高斯面的贡献相同

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{\sigma S}{\epsilon_0}$$

但前者只对导体外侧面有贡献，即 $ES = \frac{\sigma S}{\epsilon_0}$ ；

后者对两侧都有贡献，即 $ES + ES = \frac{\sigma S}{\epsilon_0}$ ，这样就得出前者的总电场强度应该是后者的两倍的结论。



问题 6-6 图

6-7 在绝缘支柱上放置一闭合的金属球壳，球壳内有一人。当球壳带电并且电荷越来越多时，他观察到的球壳表面的电荷面密度、球壳内的场强是怎样的？当一个带有跟球壳相异电荷的巨大带电体移近球壳时，此人又将观察到什么现象？此人处在球壳内是否安全？

答：当金属球壳带电并且电荷越来越多时，球壳内的人观察到球壳表面的电荷面密度越来越大，且仍旧均匀分布，但球壳内的场强始终为零。当一个带有跟球壳相异电荷的巨大带电体移近球壳时，在达到静电平衡后，场的分布不再具有球对称性，球面上各点的场强的数值不同，因而电荷面密度不再相同，球壳背离巨大带电体侧，电荷面密度较大。但由于处于静电平衡，导体内任意点 P 的场强始终为零。此人处在球壳内仍旧安全。

6-8 有人说：“由于 $C = Q/U$ ，所以电容器的电容与其所带电荷成正比”。这话对吗？如电容器两极的电势差增加一倍， Q/U 将如何变化呢？

答：不对。电容是表征导体电学性质的物理量，反映了导体的容电本领，是导体自身的性质仅与导体的形状和尺寸有关，与导体是否带电无关。如果电容器两极的电势差增加一倍， Q/U 将不变。

6-9 在下列情况下, 平行平板电容器的电势差、电荷、电场强度和所贮的能量将如何变化。(1) 断开电源, 并使极板间距加倍, 此时极板间为真空; (2) 断开电源, 并使极板间充满相对电容率 $\epsilon_r = 2.5$ 的油; (3) 保持电源与电容器两极相连, 使极板间距加倍, 此时极板间为真空; (4) 保持电源与电容器两极相连, 使极板间充满相对电容率 $\epsilon_r = 2.5$ 的油。

答: (1) 断开电源, 平行平板电容器的电荷不变 $Q_1 = Q_0$, 由

$$C = \frac{\epsilon_0 S}{d} \quad C = \frac{Q}{U}$$

可知, 由于 $d_1 = 2d_0$, 所以

$$C_1 = \frac{1}{2}C_0 \quad U_1 = 2U_0$$

$$E_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = E_0 \quad W_1 = \frac{1}{2}QU_1 = 2W_0$$

(2) 平行平板电容器的电荷不变, $Q_2 = Q_0$

$$C_2 = \epsilon_r \frac{\epsilon_0 S}{d} = 2.5C_0 \quad U_2 = \frac{2}{5}U_0$$

$$E_2 = \frac{U_2}{d_0} = \frac{2}{5}E_0 \quad W_2 = \frac{1}{2}QU_2 = \frac{2}{5}W_0$$

(3) 保持电源与电容器两极相连, 则 $U_3 = U_0$, 由于 $d_3 = 2d_0, C_3 = \frac{1}{2}C_0$,

$$Q_3 = C_3 U_0 = \frac{1}{2}Q_0, E_3 = \frac{\sigma_0/2}{\epsilon_0} = \frac{1}{2}E_0, W_3 = \frac{1}{2}Q_3 U_0 = \frac{1}{2}W_0;$$

(4) 保持电源与电容器两极相连, 则 $U_4 = U_0$

$$C_4 = \epsilon_r \frac{\epsilon_0 S_0}{d_0} = 2.5C_0$$

$$E_4 = \frac{U_0}{d_0} = E_0, Q_4 = C_4 U_0 = 2.5Q_0, W_4 = \frac{1}{2}Q_4 U_0 = 2.5W_0$$

6-10 一平行平板电容器被一电源充电后, 将电源断开, 然后将一厚度为两极板间距一半的金属板放在两极板之间。试问下述各量如何变化? (1) 电容; (2) 极板上电荷; (3) 极板间的电势差; (4) 极板间的电场强度; (5) 电场的能量。

答:

$$(1) C_1 = \frac{\epsilon_0 S}{d - d/2} = 2C_0; (2) Q_1 = Q_0; (3) U_1 = \frac{Q_1}{C_1} = \frac{1}{2}U_0$$

$$(4) E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = E_0; (5) W_1 = \frac{1}{2}Q_0 U_1 = \frac{1}{2}W_0.$$

6-11 如果圆柱形电容器的内半径增大, 使两柱面之间的距离减为原来的一半, 此电容器的电容是否增大为原来的两倍?

答: 不是。根据圆柱形电容器的电容公式

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0\epsilon_r l}{\ln(R_2/R_1)}$$

取 d 为两柱面之间的距离, 则 $R_2 = R_1 + d$

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0\epsilon_r l}{\ln \frac{R_2 + d}{R_1}}$$

只有当 $d \ll R_1$ 时, 有

$$\ln \frac{R_2}{R_1} = \ln \frac{R_1 + d}{R_1} \approx \frac{d}{R_1}$$

于是有

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0\epsilon_r l}{d}$$

这时, 随着电容器内半径的增大, 当两柱面之间的距离减小为原来的一半时, 此电容器的电容将增大为原来的两倍。

6-12 假使有一薄金属板放在平行平板电容器的两极板中间, 金属板的厚度较之两极板之间的距离小很多, 可略去不计。试问金属板放入电容器之后, 电容有无变化? 如金属板不放在电容器两极板中间, 情况又如何?

答: 设 δ 为放入平行平板电容器的两极板中间金属板的厚度, 由 $C_1 = \epsilon_0 S / (d - \delta)$ 可知, 若 δ 忽略不计, $C_1 = C_0$, 电容无变化; 又由电容计算公式知, 放入金属板后的平行平板电容器的电容与金属板放置的位置无关, 故金属板放在电容器两极板中间与否结果不变。

6-13 电介质的极化现象和导体的静电感应现象有些什么区别?

答: 从微观看, 金属中有大量的自由电子, 自由电子在电场力的作用下可以在导体内移动任意大的距离, 电子的移动可以使导体中的电荷重新分布, 于是, 在导体表面出现感应电荷。感应电荷的电场与外加电场的方向相反, 故随着感应电荷的堆积, 导体中的合场强逐渐减小, 达到静电平衡时, 感应电荷的电场与外加电场相互抵消, 导体中的合场强为零。导体中电子的移动停止。

至于电介质, 分子中的电子与原子核结合得相当紧密, 电子处于束缚状态。将电介质引入静电场时, 电子与原子核之间只能做一微观的相对位移, 或者它们之间的连线稍微改变方向 (有时两种情况都发生), 结果, 出现束缚电荷。束缚电荷的电场只是部分地抵消外加电场。达到稳定时, 电介质内部的电场强度不为零。

6-14 怎样从物理概念上来说明自由电荷与极化电荷的区别?

答: 自由电荷可以在导体内移动宏观上任意大的距离。由此, 可以使导体中的电荷重新分布。极化电荷 (束缚电荷) 只能在原子 (或分子) 的范围内做微观的相对位移, 并且不影响导体中的电荷分布。

6-15 从第 6-2 节已知, 在电场强度为 E 的电场中, 电偶极矩为 p 的电偶极子所受的力矩为 $M = p \times E$ 。由上式可知, 有极分子的电偶极矩 p 的方向与 E 的方向相反时, 有极分子所受的力矩为零。为什么有极分子 p 的方向与电场强度 E 的方向相反的状态, 不能当作有极分子的稳定平衡状态呢?

答: 当有极分子的电偶极矩 p 的方向与 E 的方向相反时, 虽然有极分子所受的力矩为零。但是, 此时分子的电偶极子处于非稳定平衡, 只要外界稍有扰动, 使分子电偶极子稍微偏离该位置, 分子电偶极子就会在力矩的作用下转动, 直到有极分子的电偶极矩 p 的方向与 E 的方向相一致。故有极分子 p 的方向与电场强度 E 的方向处于相反的状态, 不能当作有极分子的稳定平衡状态。

6-16 电势的定义是单位电荷具有的电势能。为什么带电电容器的能量是 $QU/2$, 不是 QU 呢?

答: 电容器带电的过程也是外力克服静电力做功的过程, 若某时刻电容器两极间的电压为 U , 此时, 若继续使电容器带电 dq , 外力克服静电力做的功为 $dW = Udq$, 为方便计算, 可写作

$$dW = Udq = \frac{1}{C} qdq$$

当最终电容器带电为 Q 时, 外力克服静电力作的总功为

$$W = \frac{1}{C} \int_0^Q q dq = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2} QU$$

由功能关系知, 该功即为电容器储存的电能。

6-17 (1) 一个带电的金属球壳里充满了均匀电介质, 外面是真空, 此球壳的电势是否等于 $\frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r R}$? 为什么? (2) 若球壳内为真空, 球壳外是无限大均匀电介质, 这时球壳的电势为多少? (Q 为球壳上的自由电荷, R 为球壳半径, ϵ_r 为介质的相对电容率。)

答: (1) 在静电平衡条件下, 带电金属球为等势体, 球壳内的场强为零; 球壳外的场强根据高斯定理得

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{e}_r$$

球壳的电势

$$V = \int_R^{\infty} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R}$$

(2) 球壳内

$$\mathbf{E} = 0$$

球壳外

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r r^2} \mathbf{e}_r$$

球壳的电势

$$V = \int_R^{\infty} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r R}$$

6-18 把两个电容各为 C_1 和 C_2 的电容器串联后进行充电, 然后断开电源, 把它们改成并联。问它们的电能是增加还是减少? 为什么?

答: 两个电容器串联后, 如问题 6-17 图 (a) 所示, 设每个极板的静电量为 Q , 则静电能为

$$W = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2} \frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2} Q^2 \quad (1)$$

断开电源后, 把两个电容器改成并联, 如问题 6-17 图 (b) 所示并联后, 电容器组的总电容

$$C' = C_1 + C_2$$

总电量

$$Q' = 2Q$$

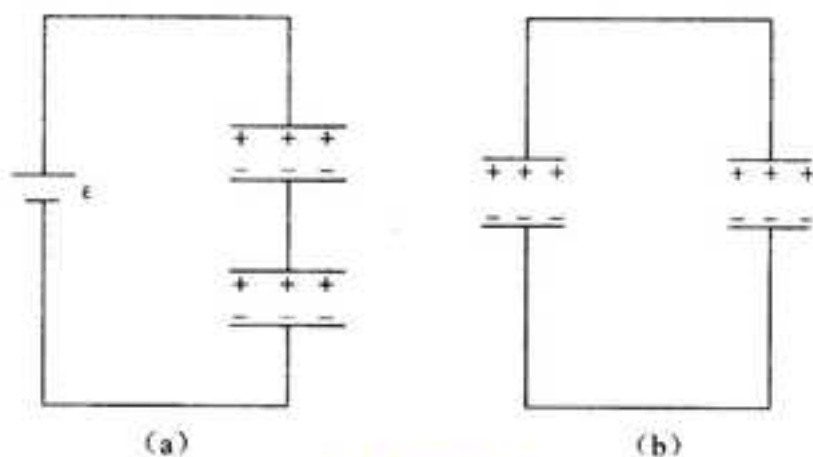
静电能

$$W' = \frac{Q'^2}{2C'} = \frac{2Q^2}{C_1 + C_2} \quad (2)$$

比较①、②可知, 当 $C_1 = C_2$ 时, $W' = W = \frac{Q^2}{C_1}$

静电能不变。因为电容相同, 充电后电压相等, 并联时无电荷流动, 故无能量消耗。

当 $C_2 \neq C_1$ 时, $W' < W$, 静电能减少。因为电容不同, 充电后, 电压不等, 电容小的电压高; 并联后有电荷流动, 一部分静电能转变成焦耳热。



问题 6-17 图

二、习题

6-1 将一个带正电的带电体 A 从远处移到一个不带电的导体 B 附近，则导体 B 的电势将 ()

- A. 升高
- B. 降低
- C. 不会发生变化
- D. 无法确定

【答案】A

【解析】不带电的导体 B 相对无穷远处为零电势。由于带正电的带电体 A 移到不带电的导体 B 附近时，在导体 B 的近端感应负电荷；在远端感应正电荷，不带电导体的电势将高于无穷远处。

6-2 将一带负电的物体 M 靠近一不带电的导体 N，在 N 的左端感应出正电荷，右端感应出负电荷，若将导体 N 的左端接地（如图 6-1 所示），则 ()

- A. N 上的负电荷入地
- B. N 上的正电荷入地
- C. N 上的所有电荷入地
- D. N 上所有的感应电荷入地

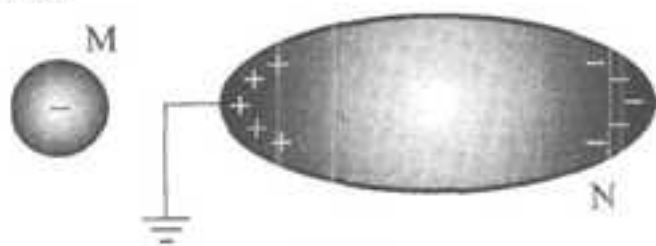


图 6-1

【答案】A

【解析】导体 N 接地表明导体 N 为零电势，即与无穷远处等电势，这与导体 N 在哪一端接地无关。

6-3 如图 6-2 所示将一个电量为 q 的点电荷放在一个半径为 R 的不带电的导体球附近，点电荷距导体球球心为 d 。设无穷远处为零电势，则在导体球球心 O 点有 ()

- (A) $E = 0, V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 d}$
- (B) $E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 d^2}, V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 d}$
- (C) $E = 0, V = 0$
- (D) $E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 d^2}, V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R}$

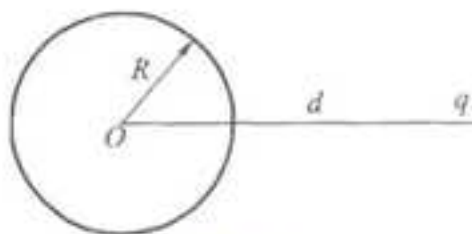


图 6-2

【答案】A

【解析】达到静电平衡时导体内处处各点电场强度为零。点电荷 q 在导体球表面感应等量异号的感应电荷 $\pm q'$ ，导体球表面的感应电荷 $\pm q'$ 在球心 O 点激发的电势为零， O 点的电势等于点电荷 q 在该处激发的电势。

6-4 根据电介质中的高斯定理，在电介质中电位移矢量沿任意一个闭合曲面的积分等于这个曲面所包围自由电荷的代数和。下列推论正确的是（ ）

- A. 若电位移矢量沿任意一个闭合曲面的积分等于零，曲面内一定没有自由电荷
- B. 若电位移矢量沿任意一个闭合曲面的积分等于零，曲面内电荷的代数和一定等于零
- C. 若电位移矢量沿任意一个闭合曲面的积分不等于零，曲面内一定有极化电荷
- D. 介质中的高斯定律表明电位移矢量仅仅与自由电荷的分布有关
- E. 介质中的电位移矢量与自由电荷和极化电荷的分布有关

【答案】E

【解析】电位移矢量沿任意一个闭合曲面的通量积分等于零，表明曲面内自由电荷的代数和等于零；由于电介质会改变自由电荷的空间分布，介质中的电位移矢量与自由电荷与位移电荷的分布有关。

6-5 下列概念正确的是（ ）

- A. 电介质充满整个电场并且自由电荷的分布不发生变化时，电介质中的电场强度一定等于没有电介质时该点电场强度的 $1/\epsilon_r$ 倍
- B. 电介质中的电场强度一定等于没有介质时该点电场强度的 $1/\epsilon_r$ 倍
- C. 在电介质充满整个电场时，电介质中的电场强度一定等于没有电介质时该点电场强度的 $1/\epsilon_r$ 倍
- D. 电介质中的电场强度一定等于没有介质时该点电场强度的 ϵ_r 倍

【答案】A

【解析】电介质中的电场由自由电荷激发的电场与极化电荷激发的电场迭加而成，由于极化电荷可能会改变电场中导体表面自由电荷的分布，由电介质中的高斯定理，仅当电介质充满整个电场并且自由电荷的分布不发生变化时，在电介质中任意高斯面 S 有

$$\oint_S (1 + \chi) \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \oint_S \mathbf{E}_0 \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_i q_i$$

即 $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 / \epsilon_r$ 。

6-6 不带电的导体球 A 含有两个球形空腔，两空腔中心分别有一点电荷 q_b 、 q_c ，导体球外距导体球较远的 r 处还有一个点电荷 q_d （如图 6-3 所示），试求点电荷 q_b 、 q_c 、 q_d 各受多大的电场力。

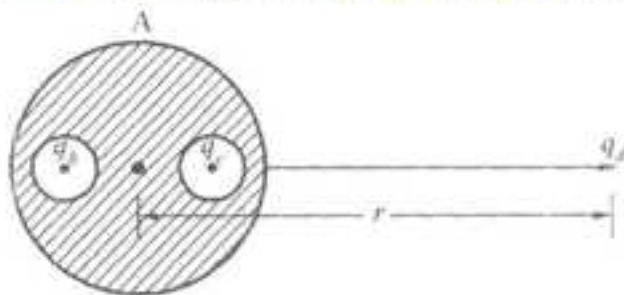


图 6-3

解：根据导体静电平衡时电荷分布的规律，空腔内点电荷的电场线终止于空腔内表面感应电荷；导体球 A 外表面的感应电荷近似均匀分布，因而近似可看作均匀带电球对点电荷 q_d 的作用力。

$$F_d = \frac{(q_b + q_c)q_d}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

点电荷 q_a 与导体球 A 外表面感应电荷在球形空腔内激发的电场为零, 点电荷 q_b 、 q_c 处于球形空腔的中心, 空腔内表面感应电荷均匀分布, 点电荷 q_b 、 q_c 受到的作用力为零。

6-7 一真空二极管, 其主要构件是一个半径 $R_1 = 5.0 \times 10^{-4} \text{m}$ 的圆柱形阴极和一个套在阴极外, 半径 $R_2 = 4.5 \times 10^{-3} \text{m}$ 的同轴圆筒形阳极。阳极电势比阴极电势高 300V, 阴极与阳极的长度均为 $L = 2.5 \times 10^{-2} \text{m}$ 。假设电子从阴极射出时的速度为零, 求: (1) 该电子到达阳极时所具有的动能和速率; (2) 电子刚从阳极射出时所受的力。

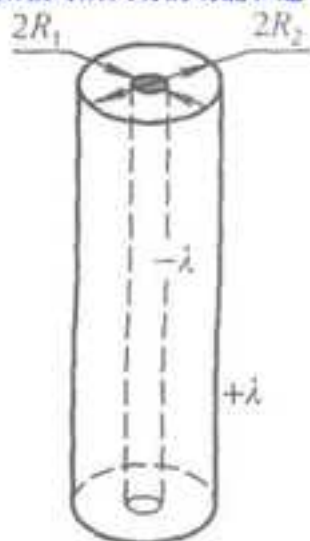


图 6-4

解: (1) 电子到达阳极时, 势能的减少量为

$$\Delta E_{ep} = -eV = -4.8 \times 10^{-17} \text{J}$$

由于电子的初始速度为零, 故

$$E_{ek} = \Delta E_{ek} = -\Delta E_{ep} = 4.8 \times 10^{-17} \text{J}$$

因此电子到达阳极的速率为

$$v = \sqrt{\frac{2E_{ek}}{m}} = \sqrt{\frac{2eV}{m}} = 1.03 \times 10^7 \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

(2) 两极间的电场强度为

$$E = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} e_r$$

两极间的电势差

$$V = \int_{R_1}^{R_2} E \cdot dr = \int_{R_1}^{R_2} -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} dr = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

负号表示阳极电势高于阴极电势。阴极表面电场强度

$$E = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R_1} e_r = \frac{V}{R_1 \ln \frac{R_2}{R_1}} e_r$$

电子在阴极表面受力

$$F = -eE = 4.37 \times 10^{-18} e_r \text{N}$$

这个力尽管很小, 但作用在质量为 $9.11 \times 10^{-31} \text{kg}$ 的电子上, 电子获得的加速度可达重力加速度的 5×10^{18} 倍。

6-8 一导体球半径为 R_1 , 外罩一半径为 R_2 的同心薄导体球壳, 外球壳所带总电荷为 Q , 而内球的电势为 V_0 。求此系统的电势和电场的分布。

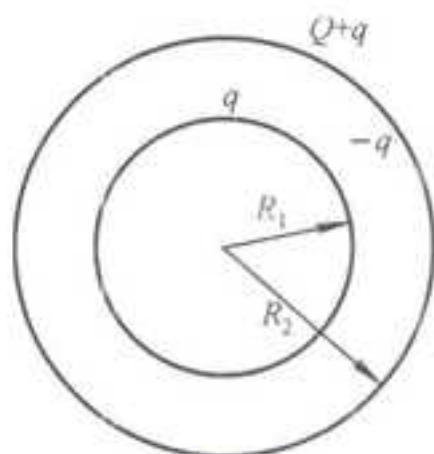


图 6-5

解：根据静电平衡时电荷的分布，可知电场分布呈球对称，取同心球面为高斯面，由高斯定理 $\oint E \cdot dS = E(r) \cdot 4\pi r^2 = \sum q/\epsilon_0$ ，根据不同半径的高斯面内的电荷分布，解得各区域内的电场分布为

$$r < R_1 \text{ 时, } E_1(r) = 0$$

$$R_1 < r < R_2 \text{ 时, } E_2(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

$$r > R_2 \text{ 时, } E_3(r) = \frac{Q+q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

由电场强度与电势的积分关系，可得各相应区域内的电势分布。

$r < R_1$ 时，

$$\begin{aligned} V_1 &= \int_r^\infty E \cdot dl = \int_r^{R_1} E_1 \cdot dl + \int_{R_1}^{R_2} E_2 \cdot dl + \int_{R_2}^\infty E_3 \cdot dl \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_1} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_2} \end{aligned}$$

$R_1 < r < R_2$ 时，

$$\begin{aligned} V_2 &= \int_r^\infty E \cdot dl = \int_r^{R_2} E_2 \cdot dl + \int_{R_2}^\infty E_3 \cdot dl \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_2} \end{aligned}$$

$r > R_2$ 时，

$$V_3 = \int_r^\infty E_3 \cdot dl = \frac{Q+q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

也可以从球面电势的叠加求电势的分布。在导体球内 ($r < R_1$)

$$V_1 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_1} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_2}$$

在导体球和球壳之间 ($R_1 < r < R_2$)

$$V_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_2}$$

在球壳外 ($r > R_2$)

$$V_3 = \frac{Q+q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

由题意

$$V_1 = V_0 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_2} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_1}$$

得

$$q = 4\pi\epsilon_0 R_1 V_0 - \frac{R_1}{R_2} Q$$

代入电场、电势的分布得

$r < R_1$ 时,

$$E_1 = 0; \quad V_1 = V_0$$

$R_1 < r < R_2$ 时,

$$E_2 = \frac{R_1 V_0}{r^2} - \frac{R_1 Q}{4\pi\epsilon_0 R_2 r^2}; \quad V_2 = \frac{R_1 V_0}{r} + \frac{(r - R_1) Q}{4\pi\epsilon_0 R_2 r}$$

$r > R_2$ 时,

$$E_3 = \frac{R_1 V_0}{r^2} + \frac{(R_2 - R_1) Q}{4\pi\epsilon_0 R_2 r^2}; \quad V_3 = \frac{R_1 V_0}{r} + \frac{(R_2 - R_1) Q}{4\pi\epsilon_0 R_2 r}$$

6-9 如图 6-6 所示, 一个半径为 a 、电荷为 Q 的导体球, 现将一半径为 b 、均匀带电荷为 q 的圆环放在球旁, 圆环的轴线通过球心, 环心到球心的距离为 r , 试求导体球心的电势。

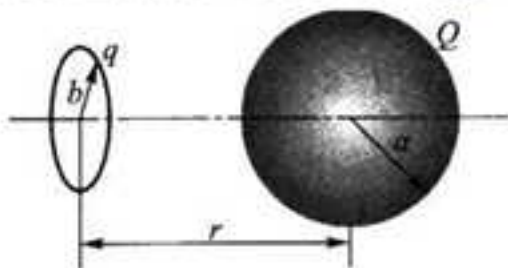


图 6-6

解: 在导体球表面取电荷元 $dq = \sigma ds$, 导体球表面感应电荷在球心一点产生的电势为

$$V_a = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 a} \int_S \sigma dS$$

尽管由于静电感应, 导体球表面的电荷分布不均匀, 但静电感应的净电荷为零。

导体表面净电荷依然为 Q , $V_a = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a}$ 。

由电势的叠加, 球心的电势等于圆环和导体球激发电势之和, 即

$$V = V_a + V_b = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\sqrt{b^2 + r^2}}$$

6-10 在一半径为 $R_1 = 6.0\text{cm}$ 的金属球 A 外面套有一个同心的金属球壳 B。已知球壳 B 的内、外半径分别为 $R_2 = 8.0\text{cm}$, $R_3 = 10.0\text{cm}$ 。设球 A 带有总电荷 $Q_A = 3.0 \times 10^{-8}\text{C}$, 球壳 B 带有总电荷 $Q_B = 2.0 \times 10^{-8}\text{C}$ 。(1) 求球壳 B 内、外表面上所带的电荷以及球 A 和球壳 B 的电势;(2) 将球壳 B 接地然后断开, 再把金属球 A 接地, 求金属球 A 和球壳 B 内、外表面上所带的电荷以及球 A 和球壳 B 的电势。

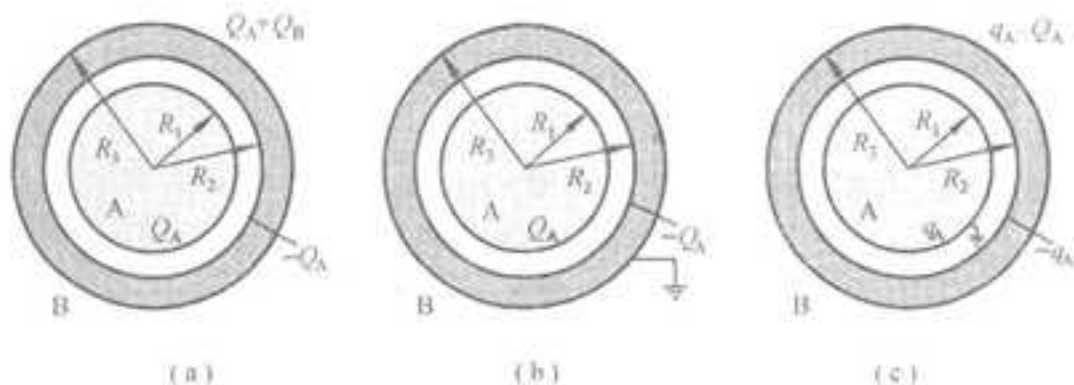


图 6-7

解: (1) 根据静电感应和静电平衡时导体表面电荷分布的规律, 电荷 Q_A 均匀分布在球 A 表面, 球 A 的外表面带电 $3.0 \times 10^{-8} \text{C}$, 球壳 B 内表面带电 $-3.0 \times 10^{-8} \text{C}$, 外表面带电 $5.0 \times 10^{-8} \text{C}$. 由电势的叠加, 球 A 和球壳 B 的电势分别为

$$V_A = \frac{Q_A}{4\pi\epsilon_0 R_1} + \frac{-Q_A}{4\pi\epsilon_0 R_2} + \frac{Q_A + Q_B}{4\pi\epsilon_0 R_3} = 5.6 \times 10^3 \text{ V}$$

$$V_B = \frac{Q_A + Q_B}{4\pi\epsilon_0 R_3} = 4.5 \times 10^3 \text{ V}$$

(2) 将球壳 B 接地后断开, 再把球 A 接地, 设球 A 带电 q_A , 球 A 和球壳 B 的电势为

$$V_A = \frac{q_A}{4\pi\epsilon_0 R_1} + \frac{-q_A}{4\pi\epsilon_0 R_2} + \frac{-Q_A + q_A}{4\pi\epsilon_0 R_3} = 0$$

$$V_B = \frac{-Q_A + q_A}{4\pi\epsilon_0 R_3}$$

解得

$$q_A = \frac{R_1 R_2 Q_A}{R_1 R_2 + R_2 R_3 - R_1 R_3} = 2.12 \times 10^{-8} \text{ C}$$

即球 A 外表面带电 $2.12 \times 10^{-8} \text{C}$, 球壳 B 内表面带电 $-2.12 \times 10^{-8} \text{C}$, 外表面带电 $-0.9 \times 10^{-8} \text{C}$. 另外球 A 和球壳 B 的电势分别为

$$V_A = 0$$

$$V_B = -7.92 \times 10^3 \text{ V}$$

导体的接地使各导体的电势分布发生变化, 打破了原有的静电平衡, 导体表面的电荷将重新分布, 以建立新的静电平衡.

6-11 同轴传输线由长直圆柱形导线和同轴的导体圆筒构成, 导线的半径为 R_1 , 电势为 V_1 , 圆筒的半径为 R_2 , 电势为 V_2 , 如图 6-8 所示. 试求它们之间距离轴线为 r 处 ($R_1 < r < R_2$) 的电场强度.

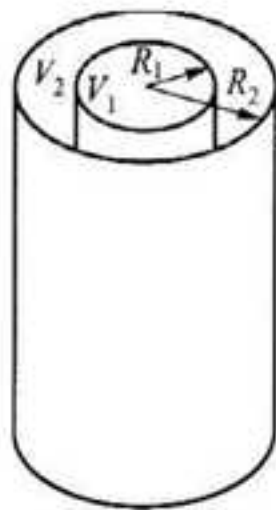


图 6-8

解：假设长直圆柱形导线单位长度带电荷 λ ，由分析知电场分布轴对称，电场强度沿径向，作同轴圆柱面为高斯面 ($R_1 < r < R_2$)，由高斯定理

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 2\pi r L E = \frac{1}{\epsilon_0} \lambda L$$

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$$

由电势差的定义

$$V_1 - V_2 = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} dr = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

解得

$$\lambda = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln(R_2/R_1)} (V_1 - V_2)$$

代入得长直圆柱形导线和导体圆筒间的电场强度

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} = \frac{V_1 - V_2}{r \ln(R_2/R_1)}$$

6-12 一根半径为 a 的长直导线，其外面套有内半径为 b 的同轴导体圆筒，导线与导体圆筒间相互绝缘，已知导线的电势为 V ，圆筒接地电势为零，试求导线与圆筒间的电场强度以及圆筒上的电荷线密度。

解：假设长直圆柱形导线单位长度带电荷 λ ，由分析知电场分布轴对称，电场强度沿径向，作同轴圆柱面为高斯面 ($a < r < b$)，由高斯定理

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 2\pi r L E = \frac{1}{\epsilon_0} \lambda L$$

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$$

由电势差的定义

$$V = \int_a^b \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} dr = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{b}{a}$$

解得

$$\lambda = \frac{2\pi\epsilon_0 V}{\ln(b/a)}$$

代入得长直圆柱形导线和导体圆筒间的电场强度

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} = \frac{V}{r \ln(b/a)}$$

6-13 两块分别带电荷为 Q_1 、 Q_2 的导体平板平行相对放置 (如图 6-9 所示), 假设导体平板面积为 S , 两块导体平板间距为 d , 并且 $\sqrt{S} \gg d$, 试证明:

- (1) 相向的两面, 电荷面密度大小相等符号相反;
- (2) 相背的两面, 电荷面密度大小相等符号相同.

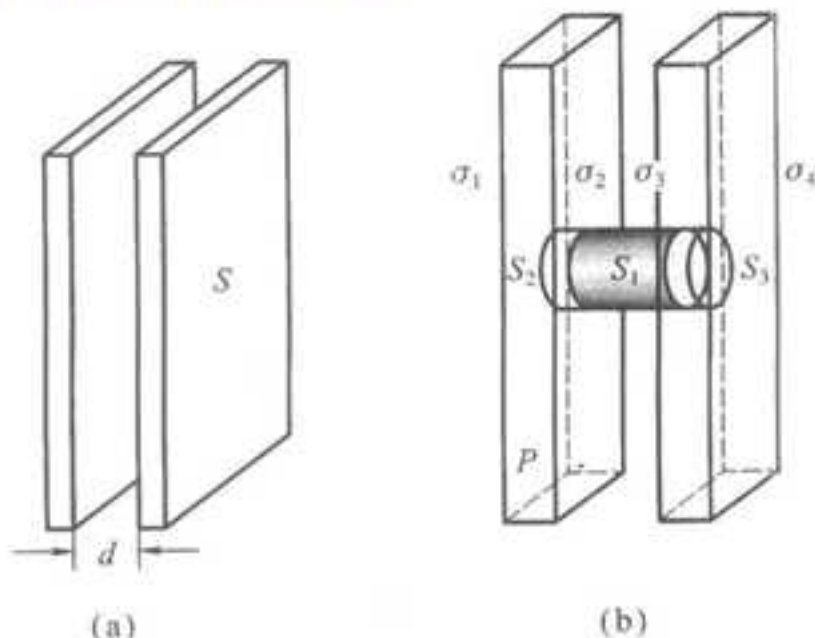


图 6-9

证明: (1) 设两块导体平板表面的电荷面密度分别为 σ_1 、 σ_2 、 σ_3 、 σ_4 , 取如图 6-9 (b) 所示的圆柱面为高斯面, 高斯面由侧面 S_1 和两个端面 S_2 、 S_3 构成, 由分析可知

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \sum q / \epsilon_0 = 0$$

$$\sum q = \sigma_2 \Delta S + \sigma_3 \Delta S = 0, \sigma_2 + \sigma_3 = 0$$

相向的两面电荷面密度大小相等符号相反.

(2) 由电场的叠加原理, 取水平向右为参考正方向, 导体内 P 点的电场强度为

$$\frac{\sigma_1}{2\epsilon_0} - \frac{\sigma_2}{2\epsilon_0} - \frac{\sigma_3}{2\epsilon_0} - \frac{\sigma_4}{2\epsilon_0} = 0, \sigma_1 - \sigma_4 = 0$$

相背的两面电荷面密度大小相等符号相同.

6-14 将带电量为 Q 的导体板 A 从远处移至不带电的导体板 B 附近, 如图 6-10 (a) 所示, 两导体板几何形状完全相同, 面积均为 S , 移近后两导体板距离为 d ($d \ll \sqrt{S}$).

- (1) 忽略边缘效应求两导体板间的电势差;
- (2) 若将 B 接地, 结果又将如何?

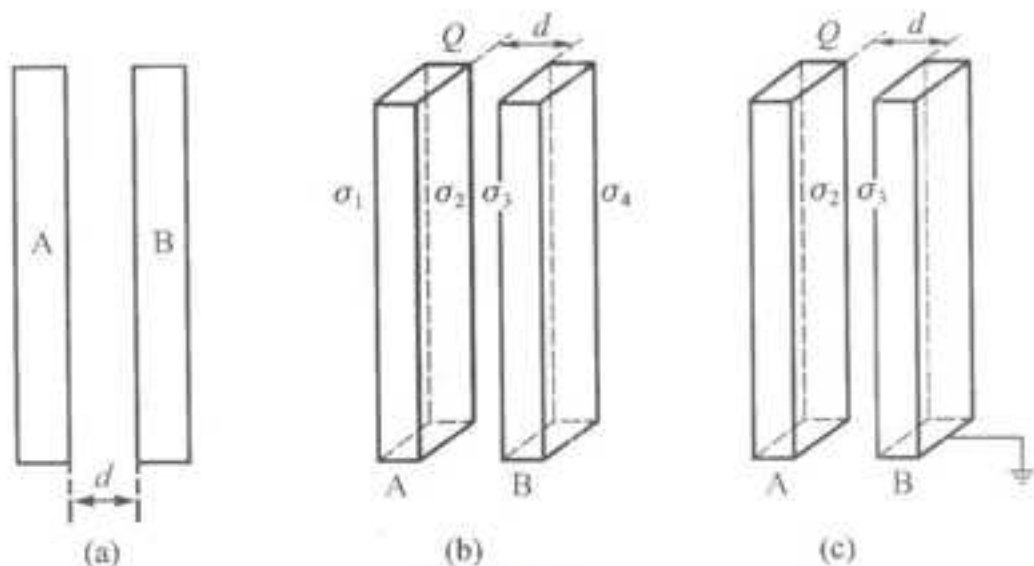


图 6-10

解: (1) 如图 6-10 (b) 所示, 依照题意和导体板达到静电平衡时的电荷分布规律可得

$$(\sigma_1 + \sigma_2)S = Q$$

$$(\sigma_3 + \sigma_4)S = 0$$

$$\sigma_1 - \sigma_4 = 0$$

$$\sigma_2 + \sigma_3 = 0$$

解得

$$\sigma_1 = \sigma_2 = -\sigma_3 = \sigma_4 = \frac{Q}{2S};$$

两导体板间电场强度为 $E = \frac{Q}{2\epsilon_0 S}$; 方向为 A 指向 B.

两导体板间的电势差为

$$U_{AB} = \frac{Qd}{2\epsilon_0 S}$$

(2) 如图 6-10 (c) 所示, 导体板 B 接地后电势为零.

$$\sigma_1 = \sigma_4 = 0$$

$$\sigma_2 = -\sigma_3 = \frac{Q}{S}$$

两导体板间电场强度为 $E' = \frac{Q}{\epsilon_0 S}$; 方向为 A 指向 B.

两导体板间的电势差为

$$U'_{AB} = \frac{Qd}{\epsilon_0 S}$$

6-15 如图 6-11 所示球形金属腔带电量为 $Q > 0$, 内半径为 a , 外半径为 b , 腔内距球心 O 为 r 处有一点电荷 q , 求球心的电势.

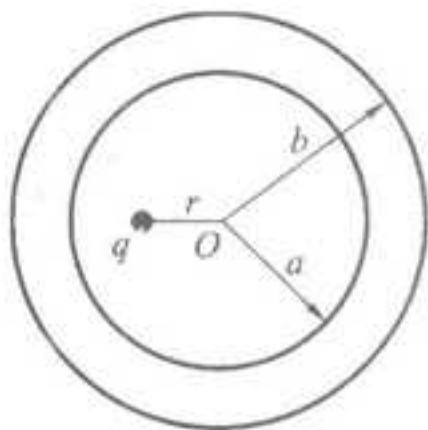


图 6-11

分析导体球达到静电平衡时，内表面感应电荷 $-q$ ，外表面感应电荷 q ；由电势的叠加可以求得球心的电势。

解：导体球内表面感应电荷 $-q$ ，外表面感应电荷 q ；内表面感应电荷不均匀分布，外表面感应电荷均匀分布。球心 O 点的电势由点电荷 q 、导体表面的感应电荷共同决定。

在带电面上任意取一电荷元，电荷元在球心产生的电势

$$dV = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 R}$$

由于 R 为常量，因而无论球面电荷如何分布，半径为 R 的带电球面在球心产生的电势为

$$V = \iint_s \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R}$$

故

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a} + \frac{q+Q}{4\pi\epsilon_0 b}$$

6-16 在真空中，将半径为 R 的金属球接地，与球心 O 相距为 r ($r > R$)处放置一点电荷 q ，不计接地导线上电荷的影响。求金属球表面上的感应电荷总量。

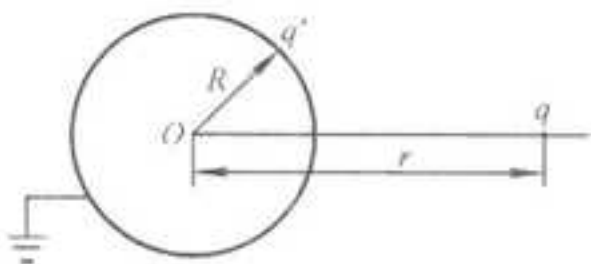


图 6-12

解：金属球接地，其球心的电势

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} + \int_s \frac{dq'}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R} \int_s dq' = 0$$

感应电荷总量

$$q' = \int dq' = -\frac{R}{r}q$$

6-17 帕塞尔教授在他的《电磁学》中写道：“如果从地球上移去一滴水中所有的电子，则地球的电势将会升高几百万伏。”我们不妨将地球视为导体球，取无穷远处为零电势，请证明他这句话。

证：假设一滴水的体积为 0.1cm^3 ，依据上述分析，移去一滴水中所有电子后的电荷

$$Q = \frac{10m}{M} N_A e = 5.36 \times 10^3 \text{ C}$$

地球电势

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} = 7.6 \times 10^6 \text{ V}$$

帕嘉尔教授的命题是正确的。

6-18 地球和电离层可当作球形电容器，它们之间相距约为 100km ，试估算地球—电离层系统的电容。设地球与电离层之间为真空。

解：由于地球半径 $R_1 = 6.37 \times 10^6 \text{ m}$ ；电离层半径 $R_2 = 1.00 \times 10^5 \text{ m} + R_1 = 6.47 \times 10^6 \text{ m}$ ，根据球形电容器的电容公式，可得

$$C = 4\pi\epsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} = 4.58 \times 10^{-2} \text{ F}$$

6-19 两线输电线，其导线半径为 3.26mm ，两线中心相距 0.50m ，导线位于地面上空很高处，因而大地影响可以忽略。求输电线单位长度的电容。

解：两输电线的电势差

$$U = \frac{\lambda}{\pi\epsilon_0} \ln \frac{d-R}{R}$$

因此，输电线单位长度的电容

$$C = \frac{\lambda}{U} = \pi\epsilon_0 / \ln \frac{d-R}{R} = \pi\epsilon_0 / \ln \frac{d}{R}$$

代入数据 $C = 5.52 \times 10^{-12} \text{ F}$

6-20 电容式计算机键盘的每一个键下面连接一小块金属片，金属片与底板上的另一块金属片间保持一定空气间隙，构成一小电容器（如图 6-13），当按下按键时电容发生变化，通过与之相连的电子线路向计算机发出该键相应的代码信号。假设金属片面积为 50.0mm^2 ，两金属片之间的距离是 0.600mm ，如果电路能检测出的电容变化量是 0.250pF ，试问按键需要按下多大的距离才能给出必要的信号？

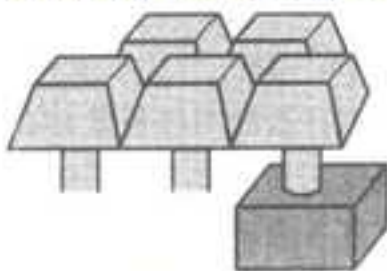


图 6-13

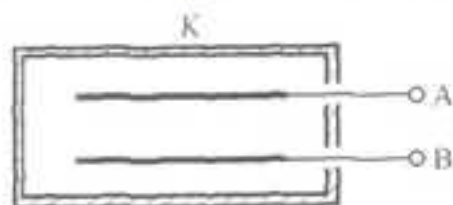
解：按下按键时电容的变化量为

$$\Delta C = \epsilon_0 S \left(\frac{1}{d} - \frac{1}{d_0} \right)$$

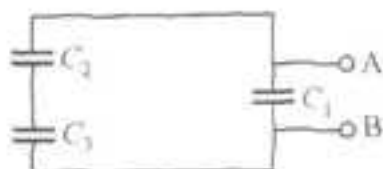
按键按下的最小距离为

$$\Delta d_{\min} = d_0 - d = \frac{\Delta C d_0^2}{d_0 \Delta C + \epsilon_0 S} = 0.152 \text{ mm}$$

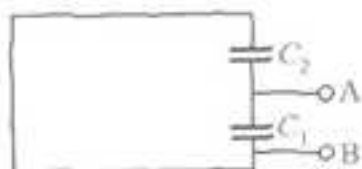
6-21 有两块相距为 0.50 的薄金属板 A、B 构成的空气平板电容器被屏蔽在一金属盒 K 内，金属盒上、下两壁与 A、B 分别相距 0.25 mm，金属板面积为 30 mm×40 mm。求 (1) 被屏蔽后电容器的电容变为原来的几倍；(2) 若电容器的一个引脚不慎与金属屏蔽盒相碰，问此时的电容又为原来的几倍？



(a)



(b)



(c)

图 6-14

解：(1) 由等效电路图 6-14 可知

$$C = C_{23} + C_1 = \frac{C_2 \cdot C_3}{C_2 + C_3} + C_1$$

由于电容器可以视作平板电容器，且 $d_1 = 2d_2 = 2d_3$ ，故 $C_2 = C_3 = 2C_1$ ，因此 A、B 间的总电容

$$C = 2C_1$$

(2) 若电容器的一个引脚不慎与金属屏蔽盒相碰，相当于 C_2 (或者 C_3) 极板短接，其电容为零，则总电容

$$C = 3C_1$$

6-22 如图 6-15 所示，在 A 点和 B 点之间有 5 个电容器。(1) 求 A、B 两点之间的等效电容；(2) 若 A、B 之间的电势差为 12V，求 U_{AC} 、 U_{CD} 和 U_{DB} 。

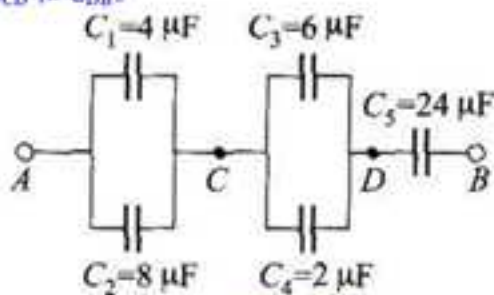


图 6-15

解：(1) 由电容器的串、并联，有

$$C_{AC} = C_1 + C_2 = 12 \mu\text{F}$$

$$C_{CD} = C_3 + C_4 = 8 \mu\text{F}$$

求得等效电容

$$C_{AB} = 4 \mu\text{F}$$

(2) 由于 $Q_{AC} = Q_{CD} = Q_{DB} = Q_{AB}$, 得

$$U_{AC} = \frac{C_{AB}}{C_{AC}} U_{AB} = 4 \text{ V}$$

$$U_{CD} = \frac{C_{AB}}{C_{CD}} U_{AB} = 6 \text{ V}$$

$$U_{DB} = \frac{C_{AB}}{C_{CD}} U_{AB} = 2 \text{ V}$$

6-23 盖革-米勒管可用来测量电离辐射.该管的基本结构如图 6-16 所示,一半径为 R_1 的长直导线作为一个电极,半径为 R_2 的同轴圆柱筒为另一个电极.它们之间充以相对电容率 $\epsilon_r > 1$ 的气体.当电离粒子通过气体时,能使其电离.若两极间有电势差时,极间有电流,从而可测出电离粒子的数量.如以 E_1 表示半径为 R_1 的长直导线附近的电场强度.(1) 求两极间电势差的关系式;(2) 若 $E_1 = 2.0 \times 10^6 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$, $R_1 = 0.30 \text{ mm}$, $R_2 = 20.0 \text{ mm}$, 两极间的电势差为多少?

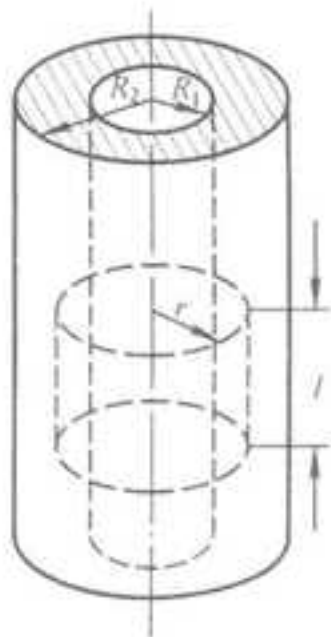


图 6-16

解: (1) 两极间的电场可近似认为是无限长同轴带电圆柱体间的电场, 由于电荷在圆柱面上均匀分布, 电场

分布为轴对称. 利用高斯定理可得 $E \cdot 2\pi rL = \frac{1}{\epsilon_0} \lambda L$, 则两极间的电场强度

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$$

导线表面 ($r=R_1$) 的电场强度

$$E_1 = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R_1}$$

两极间的电势差

$$U = \int_{R_1}^{R_2} E \cdot dr = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} dr = R_1 E_1 \ln \frac{R_2}{R_1}$$

(2) 当 $E_1 = 2.0 \times 10^6 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$, $R_1 = 0.30 \text{ mm}$, $R_2 = 20.0 \text{ mm}$ 时,
 $U = 2.52 \times 10^3 \text{ V}$

6-24 一片二氧化钛晶片, 其面积为 1.0 cm^2 , 厚度为 0.10 mm . 把平行平板电容器的两极板紧贴在晶片两侧. (1) 求电容器的电容; (2) 当在电容器的两极间加上 12 V 电压时, 极板上的电荷为多少? 此时自由电荷和极化电荷的面密度各为多少? (3) 求电容器内的电场强度.

解: (1) 查表可知二氧化钛的相对电容率 $\epsilon_r = 173$ 故充满此介质的平板电容器的电容,

$$C = \frac{\epsilon_r \epsilon_0 S}{d} = 1.53 \times 10^{-9} \text{ F}$$

(2) 电容器加上 $U=12 \text{ V}$ 的电压时, 极板上的电荷

$$Q = CU = 1.84 \times 10^{-8} \text{ C}$$

极板上自由电荷面密度为

$$\sigma_0 = \frac{Q}{S} = 1.84 \times 10^{-4} \text{ C} \cdot \text{m}^{-2}$$

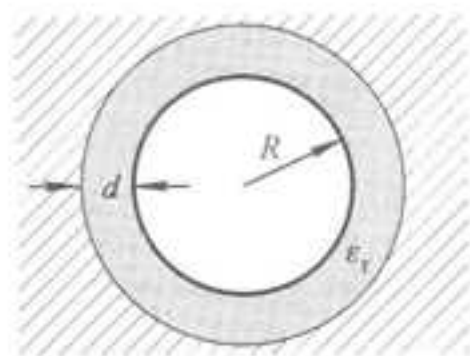
晶片表面极化电荷密度

$$\sigma'_0 = \left(1 - \frac{1}{\epsilon_r}\right) \sigma_0 = 1.83 \times 10^{-4} \text{ C} \cdot \text{m}^{-2}$$

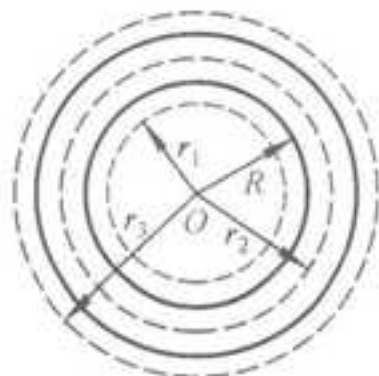
(3) 晶片内的电场强度为

$$E = \frac{U}{d} = 1.2 \times 10^5 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$$

6-25 如图 6-17 所示, 半径 $R=0.10 \text{ m}$ 的导体球带有电荷 $Q = 1.0 \times 10^{-8} \text{ C}$, 导体外有两层均匀介质, 一层介质的 $\epsilon_r = 5.0$, 厚度 $d=0.10 \text{ m}$, 另一层介质为空气, 充满其余空间. 求: (1) 离球心为 $r=5 \text{ cm}$ 、 15 cm 、 25 cm 处的 D 和 E ; (2) 离球心为 $r=5 \text{ cm}$ 、 15 cm 、 25 cm 处的 V ; (3) 极化电荷面密度 σ' .



(a)



(b)

图 6-17

解: (1) 取半径为 r 的同心球面为高斯面, 由高斯定理得

$$\begin{array}{ll}
 r < R & D_1 \cdot 4\pi r^2 = 0 \\
 & D_1 = 0; \quad E_1 = 0 \\
 R < r < R + d & D_2 \cdot 4\pi r^2 = Q \\
 & D_2 = \frac{Q}{4\pi r^2}; \quad E_2 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_1 r^2} \\
 r > R + d & D_3 \cdot 4\pi r^2 = Q \\
 & D_3 = \frac{Q}{4\pi r^2}; \quad E_3 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}
 \end{array}$$

将不同的 r 值代入上述关系式, 可得 $r=5\text{ cm}$ 、 15 cm 和 25 cm 时的电位移和电场强度的大小, 其方向均沿径向朝外。

$r_1 = 5\text{ cm}$ 该点在导体球内, 则

$$D_{r_1} = 0; \quad E_{r_1} = 0$$

$r_2 = 15\text{ cm}$ 该点在介质层内, $\epsilon_r = 5.0$, 则

$$D_{r_2} = \frac{Q}{4\pi r_2^2} = 3.5 \times 10^{-8} \text{ C} \cdot \text{m}^{-2}; \quad E_{r_2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r r_2^2} = 8.0 \times 10^2 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$$

$r_3 = 25\text{ cm}$ 该点在空气层内, 空气中 $\epsilon \approx \epsilon_0$, 则

$$D_{r_3} = \frac{Q}{4\pi r_3^2} = 1.3 \times 10^{-8} \text{ C} \cdot \text{m}^{-2}; \quad E_{r_3} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_3^2} = 1.4 \times 10^3 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$$

(2) 取无穷远处电势为零, 由电势与电场强度的积分关系得

$$r_1 = 25 \text{ cm}, \quad V_1 = \int_{r_1}^{\infty} E_1 \cdot dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} = 360 \text{ V}$$

$$\begin{aligned} r_2 = 15 \text{ cm}, \quad V_2 &= \int_{r_2}^{R+d} E_2 \cdot dr + \int_{R+d}^{\infty} E_3 \cdot dr \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r r_2} - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r (R+d)} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 (R+d)} \\ &= 480 \text{ V} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_3 = 5 \text{ cm}, \quad V_3 &= \int_R^{R+d} E_2 \cdot dr + \int_{R+d}^{\infty} E_3 \cdot dr \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r R} - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r (R+d)} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 (R+d)} \\ &= 540 \text{ V} \end{aligned}$$

(3) 均匀介质的极化电荷分布在介质界面上, 因空气的电容率 $\epsilon = \epsilon_0$ 极化电荷可忽略, 故在介质外表面

$$P_n = (\epsilon_r - 1)\epsilon_0 E_n = \frac{(\epsilon_r - 1)Q}{4\pi\epsilon_r (R+d)^2}$$

$$\sigma = P_n = \frac{(\epsilon_r - 1)Q}{4\pi\epsilon_r (R+d)^2} = 1.6 \times 10^{-8} \text{ C} \cdot \text{m}^{-2}$$

在介质内表面

$$P_n = (\epsilon_r - 1)\epsilon_0 E_n = \frac{(\epsilon_r - 1)Q}{4\pi\epsilon_r R^2}$$

$$\sigma' = -P_n = \frac{(\epsilon_r - 1)Q}{4\pi\epsilon_r R^2} = -6.4 \times 10^{-8} \text{ C} \cdot \text{m}^{-2}$$

介质球壳内、外表面的极化电荷面密度虽然不同, 但是两表面极化电荷的总量还是等量异号。

6-26 人体的某些细胞壁两侧带有等量的异号电荷, 设某细胞壁厚为 $5.2 \times 10^{-8} \text{ m}$, 两表面所带面电荷密度为 $\pm 5.2 \times 10^{-3} \text{ C/m}^2$, 内表面为正电荷, 如果细胞壁物质的相对电容率为 6.0, 求 (1) 细胞壁内的电场强度; (2) 细胞壁两表面间的电势差。

解: (1) 细胞壁内的电场强度 $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0\epsilon_r} = 9.8 \times 10^5 \text{ V/m}$; 方向指向细胞外。

(2) 细胞壁两表面间的电势差 $U = Ed = 5.1 \times 10^{-2} \text{ V}$ 。

6-27 一平板电容器, 充电后极板上电荷面密度为 $\sigma_0 = 4.5 \times 10^{-3} \text{ C} \cdot \text{m}^{-2}$, 现将两极板与电源断开,

然后再把相对电容率为 $\epsilon_r = 2.0$ 的电介质插入两极板之间, 此时电介质中的 D 、 E 和 P 各为多少?

解: 由分析可知, 介质中的电位移矢量的大小

$$D = \frac{Q}{\Delta S} = \sigma_0 = 4.5 \times 10^{-3} \text{ C} \cdot \text{m}^{-2}$$

介质中的电场强度和极化强度的大小分别为

$$E = \frac{D}{\epsilon_0 \epsilon_r} = 2.5 \times 10^8 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$$

$$P = D - \epsilon_0 E = 2.3 \times 10^{-5} \text{ C} \cdot \text{m}^{-2}$$

D 、 P 、 E 方向相同，均由正极板指向负极板（图 6-18 中垂直向下）。

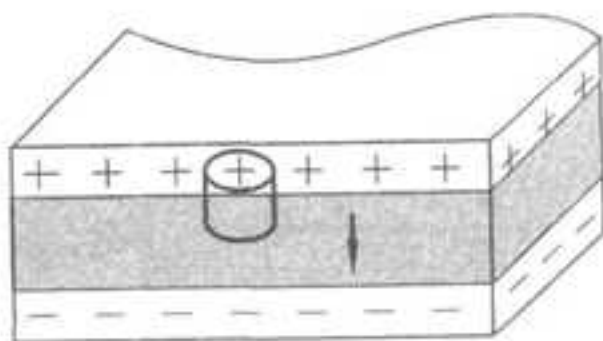


图 6-18

6-28 两块面积为 S 的导体板构成一平板电容器，导体极板间距离为 d 。将平板电容器两极板接到电压为 U 的电源上，接通电源后在导体极板间的一半插入电容率为 ϵ 的电介质，略去边缘效应。（1）试比较 A 、 B 两点的电场强度各为未插入电介质时的多少倍？（2）假如在电容器充满电后，先断开电源，再在两极板间的一半插入电介质，则结果又将如何？

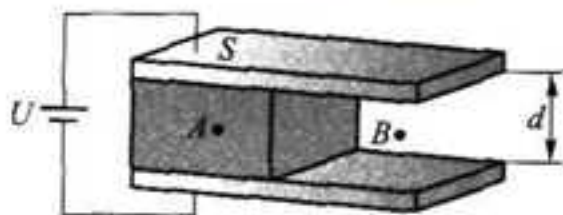


图 6-19

解：（1）插入电介质过程中保持和电源连接，有

$$E_A = E_B = \frac{U}{d} = E_0$$

（2）电容器充满电后，导体板上的电荷

$$Q_0 = CU = \frac{\epsilon_0 SU}{d}$$

断开电源插入电介质后电容器两极板上的总电荷量保持不变，设导体板 A 、 B 区电荷面密度分别为 σ_A 、 σ_B ，由介质中的高斯定理可得

$$D_A = \sigma_A, \quad D_B = \sigma_B$$

介质内（ A 区）、外（ B 区）的电场强度相等，导体板上电荷分布不相等。

$$E'_A = \frac{D_A}{\epsilon} = \frac{\sigma_A}{\epsilon}, \quad E'_B = \frac{D_B}{\epsilon_0} = \frac{\sigma_B}{\epsilon_0}, \quad E'_A = E'_B$$

由于导体板上的电荷在插入电介质前后守恒

$$\sigma_A \frac{S}{2} + \sigma_B \frac{S}{2} = Q_0$$

$$\epsilon E'_A \frac{S}{2} + \epsilon_0 E'_B \frac{S}{2} = \frac{\epsilon_0 SU}{d}$$

解出 A 、 B 区电场强度

$$E'_A = E'_B = \frac{2\varepsilon_0 U}{d(\varepsilon + \varepsilon_0)}$$

比较未插入介质时的电场强度 E_0 ，显然有

$$E'_A = E'_B = \frac{2\varepsilon_0}{\varepsilon + \varepsilon_0} E_0.$$

6-29 有一个空气平板电容器，极板面积为 S ，间距为 d 。现将该电容器接在端电压为 U 的电源上充电，当 (1) 充足电后；(2) 然后平行插入一块面积相同、厚度为 δ ($\delta < d$)、相对电容率为 ε_r 的电介质板；(3) 将上述电介质换为同样大小的导体板，分别求电容器的电容 C ，极板上的电荷 Q 和极板间的电场强度 E 。

解：(1) 空气平板电容器的电容

$$C_0 = \frac{\varepsilon_0 S}{d}$$

充电后，极板上的电荷和极板间的电场强度为

$$Q_0 = \frac{\varepsilon_0 S}{d} U$$

$$E_0 = U/d$$

(2) 插入电介质后，电容器的电容 C_1 为

$$C_1 = Q / \left(\frac{Q}{\varepsilon_0 S} (d - \delta) + \frac{Q}{\varepsilon_0 \varepsilon_r S} \delta \right) = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r S}{\delta + \varepsilon_r (d - \delta)}$$

故有

$$Q_1 = C_1 U = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r S U}{\delta + \varepsilon_r (d - \delta)}$$

介质内电场强度

$$E'_1 = \frac{Q_1}{\varepsilon_0 \varepsilon_r S} = \frac{U}{\delta + \varepsilon_r (d - \delta)}$$

空气中电场强度

$$E_1 = \frac{Q_1}{\varepsilon_0 S} = \frac{\varepsilon_r U}{\delta + \varepsilon_r (d - \delta)}$$

(3) 插入导体达到静电平衡后，导体为等势体，其电容和极板上的电荷分别为

$$C_2 = \frac{\varepsilon_0 S}{d - \delta}$$

$$Q_2 = \frac{\varepsilon_0 S}{d - \delta} U$$

导体中电场强度

$$E'_2 = 0$$

空气中电场强度

$$E_2 = \frac{U}{d - \delta}$$

无论是插入介质还是插入导体，由于电容器的导体极板与电源相连，在维持电势差不变的同时都从电源获得了电荷，自由电荷分布的变化同样使得介质内的电场强度不再等于 E_0/ϵ_r 。

6-30 在一半径为 R_1 的长直导线外，套有氟丁橡胶绝缘护套，护套外半径为 R_2 ，相对电容率为 ϵ_r ，设沿轴线单位长度上，导线的电荷密度为 λ ，试求介质层内的 D 、 E 和 P 。

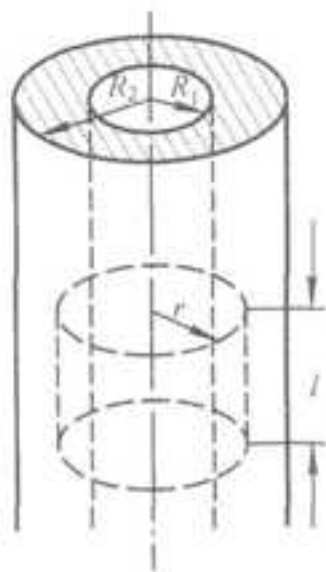


图 6-20

解：由介质中的高斯定理，有

$$\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = D \cdot 2\pi r l = \lambda l$$

得

$$D = \frac{\lambda}{2\pi r} \mathbf{e}_r$$

在均匀各向同性介质中

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{D}}{\epsilon_0 \epsilon_r} = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0 \epsilon_r r} \mathbf{e}_r$$

$$\mathbf{P} = \mathbf{D} - \epsilon_0 \mathbf{E} = \left(1 - \frac{1}{\epsilon_r}\right) \frac{\lambda}{2\pi r} \mathbf{e}_r$$

6-31 如图 6-21 所示，球形电极浮在相对电容率为 $\epsilon_r = 3.0$ 的油槽中，球的一半浸没在油中，另一半在空气中，已知电极所带净电荷 $Q_0 = 2.0 \times 10^{-8} \text{ C}$ ，问球的上、下部分各有多少电荷？

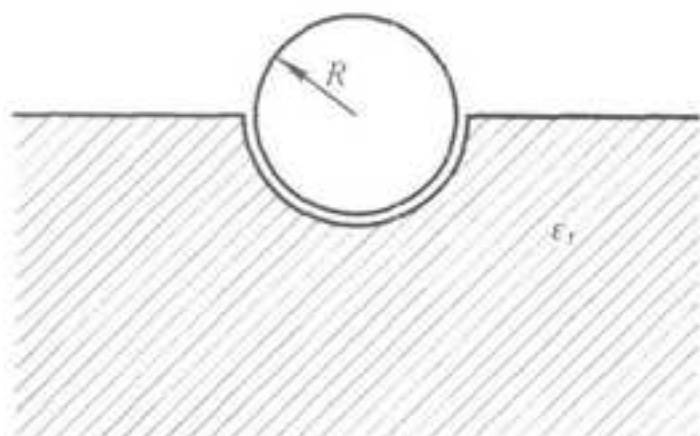


图 6-21

解：将导体球看作两个分别悬浮在油和空气中的半球形孤立电容器，上半球在空气中，电容为

$$C_1 = 2\pi\epsilon_0 R$$

下半球在油中，电容为

$$C_2 = 2\pi\epsilon_0\epsilon_r R$$

静电平衡时导体球上的电荷分布使导体成为等势体，故可将导体球等效为两个半球电容并联，其相对无限远处的电势均为 V ，且

$$V = \frac{Q_1}{C_1} = \frac{Q_2}{C_2} \quad (1)$$

另外导体球上的电荷总量保持不变，应有

$$Q_1 + Q_2 = Q_0 \quad (2)$$

由上述式 (1) 和式 (2) 可解得

$$Q_1 = \frac{C_1}{C_1 + C_2} Q_0 = \frac{1}{\epsilon_r + 1} Q_0 = 0.50 \times 10^{-6} \text{ C}$$

$$Q_2 = \frac{C_2}{C_1 + C_2} Q_0 = \frac{\epsilon_r}{\epsilon_r + 1} Q_0 = 1.5 \times 10^{-6} \text{ C}$$

由于导体球周围部分区域充满介质，球上电荷均匀分布的状态将改变。可以证明，此时介质中的电场强度与真空中的电场强度也不再满足 $E = \frac{E_0}{\epsilon_r}$ 的关系。事实上，只有当电介质均匀充满整个电场，并且自由电荷分布不变

时，才满足 $E = \frac{E_0}{\epsilon_r}$ 。

6-32 为了实时检测纺织品、纸张等材料的厚度（待测材料可视作相对电容率为 ϵ_r 的电介质），通常在生产流水线上设置如图 6-22 所示的传感装置，其中 A、B 为平板电容器的导体极板， d_0 为两极板间的距离。试说明检测原理，并推出直接测量量电容 C 与间接测量量厚度 d 之间的函数关系。如果要检测钢板等金属材料的厚度，结果又将如何？

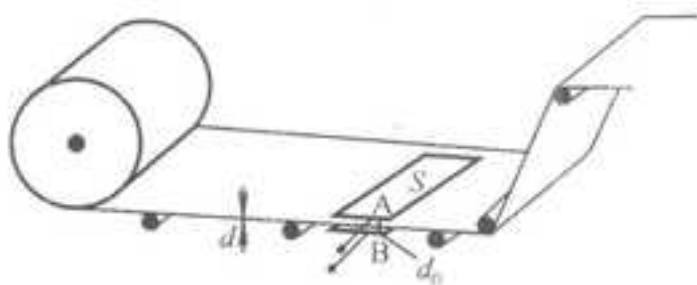


图 6-22

解：该装置的电容为

$$C = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r S}{d + \epsilon_r (d_0 - d)}$$

则介质的厚度为

$$d = \frac{\epsilon_r d_0 C - \epsilon_0 \epsilon_r S}{(\epsilon_r - 1) C} = \frac{\epsilon_r}{\epsilon_r - 1} d_0 - \frac{\epsilon_0 \epsilon_r S}{(\epsilon_r - 1) C}$$

如果待测材料是金属导体，其等效电容为

$$C = \frac{\epsilon_0 S}{d_0 - d}$$

导体材料的厚度

$$d = d_0 - \frac{\epsilon_0 S}{C}$$

实时地测量 A、B 间的电容量 C，根据上述关系式就可以间接地测出材料的厚度，通常智能化的仪表可以实时地显示出待测材料的厚度。

6-33 利用电容传感器测量油料液面高度，其原理如图 6-23 所示，导体圆管 A 与储油罐 B 相连，圆管的内径为 D，管中心同轴插入一根外径为 d 的导体棒 C，d、D 均远小于管长 L 并且相互绝缘。试证明：当导体圆管与导体棒之间以电压为 U 的电源时，圆管上的电荷与液面高度成正比（油料的相对电容率为 ϵ_r ）。

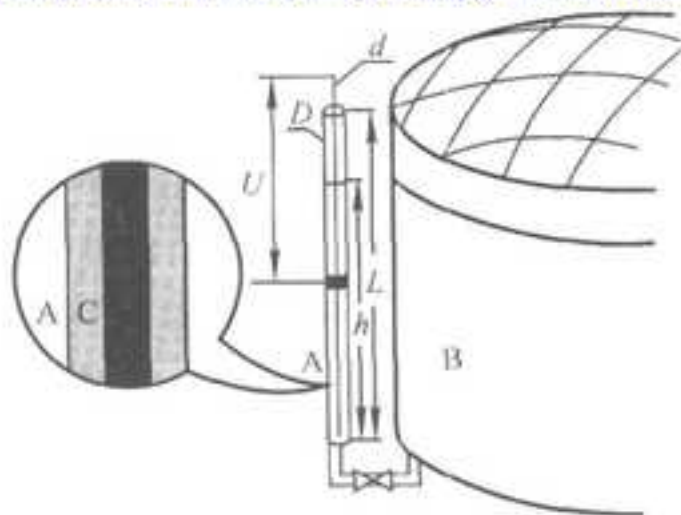


图 6-23

证明：由于 $d, D \ll L$ ，导体 A、C 构成一组柱形电容器，它们的电容分别为

$$C_1 = \frac{2\pi\epsilon_0\epsilon_r X}{\ln \frac{D}{d}}$$

$$C_2 = \frac{2\pi\epsilon_0(L-X)}{\ln \frac{D}{d}}$$

其总电容可视为一个长 X (X 为液面高度) 的介质电容器 C_1 和一个长 $L-X$ 的空气电容器 C_2 的并联

$$C = C_1 + C_2 = \frac{2\pi\epsilon_0\epsilon_r X}{\ln \frac{D}{d}} + \frac{2\pi\epsilon_0(L-X)}{\ln \frac{D}{d}} = \alpha + \beta X$$

其中

$$\alpha = \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\ln \frac{D}{d}}; \quad \beta = \frac{2\pi\epsilon_0(\epsilon_r - 1)}{\ln \frac{D}{d}}$$

$$Q = CU = \alpha U + \beta UX$$

即导体管上所带电荷 Q 与液面高度 X 成正比, 油罐与电容器联通, 两液面等高, 测出电荷 Q 即可确定油罐的液面高度。

6-34 共轴的两导体圆筒, 内筒的外半径为 R_1 , 外筒的内半径为 R_2 ($R_2 < 2R_1$), 其间有两层均匀电介质, 内层电介质的电容率为 ϵ_1 , 外层电介质的电容率为 $\epsilon_2 = \epsilon_1/2$, 两层介质的交界面是半径为 R 的圆柱面。已知两种电介质的击穿场强相等, 都为 E_m 。试证明: 两导体圆筒间的最大电势差为 $U_m = \frac{1}{2}RE_m \ln(R_2^2/RR_1)$ 。

解: 由介质中的高斯定理, 可得介质中的电位移矢量

$$D = \frac{\lambda}{2\pi r} e_r$$

并可进一步求得各介质中的电场分布

$$E_1 = \frac{D}{\epsilon_1} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_1 r} e_r \quad (R > r > R_1)$$

$$E_2 = \frac{D}{\epsilon_2} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_2 r} e_r \quad (R_2 > r > R)$$

由于外层电介质的电容率 $\epsilon_2 = \epsilon_1/2$, $R_2 < 2R_1$, 则

$$E_{2m}/E_{1m} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_2 R} / \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_1 R_1} = \frac{\epsilon_1 R_1}{\epsilon_2 R} = \frac{2R_1}{R}$$

因为 $R < R_2 < 2R_1$, $E_{2m} > E_{1m}$ 。因而当 $E_{2m} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_2 R} < E_m$ 时, 两层介质都不会被击穿, 导体的最大线电荷密度

荷密度

$$\lambda_m = 2\pi\epsilon_2 RE_m$$

两导体圆筒间的电势差

$$U = \int_{R_1}^R E_1 \cdot dl + \int_R^{R_2} E_2 \cdot dl$$

最大电势差为

$$\begin{aligned}
 U_m &= \int_{R_1}^R \frac{\lambda_m}{2\pi\epsilon_1 r} \cdot dr + \int_R^{R_2} \frac{\lambda_m}{2\pi\epsilon_2 r} \cdot dr \\
 &= \frac{RE_m}{2} \ln \frac{R}{R_1} + RE_m \ln \frac{R_2}{R} \\
 U_m &= \frac{RE_m}{2} \ln \left[\frac{R}{R_1} \cdot \left(\frac{R_2}{R} \right)^2 \right] = \frac{RE_m}{2} \ln \frac{R_2^2}{R_1 R}
 \end{aligned}$$

6-35 有一电容为 $0.50 \mu\text{F}$ 的平行平板电容器, 两极板间被厚度为 0.01 mm 的聚四氟乙烯薄膜所隔开, (1) 求该电容器的额定电压; (2) 求电容器存贮的最大能量.

解: (1) 查表可知聚四氟乙烯的击穿电场强度 $E_b = 1.9 \times 10^7 \text{ V/m}$, 故电容器两极板间的电势差

$$U_{\max} = E_b d = 190 \text{ V}$$

(2) 电容器中的电场强度 $E \leq E_b$, 电容器存贮的最大能量

$$W_e = \frac{1}{2} C U_{\max}^2 = 9.03 \times 10^{-3} \text{ J}$$

6-36 一空气平板电容器, 空气层厚 1.5 cm , 两极间电压为 40 kV , 该电容器会被击穿吗? 现将一厚度为 0.30 cm 的玻璃板插入此电容器, 并与两极平行, 若该玻璃的相对电容率为 7.0 , 击穿电场强度为 $10 \text{ MV} \cdot \text{m}^{-1}$ 则此时电容器会被击穿吗?

解: 未插入玻璃时, 电容器内的电场强度为

$$E = U/d = 2.7 \times 10^6 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$$

因空气的击穿电场强度 $E_b = 3.0 \times 10^6 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$, $E < E_b$, 故电容器不会被击穿.

插入玻璃后, 空气间隙中的电场强度

$$E = \frac{\epsilon_r V}{\epsilon_r (d - \delta) + \delta} = 3.2 \times 10^6 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$$

此时, 因 $E > E_b$, 空气层被击穿, 击穿后 40 kV 电压全部加在玻璃板两侧, 此时玻璃板内的电场强度

$$E = V/\delta = 1.3 \times 10^7 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$$

由于玻璃的击穿电场强度 $E'_b = 10 \text{ MV} \cdot \text{m}^{-1}$, $E > E'_b$, 故玻璃也将相继被击穿, 电容器完全被击穿.

6-37 某介质的相对电容率 $\epsilon_r = 2.8$, 击穿电场强度为 $18 \times 10^6 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$, 如果用它来作平板电容器的电介质, 要制作电容为 $0.047 \mu\text{F}$, 而耐压为 4.0 kV 的电容器, 它的极板面积至少要多大.

解: 介质内电场强度

$$E \leq E_b = 18 \times 10^6 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$$

电容耐压 $U_m = 4.0 \text{ kV}$; 因而电容器极板间最小距离

$$d = U_m / E_k = 2.22 \times 10^{-8} \text{ m}$$

要制作电容为 $0.047 \mu\text{F}$ 的平板电容器, 其极板面积

$$S = \frac{Cd}{\epsilon_0 \epsilon_r} = 0.42 \text{ m}^2$$

显然, 这么大的面积平铺开来所占据的空间太大了, 通常将平板电容器卷叠成筒状后再封装。

6-38 设想电子是球型的, 其静止能量 mc^2 来自于它的静电能量, 电子电荷不同的分布模型会得出不同的电子半径, 现分别假设 (1) 电子电荷均匀分布在球面上; (2) 电子电荷均匀分布在球体内, 试估算电子的半径。

解: (1) 假设电子电荷均匀分布在球面上, 电场能量密度为

$$w_e = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 = \frac{e^2}{32 \pi^2 \epsilon_0 r^4}$$

由电场能量密度的体积分求电子的电场能量

$$\int_0^{\infty} w_e dV = \int_0^{\infty} \frac{e^2}{32 \pi^2 \epsilon_0 r^4} \cdot 4 \pi r^2 dr = \frac{e^2}{8 \pi \epsilon_0 R} = mc^2$$

解得电子的半径

$$R = \frac{e^2}{8 \pi \epsilon_0 mc^2}$$

将相关物理量代入可以估算出电荷面分布模型下电子的半径约为 $1.41 \times 10^{-15} \text{ m}$ 。

(2) 电子电荷均匀分布在球体内, 球内外电场能量密度分别为

$$w_{e1} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_1^2 = \frac{e^2 r^2}{32 \pi^2 \epsilon_0 R^6}, \quad w_{e2} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_2^2 = \frac{e^2}{32 \pi^2 \epsilon_0 r^4}$$

由电场能量密度的体积分求电子的电场能量

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_1} w_{e1} dV + \int_{\Omega_2} w_{e2} dV &= \int_0^R \frac{e^2 r^2}{32 \pi^2 \epsilon_0 R^6} \cdot 4 \pi r^2 dr + \int_R^{\infty} \frac{e^2}{32 \pi^2 \epsilon_0 r^4} \cdot 4 \pi r^2 dr \\ &= \frac{e^2}{40 \pi \epsilon_0 R} + \frac{e^2}{8 \pi \epsilon_0 R} = \frac{3e^2}{20 \pi \epsilon_0 R} = mc^2 \end{aligned}$$

解得电子的半径

$$R = \frac{3e^2}{20 \pi \epsilon_0 mc^2}$$

将相关物理量代入可以估算出电荷体分布模型下电子的半径约为 $1.69 \times 10^{-15} \text{ m}$ 。

6-39 在达到静电平衡时, 导体上的电荷分布总是使得电场的能量为最小值, 这称为汤姆孙定理。以一个有厚度的金属球壳为例, 当金属球壳带电时, 电荷为球对称均匀分布。试论证: 只有电荷全都分布在金属球壳外表面时, 其电场能量才能达到最小值。

证: 导体达到静电平衡时, 电荷球对称均匀分布在金属球壳外表面, 球内的电场强度为零, 球外的电场强度为

$$E = \frac{Q}{4 \pi \epsilon_0 r^2}$$

取同心球壳为体元, $dV = 4 \pi r^2 dr$, 由电场能量密度的体积分可求得导体球的电场能量

$$W_c = \int_0^R w_c dV = \int_0^R \frac{Q^2}{32\pi^2 \epsilon_0 r^2} \cdot 4\pi r^2 dr = \frac{Q^2}{8\pi \epsilon_0 R}$$

假如电荷均匀分布在导体球壳以及内、外表面, 则球壳外表面以内电场强度必定不为零, 假设球壳外表面以内电场强度为 E_i , 电场能量为

$$W_i = \int_0^R w_i' dV = \int_0^R \frac{1}{2} \epsilon_0 E_i^2 \cdot 4\pi r^2 dr = 2\pi \epsilon_0 \int_0^R E_i^2 r^2 dr \geq 0$$

由于导体球壳电荷均匀分布时, 球壳外表面以外的电场强度不变, 因而电场的总能量为

$$W = W_c + W_i = W_c + 2\pi \epsilon_0 \int_0^R E_i^2 r^2 dr$$

$$W \geq W_c, \quad W_{\min} = W_c$$

即电荷分布在导体球壳外表面时, 电场能量最小。

6-40 一平行板空气电容器, 极板面积为 S , 极板间距为 d , 充电至带电 Q 后与电源断开, 然后用外力缓慢地把两极板间距拉开到 $2d$, 求: (1) 电容器能量的改变; (2) 此过程中外力所作的功, 并讨论此过程中的功能转换关系。

解: (1) 极板间的电场为均匀场, 且电场强度保持不变, 因此, 电场的能量密度为

$$w_c = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 = \frac{Q^2}{2\epsilon_0 S^2}$$

在外力作用下极板间距从 d 被拉开到 $2d$, 电场占有空间的体积, 也由 V 增加到 $2V$, 此时电场能量增加

$$\Delta W_c = w_c \Delta V = \frac{Q^2 d}{2\epsilon_0 S}$$

(2) 两导体极板带等量异号电荷, 外力 F 将其缓缓拉开时, 应有 $F = -F_c$, 则外力所作的功为

$$A = -F_c \cdot \Delta r = QEd = \frac{Q^2 d}{2\epsilon_0 S}$$

外力克服静电引力所作的功等于静电场能量的增加。

6.3 名校考研真题详解

一、选择题

1. 一平行板电容器充电后, 与电源断开, 然后再充满相对介电常数为 ϵ_r 的各向同性均匀电介质, 则其电容 C 、两极板间的电势差 U_{12} 及电场能量 W_c 与充介质前比较将发生如下变化 ()。 [暨南大学 2010 研]

- A. $C \uparrow$ $U_{12} \downarrow$ $W_c \uparrow$;
 B. $C \uparrow$ $U_{12} \downarrow$ $W_c \downarrow$;
 C. $C \uparrow$ $U_{12} \uparrow$ $W_c \downarrow$;
 D. $C \downarrow$ $U_{12} \downarrow$ $W_c \downarrow$

【答案】D

【解析】电容器断点后板上的带电量保持不变, 加入电介质后

$$E = \frac{Q}{\epsilon_0 \epsilon_r S}, \text{ 变小}$$

$$W_c = \frac{1}{2} E^2 \cdot Sd = \frac{Q^2 d}{2\epsilon_0 \epsilon_r^2 S}, \text{ 变小}$$

$$U_{12} = Ed = \frac{Qd}{\epsilon_0 \epsilon_r S}, \text{ 变小}$$

$$C = \frac{Q}{U_{12}} = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r S}{d}, \text{ 变大}$$

2. 充电后平板电容器两极板间的距离被拉开到原来的 2 倍, 则极板间的作用力将是原来的 (). [郑州大学 2006 研]

- A. 2 倍
- B. 1 倍
- C. 二分之一
- D. 四分之一

【答案】B

3. 一导体球外充满相对介电常数为 ϵ_r 的均匀电介质, 若测得导体表面附近场强为 E , 则导体球面上的自由电荷面密度 σ 为 (). [暨南大学 2011 研]

- A. $\epsilon_0 E$
- B. $\epsilon_0 \epsilon_r E$
- C. $\epsilon_r E$
- D. $(\epsilon_0 \epsilon_r - \epsilon_0) E$

【答案】B

【解析】在导体表面附近假想一个厚度为 dl , 面积为 dS 的薄层, 导体内无电场, 由高斯定理

$$\epsilon_0 \epsilon_r E dS = \sigma dS$$

从而 $\sigma = \epsilon_0 \epsilon_r E$.

4. 当一个带电导体达到静电平衡时 (). [暨南大学 2011 研]

- A. 表面上电荷密度较大处电势较高
- B. 表面曲率较大处电势较高
- C. 导体内部的电势比导体表面的电势高
- D. 导体内任一点与其表面上任一点的电势差等于零

【答案】D

【解析】导体内电子可以自由流动, 从而改变其中电场的分布. 在达到静电平衡时, 电场强度为 0, 从而整个导体变成等势体.

二、填空题

1. 两个耐压强度均为 U 的电容器 1 和 2, 电容分别为 C_1 、 C_2 , 且 $3C_2 = 2C_1$, 将它们串联接在电路中, 若串联电容器两端的总电压为 $2U$, 电容器_____ (1 或 2) 选被击穿. [北京工业大学研]

【答案】2

2. 一导体球外充满相对介电常量为 ϵ_r 的均匀电介质, 若测得导体表面附近场强为 E , 则导体球面上的自由电荷面密度 σ 为_____. [湖南大学 2007 研]

【答案】 $\epsilon_0 \epsilon_r E$

三、计算题

1. 一半径为 R 的带电球体, 其电荷体密度分布为

$$\begin{cases} \rho = \frac{qr}{\pi R^4} & (r \leq R) \quad (q \text{ 为一正的常数}) \\ \rho = 0 & (r > R) \end{cases}$$

试求: (1) 带电球体的总电量;

(2) 球内、外各点的电场强度。[暨南大学 2011 研]

解: (1) 带电体总电量为

$$Q = \int \rho dV = 4\pi \cdot \frac{q}{\pi R^4} \int_0^R r \cdot r^2 dr = q$$

(2) 球体外, 对假想的半径为 r 同心球球面应用高斯定理,

$$E_{\text{外}}(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

球体内, 同样应用高斯定理,

$$E_{\text{内}}(r) = \frac{4\pi \int_0^r \rho(r_1) \cdot r_1^2 dr_1}{4\pi\epsilon r^2} = \frac{qr^2}{4\pi\epsilon R^4}$$

其中 ϵ 为球体的介电常数。

2. 一平行板电容器的极板面积为 $S=1\text{m}^2$, 两极板夹着一块 $d=5\text{mm}$ 厚的同样的玻璃板, 已知玻璃的相对电容率为 $\epsilon_r=5$, 电容器充电到电压 $U=12\text{V}$ 以后切断电源, 求把玻璃从电容器中抽出来外力需要做多少功, ($\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{C}^2 \text{N}^{-1} \text{m}^{-2}$) [电子科技大学 2011 研]

解: 玻璃板抽出前后电容器能量的变化即外力作的功, 抽出玻璃板前后的电容值分别为

$$C = (\epsilon_0 \epsilon_r S) / d, \quad C' = (\epsilon_0 S) / d$$

撤电源后再抽玻璃板, 板上电荷不变, 但电压改变, 即

$$Q = CU = C'U' \text{ 由此得 } U' = (CU) / C' = \epsilon_r U$$

抽玻璃板前后电容器的能量分别为

$$W = \frac{1}{2} CU^2 = \frac{1}{2} (\epsilon_0 \epsilon_r S / d) U^2$$

$$W' = \frac{1}{2} C' U'^2 = \frac{1}{2} (\epsilon_0 \epsilon_r^2 S / d) U^2$$

外力做功为

$$\begin{aligned} A &= W' - W \\ &= \frac{1}{2} (\epsilon_0 \epsilon_r S U^2 / d) (\epsilon_r - 1) \\ &= 2.55 \times 10^{-4} \text{J} \end{aligned}$$

一、恒定电流

1. 电流和电流密度

(1) 电流

①载流子

载流子是指自由电子、质子、正负离子等携带电荷的带电粒子。

②电流

电流由大量电荷作定向运动形成，电流的方向与负电荷的移动方向恰好相反。

如图 7-1 所示，在截面积为 S 的一段导体中，有正电荷从左向右运动，若在时间间隔 dt 内，通过截面 S 的电荷为 dq ，则在导体中的电流 I 为通过截面 S 的电荷随时间的变化率，即

$$I = \frac{dq}{dt}$$

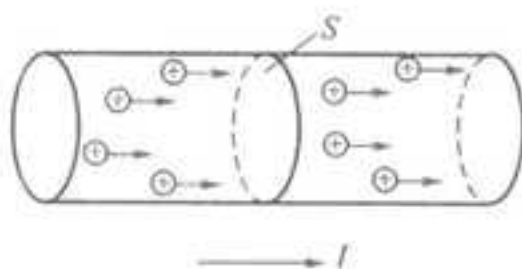


图 7-1 导体中的电流

如果导体中的电流不随时间而变化，这种电流称为恒定电流。

电流是标量，不是矢量，虽然人们在实际应用中常说“电流的方向”，但这只是指一群“正电荷的流向”而已。

③传导电流

传导电流是指由带电粒子定向运动形成的电流。

④运流电流

运流电流是指带电物体作机械运动时形成的电流。

(2) 电流密度

当电流在大块导体中流动时，导体内各处的电流分布将是不均匀的，为细致描述导体内各点电流分布的情况，引入电流密度。

电流密度是矢量，电流密度的方向和大小规定如下

①导体中任意一点电流密度 j 的方向为该点正电荷的运动方向；

② j 的大小等于在单位时间内，通过该点附近垂直于正电荷运动方向的单位面积的电荷。

如图 7-2 所示，设想在导体中点 P 处取一面积元 ΔS ，并使 ΔS 的单位法线矢量 e_n 与正电荷的运动方向（即电流密度 j 的方向）间成 α 角。

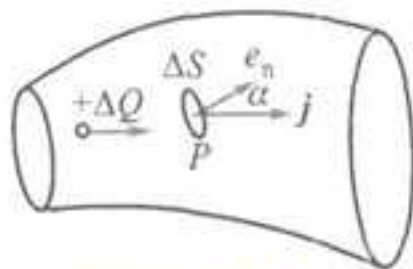


图 7-2 电流密度

若在 Δt 时间内有正电荷 ΔQ 通过面积元 ΔS ，那么按上述规定可得点 P 处电流密度的大小为

$$j = \frac{\Delta Q}{\Delta t \Delta S \cos \alpha} = \frac{\Delta I}{\Delta S \cos \alpha}$$

式中 $\Delta S \cos \alpha$ 为面积元 ΔS 在垂直于电流密度方向的投影
上式可写成

$$\Delta I = j \cdot \Delta S$$

对通过导体任一有限截面的 S 的电流为

$$I = \int_S j \cdot dS$$

(3) 金属导体的电流和电流密度与自由电子的数密度和漂移速度之间的关系
漂移速度是指自由电子在电场力作用下产生的定向运动的平均速度, 用符号 v_d 表示。

①分析

如图 7-3 所示, 设导体中自由电子数密度为 n , 每个电子的漂移速度均为 v_d , 在导体内取一面积元 ΔS , 且 ΔS 与 v_d 垂直, 于是在时间间隔 Δt 内, 在任一长为 $v_d \Delta t$, 截面积为 ΔS 的柱体里的自由电子都要通过截面 ΔS , 即有 $n v_d \Delta t \Delta S$ 个电子通过 ΔS 。

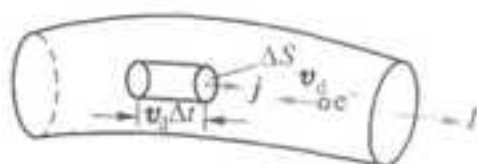


图 7-3 电流与电子漂移速度的关系

考虑到每个电子电荷的绝对值为 e , 故在 Δt 时间内通过 ΔS 的电荷为 $\Delta q = e n v_d \Delta t \Delta S$ 。

可得导体中 ΔS 处的电流和电流密度为

$$\Delta I = e n v_d \Delta S$$

和

$$j = e n v_d$$

②结论

- 金属导体中的电流和电流密度均与自由电子数密度和自由电子的漂移速率成正比;
- 上面两式对一般导体或半导体也可适用, 把电子的电荷换成载流子的电荷 q , 把自由电子的漂移速率换成载流子的平均定向运动速率 v 即可。

2. 电流的连续性方程和恒定电流条件

(1) 电流连续性方程

电流的连续性是指单位时间通过闭合曲面向外流出的电荷, 等于此时间内闭合曲面里电荷的减少量。如图 7-4 所示的闭合曲面, 规定曲面上任意点的法线方向总是向外的。

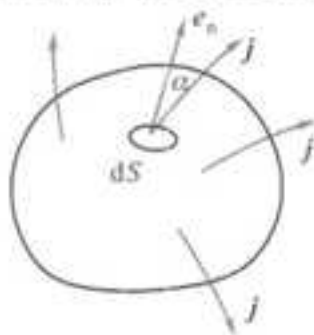


图 7-4 电流连续性方程

①在单位时间内, 从闭合曲面内向外流出的电荷, 即通过闭合曲面向外的总电流为

$$\frac{dQ}{dt} = I = \oint_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}$$

②在单位时间内通过闭合曲面向外流出的电荷，应等于此闭合曲面内单位时间所减少的电荷，如以 $\frac{dQ_i}{dt}$ 表示闭合曲面内单位时间减少的电荷，则有

$$\frac{dQ}{dt} = -\frac{dQ_i}{dt}$$

与①中的式子相比较，得电流的连续性方程

$$\oint_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{dQ_i}{dt}$$

(2) 恒定电流存在的条件。

如图 7-5 所示，我们在导体中取一任意闭合曲面 S

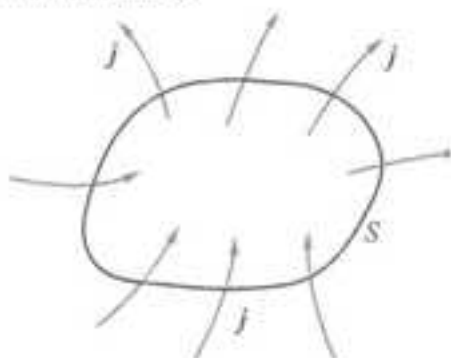


图 7-5 恒定电流条件

如果此闭合曲面内的电荷不随时间变化，既不增加也不减少，即

$$\frac{dQ_i}{dt} = 0$$

得恒定电流条件

$$\oint_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad \text{或} \quad \oint_S dI = 0 \quad (7-1)$$

①在闭合曲面内，若电荷不随时间变化，则电流密度矢量 \mathbf{j} 对闭合曲面的面积分为零；②若电荷不随时间变化从闭合曲面 S 上某一部分流入的电流，等于从闭合曲面 S 其它部分流出的电流；

③当导体中任意闭合曲面满足式 (7-1) 时，闭合曲面内没有电荷被积累起来，此时通过闭合曲面的电流是恒定的。

二、电源电动势

1. 分析

(1) 在图 7-6 (a) 所示的导电回路中，如开始时极板 A 和 B 分别带有正、负电荷，A、B 之间有电势差，这时在导线中有电场，在电场力作用下，正电荷从极板 A 通过导线移到极板 B，并与极板 B 上的负电荷中和，直至两极板间的电势差消失。

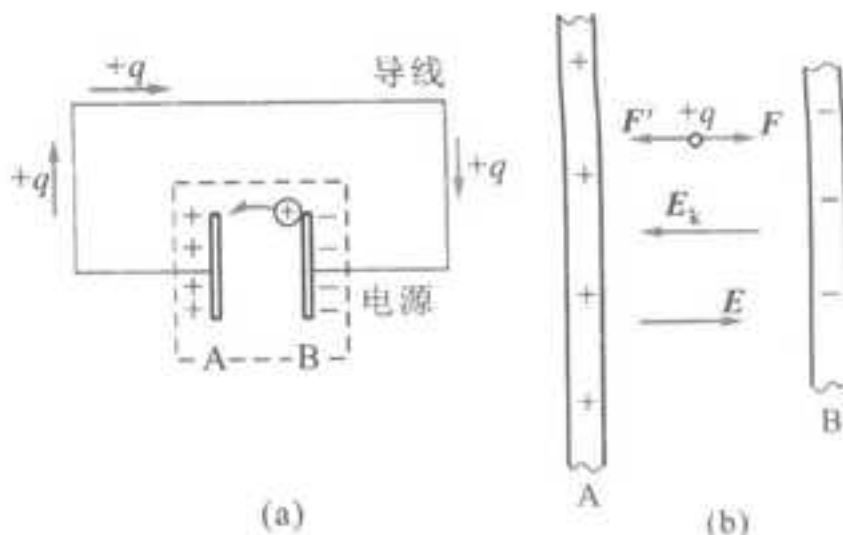


图 7-6 电源内的非静电力把正电荷从负极板移至正极板

(2) 若把正电荷从负极板 B 沿两极板间另一路径移至正极板 A 上, 并使两极板维持正、负电荷不变, 这样两极板间就有恒定的电势差, 导线中也就有恒定的电流通过, 此时必须有非静电力 $F_{\text{非}}$ 作用才能完成。

(3) 电源提供非静电力, 在电源内部, 依靠非静电力 $F_{\text{非}}$ 克服静电力 F 对正电荷做功, 方能使正电荷从极板 B 经电源内部输送到极板 A 上去[图 7-6 (b)]。电源中非静电力 $F_{\text{非}}$ 的做功过程, 就是把其它形式的能量转变为电能的过程。

(4) 电动势的定义

电源的电动势是指单位正电荷绕闭合回路一周时, 非静电力所做的功。

如以 E_k 表示非静电电场强, W 为非静电力所作的功, \mathcal{E} 表示电源电动势, 那么有

$$\mathcal{E} = \frac{W}{q} = \oint E_k \cdot dl$$

考虑到非静电电场强度 E_k 只存在于电源内部, 这样有

$$\mathcal{E} = \oint E_k \cdot dl = \int_{\sigma_1} E_k \cdot dl$$

2. 结论

- (1) 电源电动势的大小等于把单位正电从负极经电源内部移至正极时非静电力所作的功;
- (2) 电动势虽不是矢量, 但为了便于判断在电流流通时非静电力是作正功还是作负功, 通常把电源内部电势升高的方向, 即从负极经电源内部到正极的方向, 规定为电动势的方向, 电动势的单位和电势的单位相同;
- (3) 电源电动势的大小只取决于电源本身的性质, 一定的电源具有一定的电动势, 而与外电路无关。

三、磁场磁感强度

1. 基本规律

- (1) 在静止电荷周围的空间存在着电场, 静止电荷间的相互作用是通过电场来传递的。
- (2) 电流间 (包括运动电荷间) 的相互作用是通过磁场来传递的, 磁场对位于其中的运动电荷有力的作用。
- (3) 运动电荷与运动电荷之间、电流与电流之间、电流 (或运动电荷) 与磁铁之间的相互作用, 都可以看成是它们中任意一个所激发的磁场对另一个施加作用力的结果。

2. 磁感应强度

电荷在磁场中运动时, 它所受的磁场力不仅与电荷的正、负有关, 而且还与电荷运动速度的大小和方向有密切关系。

(1) 磁感强度 B 的方向和大小

① 磁感强度的方向

如图 7-7 (a) 所示, 它表示电荷的运动方向与磁场方向一致时, 电荷所受的磁场作用力。正电荷 +q 以一定速度经过磁场中某点, 若它不受磁场力作用, 我们规定此时正电荷的速度方向为磁感强度的方向, 这个方向与将小磁针置于此处时小磁针 N 极的指向是一致的。

②磁感强度的大小

如图 7-7 (b) 所示, 它表示电荷的运动方向与磁场方向垂直时, 电荷所受的磁场作用力。当正电荷经过磁场中某点的速度 v 的方向与磁感强度 B 的方向垂直时, 它所受的磁场力最大为 F_{\perp} , 比值 F_{\perp}/qv 规定为磁场中某点的磁感强度 B 的大小, 即

$$B = \frac{F_{\perp}}{qv}$$

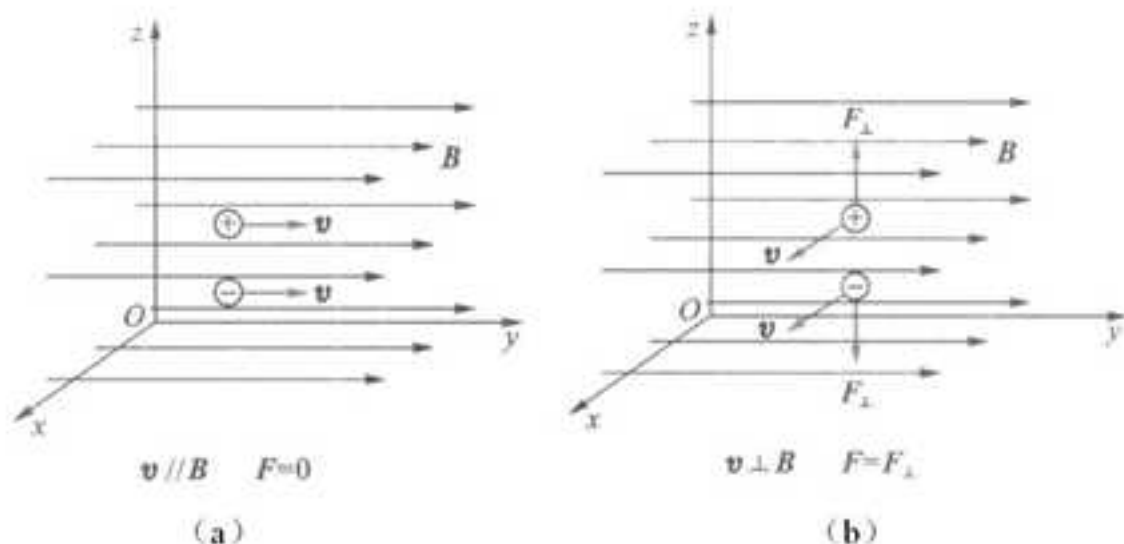


图 7-7 运动电荷在磁场中受的磁场力

(2) 均匀磁场和非均匀磁场

- ①均匀磁场是指某一区域内各点的磁感强度 B 的方向一致、大小相等的磁场;
- ②非均匀磁场是指不符合均匀磁场情况的磁场。

四、毕奥—萨伐尔定律

1. 恒定磁场

恒定电流的磁场是指任意一点的磁感强度仅是空间坐标的函数, 而与时间无关的磁场, 它亦称为静磁场或恒定磁场。

2. 电流元

电流元是指流过某一元矢量 dl 的电流, 与 dl 的乘积 Idl , 电流元中电流的流向作为元矢量的方向。

把一载流导线看成是由许多个电流元 Idl 连接而成, 那么载流导线在磁场中某点所激发的磁感强度 B , 就是由这导线的所有电流元在该点的 dB 的叠加。

3. 电流元 Idl 与它所激发的磁感强度 dB 之间的关系

(1) 如图 7-8 所示, 载流导线上有一电流元 Idl 在真空中某点 P 处的磁感强度 dB 的大小, 与电流元的大小 Idl 成正比, 与电流元 Idl 到点 P 的矢量 r 间的夹角 θ 的正弦成正比, 并与电流元到点 P 的距离 r 的二次方成反比, 即

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl \sin \theta}{r^2}$$

μ_0 称为真空磁导率, dB 的方向垂直于 dl 和 r 所组成的平面, 并沿矢积 $dl \times r$ 的方向。

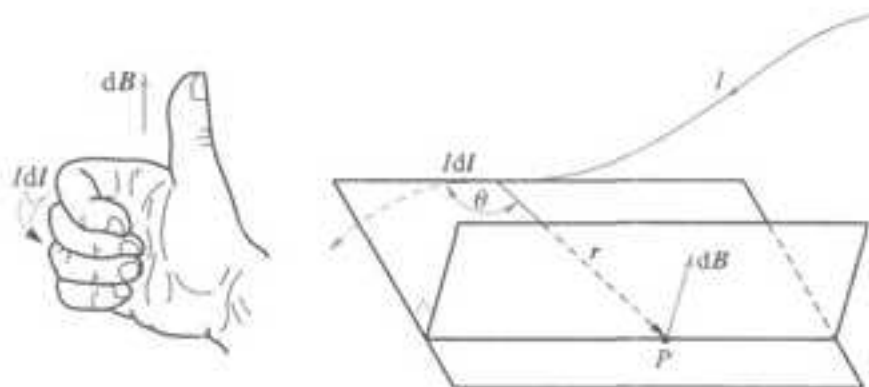


图 7-8 电流元的磁感强度的方向

(2) 若用矢量式表示, 则有毕奥—萨伐尔定律

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl \times e_r}{r^2}$$

(3) 毕奥—萨伐尔定律也可以写成

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl \times r}{r^3}$$

(4) 任意载流导线在点 P 处的磁感强度 B

$$B = \int dB = \int \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl \times e_r}{r^2}$$

4. 磁矩

(1) 右手螺旋定则: 右手四指顺着电流流动方向回转时, 大拇指的指向为圆电流单位正法线矢量 e_n 的方向, 如图 7-9 所示, 有一平面圆电流, 其面积为 S, 电流为 I, e_n 为圆电流平面的单位正法线矢量, 它与电流的流向遵守右手螺旋定则。

(2) 定义圆电流的磁矩 m 为

$$m = ISe_n$$

m 的方向与圆电流的单位正法矢 e_n 的方向相同, m 的量值为 IS。上式对任意形状的载流线圈都是适用的。

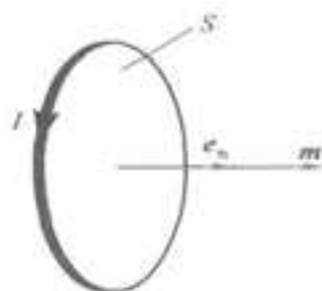


图 7-9 磁矩

(3) 圆电流的磁感强度式可写成如下矢量形式

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{m}{x^3} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{m}{x^3} e_n$$

5. 运动电荷的磁场

有一电流元 Idl , 其截面积为 S, 设此电流元中单位体积内有 n 个作定向运动的电荷, 以正电荷为研究对象, 每个电荷均为 q, 且定向运动速度均为 v, 此电流元中的电流密度 $j = nqv$,

(1) 故

$$Idl = jSdl = nSdlqv$$

(2) 毕奥—萨伐尔定律的表达式可写成

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{nSdlqv \times r}{r^3}$$

式中 $Sdl = dV$ 为电流元的体积, $ndV = dN$ 为电流元中作定向运动的电荷数.

(3) 一个以速度 v 运动的电荷, 在距它为 r 处所建立的磁感强度则为

$$B = \frac{dB}{dN} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{qv \times r}{r^3}$$

(4) e_r 是矢量 r 的单位矢量, 上式亦可写成

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{qv \times e_r}{r^2} \quad (7-2)$$

B 的方向垂直于 v 和 r 组成的平面.

①当 q 为正电荷时, B 的方向为矢积 $v \times r$ 的方向[图 7-10 (a)]

②当 q 为负电荷时, B 的方向与矢积 $v \times r$ 的方向相反[图 7-10 (b)].

运动电荷的磁场表达式(7-2)是有一定适用范围的, 它只适用于运动电荷的速率 v 远小于光速 c 的情况. 对于 v 接近于 c 的情形, 式(7-2)就不适用了. 这时, 运动电荷的磁场应当考虑到相对论性效应.

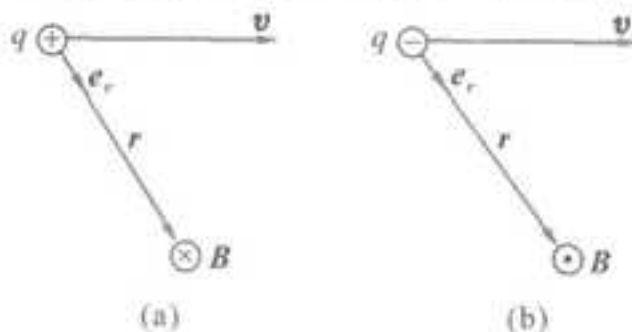


图 7-10 运动电荷的磁场方向

五、磁通量磁场的高斯定理

1. 磁感线

(1) 磁感线

磁感线是指人为刻画的可表示磁感强度 B 的方向及大小的曲线. 规定曲线上每一点的切线方向就是该点的磁感强度 B 的方向, 而曲线的疏密程度则表示该点磁感强度 B 的大小. 磁感线又称 B 线. 磁场中并不真的存在这种线.

(2) 右手螺旋定则

①用右手握住导线, 使大拇指伸直并指向电流方向, 这时其它四指弯曲的方向, 就是磁感线的回转方向[图 7-11].

②图 7-12 是圆形电流和载流长直螺线管的磁感线图形. 它们的磁感线方向, 也可由右手螺旋定则来确定. 不过这时要用右手握住螺线管, 使四指弯曲的方向沿着电流方向, 而伸直大拇指的指向就是螺线管内磁感线的方向.



图 7-11 载流长直导线的磁感线

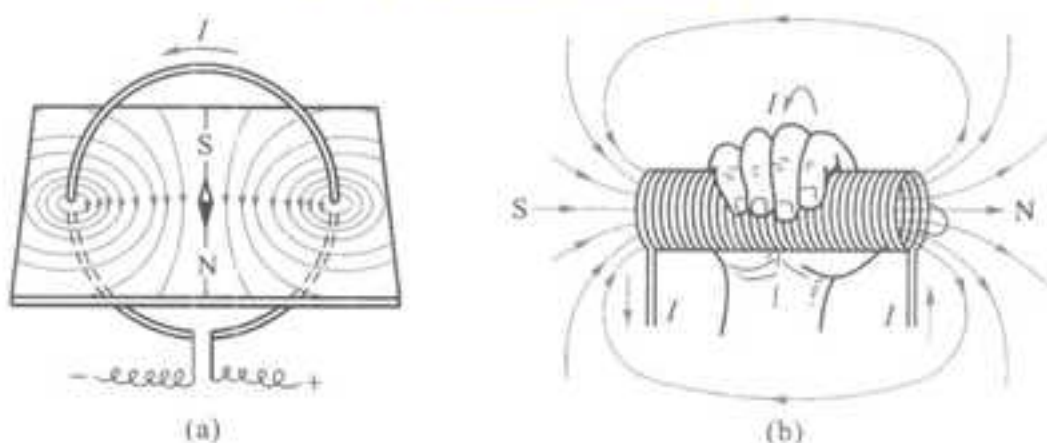


图 7-12 圆形电流和载流长直螺线管的磁感线

(3) 磁感线的特性

①由于磁场中某点的磁场方向是确定的，所以磁场中的磁感应线不会相交，磁感线的这一特性和电场线是一样的；

②载流导线周围的磁感线都是围绕电流的闭合曲线，没有起点，也没有终点，磁感线的这个特性和静电场中的电场线不同，静电场中的电场线起始于正电荷，终止于负电荷。

2. 磁通量磁场的高斯定理

(1) 磁感线的密度

磁感线的密度是指磁场中某点处垂直于磁场矢量的单位面积上通过的磁感线数目，其值等于该点 B 的数值。

① B 大的地方，磁感线就密集；

② B 小的地方，磁感线就稀疏；

③对均匀磁场来说，磁场中的磁感线相互平行，各处磁感线密度相等；

④对非均匀磁场来说，磁感线相互不平行，各处磁感线密度不相等。

(2) 均匀磁场磁通量

①磁通量是指通过磁场中某一曲面的磁感线数，用符号 Φ 表示。

如图 7-13 (a) 所示，在磁感强度为 B 的均匀磁场中，取一面积矢量 S ，其大小为 S ，其方向用它的单位法线矢量 e_n 来表示，有 $S = S e_n$ ，图中 e_n 与 B 之间的夹角为 θ 。

②通过面 S 的磁通量为

$$\Phi = BS \cos \theta$$

③用矢量来表示为

$$\Phi = \mathbf{B} \cdot \mathbf{S} = B \cdot e_n S$$

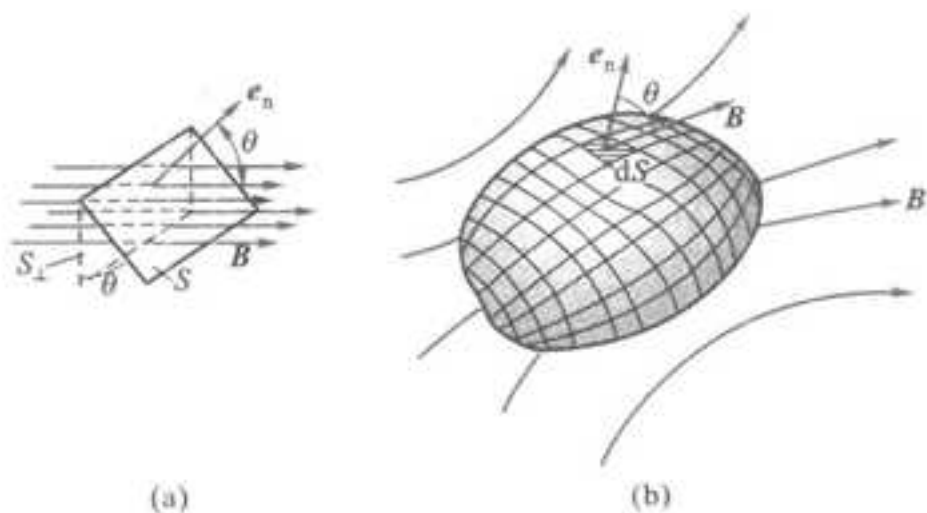


图 7-13 磁通量

(3) 不均匀磁场中通过任意曲面的磁通量

在如图 7-13 (b) 所示的曲面上取一面积元矢量 $d\mathbf{S}$ ，它所在处的磁感强度与单位法线矢量 \mathbf{e}_n 之间的夹角为 θ 。

① 则通过面积元 $d\mathbf{S}$ 的磁通量为

$$d\Phi = B dS \cos \theta = \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

② 通过某一有限曲面的磁通量 Φ 就等于通过这些面积元 $d\mathbf{S}$ 上的磁通量 $d\Phi$ 的总和，即

$$\Phi = \int_S d\Phi = \int_S B \cos \theta dS = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

对于闭合曲面来说，人们规定其正单位法线矢量 \mathbf{e}_n 的方向垂直于曲面向外，依照这个规定，

a. 当磁感线从曲面内穿出时 ($\theta < \frac{\pi}{2}$, $\cos \theta > 0$) 磁通量是正的；

b. 而当磁感线从曲面外穿入时 ($\theta > \frac{\pi}{2}$, $\cos \theta < 0$) 磁通量是负的；

c. 由于磁感线是闭合的，因此对任一闭合曲面来说，有多少条磁感线进入闭合曲面，就一定有多少条磁感线穿出闭合曲面。

(4) 磁场的高斯定理

磁场的高斯定理是指通过任意闭合曲面的磁通量必等于零，即

$$\oint_S B \cos \theta dS = 0$$

或

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

六、安培环路定理

恒定电流的安培环路定理是指沿任意闭合路径的磁感强度 \mathbf{B} 的环流为

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \sum I$$

式中 $\sum I$ 是该闭合路径所包围电流的代数和。该式表明，在恒定磁场中，磁感强度 \mathbf{B} 沿任一闭合路径的积分（即 \mathbf{B} 的环流）的值，等于 μ_0 乘以该闭合路径所包围的各电流的代数和。

七、带电粒子在电场和磁场中的运动

1. 带电粒子在电场和磁场中所受的力

(1) 若电场中点 P 的电场强度为 E ，则处于该点的电荷为 $+q$ 的带电粒子所受的电场力为

$$F_e = qE$$

(2) 若点 P 处的磁感强度为 B ，且电荷为 $+q$ 的带电粒子以速度 v 通过点 P，作用在带电粒子上的磁场力为

$$F_m = qv \times B$$

F_m 称为洛伦兹力，方向垂直于运动电荷的速度 v 和磁感强度 B 所组成的平面，且符合右手螺旋定则。

(3) 在普遍的情况下，带电粒子若既在电场又在磁场中运动时，那么作用在带电粒子上的力应为电场力 qE 和洛伦兹力 $qv \times B$ 之和，即

$$F = qE + qv \times B$$

2. 带电粒子在磁场中运动

(1) 回旋半径和回旋频率

设电荷为 $+q$ ，质量为 m 的带电粒子，以初速 v_0 进入磁感强度为 B 的均匀磁场中，且 v_0 与 B 垂直，如图 7-14 所示。如略去重力作用，则作用在带电粒子上的力仅为洛伦兹力 F ，所以，带电粒子进入磁场后将以速率 v_0 作匀速圆周运动。

① 回旋半径

根据牛顿第二定律得

$$R = \frac{mv_0}{qB}$$

式中 R 称为回旋半径，它与电荷速度 v_0 的值成正比，与磁感强度 B 的值成反比。

② 回旋周期

回旋周期是指粒子运行一周所需要的时间，用符号 T 表示，有

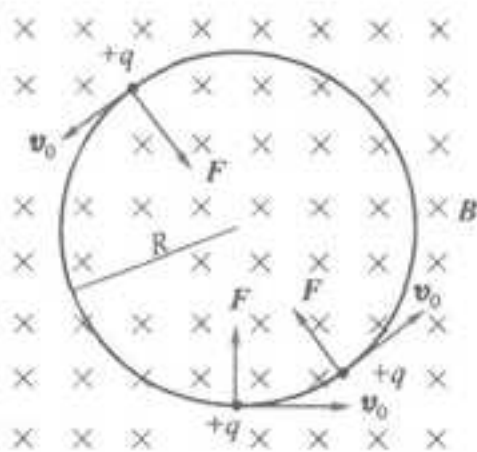


图 7-14 带电粒子的 v_0 与 B 垂直时的运动

$$T = \frac{2\pi R}{v_0} = \frac{2\pi m}{qB}$$

③ 回旋频率

回旋频率是指单位时间内粒子所运行的圈数，用 f 表示，有

$$f = \frac{1}{T} = \frac{qB}{2\pi m}$$

以上结论均只适用于带电粒子速度远小于光速的非相对论情形。如带电粒子的速度接近于光速，上述公式虽然仍可沿用，但粒子的质量 m 不再为常量，而是随速度趋于光速而增加的，因而回旋周期将变长，回旋频率将减小。

(2) 磁聚焦

①讨论 v_0 与 B 之间有任何夹角时, 带负电荷粒子的运动规律

如图 7-15 所示, 设在均匀磁场中的磁感强度 B 的方向沿 z 轴正向, 带电粒子的初速 v_0 与 B 之间夹角为 θ .

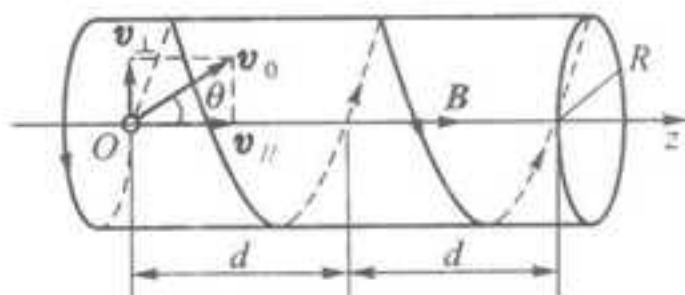


图 7-15 带电粒子在均匀磁场中的螺旋运动

a. 将初速度 v_0 分解为平行于 B 的纵向分矢量 $v_{||}$ 和垂直于 B 的横向分矢量 v_{\perp} .

它们的值分别为 $v_{||} = v_0 \cos \theta$ 和 $v_{\perp} = v_0 \sin \theta$.

b. 速度的横向分矢量 v_{\perp} 在磁场作用下将使粒子在垂直于 B 的平面内作匀速圆周运动, 而速度的纵向分矢量 $v_{||}$ 则不受磁场的影响, 使粒子沿 z 轴作匀速直线运动.

c. 带电粒子同时参与这两个运动的结果, 它将沿螺旋线向前运动. 螺旋线的半径为

$$R = \frac{mv_{\perp}}{qB}$$

回旋周期为

$$T = \frac{2\pi R}{v_{\perp}} = \frac{2\pi m}{qB}$$

把粒子回转一周所前进的距离称为螺距, 则其值为

$$d = v_{||} T = \frac{2\pi m v_{||}}{qB}$$

d. 结论为螺距 d 与 v_{\perp} 无关, 只与 $v_{||}$ 成正比.

②利用上述结果实现磁聚焦

a. 如图 7-16 所示, 在均匀磁场中某点 A 发射一束初速相差不大的带电粒子, 它们的 v_0 与 B 之间的夹角 θ 不尽相同, 但都很小, 于是这些粒子的横向速度 v_{\perp} 略有差异, 而纵向速度 $v_{||}$ 却近似相等.

b. 这样这些带电粒子沿半径不同的螺旋线运动, 但它们的螺距却是近似相等的, 即经距离 d 后都相交于屏上同一点 P . 这个现象与光束通过光学透镜聚焦的现象很相似, 故称之为磁聚焦现象.

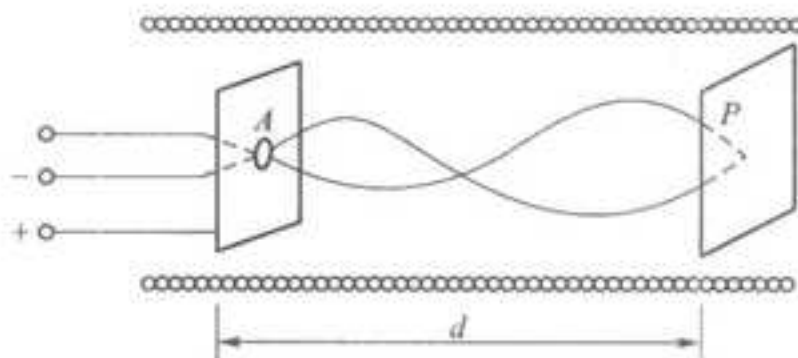


图 7-16 磁聚焦的原理

八、载流导线在磁场中所受的力

1. 安培力

(1) 安培定律

安培定律是指磁场对电流元 $I dl$ 作用的力，在数值上等于电流元的大小、电流元所在处的磁感强度大小以及电流元 $I dl$ 和磁感强度 B 之间的夹角 φ 的正弦之乘积的规律。

(2) 安培力

安培力是指磁场对电流元作用的力。

(3) 安培力方向的判定

安培力的方向判定方法：右手四指由 $I dl$ 经小于 180° 的角弯向 B ，这时大拇指的指向就是安培力的方向。

(4) 安培力的表示

若用矢量式表示安培定律，则有

$$dF = I dl \times B$$

有限长载流导线所受的安培力，等于各电流元所受安培力的矢量叠加

$$F = \int_l dF = \int_l I dl \times B$$

上式表明，安培力是作用在整个载流导线上，而不是集中作用于一点上的。

2. 磁场作用于载流线圈的磁力矩

如图 7-17 所示，在磁感强度为 B 的均匀磁场中，有一刚性矩形载流线圈 $MNOP$ ，它的边长分别为 l_1 和 l_2 ，电流为 I ，流向自 $M \rightarrow N \rightarrow O \rightarrow P \rightarrow M$ 。设线圈平面的单位正法向矢量 e_n 的方向与磁感强度 B 方向之间的夹角为 θ ，即线圈平面与 B 之间夹角为 ϕ ($\phi + \theta = \pi/2$)，并且 MN 边及 OP 边均与 B 垂直。

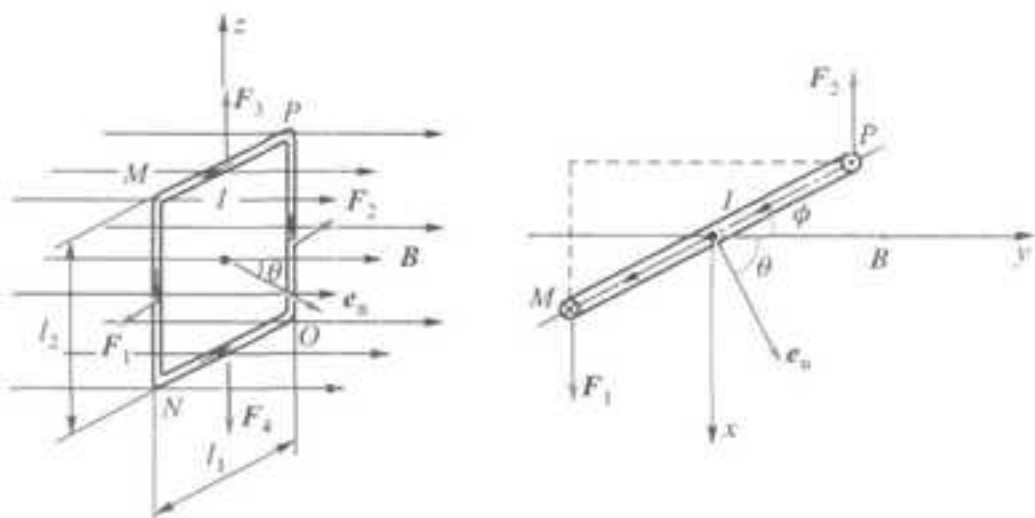


图 7-17 矩形载流线圈在均匀磁场中所受的磁力矩

(1) 磁场对导线 NO 段和 PM 段作用力的大小分别为

$$F_4 = BIl_1 \sin \phi$$

$$F_3 = BIl_1 \sin(\pi - \phi) = BIl_1 \sin \phi$$

F_3 和 F_4 这两个力大小相等、方向相反，并且在同一直线上，所以对整个线圈来讲，它们的合力及合力矩都为零。

(2) 导线 MN 段和 OP 段所受磁场作用力的大小则分别为

$$F_1 = BIl_2, F_2 = BIl_2$$

这两个力大小相等，方向亦相反，但不在同一直线上，它们的合力虽为零，但对线圈要产生磁力矩

$M = F_1 l_1 \cos \phi$ 。由于 $\phi = \pi/2 - \theta$ ，所以 $\cos \phi = \sin \theta$ ，则有

$$M = F_1 l_1 \sin \theta = BIl_2 l_1 \sin \theta$$

或

$$M = BIS \sin \theta$$

式中 $S = l_1 l_2$ 为矩形线圈的面积, 线圈的磁矩 m 为 $m = IS e_n$.

(3) 因为角 θ 是 e_n 与磁感强度 B 之间的夹角, 所以上式用矢量表示则为

$$M = I S e_n \times B = m \times B$$

如果线圈不只一匝, 而是 N 匝, 那么线圈所受的磁力矩应为

$$M = N I S e_n \times B \quad (7-3)$$

①当载流线圈的 e_n 方向与磁感强度 B 的方向相同 (即 $\theta = 0^\circ$), 亦即磁通量为正向极大时, $M = 0$, 磁力矩为零, 此时线圈处于平衡状态[图 7-18 (a)];

②当载流线圈的 e_n 方向与磁感强度 B 的方向相垂直 (即 $\theta = 90^\circ$), 亦即磁通量为零时, $M = NBIS$, 磁力矩最大[图 7-18 (b)];

③当载流线圈的 e_n 方向与磁感强度 B 的方向相反 (即 $\theta = 180^\circ$) 时, $M = 0$, 也没有磁力矩作用在线圈上[图 7-18 (c)], 不过, 在这种情况下, 只要线圈稍稍过一个微小角度, 它就会在磁力矩作用下离开这个位置, 而稳定在 $\theta = 0^\circ$ 时的平衡状态;

④磁场对载流线圈作用的磁力矩, 总是要使线圈转到它的 e_n 方向与磁场方向相一致的稳定平衡位置.

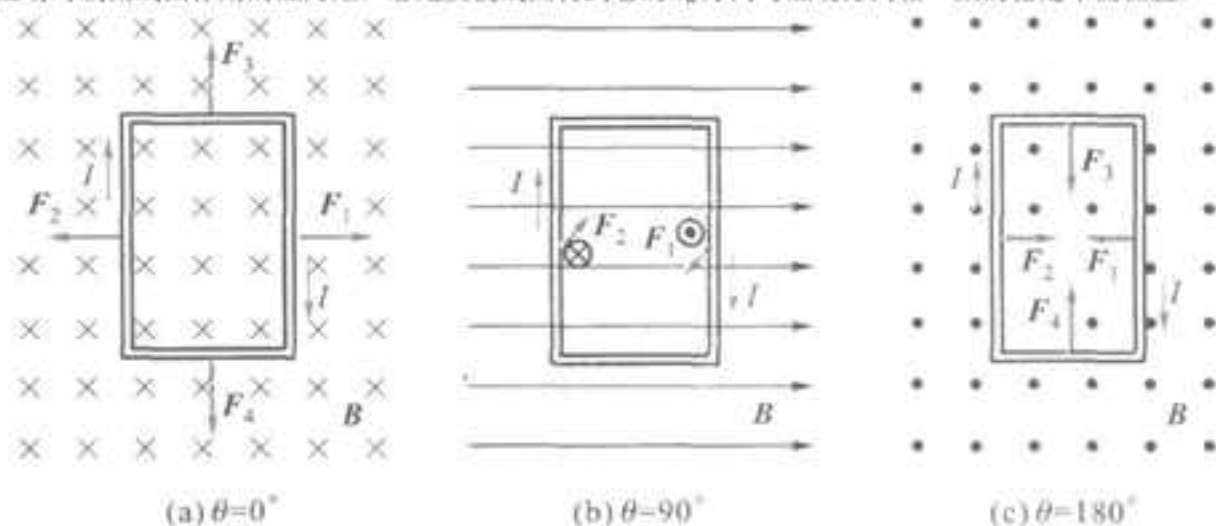


图 7-18 载流线圈的 e_n 方向与磁场方向成不同角度时的磁力矩

注意: 式 (7-3) 虽然是从矩形线圈推导出来的, 但可以证明它对任意形状的平面线圈都是适用的.

九、磁场中的磁介质

1. 磁介质磁化强度

(1) 磁介质

①磁介质是指一切处于磁场中能够被磁化的物质. 磁化了的磁介质会激起附加磁场, 对原磁场产生影响.

②不同的磁介质在磁场中的表现很不相同. 假设在真空中某点的磁感强度为 B_0 , 放入磁介质后, 因磁介质被磁化而建立的附加磁感强度为 B' , 那么该点的磁感强度应 B 为这两个磁感强度的矢量和, 即

$$B = B_0 + B'$$

③磁介质分为顺磁质、抗磁质和铁磁质. 附加磁感强度 B' 的方向和大小随磁介质而异.

a. 加入顺磁质后, B' 的方向与 B 的方向相同, 使得 $B > B_0$;

b. 加入抗磁质后, B' 的方向与 B 的方向相反, 使得 $B < B_0$. 无论是顺磁质还是抗磁质, 附加磁感强度的值 B' 都较 B_0 要小得多, 它对原来磁场的的影响极为微弱. 所以, 顺磁质和抗磁质统称为弱磁性物质.

c. 铁磁质的附加磁感强度 B' 的方向虽和 B_0 的方向相同, 但 B' 的值却要比 B_0 的值大很多, 并且不是常量. 铁磁质能显著地增强磁场, 是强磁性物质.

(2) 顺磁质和抗磁质的磁化

①分子电流学说

- a. 在物质的分子中，每个电子都绕原子核作轨道运动，从而使之具有轨道磁矩
- b. 电子本身有自旋，因而会具有自旋磁矩。
- c. 分子的固有磁矩是指一个分子内所有电子全部磁矩的矢量和，简称分子磁矩，用符号 m 表示，分子磁矩可用一个等效的圆电流来表示。

注意：分子电流与导体中导电的传导电流有区别，构成分子电流的电子只作绕核运动，它们不是自由电子。

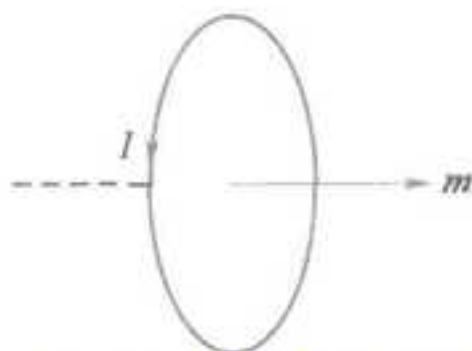


图 7-19 分子圆电流与分子磁矩

② 顺磁性物质

- a. 在顺磁性物质中，虽然每个分子都具有磁矩 m ，在没有外磁场时，各分子磁矩 m 的取向是无规的，因而在顺磁质中任一宏观小体积内，所有分子磁矩的矢量和为零，致使顺磁质对外不显现磁性，处于未被磁化的状态。

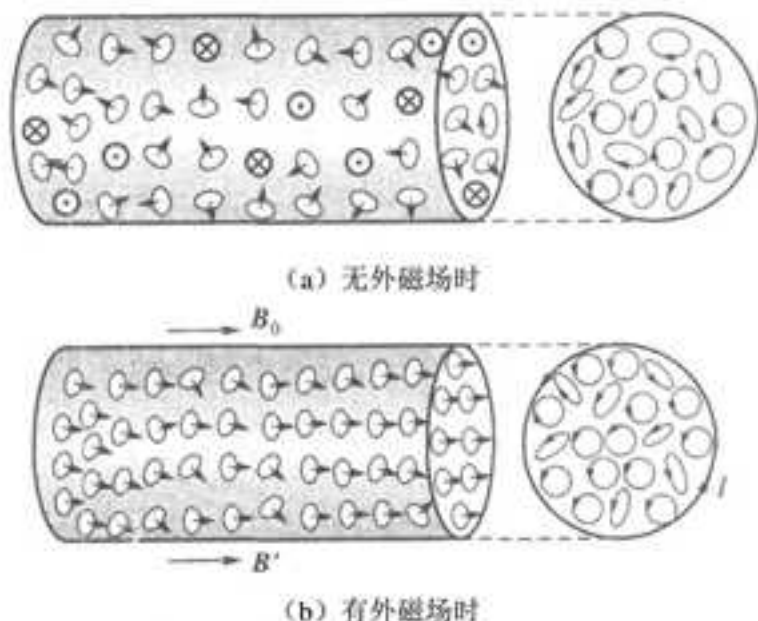


图 7-20 顺磁质中分子磁矩的取向

- b. 当顺磁性物质处在外磁场中时，各分子磁矩都要受到磁力矩的作用，在磁力矩作用下，各分子磁矩的取向都具有转到与外磁场方向相同的趋势，这样，顺磁质就被磁化了。

- c. 在顺磁质中因磁化而出现的附加磁感强度 B' 与外磁场的磁感强度 B_0 的方向相同，在外磁场中，顺磁质内的磁感强度 B 的大小为

$$B = B_0 + B'$$

③ 抗磁质物质

- a. 在没有外磁场作用时，虽然分子中每个电子的轨道磁矩与自旋磁矩都不等于零，但分子中全部电子的轨道磁矩与自旋磁矩的矢量和却等于零，即分子固有磁矩为零，所以，在没有外磁场时，抗磁质并不显现出磁性；

- b. 在外磁场作用下，分子中每个电子的轨道运动和自旋运动都将发生变化，从而引起附加磁矩 Δm ，附加磁矩 Δm 的方向必是与外磁场 B_0 的方向相反；

- c. 在抗磁质中，就要出现与外磁场 B_0 方向相反的附加磁场 B' ，于是，抗磁质内的磁感强度 B 的值，要比 B_0 略小一点，即

$$B = B_0 - B'$$

④磁化强度

a. 磁介质的磁化或是由于在外磁场作用下分子磁矩的取向发生了变化(即产生附加磁矩),或是在外磁场作用下产生附加磁矩;

b. 磁化强度是指磁介质中单位体积内分子的合磁矩来表示介质的磁化情况,用符号 M 表示. 在均匀磁介质中取小体积 ΔV , 在此体积内分子磁矩的矢量和为 $\sum m$, 那么磁化强度为

$$M = \frac{\sum m}{\Delta V}$$

c. 在国际单位制中,磁化强度的单位为安培每米,符号为 $A \cdot m^{-1}$.

2. 磁介质中的安培环路定理磁场强度

(1) 磁介质中的磁场安培环路定理是指磁场强度沿任意闭合回路的线积分,等于该回路所包围的传导电流的代数和,可表示为

$$\oint_l H \cdot dl = \sum I$$

$$H = \frac{B}{\mu_0} - M$$

(2) 线性磁介质中有

$$M = \kappa H \quad 1 + \kappa = \mu_r, \quad \mu_0 \mu_r = \mu$$

于是

$$B = \mu H$$

① 磁场强度的环流为

$$\oint_l H \cdot dl = \sum I$$

② 磁感强度的环流则为

$$\oint_l B \cdot dl = \mu_0 \mu_r \sum I$$

可知磁场中磁感强度的环流与磁介质有关,而磁场强度的环流则只与传导电流有关.

3. 铁磁质

(1) 磁畴居里点

① 磁畴是指铁磁质内电子间因自旋引起的相互作用而使内部形成的一些微小的自发磁化区域.

② 居里点是指因为温度的升高,铁磁质的磁化能力逐渐减小直至完全消失时的温度,此时铁磁质退化成顺磁质. 这个温度又称居里温度.

③ 因为铁磁质中自发磁化区域因剧烈的分子热运动而遭破坏,磁畴瓦解,铁磁质的铁磁性消失,过渡到顺磁质.

(2) 磁化曲线磁滞回线

顺磁质的 B 与 H 的关系是线性关系,因为顺磁质的磁导率 μ 很小,是常量,不随外磁场的改变而变化.

铁磁质的磁导率 μ 会随磁场强度 B 的改变而变化,它的磁导率比顺磁质的磁导率大得多.

如图 7-21 中的磁化曲线,从曲线中可以看出 B 与 H 之间是非线性关系.

① 当 H 从零逐渐增大时, B 沿 OPN 增长,点 P 所对应的 B 值一般称为饱和磁感强度 B_m . 这时,在铁磁质中,几乎所有磁畴都已沿着外磁场方向排列了,这时的磁场强度用 $+H_m$ 表示.

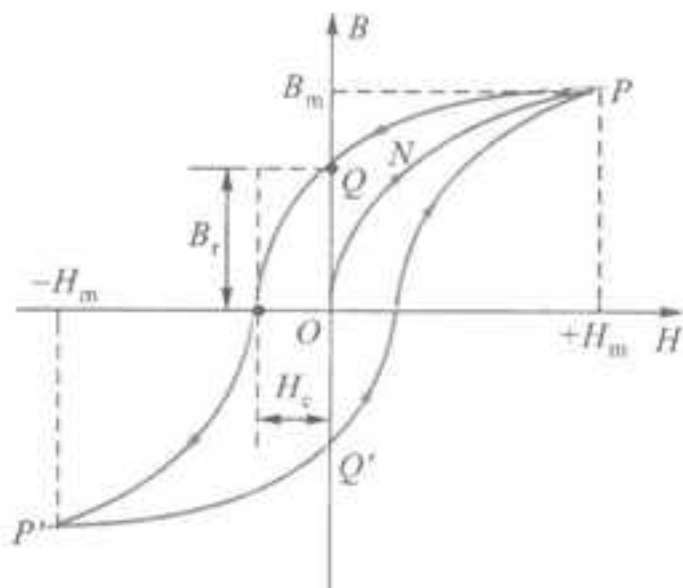


图 7-21 磁滞回线

②当外磁场由 $+H_m$ 逐渐减小时，磁感强度 B 并不沿起始曲线 ONP 减小，而是沿曲线 PQ 比较缓慢地减小，这种 B 的变化落后于 H 的变化的现象，称为磁滞现象，简称磁滞。

③由于磁滞的缘故，当磁场强度减小到零时，磁感强度 B 并不等于零，而是仍有一定的数值 B_r ， B_r 称为剩余磁感强度，简称剩磁。

④随着反向磁场的增加， B 逐渐减小，当达到 $H=-H_c$ 时， B 等于零，这时铁磁质的剩磁就消失了，铁磁质也就不显现磁性，通常把 H_c 称为矫顽力，它表示铁磁质抵抗去磁的能力。

⑤当反向磁场继续不断增强到 $-H_m$ 时，材料的反向磁化同样能达到饱和点 P' ，此后，反向磁场逐渐减弱到零， $B-H$ 曲线便沿 $P'Q'$ 变化，以后，正向磁场增强到 $+H_m$ 时， $B-H$ 曲线就沿 $Q'P$ 变化，从而完成一个循环。

所以，由于磁滞， $B-H$ 曲线就形成一个闭合曲线，这个闭合曲线称为磁滞回线，铁磁质在交变磁场中被反复磁化时，磁滞效应是要损耗能量的，而所损耗的能量与磁滞回线所包围的面积有关，面积越大，能量的损耗也越多。

(3) 铁磁性材料

①金属磁性材料

a. 金属磁性材料是指由金属合金或化合物制成的磁性材料，绝大部分是以铁、镍或钴为基础，再加入其它元素经过高温熔炼、机械加工和热处理而制成。

b. 金属磁性材料在高温、低频、大功率等条件下，有广泛的应用，但在高频范围，它的应用则受到限制。

c. 金属磁性材料可分为硬磁、软磁和压磁材料等，不同铁磁性物质的磁滞回线形状有很大差异，图 7-22 给出三种不同铁磁材料的磁滞回线。

第一，对图 7-22 (a)，软磁材料的特点是相对磁导率 μ_r 和饱和磁感强度 B_m 一般都比较大，但矫顽力 H_c 比硬磁质小得多，磁滞回线所包围的面积很小，磁滞特性不显著。

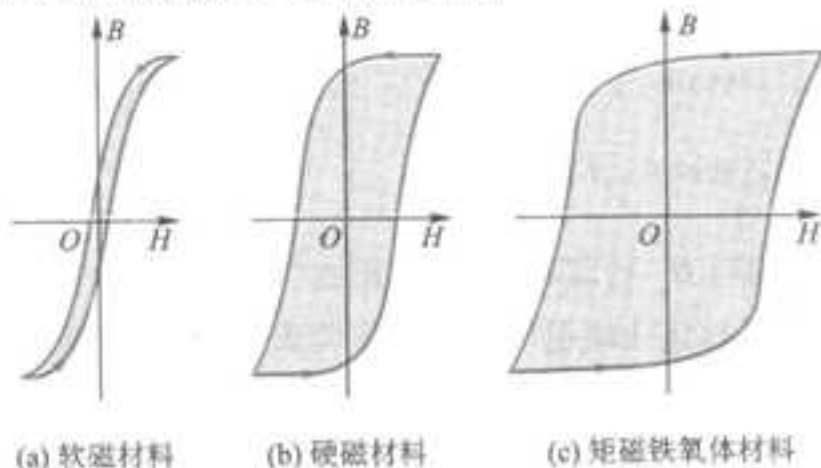


图 7-22 不同铁磁质的磁滞回线

第二，对图 7-22 (b)，硬磁材料又称永磁材料，它的特点是剩磁 B_r 和矫顽力 H_c 都比较大，磁滞回线所包

围的面积也就大，磁滞特性非常显著。

②非金属磁性材料——铁氧体

铁氧体的特点是不仅具有高磁导率，而且有很高的电阻率，所以铁氧体的涡流损失小，常用于高频技术中。图 7-22 (c) 是矩磁铁氧体的磁滞回线，从图中可以看出回线近似矩形。

(4) 磁屏蔽

①磁感线折射是指把磁导率不同的两种磁介质放到磁场中，在它们的交界面上磁场要发生突变，磁感强度 B 的大小和方向都发生变化的现象。

②磁屏蔽是指通过把用磁性材料做成的罩放在外磁场中，使得罩壳内的磁场很少的过程。如图 7-23， A 为一磁导率很大的软磁材料做成的罩，放在外磁场中，由于罩的磁导率 μ 比 μ_0 大得多，所以绝大部分磁感线从罩壳的壁内通过，而罩壳内的空腔中，磁感线是很少的，这就达到了磁屏蔽。

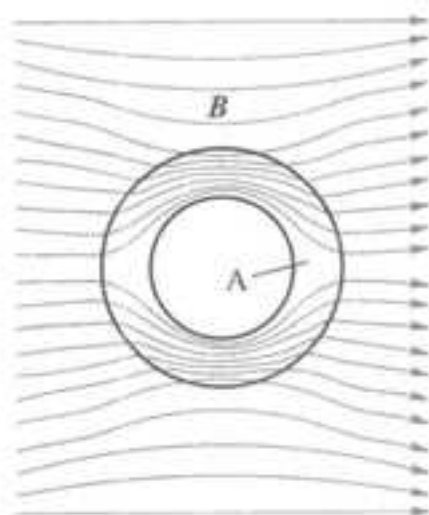


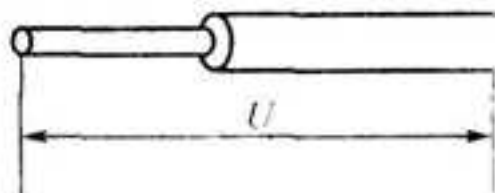
图 7-23 磁屏蔽示意图

7.2 课后习题详解

一、问题

7-1 两根截面不相同而材料相同的金属导体如问题 7-1 图所示串接在一起，两端加一定电压，问通过这两根导体的电流密度是否相同？

答：两根导体串接时，通过两金属导体的电流相等。由于两金属导体的截面不同，因此垂直通过单位截面的电流，即电流密度是不同的。



问题 7-1 图

7-2 一铜线表面涂以银层，若在导线两端加上给定的电压，此时铜线和银层中的电流密度是否相同？

答：设铜线和银层材料及截面都是均匀的且长度相同。当导线两端加上给定的电压时，相当于两个电阻并联。此时铜线和银层中的电场强度 E 相同，但两种材料的电导率 r 不同。由欧姆定律的微分形式 $j=rE$ 可知铜线和银层中的电流密度不同。

7-3 电池组所给的电动势的方向是否决定于通过电池组的电流的流向？

答：否。电池组的电动势的方向是由其自身性质决定的，与外界条件无关。所以它不是由通过电池组电流的流向所决定。

7-4 你能说出一些有关电流元 $I dl$ 激发磁场 $d\mathbf{B}$ 与电荷元 dq 激发电场 $d\mathbf{E}$ 有何异同吗?

答: 电荷元 dq 激发的电场强度

$$d\mathbf{E} = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{e}_r$$

电流元 $I dl$ 激发的磁感强度

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dl \times \mathbf{e}_r}{r^2}$$

(1) 相同之处:

① $d\mathbf{E}$ 与 $d\mathbf{B}$ 都是由元场源激发的场强;

② 两场强都只是空间位置的函数, 都与场源到场点距离的平方成反比。

(2) 不同之处:

① $d\mathbf{E}$ 的大小与 dq 的大小成正比, $d\mathbf{B}$ 的大小不仅与 $I dl$ 的大小成正比, 还与 $I dl$ 和 r 夹角 θ 的正弦 $\sin\theta$ 成正比;

② $d\mathbf{E}$ 的方向与 \mathbf{e}_r 方向相同; $d\mathbf{B}$ 的方向既非 $I dl$ 的方向, 又非 \mathbf{e}_r 的方向, 而是 $I dl \times \mathbf{e}_r$ 的方向。

7-5 有一电流元 $I dl$ 位于直角坐标系的原点 O , 电流的流向沿 Oz 轴正向, 场点 P 的磁感强度 $d\mathbf{B}$ 在 Ox 轴上的分量是下面三个答案中的哪一个?

(1) 0; (2) $-k \frac{I y dl}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$; (3) $k \frac{I x dl}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$ 。

答: 由电流沿 Oz 轴正向流动, 可得电流元 $I dl = I dk$, 场点 P 的位矢 $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, 根据毕奥-萨伐尔定律

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dl \times \mathbf{r}}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & I dl \\ x & y & z \end{vmatrix} = \frac{\mu_0}{4\pi(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} (xI dl \mathbf{j} - yI dl \mathbf{i})$$

$$dB_x = -\frac{\mu_0 y I dl}{4\pi(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \mathbf{i}, \quad dB_y = \frac{\mu_0 x I dl}{4\pi(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \mathbf{j}$$

所以 $d\mathbf{B}$ 在 Ox 轴上的分量是 (2)。

7-6 在球面上竖直和水平的两个圆中通以相等的电流, 电流流向如问题 7-6 图所示, 问球心 O 处磁感强度的方向是怎样的?



问题 7-6 图

答: O 点的磁感强度是两个同心圆形的电流在该点分别产生的磁感强度的矢量和。由于两圆电流的强度相等, 故在 O 点处两个分磁场的大小均为 $B_1 = B_2 = \frac{\mu_0 I}{2R}$; 由右手螺旋法则可知, 铅直圆电流的磁场 B_1 的方向垂直

纸面向里, 水平圆电流的磁场 B_2 的方向竖直向下。合磁场的大小为 $B = \frac{\sqrt{2}\mu_0 I}{2R}$, 方向与 B_1 、 B_2 水平向里方向和竖直向下方向都成 45° 角。

7-7 如果在 A、B 两点之间有一直导线通以电流 I ，或者在两点之间有一圆弧形导线也通以电流 I ，试问它们在场点 P 所激发的磁场强度有何差别？

答：差别：假如场点 P 没有特殊位置，且两种情况下的导线共面，则它们各自产生的磁感强度方向相同，大小有差异。

7-8 如果用一闭合曲面将一条形磁铁的极包起来。通过此闭合曲面的磁通量是多少？若磁单极被找到，并用同样的闭合曲面把它包围起来，情况又将如何呢？

答：(1) 通过此闭合曲面的磁通量是 0，原因如下：

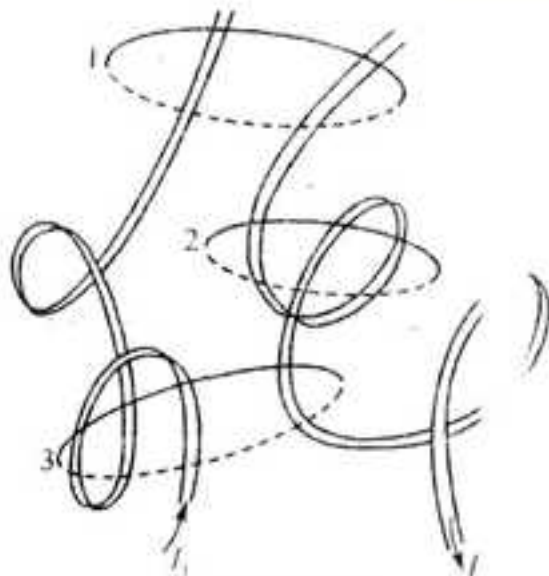
因为磁铁总是存在两个磁极，所以无论闭合面是把一个极包围住，还是把两个极一起包围住，通过闭合面的磁感线既有穿出，又有传进，磁通量都为 0，这也是电磁理论的基础——高斯定理 $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$ 。

(2) 因为磁单极只发出，或只接收磁感线，因此把磁单极包围住的闭合面的磁通量就不会为 0。

7-9 有两无限长的平行载流直导线，电流的流向相同。如果取一平面垂直这两根导线，此平面上的磁感线分布大致是怎样的？

答：由于无限长载流直导线的磁感线是环绕直导线的半径不同的同心圆，在垂直于这两根导线的平面上磁感线分布大致是：在两根导线的连线上，各处的磁感强度 \mathbf{B} 与连线相垂直；在两根导线连线上的中垂线上，各处的磁感强度 \mathbf{B} 与连线平行；在两根导线连线上的中点处，磁感强度 $\mathbf{B} = 0$ 。

7-10 电流分布如问题 7-10 图所示，图中有三个环路 1、2 和 3。磁感强度沿其中每一个环路的线积分各为多少？



问题 7-10 图

解：设各网路均沿逆时针方向绕行，由安培环路定理得沿环路 1 的线积分

$$\oint_{l_1} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I_1$$

沿环路 2 的线积分

$$\oint_{l_2} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = -\mu_0 I_2$$

沿环路 3 的线积分

$$\oint_{l_3} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 (2I_1 - I_2)$$

7-11 在下面三种情况下, 能否用安培环路定律来求磁感强度? 为什么? (1) 有限长载流直导线产生的磁场; (2) 圆电流产生的磁场; (3) 两无限长同轴载流圆柱面之间的磁场。

答: (1) 安培环路定理 $\oint_l \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \sum I_i$ 只对闭合的稳恒电流适用, 对于有限长载流直导线, 不能用

安培环路定律来求解, 因为有限长载流直导线是非闭合的, 此种情况只能用毕奥-萨伐尔定律求解。如果有限长载流直导线可以构成闭合回路, 此情形下安培环路定理虽然适用, 但这一闭合电流的磁场无对称性, 由安培环路定理只能求出 \mathbf{B} 的环流, 而很难求出 \mathbf{B} 的分布。

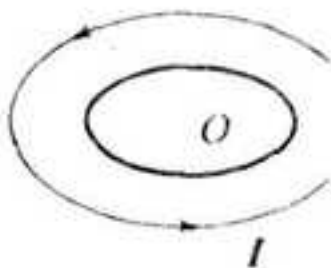
(2) 圆电流产生的磁场, 不能用安培环路定律来求解, 因为其磁场的空间分布具备安培环路定理所要求的对称性, 所以找不到合适的积分回路。

(3) 因无限长同轴载流圆柱面的磁场具有轴对称性, 磁感线是在垂直于圆柱面轴线平面内且以轴线为中心的同轴圆, 可选磁感线作积分回路。该回路上各点 \mathbf{B} 的量值相等, 方向与该点的 $d\mathbf{l}$ 方向一致, \mathbf{B} 可以从安培环路定理的积分号内提出来, 应用安培环路定理很容易求出 \mathbf{B} 的分布。

7-12 如问题 7-12 图所示, 在一个圆形电流的平面内取一个同心的圆形闭合回路, 并使这两个圆同轴, 且互相平行。由于此闭合回路内不包含电流, 所以把安培环路定理用于上述闭合回路, 可得

$$\oint_l \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

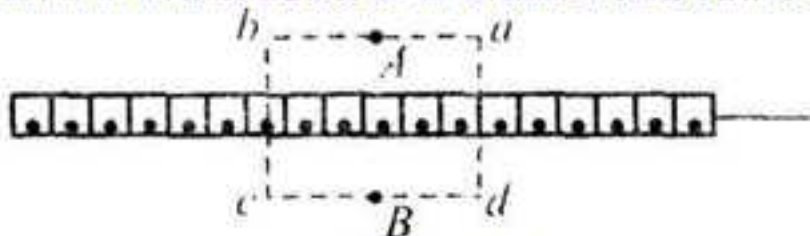
由此结果能否说在闭合回路上各点的磁感强度为零?



问题 7-12 图

答: 否。由毕奥-萨伐尔定律可知, 在圆电流平面上的磁感强度 \mathbf{B} 的方向垂直该平面, 所以不论闭合回路上 \mathbf{B} 是否为零, \mathbf{B} 总存在 $\mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = 0$, 故有 $\oint_l \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = 0$ 。所以上述结果只表明 \mathbf{B} 沿圆形闭合回路上的线积分为零, 而不能说明圆电流在此闭合回路上各点的磁感强度为零。

7-13 如问题 7-13 图所示, 设在水平面内有许多根长直载流导线彼此紧接着排成一行, 每根导线中的电流相同。你能求出邻近平面中部 A、B 两点的磁感强度吗? A、B 两点附近的磁场可看作均匀磁场吗?



问题 7-13 图

答: 对于邻近平面中部的 A、B 两点而言, 由许多根载流长直导线彼此紧密排列构成的载流导体, 可看作是一个无限大的载流导电平面。取 x 轴如图向右, 依照右手螺旋定则, A、B 两点附近的磁感线是一系列与 x 轴平行的直线, 同一条磁感线上各点的磁感强度大小相等, A 点与 B 点附近的磁感线反向平行。过 A 点与 B 点作如图所示的矩形回路 $abcd$ 为积分环路。由分析可知, 回路上 ab 段和 cd 段上磁感强度 $B_1 = B_2 = B$, bc 段和 da 段上磁感强度 B_3 、 B_4 与积分路径正交。若 $\overline{ab} = L$, 单位宽度上流动的电流为 j , 则

$$\begin{aligned}\oint_l \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} &= \int_{ab} \mathbf{B}_1 \cdot d\mathbf{l} + \int_{cd} \mathbf{B}_2 \cdot d\mathbf{l} + \int_{bc} \mathbf{B}_3 \cdot d\mathbf{l} + \int_{da} \mathbf{B}_4 \cdot d\mathbf{l} \\ &= B \int_{ab} d\mathbf{l} + B \int_{cd} d\mathbf{l} = 2BL\end{aligned}$$

回路 $abcd$ 所包围的电流 $\sum I = jL$ ，由安培环路定理得

$$2BL = \mu_0 jL$$

A、B 两点磁感强度的大小为

$$B = \frac{\mu_0 j}{2}$$

磁感强度 \mathbf{B} 的方向可由右手螺旋定则确定，由上式可知，A、B 两点附近的磁场可看作均匀磁场。

7-14 如果一个电子在通过空间某一区域时，电子运动的路径不发生偏转，我们能否说这个区域没有磁场？

答：电子在某一区域内作直线运动，表明电子在该区域内所受合力为零或垂直运动方向所受合力为零，所以不能据此判断该区域的磁场为零。若该区域除磁场外，不存在其它对电子可能有作用力的场，当电子平行于磁场方向进入磁场时，根据 $\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ ，可知 $\mathbf{F} = 0$ 。

7-15 方程 $\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ 中三个矢量，哪些矢量始终是正交的？哪些矢量之间可以有任意角度？

答：由 $\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ 可知， \mathbf{F} 始终与 \mathbf{v} 、 \mathbf{B} 正交，即垂直于 \mathbf{v} 、 \mathbf{B} 所在平面， \mathbf{v} 和 \mathbf{B} 之间可以有任意角度。

7-16 一质子束发生了侧向偏转，造成这个偏转的原因可否是电场？可否是磁场？你怎样判断是哪一种场对它的作用？

答：质子带有正电荷，在电场中受到电场力 $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$ 的作用。当质子运动速度 \mathbf{v} 的方向不与电场 \mathbf{E} 方向平行时，质子受到一侧向力，质子束将发生侧向偏转。当质子在磁场中运动时，它受到洛伦兹力 $\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ 的作用，当质子运动速度 \mathbf{v} 的方向不与磁场 \mathbf{B} 的方向平行时，质子也受到一侧向力，质子束也将发生侧向偏转。但是洛伦兹力对质子不做功，质子的动能不变。所以使质子束发生侧向偏转的原因可以是电场，也可以是磁场。一般说来，可从质子的运动轨迹来判断。若轨迹为抛物线，则仅存在电场。同时，电场力对质子做功，质子的动能发生变化；若轨迹为圆弧或螺旋线，则仅存在磁场。由于洛伦兹力对质子不做功，质子的动能不变。

7-17 均匀磁场的磁感强度 \mathbf{B} 的方向竖直向下，如果有两个电子以大小相等、方向相反的速度沿水平方向射出，试问这两个电子作何运动？如果一个电子，一个是正电子，它们的运动又如何？

答：因电子的速度 \mathbf{v} 垂直于 \mathbf{B} ，又因两电子速度方向相反，由洛伦兹力 $\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ 可知，两电子在入射水平面线两侧的水平面内作转向相反的匀速圆周运动。如果一个电子，一个是正电子，它们将在入射水平面线同一侧的水平面内作转向相反的匀速圆周运动。

7-18 在均匀磁场中有一电子枪，它可发射出速率分别为 v 和 $2v$ 的两个电子这两个电子的速度方向相同，且均与 \mathbf{B} 垂直。试问这两个电子各绕行一周所需的时间是否有差别？

答：因电子的速度 \mathbf{v} 垂直于 \mathbf{B} ，由洛伦兹力 $\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ 可知，两电子在垂直于磁场的水平面内作匀速圆周运动，它们作圆周运动的半径分别为

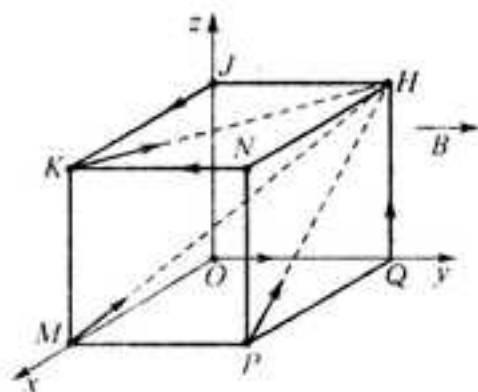
$$R_1 = \frac{mv}{eB} \quad R_2 = \frac{2mv}{eB}$$

两电子经磁场偏转后又回到出发点，它们作圆周运动的周期分别为

$$T_1 = \frac{2\pi R_1}{v} = \frac{2\pi m}{eB} \quad T_2 = \frac{2\pi R_2}{2v} = \frac{2\pi m}{eB}$$

可见 $T_1 = T_2$ ，所以速率不同的电子同时出发，偏转后又同时回到各自的出发点。

7-19 如问题 7-19 图所示, 在立方体的角上有一些速度大小为 v 的正电荷 q , 速度的方向如图中箭头所示。在立方体的区域内, 有一磁感强度为 B 的均匀磁场, 它的方向沿正 y 轴的方向。试问作用在每个电荷上的力的大小和方向如何?



问题 7-19 图

答: 由洛伦兹力 $F = qv \times B$ 可知, 各处正电荷 q 受力如下:

O 处正电荷受力: $F_O = qvB \sin 0^\circ = 0$

J 处正电荷受力: $F_J = qvB \sin 90^\circ = qvB$, 方向沿 z 轴正向

K 处正电荷受力: $F_K = qvB \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} qvB$, 方向沿 z 轴负向

N 处正电荷受力: $F_N = qvB \sin 180^\circ = 0$

P 处正电荷受力: $F_P = qvB \sin 90^\circ = qvB$, 方向由 N 指向 Q

Q 处正电荷受力: $F_Q = qvB \sin 90^\circ = qvB$, 方向沿 x 轴负向

M 处正电荷受力: $F_M = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} qvB = \frac{\sqrt{6}}{3} qvB$, 方向由 K 指向 O.

7-20 在无限长的载流直导线附近取两点 A 和 B, A、B 到导线的垂直距离均相等。若将一电流元 Idl 先后放置在这两点上, 试问此电流元所受到的磁力是否一定相同?

答: 不一定相等。由 $dF = Idl \times B$ 可知, 电流元所受安培力的大小 $dF = BI dl \sin \alpha$ 。将一电流元 Idl 先后放置在这两点上, 因 A、B 两点磁感强度的大小相等, 若 Idl 与 A、B 两点的磁感强度 B 的夹角 α 相同, 则 dF_A 与 dF_B 大小相等; 否则两者不等。

7-21 安培定律 $dF = Idl \times B$ 中的三个矢量, 哪两个矢量始终是正交的? 哪两个矢量之间可以有任意角度?

答: 由 $dF = Idl \times B$ 可知, dF 始终与 Idl 、 B 正交, Idl 和 B 之间可以有任意角度。

7-22 一有限长的载流直导线在均匀磁场中沿着磁感应线移动, 磁力对它是否总是做功? 什么情况下磁力做功? 什么情况下磁力不做功?

答: 不一定。由安培定律可知, 当有限长载流直导线的长度方向垂直于磁场放置, 它受到的磁力 $F = IBL$, 此时导线在均匀磁场中沿着磁感应线移动, 磁力对它做功; 当有限长载流直导线的长度方向平行于磁场放置, 它受到的磁力 $F = 0$, 导线在均匀磁场中沿着磁感应线移动时, 磁力不做功。

7-23 如问题 7-23 图 (a), 在空间有三根同样的导线, 它们相互间的距离相等, 通过它们的电流大小相等、流向相同。设除了相互作用的磁力以外, 其他的影响可以忽略。它们将如何运动?



问题 7-23 图

答：如问题 7-23 图 (b) 所示，导线 2 处于导线 1 的磁场 B_1 和导线 3 的磁场 B_3 中， B_1 与 B_3 大小相等，方向如图所示。根据安培定律，导线 1 作用于导线 2 的力 F_{21} 与导线 3 作用于导线 2 的力 F_{23} 大小相等，方向如图所示。导线 2 所受合力 $F_2 = F_{21} + F_{23}$ ，显然 F_2 指向由三导线连线构成的二三角形中心。同理， F_1 、 F_3 也指向该中心，所以三导线在 F_1 、 F_2 和 F_3 的作用下，都向着三角形中心运动。

7-24 在均匀磁场中，有两个面积相等、通过电流相同的线圈，一个是三角形，另一个是矩形。这两个线圈所受的最大磁力矩是否相等？磁力的合力是否相等？

答：载流线圈在均匀磁场所受磁力矩 $M = m \times B$ ， $m = ISe_n$ ，最大磁力矩 $M = ISB$ ，可见，对于面积相等、通过电流相同的两个线圈，在均匀磁场中所受的最大磁力矩相等。在均匀外磁场中，任何形状的载流平面线圈作为整体都不受力，即均匀磁场作用于线圈的合力都等于零，与线圈的方位无关。

7-25 如均匀磁场的方向铅直向下，一矩形导线回路的平面与水平面一致。试问这个回路上的电流沿哪个方向流动时，它才处于稳定平衡状态？

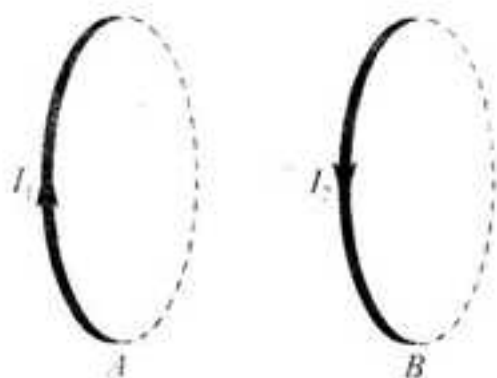
答：线圈在均匀磁场所受磁力矩 $M = m \times B$ ， $m = ISe_n$ ，当 m 与 B 的方向一致时， $M = 0$ ，线圈处于稳定平衡状态。如问题 7-25 图所示，因 m 的方向即 e_n 的方向，它与电流的流向满足右手螺旋定则，所以回路上的电流沿逆时针方向流动时， m 与 B 的方向一致，线圈处于稳定平衡状态。



问题 7-25 图

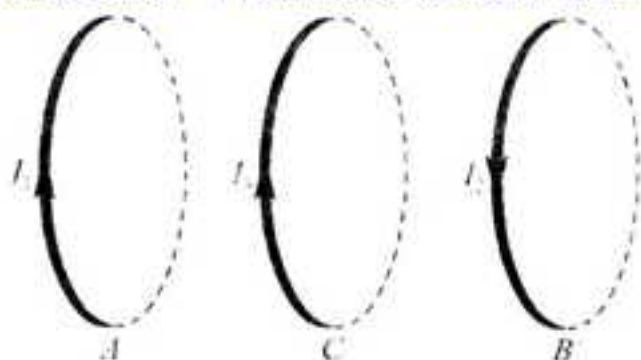
7-26 如问题 7-26 图所示，有两个圆电流 A 和 B 平行放置。这两个圆电流间是吸引还是排斥？

答：由右手螺旋法则可知，圆电流 A 激发的磁场左侧为 N 极，右侧为 S 极；圆电流 B 激发的磁场右侧为 N 极，左侧为 S 极。因两电流之间同为 S 极，由同极相斥可知，这两个圆电流相互排斥。



问题 7-26 图

7-27 若在上题两圆电流 A 和 B 之间放置一平行的圆电流 C (如问题 7-27 图), 这个圆电流如何运动?



问题 7-27 图

答: 圆电流 A 和 B 的磁场同上题分析, 圆电流 C 的磁场同圆电流 A 的磁场。由同极相斥, 异极相吸可知, 圆电流 A 和 C 相互吸引, B 和 C 相互排斥, 所以圆电流 C 向左侧运动。

7-28 在均匀磁场中, 载流线圈的取向与其所受磁力矩有何关系? 在什么情况下, 磁力矩最大? 什么情况下磁力矩最小? 载流线圈处于稳定平衡时, 其取向又如何?

答: 在均匀磁场中, 载流线圈的取向由其法向矢量 e_n 表示, e_n 的方向与电流 I 的流向满足右手螺旋关系。而载流线圈的磁矩 $m = ISe_n$, m 的方向与 e_n 的方向一致。所以载流线圈的取向与其所受磁力矩满足矢量关系 $M = m \times B$ 。当 m 垂直于 B 时, 线圈所受磁力矩最大 $M_{\max} = ISB$; 当 $m \parallel B$ 时, 线圈所受磁力矩最小 $M = 0$; 载流线圈处于稳定平衡时, m 与 B 同方向, 即载流线圈的法线 e_n 与 B 同方向。

7-29 如何使一根磁针的磁性反转过来?

答: 首先将磁针放在火上烧一烧, 这样可以去磁。然后用一磁铁的 N 极去摩擦磁针原来的 N 极, 这样磁针原来的 N 极变为 S 极, 原来的 S 极就变为 N 极。

7-30 为什么装指南针的盒子不是用铁, 而是用胶木等材料做成的?

答: 铁盒对磁场可以起到屏蔽作用, 如果用铁盒装指南针, 指南针将失去它利用地磁场指方向的作用, 所以通常用胶木等材料做指南针的盒子。

7-31 在工厂里搬运烧到赤红的钢锭, 为什么不能用电磁铁的起重机。

答: 电磁铁的铁芯是铁磁质, 铁磁质的磁性主要来源于磁畴的磁矩方向沿外磁场方向的取向排列。当温度升高时, 各磁畴的磁矩方向易趋向混乱而使铁磁质的磁性减小, 因而铁磁质的磁导率明显依赖于温度。当铁磁质的温度超过居里点时, 其磁性会完全消失。一般磁铁被加热到 800 摄氏度就会失去磁性, 所以不能用电磁铁起重机搬运烧到赤红的钢锭。

7-32 变压器的铁芯总是用片状硅钢片叠加起来, 而且片间还要涂上绝缘材料, 并把它们压紧。如果用整块铁芯, 那工艺就简单多了, 成本也大大降低。为什么我们不采用后面这种方法呢?

答：不采用后面这种方法的原因如下：

变压器在工作时，铁芯中的变化磁场在硅钢中会产生涡旋电流，该电流会引起热效应从而影响变压器性能。为了使旋涡电流降至最低，应沿产生涡旋电流的平面的垂直方向将硅钢切片，使产生涡旋电流的端截面非常小，这样能有效地阻止涡旋电流的产生。

二、习题

7-1 两根长度相同的细导线分别多层密绕在半径为 R 和 r 的两个长直圆筒上形成两个螺线管，两个螺线管的长度相同， $R=2r$ ，螺线管通过的电流相同为 I ，螺线管中的磁感强度大小 B_R, B_r 满足 ()

A. $B_R = 2B_r$

B. $B_R = B_r$

C. $2B_R = B_r$

D. $B_R = 4B_r$

【答案】C

【解析】在两根通过电流相同的螺线管中，磁感强度大小与螺线管线圈单位长度的匝数成正比，根据题意，用两根长度相同的细导线绕成的线圈单位长度的匝数之比

$$\frac{n_R}{n_r} = \frac{r}{R} = \frac{1}{2}$$

7-2 一个半径为 r 的半球面如图 7-1 放在均匀磁场中，通过半球面的磁通量为 ()

A. $2\pi r^2 B$

B. $\pi r^2 B$

C. $2\pi r^2 B \cos \alpha$

D. $\pi r^2 B \cos \alpha$

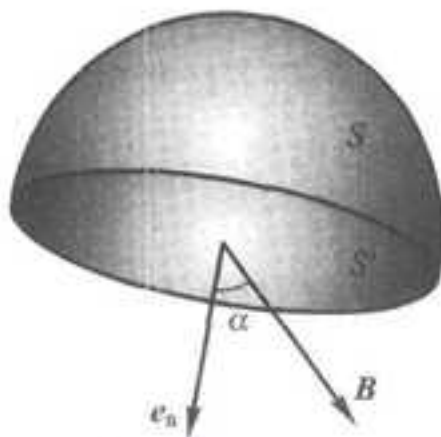


图 7-1

【答案】D

【解析】作半径为 r 的圆 S' 与半球面构成一闭合曲面，根据磁场的高斯定理，磁感线是闭合曲线，闭合曲面的磁通量为零，即穿进半球面 S 的磁通量等于穿出圆面 S' 的磁通量： $\Phi_m = B \cdot S$ 。

7-3 下列说法正确的是 ()

A. 闭合回路上各点磁感强度都为零时，回路内一定没有电流穿过

B. 闭合回路上各点磁感强度都为零时，回路内穿过电流的代数和必定为零

- C. 磁感强度沿闭合回路的积分为零时, 回路上各点的磁感强度必定为零
 D. 磁感强度沿闭合回路的积分不为零时, 回路上任意一点的磁感强度都不可能为零

【答案】B

【解析】由磁场中的安培环路定律, 磁感强度沿闭合回路的积分为零时, 回路上各点的磁感强度不一定为零; 闭合回路上各点磁感强度为零时, 穿过回路的电流代数和必定为零。

7-4 在图 7-2 (a) 和 (b) 中各有一半径相同的圆形回路 L_1 、 L_2 , 圆周内有电流 I_1 、 I_2 , 其分布相同, 且均在真空中, 但在 (b) 图中 L_2 回路外有电流 I_3 , P_1 、 P_2 为两圆形回路上的对应点, 则 ()

- A. $\oint_{L_1} \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{l} = \oint_{L_2} \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{l}, B_{P_1} = B_{P_2}$
 B. $\oint_{L_1} \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{l} \neq \oint_{L_2} \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{l}, B_{P_1} = B_{P_2}$
 C. $\oint_{L_1} \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{l} = \oint_{L_2} \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{l}, B_{P_1} \neq B_{P_2}$
 D. $\oint_{L_1} \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{l} \neq \oint_{L_2} \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{l}, B_{P_1} \neq B_{P_2}$

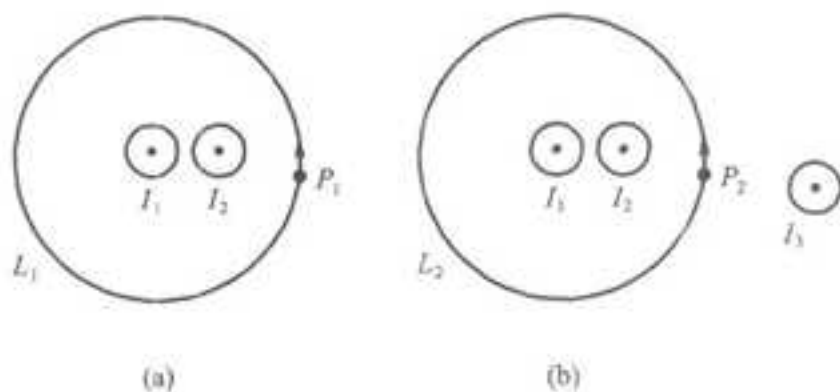


图 7-2

【答案】C

【解析】由磁场中的安培环路定律, 积分回路外的电流不会影响磁感强度沿回路的积分; 但同样会改变回路上各点的磁场分布。

*7-5 半径为 R 的圆柱形无限长载流直导体置于均匀无限大磁介质之中, 若导体中流过的恒定电流为 I , 磁介质的相对磁导率为 μ_r ($\mu_r < 1$), 则磁介质内的磁化强度为 ()

- A. $-(\mu_r - 1)I/2\pi r$
 B. $(\mu_r - 1)I/2\pi r$
 C. $\mu_r I/2\pi r$
 D. $I/2\pi\mu_r r$

【答案】B

【解析】利用安培环路定理可先求出磁介质中的磁场强度, 再由 $\boldsymbol{M} = (\mu_r - 1)\boldsymbol{H}$ 求得磁介质内的磁化强度。

7-6 北京正负电子对撞机的储存环是周长为 240 m 的近似圆形轨道, 当环中电子流强度为 8 mA 时, 在整个环中有多少电子在运行? 已知电子的速率接近光速。

解：一个电子绕存储环近似以光速运动时，对电流的贡献为 $\Delta I = \frac{e}{l/c}$ ，

由 $I = \frac{Nec}{l}$ ，可得环中的电子数

$$N = \frac{Il}{ec} = 4 \times 10^{10}$$

7-7 已知铜的摩尔质量 $M = 63.75 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ ，密度 $\rho = 8.9 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$ ，在铜导线里，假设每一个铜原子贡献出一个自由电子，(1) 为了技术上的安全，铜线内最大电流密度 $j_m = 6.0 \text{ A} \cdot \text{mm}^{-2}$ ，求此时铜线内电子的漂移速率 v_d ；(2) 在室温下电子热运动的平均速率是电子漂移速率 v_d 的多少倍？

解：(1) 铜导线单位体积的原子数为

$$n = N_A \rho / M$$

电流密度为 j_m 时铜线内电子的漂移速率

$$v_d = j_m / ne = j_m M / N_A \rho e = 4.46 \times 10^{-4} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

(2) 室温下 ($T=300 \text{ K}$) 电子热运动的平均速率与电子漂移速率之比为

$$\frac{\bar{v}}{v_d} = \frac{1}{v_d} \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_e}} \approx 2.42 \times 10^8$$

室温下电子热运动的平均速率远大于电子在恒定电场中的定向漂移速率，电子实际的运动是无规热运动和沿电场相反方向的漂移运动的叠加。考虑到电子的漂移速率很小，电信号的信息载体显然不会是定向漂移的电子，实验证明电信号是通过电磁波以光速传递的。

7-8 有两个同轴导体圆柱面，它们的长度均为 20 m ，内圆柱面的半径为 3.0 mm ，外圆柱面的半径为 9.0 mm ，若两圆柱面之间有 $10 \mu\text{A}$ 电流沿径向流过，求通过半径为 6.0 mm 的圆柱面上的电流密度。

解：如图 7-3 所示是同轴柱面的横截面，电流密度 j 对中心轴对称分布，根据恒定电流的连续性，在两个同轴导体之间的任意一个半径为 r 的同轴圆柱面上流过的电流 I 都相等，因此在半径 $r=6.0 \text{ mm}$ 的圆柱面上的电流密度

$$j = I / 2\pi r L = 13.3 \mu\text{A} \cdot \text{m}^{-2}$$

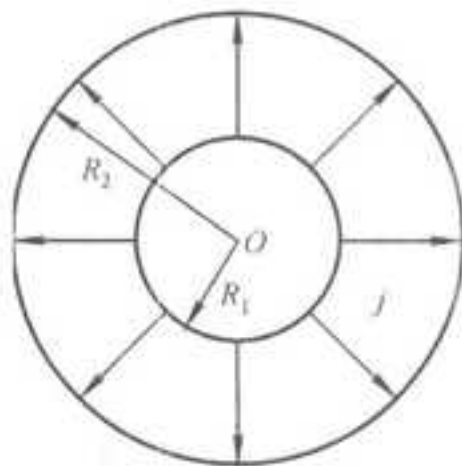


图 7-3

7-9 如图 7-4 所示, 已知地球北极地磁场磁感强度 B 的大小为 $6.0 \times 10^{-5} \text{ T}$. 如设想此地磁场是由地球赤道上一圆电流所激发的, 此电流有多大? 流向如何?

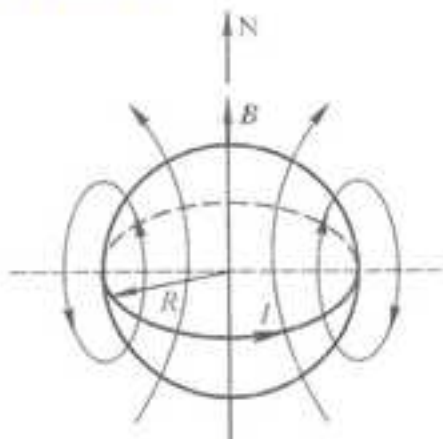


图 7-4

解: 设赤道电流为 I , 圆电流轴线上北极点的磁感强度

$$B = \frac{\mu_0 IR^2}{2(R^2 + R^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I}{4\sqrt{2}R}$$

因此赤道上的等效圆电流为

$$I = \frac{4\sqrt{2}RB}{\mu_0} = 1.73 \times 10^9 \text{ A}$$

由于在地球地磁场的 N 极在地理南极, 根据右手螺旋法则可判断赤道圆电流应该是由东向西流, 与地球自转方向相反.

7-10 如图 7-5 所示, 有两根导线沿半径方向接触铁环的 a、b 两点, 并与很远处的电源相接. 求环心 O 的磁感强度.

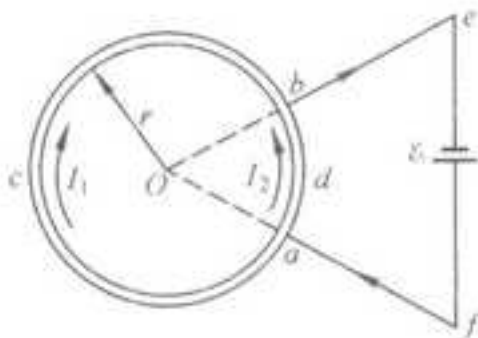


图 7-5

解: 根据叠加原理, 点 O 的磁感强度可视作由 \overline{ef} 、 \overline{be} 、 \overline{fa} 三段直线以及 \widehat{acb} 、 \widehat{adb} 两段圆弧电流共同激发. 由于电源距环较远 $B_{\text{源}} = 0$, 而 \overline{be} 、 \overline{fa} 两段直线的延长线通过点 O, 由于 $Idl \times r = 0$, 由毕-萨定律知 $B_{\text{be}} = B_{\text{fa}} = 0$. 流过圆弧的电流 I_1 、 I_2 的方向如图 7-5 所示, 两圆弧在点 O 激发的磁场分别为

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1 l_1}{4\pi r^2}; \quad B_2 = \frac{\mu_0 I_2 l_2}{4\pi r^2}$$

其中 l_1 、 l_2 分别是圆弧 \widehat{acb} 、 \widehat{adb} 的弧长, 由于导线电阻 R 与弧长 l 成正比, 而圆弧 \widehat{acb} 、 \widehat{adb} 又构成并联电路, 故有

$$I_1 l_1 = I_2 l_2$$

将 B_1 、 B_2 叠加得点 O 的磁感强度

$$B = B_1 - B_2 = \frac{\mu_0 I_1 l_1}{4\pi r^2} - \frac{\mu_0 I_2 l_2}{4\pi r^2} = 0$$

7-11 如图 7-6 所示, 几种载流导线在平面内分布, 电流均为 I , 它们在点 O 的磁感强度各为多少?

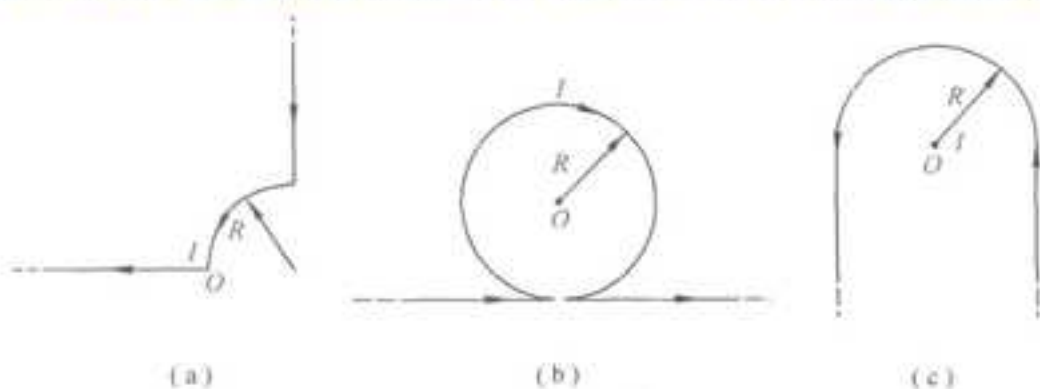


图 7-6

解: (a) 长直电流对点 O 而言, 有 $Idl \times r = 0$, 因此它在点 O 产生的磁场为零, 则点 O 处总的磁感强度为 $1/4$ 圆弧电流所激发, 故有

$$B_0 = \frac{\mu_0 I}{8R}$$

B_0 的方向垂直纸面向外.

(b) 将载流导线看作圆电流和长直电流, 由叠加原理可得

$$B_0 = \frac{\mu_0 I}{2R} - \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$$

B_0 的方向垂直纸面向里.

(c) 将载流导线看作 $1/2$ 圆电流和两段半无限长直电流, 由叠加原理可得

$$B_0 = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} + \frac{\mu_0 I}{4\pi R} + \frac{\mu_0 I}{4R} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} + \frac{\mu_0 I}{4R}$$

B_0 的方向垂直纸面向外.

7-12 载流导线形状如图 7-7 所示 (图中直线部分导线延伸到无穷远), 求点 O 的磁感强度 B .

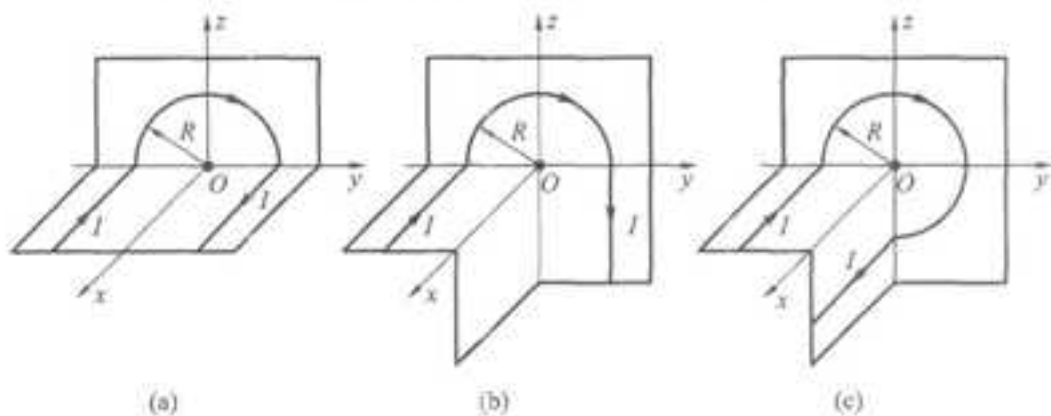


图 7-7

解：根据磁场的叠加

$$\text{在图 (a) 中, } \mathbf{B}_O = -\frac{\mu_0 I}{4R} \mathbf{i} - \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \mathbf{k} - \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \mathbf{k} = -\frac{\mu_0 I}{4R} \mathbf{i} - \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \mathbf{k}$$

$$\text{在图 (b) 中, } \mathbf{B}_O = -\frac{\mu_0 I}{4\pi R} \mathbf{i} - \frac{\mu_0 I}{4R} \mathbf{i} - \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \mathbf{k} = -\frac{\mu_0 I}{4R} \left(\frac{1}{\pi} + 1 \right) \mathbf{i} - \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \mathbf{k}$$

$$\text{在图 (c) 中, } \mathbf{B}_O = -\frac{3\mu_0 I}{8R} \mathbf{i} - \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \mathbf{j} - \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \mathbf{k}$$

7-13 如图 7-8 所示, 一个半径为 R 的无限长半圆柱面导体, 沿长度方向的电流 I 在柱面上均匀分布, 求半圆柱面轴线 OO' 上的磁感强度。

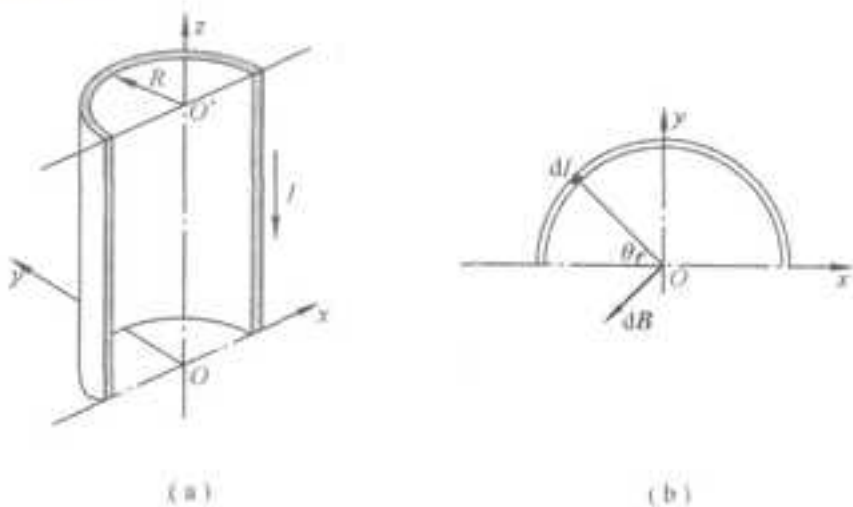


图 7-8

解：由于长直细线中的电流 $dI = Idl/\pi R$ 它在轴线上一点激发的磁感强度的大小为

$$dB = \frac{\mu_0}{2\pi R} dI$$

其方向在 Oxy 平面内, 且与由 dI 引向点 O 的半径垂直, 如图 7-8 (b) 所示。由对称性可知, 半圆柱面上细电流在轴线 OO' 上产生的磁感强度叠加后, 得

$$B_y = \int dB \cos \theta = 0$$

$$B_x = \int_0^\pi dB \sin \theta = \int_0^\pi \frac{\mu_0}{2\pi R} \frac{I}{\pi R} R d\theta \cdot \sin \theta = \frac{\mu_0 I}{\pi^2 R}$$

则轴线上总的磁感强度大小

$$B = B_x = \frac{\mu_0 I}{\pi^2 R}$$

B 的方向指向 Ox 轴负向。

7-14 实验室中常用所谓的亥姆霍兹线圈在局部区域内获得一近似均匀的磁场, 其装置简图如图 7-9 (a) 所示。一对完全相同、彼此平行的线圈, 它们的半径均为 R , 通过的电流均为 I , 且两线圈中电流的流向相同, 试证: 当两线圈中心之间的距离 d 等于线圈的半径 R 时, 在两线圈中心连线的中点附近区域, 磁场可看成是均匀磁场。(提示: 如以两线圈中心连线的中点为坐标原点 O , 两线圈中心连线为 x 轴, 则中点附近的磁场可看成是

均匀磁场的条件为 $\frac{dB}{dx} = 0; \frac{d^2B}{dx^2} = 0.$)

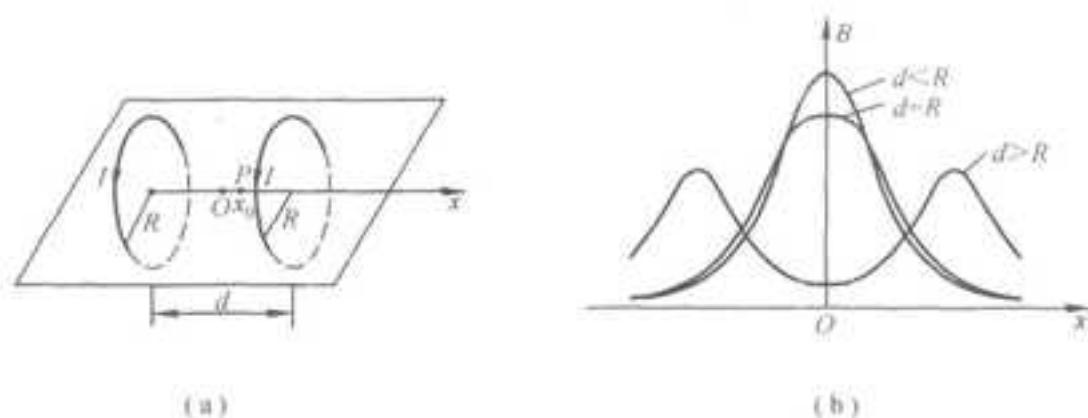


图 7-9

证明：取两线圈中心连线的中点为坐标原点 O ，两线圈中心轴线为 x 轴，在 x 轴上任一点的磁感强度

$$B = \frac{\mu_0 I R^2}{2 [R^2 + (d/2 - x)^2]^{3/2}} + \frac{\mu_0 I R^2}{2 [R^2 + (d/2 + x)^2]^{3/2}}$$

则当

$$\frac{dB(x)}{dx} = \frac{\mu_0 I R^2}{2} \left(\frac{3(d/2 - x)}{[R^2 + (d/2 - x)^2]^{5/2}} - \frac{3(d/2 + x)}{[R^2 + (d/2 + x)^2]^{5/2}} \right) = 0$$

$$\frac{d^2B(x)}{dx^2} = \frac{3\mu_0 I R^2}{2} \left(\frac{4(d/2 - x)^2 - R^2}{[R^2 + (d/2 - x)^2]^{7/2}} + \frac{4(d/2 + x)^2 - R^2}{[R^2 + (d/2 + x)^2]^{7/2}} \right) = 0$$

时，磁感强度在该点附近小区域内是均匀的，该小区域的磁场为均匀场。

由 $\frac{dB(x)}{dx} = 0$ ，解得 $x = 0$

由 $\frac{d^2B(x)}{dx^2} \Big|_{x=0} = 0$ ，解得 $d = R$

这表明在 $d = R$ 时，中点 ($x = 0$) 附近区域的磁场可视为均匀磁场。

7-15 如图 7-10 所示，载流长直导线的电流为 I ，试求通过矩形面积的磁通量。

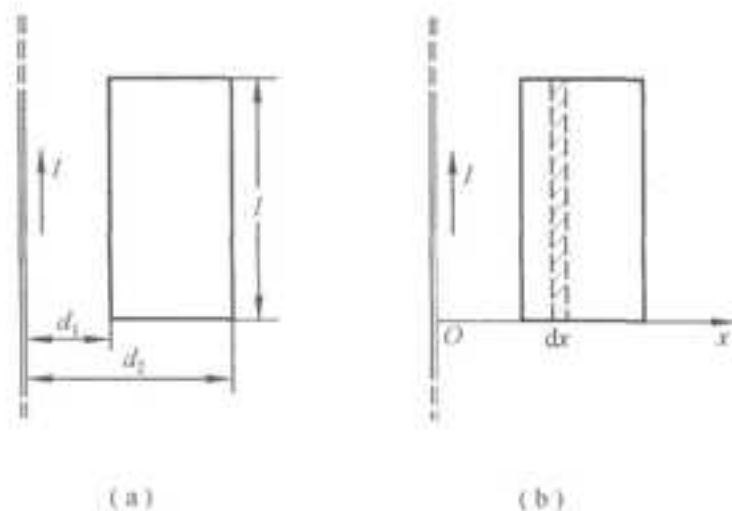


图 7-10

$$\Phi = \int d\Phi$$

解：由于矩形平面上各点的磁感强度不同，故磁通量 $\Phi \neq BS$ 。

因此，在矩形平面上取一矩形面元 $dS = ldx$ [图 7-10 (b)]载流长直导线的磁场穿过该面元的磁通量为

$$d\Phi = B \cdot dS = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} l dx$$

矩形平面的总磁通量

$$\Phi = \int_{d_1}^{d_2} \frac{\mu_0 I}{2\pi x} l dx = \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \ln \frac{d_2}{d_1}$$

7-16 已知 10mm^2 裸铜线允许通过 50 A 电流而不会使导线过热，电流在导线横截面上均匀分布，求：(1) 导线内、外磁感强度的分布；(2) 导线表面的磁感强度。

解：(1) 围绕轴线取同心圆为环路 L，取其绕向与电流成右手螺旋关系，根据安培环路定理，有

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = B \cdot 2\pi r = \mu_0 \sum I$$

在导线内 $r < R$ ， $\sum I = \frac{I}{\pi R^2} \pi r^2 = \frac{I r^2}{R^2}$ ，因而

$$B = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2}$$

在导线外 $r > R$ ， $\sum I = I$ ，因而

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

磁感强度分布曲线如图 7-11 所示。

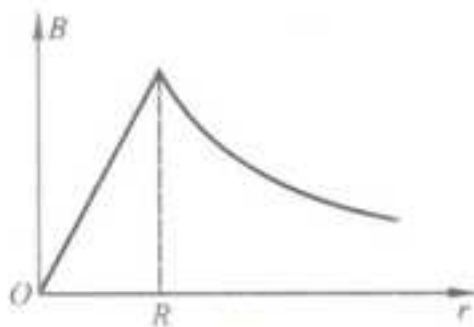
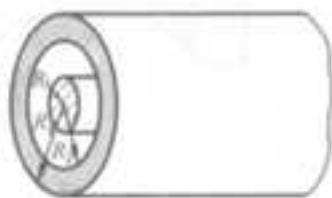
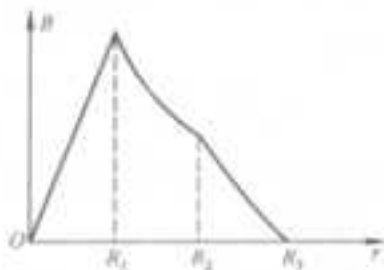


图 7-11

7-17 有一同轴电缆，其尺寸如图 7-12 (a) 所示，两导体中的电流均为 I，但电流的流向相反，导体的磁性可不考虑，试计算以下各处的磁感强度：(1) $r < R_1$ ；(2) $R_1 < r < R_2$ ；(3) $R_2 < r < R_3$ ；(4) $r > R_3$ 。画出 B - r 图线。



(a)



(b)

图 7-12

解：同轴电缆导体内的电流均匀分布，其磁场呈轴对称，取半径为 r 的同心圆为积分路径，

$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = B \cdot 2\pi r$ ，利用安培环路定理 $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \sum I$ ，可得

$$r < R_1 \quad B_1 \cdot 2\pi r = \mu_0 \frac{I}{\pi R_1^2} \pi r^2$$

$$B_1 = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R_1^2}$$

$$R_1 < r < R_2 \quad B_2 \cdot 2\pi r = \mu_0 I$$

$$B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

$$R_2 < r < R_3 \quad B_3 \cdot 2\pi r = \mu_0 \left[I - \frac{\pi(r^2 - R_2^2)}{\pi(R_3^2 - R_2^2)} I \right]$$

$$B_3 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \cdot \frac{R_3^2 - r^2}{R_3^2 - R_2^2}$$

$$r > R_3 \quad B_4 \cdot 2\pi r = \mu_0 (I - I) = 0$$

$$B_4 = 0$$

磁感强度 $B(r)$ 的分布曲线如图 7-12 (b) 所示。

7-18 如图 7-13 所示， N 匝线圈均匀密绕在截面为长方形的中空骨架上，求通入电流后，环内外磁场的分布。

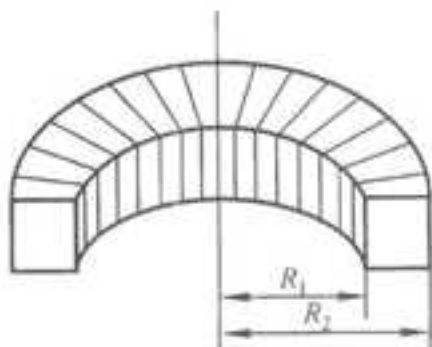


图 7-13

解: 根据右手螺旋法则, 螺线管内磁感强度的方向与螺线管中心轴线构成同心圆, 若取半径为 r 的圆周为积分环路, 由于磁感强度在每一环路上为常量, 因而

$$\oint B \cdot dl = 2\pi r \cdot B$$

依照安培环路定理 $\oint B \cdot dl = \mu_0 \sum I$, 有

$$\begin{aligned}
 & B \cdot 2\pi r = \mu_0 \sum I \\
 r < R_1 & \quad B_1 \cdot 2\pi r = 0 \\
 & \quad B_1 = 0 \\
 R_2 > r > R_1 & \quad B_2 \cdot 2\pi r = \mu_0 NI \\
 & \quad B_2 = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r} \\
 r > R_2 & \quad B_3 \cdot 2\pi r = 0 \\
 & \quad B_3 = 0
 \end{aligned}$$

在螺线管内磁感强度 B 沿圆周, 与电流成右手螺旋. 若 $R_2 - R_1 \ll R_1$ 和 R_1 , 则环内的磁场可以近似视作均匀分布, 设螺线环的平均半径 $R = \frac{1}{2}(R_1 + R_2)$, 则环内的磁感强度近似为

$$B \approx \frac{\mu_0 NI}{2\pi R}$$

7-19 半径为 R 的长直导体圆筒表面有一层均匀分布的面电流, 面电流绕轴线沿螺旋线流动, 其方向始终与轴线方向成 α 角. 设电流面密度为 j , 求长直导体圆筒轴线上的磁感强度.

解: 导体圆筒表面电流密度与轴线方向成 α 角, 不妨将电流密度分解为垂直轴线 (沿导体圆筒表面圆周) 方向和平行轴线方向两个分量, 圆筒表面平行轴线方向的电流密度分量在圆筒轴线上的磁感强度为零; 参照长直螺线管, 可以求得圆筒表面沿圆周方向的电流密度分量在圆筒轴线上的磁感强度 $B = m_0 j_{\perp} = m_0 j \sin\alpha$.

7-20 电流 I 均匀地流过半径为 R 的圆形长直导线, 试计算单位长度导线内的磁场通过图 7-14 中所示剖面的磁通量.

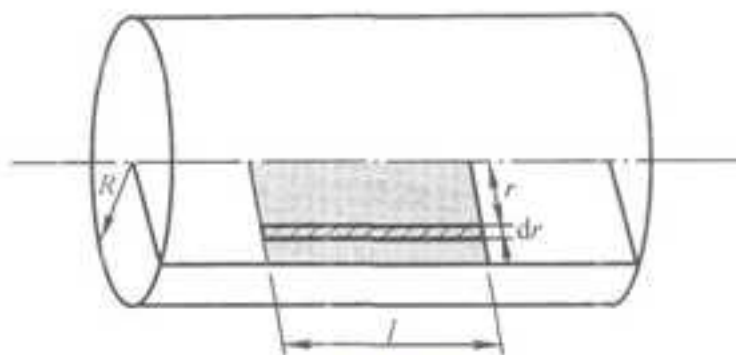


图 7-14

解: 导线内部距轴线为 r 处的磁感强度

$$B(r) = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2}$$

在剖面上磁感强度分布不均匀, 沿轴线方向在剖面上取面元 $dS = ldr$, 考虑到面元上各点 B 相同, 故穿过面元的磁通量 $d\Phi = B dS$, 通过积分, 可得单位长度导线内的磁通量

$$\Phi = \int_0^R \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2} dr = \frac{\mu_0 I}{4\pi}$$

7-21 设电流均匀流过无限大导电平面, 其面电流密度为 j , 求导电平面两侧的磁感强度.

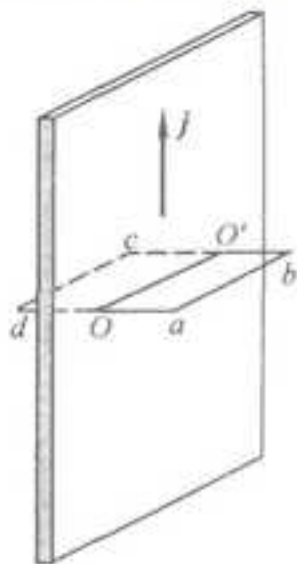


图 7-15

解: 在如图 7-15 所示的矩形回路 $abcd$ 中, 磁感强度沿回路的环路积分

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \int_{ab} \mathbf{B}_1 \cdot d\mathbf{l} + \int_{bc} \mathbf{B}_2 \cdot d\mathbf{l} + \int_{cd} \mathbf{B}_3 \cdot d\mathbf{l} + \int_{da} \mathbf{B}_4 \cdot d\mathbf{l}$$

由于对称性 $B_1 = B_3 = B$, B_2, B_4 与积分路径正交, 因而

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = 2BL \quad (1)$$

回路 $abcd$ 内包围的电流 $I = jL$, 根据安培环路定理, 有

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = 2BL = \mu_0 jL \quad (2)$$

由式 (1) 和式 (2) 可得导电板两侧磁感强度的大小为

$$B = \frac{1}{2} \mu_0 j$$

磁感强度的方向由右手螺旋关系确定.

7-22 设有两无限大平行载流平面, 它们的面电流密度均为 j , 电流流向相反. 求: (1) 两载流平面之间的磁感强度; (2) 两面之外空间的磁感强度.

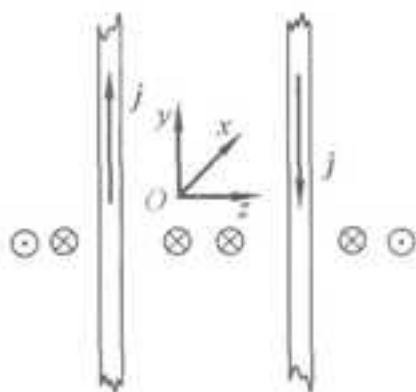


图 7-16

解: 由上题计算的结果, 单块无限大载流平面在两侧的磁感强度大小为 $\mu_0 j/2$, 方向如图 7-16 所示, 根据磁场的叠加原理可得.

(1) 取垂直于纸面向里为 x 轴正向, 合磁场为

$$B = \frac{\mu_0 j}{2} \hat{i} + \frac{\mu_0 j}{2} \hat{i} = \mu_0 j \hat{i}$$

(2) 两导体载流平面之外, 合磁场的磁感强度

$$B = \frac{\mu_0 j}{2} \hat{i} - \frac{\mu_0 j}{2} \hat{i} = 0$$

7-23 氢原子可以看成电子在平面内绕核作匀速圆周运动的带电系统. 已知电子电荷为 $-e$, 质量为 m_e , 电子作圆周运动的角动量为 L , 求电子沿圆周轨道运动的轨道磁矩.

解: 电子绕原子核转动的等效圆电流为

$$i = -\frac{e}{T} = -\frac{e\omega}{2\pi}$$

电子的角动量 $L = m_e r^2 \omega$, 根据磁矩的定义

$$m = i S e_n = -\frac{e\omega}{2\pi} \pi r^2 e_n = -\frac{e}{2m_e} L$$

7-24 将一根带电导线弯成半径为 R 的圆环, 电荷线密度为 λ ($\lambda > 0$), 圆环绕过圆心且与圆环面垂直的轴以角速度 ω 转动, 求轴上任一点的磁感强度.

解: 转动的带电圆环其等效圆电流为

$$i = \frac{2\pi R \lambda}{2\pi/\omega} = R \lambda \omega$$

代入得圆环在轴上任一点激发的磁感强度

$$B = \frac{\mu_0 R^2 i}{2(R^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 R^3 \lambda \omega}{2(R^2 + x^2)^{3/2}}$$

7-25 半径为 R 的圆片均匀带电, 电荷面密度为 σ , 令该圆片以角速度 ω 绕通过其中心且垂直于圆平面的轴旋转. 求轴线上距圆片中心为 x 处的 P 点的磁感强度和旋转圆片的磁矩.

解: 旋转的带电圆盘可等效为一组同心圆电流, 在盘面上割取细圆环 (如图 7-17 所示), 其等效圆电流

$$dl = \frac{\sigma \cdot 2\pi r dr}{T} = \sigma \omega r dr$$

此圆电流在轴线上点 P 处激发的磁感强度的大小为

$$dB = \frac{\mu_0}{2} \frac{r^2 dl}{(r^2 + x^2)^{3/2}}$$

所有圆电流在轴线上激发的磁场均沿 Ox 轴，因而点 P 处的合磁场为

$$B = \int dB.$$

故轴线上 x 处的磁感强度大小为

$$B = \int_0^R \frac{\mu_0}{2} \frac{r^3 \sigma \omega dr}{(r^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 \sigma \omega}{2} \left[\frac{R^2 + 2x^2}{\sqrt{x^2 + R^2}} - 2x \right]$$

等效圆电流的磁矩 $dm = \pi r^2 dl$ ，故圆片的磁矩 m 的大小为

$$m = \int_0^R \pi r^2 \sigma \omega dr = \frac{1}{4} \sigma \omega \pi R^4$$

磁感强度 B 和磁矩 m 的方向都沿 Ox 轴正向。

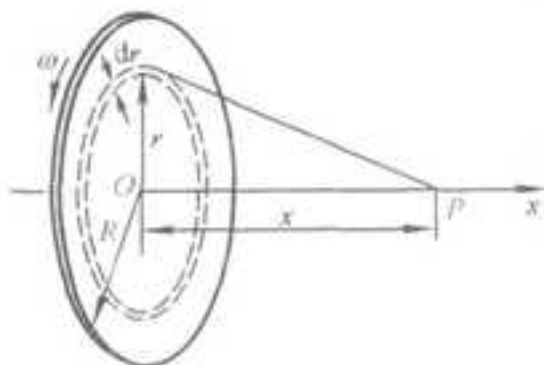


图 7-17

7-26 在氢原子中，设电子以轨道角动量 $L = h/2\pi$ 绕质子作圆周运动，其半径为 $a_0 = 5.29 \times 10^{-11} \text{ m}$ 。

求质子所在处的磁感强度， h 为普朗克常量，其值为 $6.63 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ 。

解：电子绕核运动的角动量

$$L = mva_0 = h/2\pi$$

可得电子绕核运动的速率

$$v = \frac{h}{2\pi ma_0}$$

如认为电子绕核作圆周运动，则其等效圆电流

$$i = \frac{e}{2\pi a_0/v} = \frac{hev}{4\pi^2 ma_0^2}$$

该圆电流在圆心处产生的磁感强度

$$B = \frac{\mu_0 i}{2a_0} = \frac{\mu_0 he}{8\pi^2 ma_0^3} = 12.5 \text{ T}$$

7-27 质子和电子以相同的速度垂直飞入磁感强度为 B 的匀强磁场中，试求质子轨道半径与电子轨道半径之比。

解：由教材式 (7-22)，带电粒子在均匀磁场中运动的轨道半径为

$$R = \frac{mv}{qB}$$

$$\frac{R_p}{R_e} = \frac{m_p}{m_e} = 1833$$

7-28 如图 7-18 所示，在 $B=0.01\text{T}$ 的均匀磁场中，电子以 $v=10^6\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ 的速度在磁场中通过 A 点运动，电子运动速度和磁场 B 的夹角为 30° 。求电子的轨道半径和旋转频率。

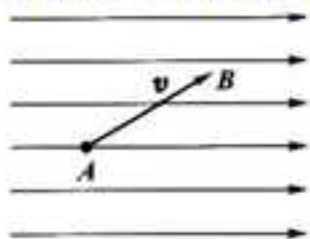


图 7-18

解：由教材式 (7-22)，带电粒子在均匀磁场中运动的轨道半径为

$$R = \frac{mv_{\perp}}{eB} = \frac{mv \sin \theta}{eB} = 2.84 \times 10^{-6} \text{ m}$$

回转频率为

$$f = \frac{eB}{2\pi m} = 2.79 \times 10^8 \text{ Hz}$$

7-29 已知地面上空某处地磁场的磁感强度 $B = 0.4 \times 10^{-4} \text{ T}$ ，方向向北。若宇宙射线中有一速率 $v = 5.0 \times 10^7 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ 的质子，垂直地通过该处。求：(1) 洛伦兹力的方向；(2) 洛伦兹力的大小，并与该质子受到的万有引力相比较。

解：(1) 依照 $F_L = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ 可知洛伦兹力 F_L 的方向为 $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ 的方向，如图 7-19 所示。

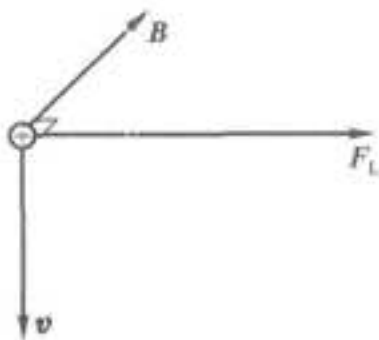


图 7-19

(2) 因 $\mathbf{v} \perp \mathbf{B}$ ，质子所受的洛伦兹力

$$F_L = qvB = 3.2 \times 10^{-16} \text{ N}$$

在地球表面质子所受的万有引力

$$G = m_p g = 1.64 \times 10^{-26} \text{ N}$$

因而，有 $F_L/G = 1.95 \times 10^{10}$ ，即质子所受的洛伦兹力远大于重力。

7-30 试证明霍尔电场强度与稳恒电场强度之比

$$E_H/E_C = B/nep$$

这里 ρ 为材料电阻率, n 为载流子的数密度.

证明: 在导体内部, 稳恒电场推动导体中的载流子定向运动形成电流, 由欧姆定律的微分形式, 在导体内稳恒电场强度为

$$E_C = \rho j = \rho nev$$

由霍尔效应, 霍尔电场强度

$$E_H = -v \times B$$

因载流子定向运动方向与磁感强度正交, 故 $E_H = vB$, 因而

$$E_H/E_C = vB/\rho j = vB/\rho nev = B/nep$$

7-31 霍尔效应可用来测量血流的速度, 其原理如图 7-20 所示. 在动脉血管两侧分别安装电极并加以磁场, 设血管直径为 $d=2.0 \text{ mm}$, 磁场为 $B=0.080 \text{ T}$, 毫伏表测出血管上下两端的电压为 $U_H=0.10 \text{ mV}$, 血流的流速为多大?

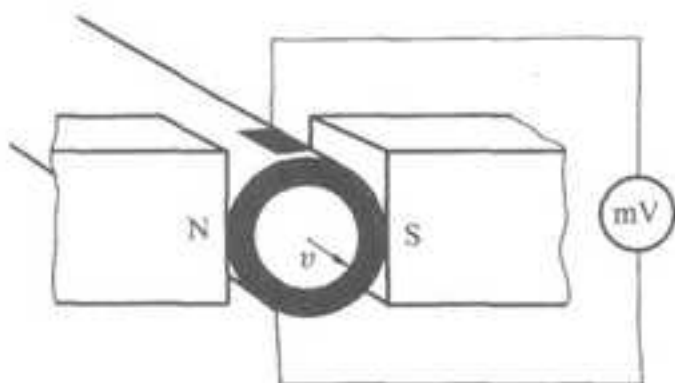


图 7-20

解: 血流稳定时, 有

$$qvB = qE_H$$

故血流速度

$$v = \frac{E_H}{B} = \frac{U_H}{dB} = 0.63 \text{ m/s}$$

7-32 磁力可以用来输送导电液体, 如液态金属、血液等而不需要机械活动组件. 如图 7-21 所示是输送液态钠的管道, 在长为 l 的部分加一横向磁场 B , 同时沿垂直于磁场和管道方向加一电流, 其电流密度为 J .

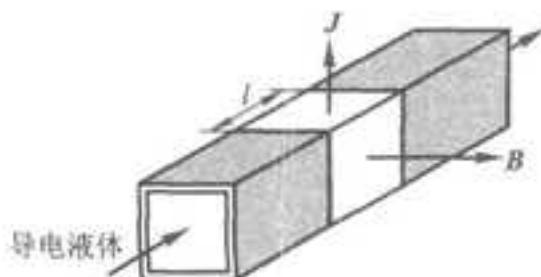


图 7-21

(1) 证明在管内液体 l 段两端由磁力产生的压力差为 $\Delta p = JIB$, 此压力差将驱动液体沿管道流动.

(2) 要在 l 段两端产生 1.00 atm ($1 \text{ atm} = 101325 \text{ Pa}$) 的压力差, 电流密度应多大? ($l = 2.00 \text{ cm}$, $B = 1.50 \text{ T}$)

解: (1) 由题意电流垂直流过管内导电液体, 磁场中的导电液体受到安培力的作用, 在管道方向产生一压力

$$\Delta p = \frac{F}{S} = \frac{IBl}{S} = JBl$$

$$(2) J = \frac{\Delta p}{Bl} = 3.38 \times 10^6 \text{ A/m}^2$$

7-33 带电粒子在过饱和液体中运动, 会留下一串气泡显示出粒子运动的径迹。设在气泡室有一质子垂直于磁场飞过, 留下一个半径为 3.5 cm 的圆弧径迹, 测得磁感强度为 0.20 T, 求此质子的动量和动能。

解: 根据带电粒子回转半径与粒子运动速率的关系有

$$p = mv = ReB = 1.12 \times 10^{-21} \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

$$E_k = \frac{p^2}{2m} = 2.35 \text{ keV}$$

7-34 从太阳射来的速度为 $0.80 \times 10^7 \text{ m/s}$ 的电子进入地球赤道上空高层范艾伦辐射带中, 该处磁场为 $4.0 \times 10^{-7} \text{ T}$, 此电子回转轨道半径为多大? 若电子沿地球磁场的磁感线旋进到地磁北极附近, 地磁北极附近磁场为 $2.0 \times 10^{-5} \text{ T}$, 其轨道半径又为多少?

解: 由带电粒子在磁场中运动的回转半径

$$\text{高层范艾伦辐射带中的回转半径 } R_1 = \frac{mv}{eB_1} = 1.1 \times 10^3 \text{ m}$$

$$\text{地磁北极附近的回转半径 } R_2 = \frac{mv}{eB_2} = 23 \text{ m}$$

7-35 如图 7-22 (a) 所示, 一根长直导线载有电流 $I_1 = 30 \text{ A}$, 矩形回路载有电流 $I_2 = 20 \text{ A}$, 试计算作用在回路上的合力。已知 $d = 1.0 \text{ cm}$, $b = 8.0 \text{ cm}$, $l = 0.12 \text{ m}$ 。

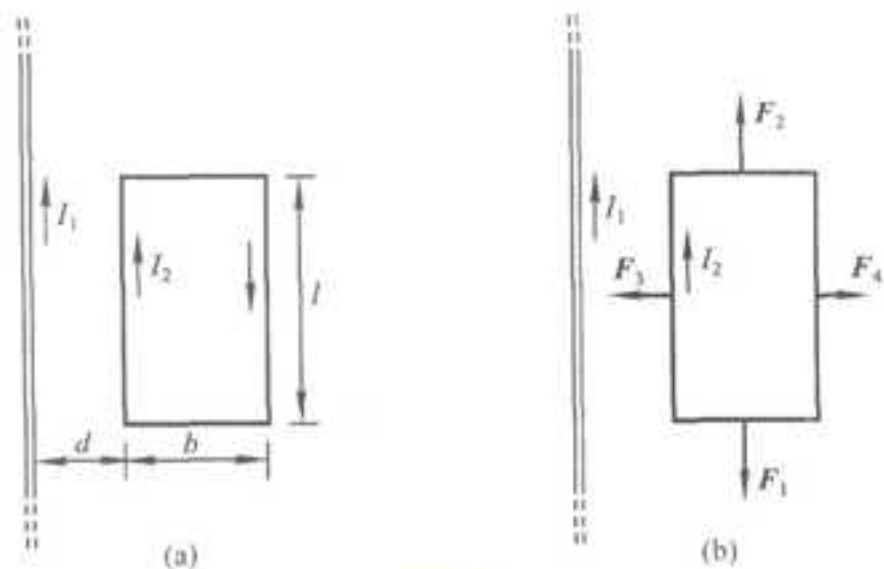


图 7-22

解: 矩形上、下两段导线受安培力 F_1 和 F_2 的大小相等, 方向相反, 对不变形的矩形回路来说, 两力的矢量和为零。而矩形的左右两段导线, 由于载流导线所在处磁感强度不等, 所受安培力 F_3 和 F_4 大小不同, 且方向相反, 因此线框所受总的安培力 F 为左、右两边安培力 F_3 和 F_4 之矢量和, 如图 7-22 (b) 所示, 它们的大小分别为

$$F_3 = \frac{\mu_0 I_1 I_2 l}{2\pi d}$$

$$F_4 = \frac{\mu_0 I_1 I_2 l}{2\pi(d+b)}$$

故合力的大小为

$$F = F_3 - F_4 = \frac{\mu_0 I_1 I_2 l}{2\pi d} - \frac{\mu_0 I_1 I_2 l}{2\pi(d+b)} = 1.28 \times 10^{-3} \text{ N}$$

合力的方向朝左，指向直导线。

7-36 如图 7-23 所示，在粗糙斜面上放有一长为 l 的木制圆柱，其上固定一平面绕组，共 N 匝。圆柱体的轴线位于绕组平面内，整个装置的质量为 m ，处于磁感强度大小为 B ，方向竖直向上的均匀磁场中。如果绕组的平面与斜面平行，则当圆柱体静止在斜面上不动时通过回路的电流等于多少？

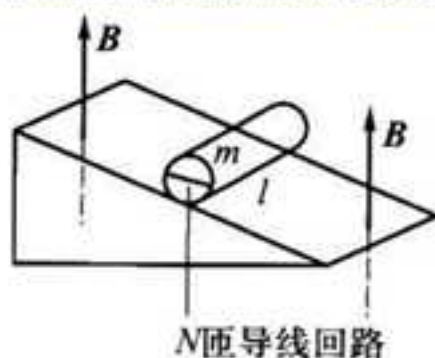


图 7-23

解：线圈受到磁场的安培力矩和整个装置所受到的重力矩分别为

$$M_g = mgR \sin \theta$$

$$M_A = 2Rl \cdot NI \cdot B \cdot \sin \theta$$

力矩平衡时，圆柱体在斜面上静止不动，有

$$M_g = mgR \sin \theta = M_A = 2Rl \cdot NI \cdot B \cdot \sin \theta$$

解得

$$I = \frac{mg}{2lNB}$$

7-37 将一电流均匀分布的无限大载流平面放入磁感强度为 B_0 的均匀磁场中，电流方向与磁场垂直。放入后，平面两侧磁场的磁感强度分别为 B_1 和 B_2 (如图 7-24 所示)，求该载流平面上单位面积所受磁场力的大小和方向。

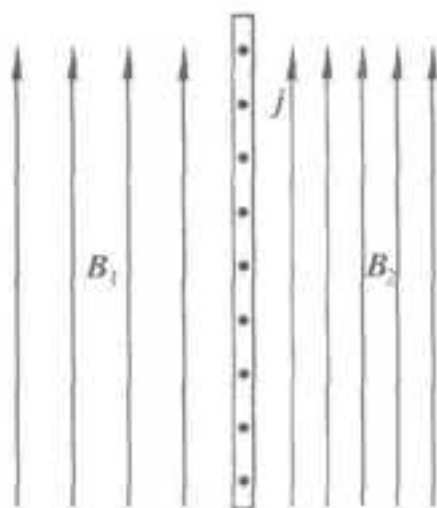


图 7-24

解：依照题 7-21 的分析，无限大载流平面两侧为均匀磁场，磁感强度大小为 $\frac{1}{2}\mu_0 j$ ，依照右手螺旋定则可知，它们的方向反向平行，并与原有磁感强度 B_0 的均匀外磁场叠加，则有

$$B_1 = B_0 - \frac{\mu_0 j}{2} \quad (1)$$

$$B_2 = B_0 + \frac{\mu_0 j}{2} \quad (2)$$

由式 (1)、(2) 解得

$$B_0 = \frac{1}{2}(B_1 + B_2)$$

$$j = \frac{1}{\mu_0}(B_2 - B_1)$$

外磁场 B_0 作用在单位面积载流平面上的安培力

$$\frac{dF}{dS} = \frac{j dx dy B_0}{dx dy} = j B_0 = \frac{1}{2\mu_0}(B_2^2 - B_1^2)$$

依照右手定则可知磁场力的方向为水平指向左侧。

7-38 在直径为 1.0cm 的铜棒上，切割下一个圆盘，设想这个圆盘的厚度只有一个原子线度那么大，这样在圆盘上约有 6.2×10^{23} 个铜原子，每个铜原子有 27 个电子，每个电子的自旋磁矩为 $\mu_e = 9.3 \times 10^{-24} \text{ A} \cdot \text{m}^2$ 。我们假设所有电子的自旋磁矩方向都相同，且平行于铜棒的轴线。求：(1) 圆盘的磁矩；(2) 如这磁矩是由圆盘上的电流产生的，那么圆盘边缘上需要有多大的电流。

解：(1) 因为所有电子的磁矩方向相同，则圆盘的磁矩

$$m = N\mu_e = 1.56 \times 10^{-2} \text{ A} \cdot \text{m}^2$$

(2) 由磁矩的定义，可得圆盘边缘等效电流

$$I = m/S = 2.0 \times 10^{-3} \text{ A}$$

7-39 一根长直同轴电缆，内、外导体之间充满磁介质[图 7-25(a)]，磁介质的相对磁导率为 μ_r ($\mu_r < 1$)，导体的磁化可以忽略不计，沿轴向有恒定电流 I 通过电缆，内、外导体上电流的方向相反。求：(1) 空间各区域内的磁感强度和磁化强度；* (2) 磁介质表面的磁化电流。

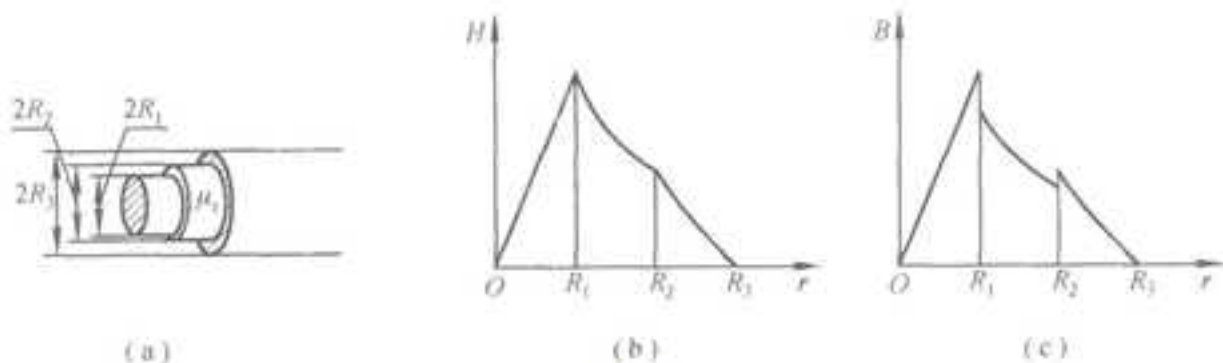


图 7-25

解: (1) 取与电缆轴同心的圆为积分路径, 根据磁介质中的安培环路定理, 有

$$H2\pi r = \sum I_i$$

对 $r < R_1$,

$$\sum I_i = \frac{I}{\pi R_1^2} \pi r^2$$

得

$$H_1 = \frac{Ir}{2\pi R_1^2}$$

忽略导体的磁化 (即导体相对磁导率 $\mu_s = 1$), 有

$$M_1 = 0, \quad B_1 = \frac{\mu_0 Ir}{2\pi R_1^2}$$

对 $R_2 > r > R_1$,

$$\sum I_i = I$$

得

$$H_2 = \frac{I}{2\pi r}$$

填充的磁介质相对磁导率为 μ_s , 有

$$M_2 = (\mu_s - 1) \frac{I}{2\pi r}, \quad B_2 = \frac{\mu_0 \mu_s I}{2\pi r}$$

对 $R_3 > r > R_2$,

$$\sum I_i = I - \frac{I}{\pi(R_3^2 - R_2^2)} \cdot \pi(r^2 - R_2^2)$$

得

$$H_3 = \frac{I(R_3^2 - r^2)}{2\pi r(R_3^2 - R_2^2)}$$

同样忽略导体的磁化, 有

$$M_3 = 0, \quad B_3 = \frac{\mu_0 I(R_3^2 - r^2)}{2\pi r(R_3^2 - R_2^2)}$$

对 $r > R_2$

$$\sum I_i = I - I = 0$$

得

$$H_4 = 0, \quad M_4 = 0, \quad B_4 = 0$$

(2) 由 $I_s = M \cdot 2\pi r$, 磁介质内、外表面磁化电流的大小为

$$I_{s1} = M_2(R_1)2\pi R_1 = (\mu_r - 1)I$$

$$I_{s2} = M_2(R_2)2\pi R_2 = (\mu_r - 1)I$$

对抗磁质($\mu_r < 1$), 在磁介质内表面($r = R_1$), 磁化电流与内导体传导电流方向相反; 在磁介质外表面($r = R_2$), 磁化电流与外导体传导电流方向相反。顺磁质的情况与抗磁质相反。 $H(r)$ 和 $B(r)$ 分布曲线分别如图 7-25 (b) 和 (c) 所示。

7-40 设长 $L = 5.0 \text{ cm}$, 截面积 $S = 1.0 \text{ cm}^2$ 的铁棒中所有铁原子的磁偶极矩都沿轴向整齐排列, 且每个铁原子的磁偶极矩 $m_0 = 1.8 \times 10^{-23} \text{ A} \cdot \text{m}^2$, 求: (1) 铁棒的磁偶极矩; (2) 要使铁棒与磁感强度 $B_0 = 1.5 \text{ T}$ 的外磁场正交, 需用多大的力矩? 设铁的密度 $\rho = 7.8 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$, 铁的摩尔质量 $M_0 = 55.85 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ 。

解: (1) 根据铁棒的体积、密度以及铁的摩尔质量, 可得铁棒内的铁原子数为

$$N = \frac{\rho SL}{M_0} N_A$$

故铁棒的磁偶极矩为

$$m = m_0 N = \frac{\rho SL}{M_0} m_0 N_A = 7.58 \text{ A} \cdot \text{m}^2$$

(2) 维持铁棒与磁场正交所需力矩等于该位置上磁矩所受的磁力矩

$$M = m \cdot B_0 = 11.4 \text{ N} \cdot \text{m}$$

7-41 在实验室, 为了测试某种磁性材料的相对磁导率 μ_r , 常将这种材料做成截面为矩形的环形样品, 然后用漆包线绕成一环形螺线管, 设圆环的平均周长为 0.10 m , 横截面积为 $0.50 \times 10^{-4} \text{ m}^2$, 线圈的匝数为 200 匝, 当线圈通以 0.10 A 的电流时, 测得穿过圆环横截面积的磁通量为 $6.0 \times 10^{-5} \text{ Wb}$, 求此时该材料的相对磁导率 μ_r 。

解: 磁介质内部的磁场强度和磁感强度分别为 Nl/L 和 Φ/S

$$\text{又 } B = \mu_0 \mu_r H$$

因而

$$\mu_r = \frac{\Phi L}{\mu_0 N I S} = 4.78 \times 10^3$$

7.3 名校考研真题详解

一、选择题

1. 有一由 N 匝细导线绕成的平面正三角形线圈, 边长为 a , 通有电流 I , 置于均匀外磁场 B 中。当线圈平面的法向与外磁场同向时, 线圈所受到的磁力矩大小为 ()。[北京科技大学 2014 研]

- A. 0
 B. $\sqrt{3}Na^2 IB/4$
 C. $\sqrt{3}Na^2 IB \sin 60^\circ$
 D. $\sqrt{3}Na^2 IB/2$

【答案】A

【解析】根据磁力矩的定义可得

$$\vec{M} = \vec{P}_m \times \vec{B} = P_m B \sin \theta$$

其中 P_m 是线圈的磁矩， θ 是线圈法线与磁场方向的夹角。由题意可得线圈法线与磁场方向的夹角为零， $\sin \theta = 0$ ，因此

$$\vec{M} = \vec{P}_m \times \vec{B} = P_m B \sin \theta = 0$$

2. 根据高斯定理的数学表达式可知下述各种说法中，正确的是（）。[电子科技大学 2011 研]

- A. 闭合面内的电荷代数和为零时，闭合面上各点场强一定为零
 B. 闭合面内的电荷代数和不为零时，闭合面上各点场强一定处处不为零
 C. 闭合面内的电荷代数和为零时，闭合面上各点场强不一定处处为零
 D. 闭合面上各点场强均为零时，闭合面内一定处处无电荷

【答案】C

3. 磁介质有三种，用相对磁导率 μ_r 表征它们各自的特性时，有（）。[电子科技大学 2011 研]

- A. 顺磁质 $\mu_r > 0$ ，抗磁质 $\mu_r < 0$ ，铁磁质 $\mu_r \ll 1$
 B. 顺磁质 $\mu_r > 1$ ，抗磁质 $\mu_r = 1$ ，铁磁质 $\mu_r \ll 1$
 C. 顺磁质 $\mu_r > 1$ ，抗磁质 $\mu_r < 1$ ，铁磁质 $\mu_r \ll 1$
 D. 顺磁质 $\mu_r > 0$ ，抗磁质 $\mu_r < 0$ ，铁磁质 $\mu_r > 1$

【答案】C

4. 在磁感应强度为 B 的均匀磁场中作一半径为 r 的半球面 S ， S 边线所在平面的法线方向单位矢量 e_n 和 B 的夹角为 α ，如图 7-1 所示，则通过半球面 S 的磁通量为（）。[暨南大学 2010 研]

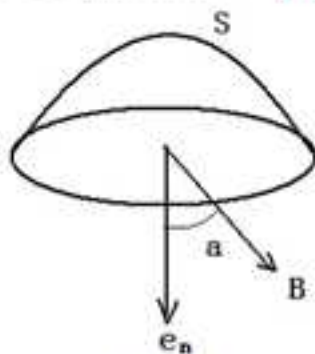


图 7-1

- A. $\pi r^2 B$
 B. $2\pi r^2 B$
 C. $-\pi r^2 B \sin \alpha$
 D. $-\pi r^2 B \cos \alpha$

【答案】D

【解析】磁通量的定义为 $\Phi = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$ ，图中均匀磁场无散度，故 $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$

所以 $\Phi_{\text{半球面}} = -\Phi_{\text{平面}} = -\pi r^2 B \cos \alpha$

5. 如图 7-2 所示，两根直导线 ab 和 cd 沿半径方向被接到一个截面处处相等的铁环上，稳恒电流 I 从 a 端流入而从 d 端流出，则磁感应强度 B 沿图中闭合路径 L 的积分 $\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{L}$ 等于 ()。 [暨南大学 2011 研]

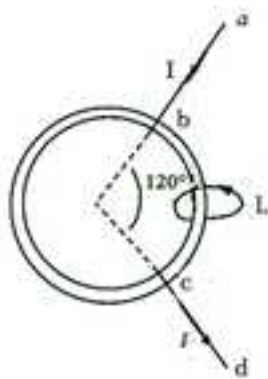


图 7-2

- A. $\mu_0 I$
- B. $\mu_0 I/3$
- C. $\mu_0 I/4$
- D. $2\mu_0 I/3$

【答案】D

【解析】导线左侧铁环的电阻是右侧 2 倍，根据电流分配原则，右侧铁环中电流为 $2I/3$ 。根据安培环流定理，

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{L} = \mu_0 \cdot 2I/3$$

6. 对位移电流，有下述四种说法，请指出哪一种说法正确 ()。 [北京科技大学 2014 研]

- A. 位移电流是指变化电场
- B. 位移电流是由线性变化磁场产生的
- C. 位移电流的热效应服从焦耳—楞次定律
- D. 位移电流的磁效应不服从安培环路定理

【答案】A

$$I_d = \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}$$

【解析】A 项，位移电流是麦克斯韦方程组中做出的假设，反映了变化的电场可以激发磁场，因此位移电流在本质上是指变化的电场。B 项，由位移电流产生的原因可知，位移电流密度等于该点电位移矢量对时间的变化率，因此位移电流是由变化的电场或者极化电荷的微观运动产生的。C 项，位移电流实际上是一种想象中存在的电流，并不是真正意义上的可以传导电荷的电流，因此位移电流无热效应，自然不服从焦耳

—楞次定律。D 项，对于稳恒磁场，安培环路定理为 $\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum I = \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$ ，而对于非稳恒磁场安培环路定理将出现矛盾，因此才引入位移电流的概念，从而保证安培环路定理的一致性。因此位移电流的磁效应同样遵循安培环路定理。

1. 如图 7-3 所示, 一长直导线通有电流 I , 其旁共面地放置一匀质金属梯形线框 $abcd$, 已知: $da=ab=bc=L$, 两斜边与下底边夹角均为 60° , d 点与导线相距为 l , 令线框从静止开始自由下落 H 高度, 且保持线框平面与长直导线始终共面, 求:

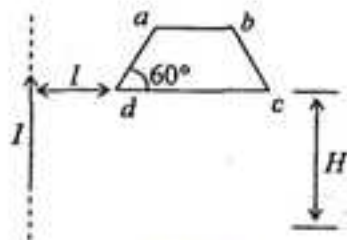


图 7-3

(1) 下落 H 高度后瞬间, 线框中的感应电流为多少?

(2) 该瞬时线框中电势最高处与电势最低处之间的电势差为多少? [电子科技大学 2011 研]

解: (1) 由于线框垂直下落, 线框所包围面积内的磁通量无变化, 故感应电流 $I_s=0$ 。

(2) 设 dc 边长为 l' , 则由图 7-3 可见

$$l' = L + 2L \cos 60^\circ = 2L$$

取 $d \rightarrow c$ 的方向为 dc 边内感应电动势的正向, 则

$$\begin{aligned} \varepsilon_{dc} &= \int (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} = \int v B dl \\ &= \int_b^c \sqrt{2gH} \cdot \frac{\mu_0 I}{2\pi(r+l)} dr \\ &= \frac{\mu_0 I}{2\pi} \sqrt{2gH} \ln \frac{l'+l}{l} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \sqrt{2gH} \ln \frac{l+2L}{l} \end{aligned}$$

$\varepsilon_{dc} > 0$, 说明 cd 段内电动势的方向由 $d \rightarrow c$ 。

由于回路内无电流, 则

$$\begin{aligned} V_{cd} &= U_c - U_d = \varepsilon_{dc} \\ &= \frac{\mu_0 I}{2\pi} \sqrt{2gH} \ln \frac{l+2L}{l} \end{aligned}$$

因为 c 点电势最高, d 点电势最低, 故 V_{cd} 为电势最高处与电势最低处之间的电势差。

2. 一根半径为 R 的长直导线载有电流 I , 作一宽为 R 、长为 l 的假想平面 S , 如图 7-4 所示, 若假想平面 S 可在导线直径与轴 OO' 所确定的平面内离开 OO' 轴移动至远处, 试求当通过 S 面的磁通量最大时 S 平面的位置 (设直导线内电流分布是均匀的) [暨南大学 2010 研]

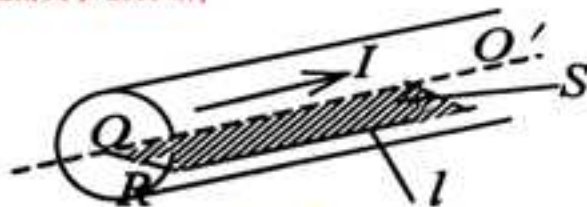


图 7-4

解: 在导线外磁场分布为

$$B_1(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

导线内磁场分布为

$$B_2(r) = \frac{\mu_0 j \pi r^2}{2\pi r} = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2}$$

先考虑假想平面沿径向平移的情况, 设平面内侧到 OO' 轴距离为 r , 通过此平面的磁通量为

$$\Phi(r) = \int_r^R B_2(r_1) l dr_1 + \int_R^{R+r} B_1(r_1) l dr_1 = \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \left[\frac{R^2 - r^2}{2R^2} + \ln\left(\frac{R+r}{R}\right) \right]$$

易得, 满足 $\Phi'(r) = 0$ 时, $r = \frac{\sqrt{5}-1}{2} R$.

最大磁通量为

$$\Phi_m^1 = \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \left[\frac{\sqrt{5}-1}{4} + \ln\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right) \right]$$

现在考虑假想平面转动 90 度的情况, 通过该平面的磁通量为

$$\Phi(r) = \int_r^R B_2(r_1) R dr_1 + \int_R^{l+r} B_1(r_1) R dr_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left[\frac{R^2 - r^2}{2R} + R \cdot \ln\left(\frac{l+r}{R}\right) \right]$$

可得, 满足 $\Phi'(r) = 0$ 时, $r = \frac{\sqrt{1+4R^2/l^2}-1}{2} l$

最大磁通量为

$$\Phi_m^2 = \frac{\mu_0 I R}{2\pi} \left[\frac{l^2}{R^2} \frac{\sqrt{1+4R^2/l^2}-1}{4} + \ln\left(\frac{l}{R} \frac{\sqrt{1+4R^2/l^2}+1}{2}\right) \right]$$

为了确定假想平面在哪个转动角度时磁通量最大, 我们需要比较 Φ_m^1 和 Φ_m^2 . 设 $x=R/l$ 则

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\Phi_m^2}{l} \right) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left[\frac{4x^3 - \sqrt{1+4x^2} + 1}{4x^2} + \frac{\sqrt{1+4x^2} + 4x + 1}{\sqrt{1+4x^2}(\sqrt{1+4x^2} + 1)} \right]$$

假设 $l \gg R$, 得, $\left. \frac{d}{dx} \left(\frac{\Phi_m^2}{l} \right) \right|_{x \rightarrow \infty} > 0$, 所以 $\Phi_m^1 > \Phi_m^2$.

故当假想平面沿 r 方向移动且 $r = \frac{\sqrt{5}-1}{2} R$ 时, 通过它的磁通量最大.

3. 一边长 $a=10 \text{ cm}$ 的正方形铜线圈, 放在均匀外磁场中, \vec{B} 竖直向上, 且 $B=9.40 \times 10^{-3} \text{ T}$, 线圈中电流为 $I=10 \text{ A}$.

(1) 今使线圈平面保持竖直, 问线圈所受的磁力矩为多少?

(2) 假若线圈能以某一条水平边为固定轴自由摆动, 问线圈平衡时, 线圈平面与竖直而夹角为多少? (已知铜线横截面积 $S=2.00 \text{ mm}^2$, 铜的密度 $=8.90 \text{ g/cm}^3$) [暨南大学 2010 研]

解: (1) 当线圈平面与磁场方向平行时, 受力矩为

$$M_H = BIS = Bla^2 = 9.4 \times 10^{-4} \text{ N} \cdot \text{m}$$

(2) 设线圈与竖直平面夹角为 θ 时所受力矩平衡, 则重力力矩为

$$M_G = (\rho S a \cdot a + 2 \times \rho S a \cdot \frac{a}{2}) \sin \theta = 2\rho S a^2 \sin \theta$$

又磁力矩为

$$M_H = BIS \sin \theta = Bla^2 \cos \theta$$

平衡时 $M_G = M_H$, 得 $\theta = \arctan\left(\frac{BI}{2\rho S}\right) = \arctan 2.64 \approx 70^\circ$.

4. 一根同轴线由半径 R_1 的长导线和套在它外面的内半径为 R_2 、外半径为 R_3 的同轴导体圆筒组成，中间充满磁导率为 μ 的各向同性均匀非铁磁绝缘材料，如图 7-5 所示，传导电流 I 沿导线向上流去，由圆筒向下流回，在它们的截面上电流都是均匀分布的，求同轴线内外的磁感应强度大小 B 的分布。[暨南大学 2011 研]

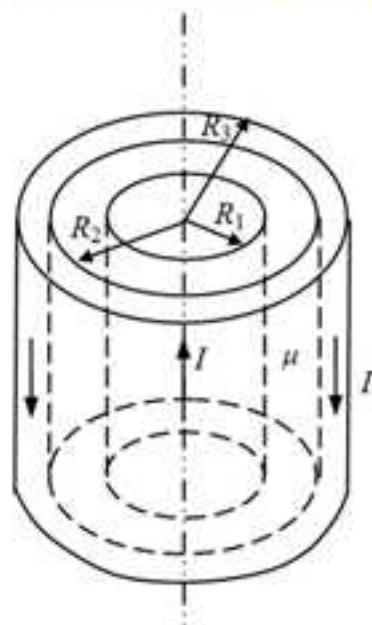


图 7-5

解：对于一般的导体材料，导线和导体圆筒的磁导率约等于真空磁导率，对不同位置的磁感应强度应用安培环路定理。

对于 $r < R_1$,

$$B(r) = \frac{\mu_0 \cdot j \cdot \pi r^2}{2\pi r} = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R_1^2}$$

对于 $R_1 < r < R_2$,

$$B(r) = \frac{\mu I}{2\pi r}$$

对于 $R_2 < r < R_3$,

$$B(r) = \frac{\mu_0 [I - j(\pi r^2 - \pi R_2^2)]}{2\pi r} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \left[\frac{R_3^2 - r^2}{R_3^2 - R_2^2} \right]$$

对于 $r > R_3$,

$$B(r) = 0$$

综上所述，电磁感应强度的分布为

$$B(r) = \begin{cases} \frac{\mu_0 I r}{2\pi R_1^2}, & r < R_1 \\ \frac{\mu I}{2\pi r}, & R_1 < r < R_2 \\ \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \left(\frac{R_3^2 - r^2}{R_3^2 - R_2^2} \right), & R_2 < r < R_3 \\ 0, & r > R_3 \end{cases}$$

8.1 复习笔记

一、电磁感应定律

1. 现象与基本结论

处在随时间而变化的电流附近的闭合回路中有感应电流产生。

(1) 如图 8-1 所示, 线圈 A 和 B 绕在一环形铁芯上, B 与电键 S 和电源相接, A 接有电流计。在电键 S 闭合和打开的瞬间, 与线圈 A 连接的电流计的指针将发生偏转, 但两种情况下电流的流向相反。

(2) 取一如图 8-2 所示的线圈 A, 把它的两端和一电流计 G 连成一闭合回路。若将一磁铁插入线圈或从线圈中抽出, 或者磁铁不动, 线圈向着 (或背离) 磁铁运动, 即两者发生相对运动时, 电流计的指针都将发生偏转, 电流计指针的偏转方向, 与两者的相对运动情况有关。

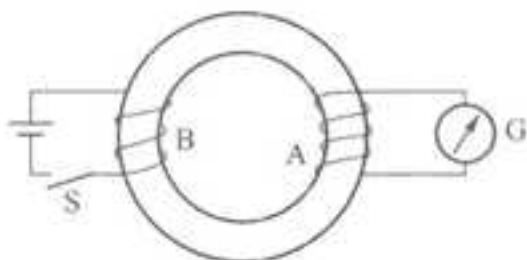


图 8-1 电键 S 闭合和断开的瞬间线圈 A 中电流计指针发生偏转

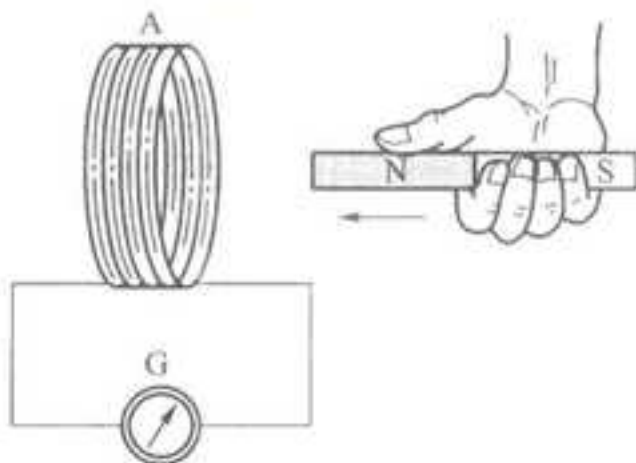


图 8-2 磁铁与线圈有相对运动时, 电流计的指针发生偏转

(3) 电磁感应现象 感应电动势 感应电流

① 电磁感应现象是指当穿过一个闭合导体回路所围面积的磁通量发生变化时, 不管这种变化是由于什么原因所引起的, 回路中就有电流的现象。

② 感应电动势是指回路中由于磁通量的变化而引起的电动势。

③ 感应电流是指电磁感应回路中所出现的电流。

2. 电磁感应定律

(1) 电磁感应定律是指当穿过闭合回路所围面积的磁通量发生变化时, 不论这种变化是什么原因引起的, 回路中都会建立起感应电动势, 且此感应电动势等于磁通量对时间变化率的负值, 即

$$\mathcal{E}_i = - \frac{d\Phi}{dt}$$

在国际单位制中, \mathcal{E}_i 的单位为伏特, Φ 的单位为韦伯, t 的单位为秒。

(2) 如果回路系由 N 匝密绕线圈组成, 而穿过每匝线圈的磁通量都等于 Φ , 则通过 N 匝密绕线圈的磁通匝数则为 $\psi = N\Phi$, ψ 又称磁链。对此, 电磁感应定律就可写成

$$\mathcal{E}_i = - \frac{d\Psi}{dt}$$

(3) 如果闭合回路的电阻为 R ，那么根据闭合回路欧姆定律 $\mathcal{E} = IR$ ，则回路中的感应电流为

$$I_i = - \frac{1}{R} \frac{d\Phi}{dt}$$

(4) 在 $\Delta t = t_2 - t_1$ 时间内，通过回路的感应电荷

$$q = \int_{t_1}^{t_2} I dt = - \frac{1}{R} \int_{\Phi_1}^{\Phi_2} d\Phi = \frac{1}{R} (\Phi_1 - \Phi_2)$$

感应电流与回路中磁通量随时间的变化率有关，变化率越大，感应电流越强；但感应电荷则只与回路中磁通量的变化量有关，而与磁通量随时间的变化率无关。

3. 楞次定律

(1) 右手螺旋定则：回路的绕行方向与回路的正法线 e_n 的方向之间的关系遵守右手螺旋定则（图 8-3）。

①回路中的感应电动势取负值（即 $\mathcal{E}_i < 0$ ）时，感应电动势的方向与回路绕行方向相反； ②感应电动势取正值（即 $\mathcal{E}_i > 0$ ）时，感应电动势的方向与回路的绕行方向相同。

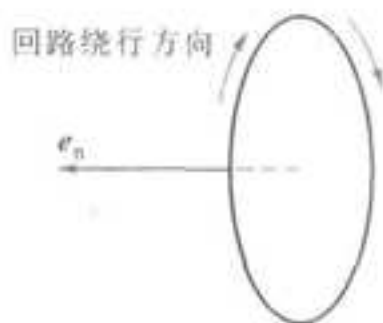


图 8-3 回路正法线 e_n 方向的确定

(2) 感应电动势方向的确定

①磁铁插入线圈时，如图 8-4 (a) 所示，取回路的绕行方向为顺时针方向，线圈中各匝回路的正法线 e_n 的方向与磁感强度的方向相同，所以穿过线圈所包围面积的磁通量为正值，即 $\Phi > 0$ 。

当磁铁插入线圈时，穿过线圈的磁通量增加，故磁通量随时间的变化率 $d\Phi/dt > 0$ 。但 $\mathcal{E}_i < 0$ ，即线圈中各回路的感应电动势的方向与回路的绕行方向相反，此时，线圈中感应电流所激发的磁场与 B 的方向相反，它阻碍磁铁向线圈运动。

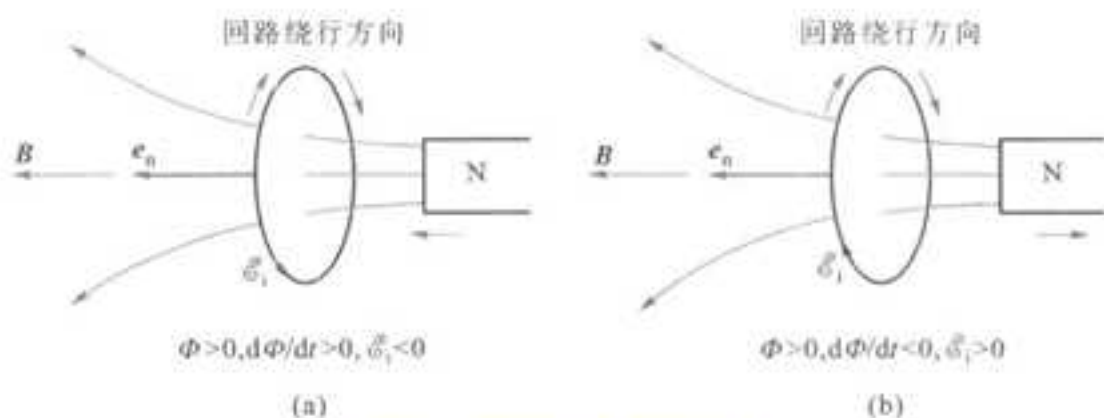


图 8-4 感应电动势方向的确定

②当磁铁从线圈中抽出时，如图 8-4 (b) 所示，穿过线圈的磁通量虽仍为正值，即 $\Phi > 0$ 。但因磁铁是从线圈中抽出，所以穿过线圈的磁通量将有所减少，故有 $d\Phi/dt < 0$ 。感应电动势 $\mathcal{E}_i > 0$ ，为正值，即 e_n 的方向与回路的绕行方向相同，此时，感应电流所激发的磁场与 B 相同，它阻碍磁铁远离线圈运动。

(3) 楞次定律

①一种表达：当穿过闭合的导线回路所包围面积的磁通量发生变化时，在回路中就会有感应电流，此感应电

流的方向总是使它自己的磁场穿过回路面积的磁通量，去抵偿引起感应电流的磁通量的改变。

②另一种表述：闭合的导线回路中所出现的感应电流，总是使它自己所激发的磁场反抗任何引发电磁感应的原由（反抗相对运动、磁场变化或线圈变形等）。

4. 动生电动势和感生电动势

穿过回路所围面积 S 的磁通量是由磁感强度、回路面积的大小以及面积在磁场中的取向等三个因素决定的，因此，只要这三个因素中任一因素发生变化，都可使磁通量变化，从而引起感应电动势。

(1) 动生电动势

动生电动势是指由于回路所围面积的变化或面积取向变化而引起的感应电动势。

①洛伦兹力

如图 8-5 所示，在磁感强度为 B 的均匀磁场中，有一长为 L 的导线 OP 以速度 v 向右运动，且 v 与 B 垂直，导线内每个自由电子都受到洛伦兹力 F_m ，即

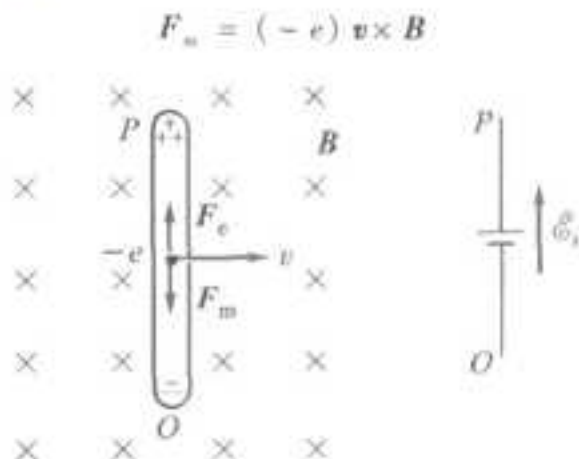


图 8-5 动生电动势

式中 $(-e)$ 为电子的电荷， F_m 的方向与 $v \times B$ 的方向相反，由 P 指向 O ，这个力是非静电力。

②非静电的电场强度：非静电力驱使电子沿导线由 P 向 O 移动，致使 O 端积累了负电， P 端则积累了正电，从而在导线内建立起静电场，当作用在电子上的静电场力 F_e 与洛伦兹力 F_m 相平衡时， O 、 P 两端间便有稳定的电势差。

如以 E_k 表示非静电的电场强度，则有

$$E_k = \frac{F_m}{-e} = v \times B$$

E_k 与 F_m 的方向相反，而与 $v \times B$ 的方向相同。

③动生电动势

在磁场中运动的导线 OP 所产生的动生电动势为

$$\mathcal{E}_i = \int_{OP} E_k \cdot dl = \int_{OP} (v \times B) \cdot dl$$

v 与 B 垂直，矢积 $v \times B$ 的方向与 dl 的方向相同， v 与 B 均为恒矢量，故

$$\mathcal{E}_i = \int_0^l vB dl = vBl$$

注意：此式只能用来计算在均匀磁场中直导线以恒定速度垂直磁场运动时所产生的动生电动势。

(2) 感生电动势

感生电动势是指由于磁感强度变化而引起的感应电动势。

①感生电场

感生电场是指变化的磁场在其周围空间要激发一种电场，用符号 E_k 表示。

②感生电场与静电场之间的不同之处

- 静电场存在于静止电荷周围的空内，感生电场则是由变化磁场所激发，不是由电荷所激发。
- 静电场的电场线是始于正电荷、终于负电荷的，而感生电场的电场线则是闭合的。

正是由于感生电场的存在，才在闭合回路中形成感生电动势。

③感生电动势的表达式

a. 从电动势定义式的角度

感生电动势等于感生电场 E_k 沿任意闭合回路的线积分，即

$$\mathcal{E}_i = \oint_l E_k \cdot dl = - \frac{d\Phi}{dt}$$

注意：这个感生电动势表达式，不只对由导体所构成的闭合回路，甚至对真空，全都是适用的。只要穿过空间内某一闭合回路所围面积的磁通量发生变化，那么此闭合回路上的感生电动势总是等于感生电场 E_k 沿该闭合回路的环流。

b. 从电场的角度

感生电场不是保守场，其电场线是闭合的，故感生电场是有旋电场。

感生电动势也可写成

$$\mathcal{E}_i = \oint_l E_k \cdot dl = - \frac{d}{dt} \int_S B \cdot dS$$

若闭合回路是静止的，它所围的面积 S 也不随时间变化，则

$$\mathcal{E}_i = \oint_l E_k \cdot dl = - \int_S \frac{dB}{dt} \cdot dS$$

④特点

a. 静电场是一种保守场，沿任意闭合回路静电场的电场强度环流恒为零，而感生电场与静电场不同，它沿任意闭合回路的环流一般不等于零。

b. 由于静电场的电场线是有头有尾的，而感生电场的电场线是闭合的，故感生电场也称为有旋电场。

c. 只要存在着变化的磁场，就一定会有感生电场，而且 dB/dt 与 E_k 在方向上应遵从左手螺旋关系。

5. 电子感应加速器

电子感应加速器，简称感应加速器，是回旋加速器的一种，利用变化磁场激发的感生电场来加速电子的。

(1) 原理

①图 8-6 是电子感应加速器基本结构的原理图，在电磁铁的两磁极间放一个环形真空室，电磁铁是由频率为几十赫的交变电流来激磁的，且磁极间的磁场呈对称分布。

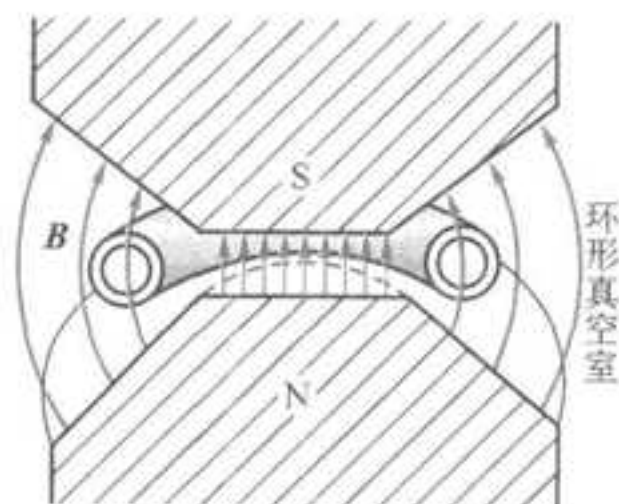


图 8-6 电子感应加速器结构原理图

②当两磁极间的磁场发生变化时，两极间任意闭合回路的磁通量亦将随时间发生变化，从而在回路上激起感生电场（图 8-7）。

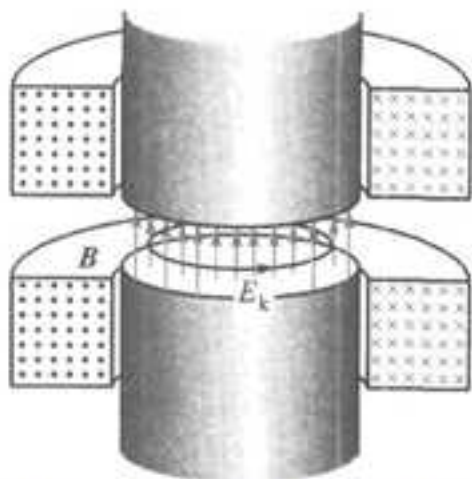


图 8-7 环绕着变化磁场的感生电场

③此时若用电子枪将电子沿回路的切线方向射入环形真空室，电子就将在感生电场作用下被加速，与此同时电子还要受到磁场对它的洛伦兹力作用，从而将沿着环形室内的圆形轨道运动。

(2) 为使电子在电子感应加速器中不断地被加速，这里必须考虑两个问题。

①如何使电子的运动稳定在某个圆形轨道上

图 8-8 中的电子以速率 v 在半径为 R 的圆形轨道上运动，圆形轨道所在处的磁感强度为 B_R 。

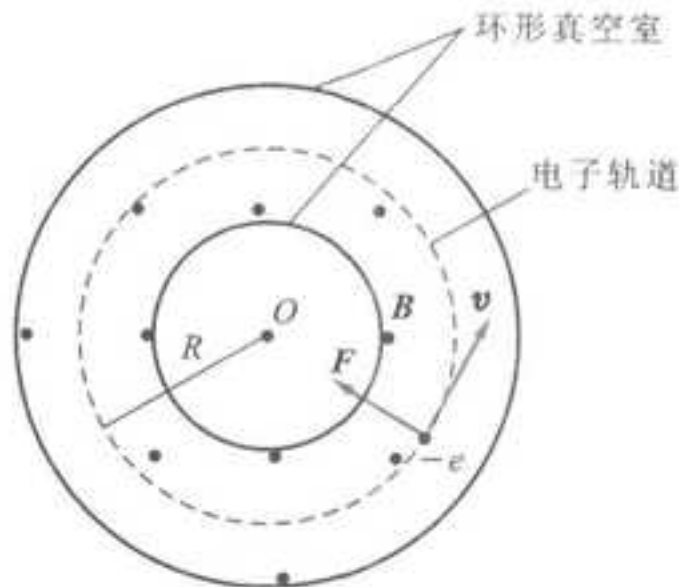


图 8-8 电子在环形真空室内运动

由洛伦兹力和牛顿第二定律，有

$$evB_R = m \frac{v^2}{R}$$

得

$$R = \frac{mv}{eB_R} = \frac{p}{eB_R}$$

有

$$\frac{dp}{dt} = Re \frac{dB_R}{dt}$$

电子的 dp/dt 只能来自感生电场对它的作用力

$$\frac{dp}{dt} = F = eE_{\text{感}}$$

式中 $E_{\text{感}}$ 为感生电场的电场强度， $E_{\text{感}}$ 的方向与圆形轨道处处相切

$$2\pi R E_{\text{感}} = \frac{d\Phi}{dt}, \text{ 或 } E_{\text{感}} = \frac{1}{2\pi R} \frac{d\Phi}{dt}$$

式中 $d\Phi/dt$ 为穿过电子圆轨道所包围面积的磁通量随时间的变化率。

设此面积内磁感强度的平均值为 B ，则

$$\Phi = \pi R^2 B$$

把它代入上式，得

$$E_{\text{感}} = \frac{\pi R^2}{2\pi R} \frac{dB}{dt} = \frac{R}{2} \frac{dB}{dt}$$

得

$$\frac{dp}{dt} = eE_{\text{感}} = \frac{eR}{2} \frac{dB}{dt}$$

得

$$\frac{dB_{\text{感}}}{dt} = \frac{1}{2} \frac{dB}{dt}$$

要使电子能在稳定的轨道上被加速，则真空环形室内电子圆轨道所在处的磁感强度随时间的增长率，应该是电子圆轨道所包围的面积内磁场的平均磁感强度随时间增长率的一半。

②如何使电子在圆形轨道上只被加速，而不被减速

a. 由于电磁铁的激磁电流是随时间正弦变化的，所以磁感强度亦是时间的正弦函数（图 8-9）。若第一个 1/4 周期中感生电场对电子作顺时针向的加速，那么从第二个 1/4 周期开始，感生电场则对电子作逆时针向加速，直至第二个 1/4 周期结束。

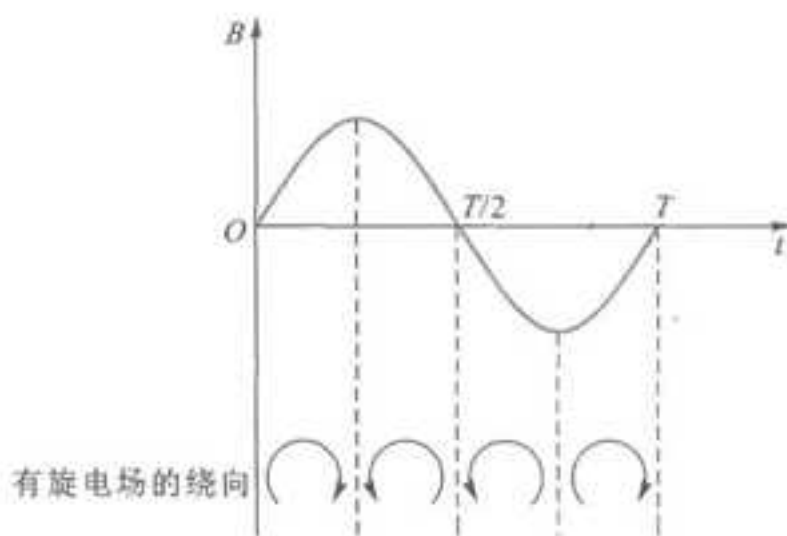


图 8-9 在一个周期内，磁感强度随时间作正弦式的变化

b. 较妥当的选择是在 $t=0$ 时，将电子注入，在 $t=T/4$ 前，将被加速的电子引出轨道射在靶子上。

c. 可设法使电子注入时已有一定的速率，使得在 1/4 周期内，电子在圆形轨道上可转过上百万圈，而每转一圈电子被感生电场加速一次，因此电子在 1/4 周期里可获得很高的速率和能量。

用电子感应加速器来加速电子，要受到电子因加速运动而辐射能量的限制，因此，用电子感应加速器还不能

把电子加速到极高的能量。

6. 涡电流

涡流是指当大块导体与磁场有相对运动或处在变化的磁场中时，在导体中也会激起感应电流的现象。

二、自感和互感

自感电动势是指回路 1 中电流 I_1 的变化而在回路 1 自身中引起的感应电动势，用符号 \mathcal{E}_L 表示。

互感电动势是指回路 2 中电流 I_2 的变化而在回路 1 中引起的感应电动势，用符号 \mathcal{E}_{12} 表示。

1. 自感电动势自感

(1) 自感电动势

考虑一个闭合回路，设其中的电流为 I ，穿过回路本身所围面积的磁通量

$$\Phi = LI$$

自感 L 只与回路的形状、大小以及周围介质的磁导率有关。

由电磁感应定律得自感电动势

$$\mathcal{E}_L = -\frac{d\Phi}{dt} = -\left(L\frac{dI}{dt} + I\frac{dL}{dt}\right)$$

若回路的形状、大小和周围介质的磁导率都不随时间变化，则

$$\mathcal{E}_L = -L\frac{dI}{dt}$$

(2) 说明

①某回路的自感，在数值上等于回路中的电流随时间的变化率为一个单位时，在回路中所引起的自感电动势的绝对值。

②自感电动势将反抗回路中电流的改变。电流增加时，自感电动势与原来电流的方向相反；电流减小时，自感电动势与原来电流的方向相同。

2. 互感电动势互感

(1) 定义

假定有两个邻近的线圈 1 和 2，其中一个线圈的电流发生变化时，在另一个线圈中就会引起互感电动势。这两个回路是互感耦合回路。

(2) 互感电动势

①互感

若线圈 1 中电流 I_1 所激发的磁场穿过线圈 2 的磁通量是 Φ_{21} ，线圈 2 中电流 I_2 所激发的磁场穿过线圈 1 的磁通量 Φ_{12} 则

$$\Phi_{21} = M_{21}I_1$$

$$\Phi_{12} = M_{12}I_2$$

M_{21} 和 M_{12} 是两线圈的互感，它只与两个线圈的形状、大小、匝数、相对位置以及周围磁介质的磁导率有关。

由上两式可得：两个线圈的互感 M 在数值上等于其中一个线圈中的电流为一单位时，穿过另一个线圈所围面积的磁通量。

②互感电动势

当线圈 1 中的电流 I_1 发生变化时，在线圈 2 中引起的互感电动势为

$$\mathcal{E}_{21} = -\frac{d\Phi_{21}}{dt} = -M\frac{dI_1}{dt}$$

同理，当线圈 2 中的电流发生变化时，在线圈 1 中引起的互感电动势为

$$\mathcal{E}_{12} = -\frac{d\Phi_{12}}{dt} = -M\frac{dI_2}{dt}$$

(3) 说明

①互感 M 的意义也可这样理解：两个线圈的互感 M ，在数值上等于一个线圈中的电流随时间的变化率为一个单位时，在另一个线圈中所引起的互感电动势的绝对值。

②当一个线圈中的电流随时间的变化率一定时，互感越大，则在另一个线圈中引起的互感电动势就越大；反之，互感越小，在另一个线圈中引起的互感电动势就越小。所以互感是表明相互感应强弱的一个物理量，或者说是两个电路耦合程度的量度。

③式中负号表示，在一个线圈中所引起的互感电动势，要反抗另一个线圈中电流的变化。

三、RL 电路

讨论含有自感的电路中电流变化的规律，这也是一种暂态过程。

1. 电流增长时的情况

在如图 8-10 所示的电路中，电源的电动势为 \mathcal{E} ，电阻为 R ，线圈的自感为 L 。

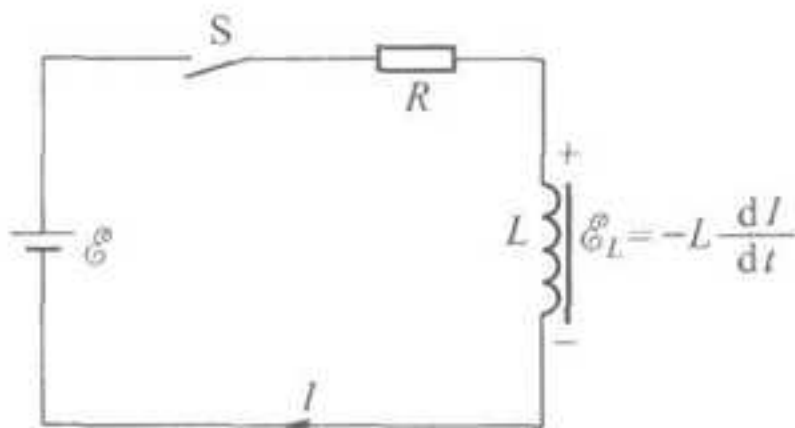


图 8-10 含有自感电路的电流的增长

闭合开关 K ，线圈中的自感电动势 \mathcal{E}_L 的方向与电路中电流增长的方向相反，电路中的电流将逐步增长，而自感电动势为

$$\mathcal{E}_L = -L \frac{dI}{dt}$$

由闭合电路欧姆定律，有

$$\mathcal{E} + \mathcal{E}_L = RI$$

解得

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} (1 - e^{-\frac{R}{L}t})$$

R 越小， L 越大，达到电流稳定值所需的时间越长，电流增长得越慢。

2. 电流衰减的情况

(1) 推导

如图 8-11 (a) 所示，将开关 S 与位置 1 接通相当长时间后，电路中的电流已达稳定值 \mathcal{E}/R 。然后，迅速把开关放到位置 2，这时电路中仅有自感电动势 \mathcal{E}_L 。

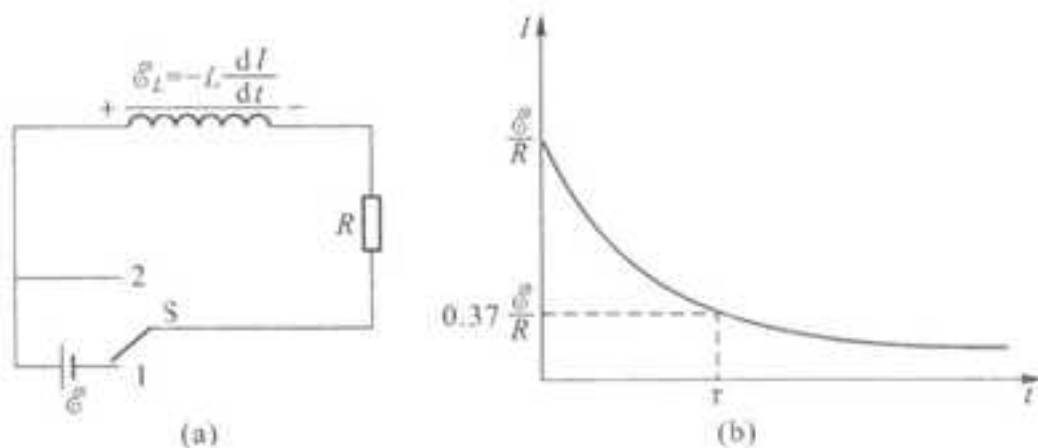


图 8-11 RL 电路电流的衰减

按照欧姆定律, 有

$$\mathcal{E}_l = RI$$

即

$$-L \frac{dI}{dt} = RI$$

令电源从电路中撤出去的时刻 (即 $t=0$ 时), 电路中的电流为 \mathcal{E}/R , 那么, 上式的积分为

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

图 8-11 (b) 给出了 RL 电路中电流衰减时的电流与时间的关系的曲线。

(2) 结论

电路中的电流不会突然减少到零, 而是逐渐衰减到零。这是因为, 自感电动势反抗电路中电流的减少; 电阻越小、自感越大, 电流衰减得越慢。

四、磁场的能量和磁场能量密度

1. 电场的能量

(1) 对电容充电过程所作的功等于储存在电容中的能量, 其值为

$$W_c = \frac{1}{2}QU = \frac{1}{2}CU^2$$

储存在电容中的能量是储存在两极板之间的电场中的。

(2) 在一般情况下, 如电场内某点处的电场强度为 E , 那么, 该点附近的电场能量密度为

$$w_c = \frac{1}{2}\epsilon E^2$$

2. 磁场的能量

(1) 推导

如图 8-10 所示, 电路中含有一个自感为 L 的线圈, 电阻为 R , 电源的电动势为 ϵ 。研究电键 S 未闭合到电键闭合电路中电流增长时能量的转换情况。由

$$\mathcal{E}_l = -L \frac{dI}{dt} \quad \mathcal{E} + \mathcal{E}_l = RI$$

得

$$\mathcal{E} I dt - LI dI = RI^2 dt$$

若在 $t=0$ 时, $I=0$, 在 $t=t$ 时, 电流增长到 I , 则上式的积分为

$$\int_0^t \mathcal{E} I dt = \frac{1}{2} LI^2 + \int_0^t RI^2 dt$$

①式中左端的积分为电源在由 0 到 t 这段时间内所作的功, 也就是电源所供给的能量。

②右端的积分为在这段时间内回路中的导体所放出的焦耳热。

③ $LI^2/2$ 则为电源反抗自感电动势所作的功。

由于当电路中的电流从零增长到 I 时, 电路附近的空间只是逐渐建立起一定强度的磁场, 而没有其它的变化, 所以电源因反抗自感电动势而做功所消耗的能量, 显然在建立磁场的过程中转换成了磁场的能量。

(2) 公式

①对自感为 L 的线圈来说, 当其电流为 I 时, 磁场的能量为

$$W_m = \frac{1}{2} LI^2$$

②体积为 V 的长直螺线管的自感 $L = \mu n^2 V$, 螺线管中通有电流 I 时, 螺线管中磁场的磁感强度为 $B = \mu n I$, 把它们代入上式, 可得螺线管内的磁场能量为

$$W_m = \frac{1}{2} LI^2 = \frac{1}{2} \mu n^2 V \left(\frac{B}{\mu n} \right)^2 = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu} V$$

由此又可得出单位体积磁场的能量磁场能量密度 w_m

$$w_m = \frac{W_m}{V} = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu}$$

对于均匀的磁介质, 由于 $B = \mu H$, 上式又可以写成

$$w_m = \frac{1}{2} \mu H^2 = \frac{1}{2} BH$$

(3) 结论

①在任意的磁场中某处的磁场能量密度都可以用上式表示, 式中的 B 和 H 分别为该处的磁感强度和磁场强度。

②任何磁场都具有能量, 磁场的能量存在于磁场的整个体积之中。

五、位移电流和电磁场基本方程的积分形式

1. 位移电流和全电流安培环路定理

(1) 恒定电流磁场中的安培环路定理

$$\oint_l H \cdot dl = I = \int_s j \cdot dS$$

表明磁场强度沿任一闭合回路的环流等于此闭合回路所围传导电流的代数和。

但在非恒定电流的磁场中, 磁场强度沿回路 L 的环流与如何选取以闭合回路 L 为边界的曲面有关, 安培环路定理是不适用的。

(2) 位移电流的假设

位移电流密度 j_d 是指电位移 D 的时间变化率 dD/dt 。

位移电流 I_d 是指电位移通量 Ψ 的时间变化率 $d\Psi/dt$ 。

$$j_d = \frac{\partial D}{\partial t}, \quad I_d = \frac{d\Psi}{dt}$$

位移电流和传导电流一样, 也会在其周围空间激起磁场, 这样, 在有电容器的电路中, 在电容器极板表面中断了的传导电流 I_c , 可以由位移电流 I_d 继续下去, 两者一起构成电流的连续性。

(3) 全电流安培环路定理

①全电流：就一般性质来说，电路中可同时存在传导电流 I_c 和位移电流 I_d ，那么，它们之和为

$$I_s = I_c + I_d$$

就是全电流。

②修正的安培环路定理

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I_s = I_c + \frac{d\Psi}{dt}$$

或

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_s \left(\mathbf{j}_c + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S}$$

③全电流安培环路定理：磁场强度 \mathbf{H} 沿任意闭合回路的环流等于穿过此闭合回路所围曲面的全电流。

(4) 结论

①麦克斯韦关于位移电流假设的实质就是变化的磁场要激发有旋电场。

②存在变化电场的空间必存在变化磁场，同样，存在变化磁场的空间也必存在变化电场。

2. 麦克斯韦电磁场方程的积分形式

(1) 静止电荷激发的静电场的一些基本方程

①静电场的高斯定理

$$\oint_s \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_v \rho dV = q$$

②静电场的环流定理

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

(2) 恒定电流激发的恒定磁场的一些基本方程

①磁场的高斯定理

$$\oint_s \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

②安培环路定理

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_s \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = I_c$$

(3) 引入有旋电场和位移电流后

①将静电场的环流定理修改为

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\int_s \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

②将安培环路定理修改为

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I_c + I_d = \int_s \left(\mathbf{j}_c + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S}$$

它们能适用于一般的电磁场。

(4) 电磁场的四个基本方程

麦克斯韦还认为静电场的高斯定理和磁场的高斯定理不仅适用于静电场和恒定磁场，也适用于一般电磁场。于是，得到电磁场的四个基本方程，即

$$\oint_s \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_v \rho dV = q$$

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\int_s \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

$$\oint_s \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_{\Sigma} \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S}$$

这四个方程就是麦克斯韦方程组的积分形式。

8.2 课后习题详解

一、问题

8-1 在电磁感应定律 $\epsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt}$ 中，负号的意义是什么？你是如何根据负号来确定感应电动势的方向的？

答：在电磁感应定律 $\epsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt}$ 中，负号是楞次定律在电磁感应定律中的数学表示。感应电动势的方向确定如下：

(1) 在导体回路上任选一个方向为回路绕行的正方向，再用右手螺旋法则确定回路所围面积的正法线 \mathbf{e}_n 的方向。

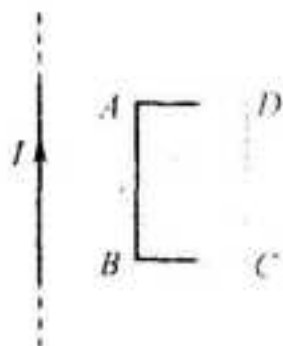
(2) 确定通过回路磁通量的正负： \mathbf{B} 与 \mathbf{e}_n 方向成锐角时，穿过回路的磁通量 Φ 为正； \mathbf{B} 与 \mathbf{e}_n 方向成钝角时，穿过回路的磁通量 Φ 为负。

(3) 根据磁通量的变化，确定 $d\Phi/dt$ 的正负。

(4) 由 $\epsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt}$ 确定 ϵ_i 的正负。当 $\epsilon_i > 0$ 时， ϵ_i 的方向与回路绕行的正方向相同；当 $\epsilon_i < 0$ 时， ϵ_i 的方向与回路绕行的正方向相反。

8-2 如问题 8-2 图，在一长直导线 L 中通有电流 I ， $ABCD$ 为一矩形线圈，试确定在下列情况下， $ABCD$ 上的感应电动势的方向：

- (1) 矩形线圈在纸面内向右移动；
- (2) 矩形线圈绕 AD 轴旋转；
- (3) 矩形线圈以直导线为轴旋转。



问题 8-2 图

答：(1) 矩形线圈在纸面内向右移动，穿过线圈的磁通量减少，由楞次定律可判断感应电动势的方向沿顺时针方向。

(2) 矩形线圈绕 AD 轴旋转，穿过线圈的磁通量减少、增加交替变化，并且与夹角有关，由楞次定律可判断感应电动势为交变电动势。

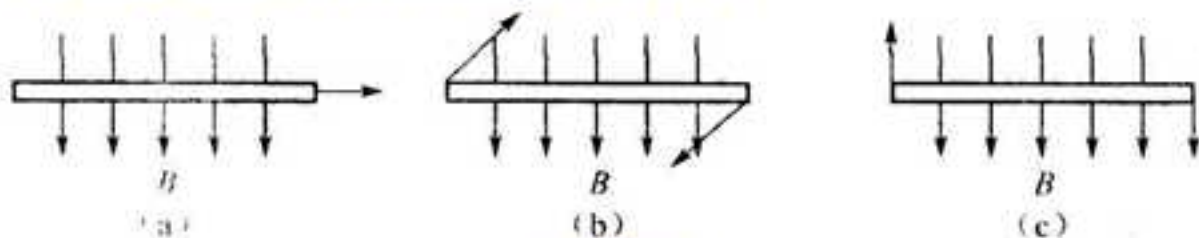
(3) 矩形线圈以直导线为轴旋转，穿过线圈的磁通量不变，线圈中无感应电动势。

8-3 当我们把条形磁铁沿铜质圆环的轴线插入铜环中时，铜环中有感应电流和感应电场吗？如用塑料圆环替代铜质圆环，环中仍有感应电流和感应电场吗？

答：当把条形磁铁沿铜质圆环的轴线插入铜环中时，铜环处在变化的磁场中，穿过铜环所围面积的磁通量发生变化，铜环中会产生感应电流和感应电场。如用塑料圆环替代铜质圆环，塑料圆环处在变化的磁场中，环中仍有感应电场存在，但感应电场不能驱动束缚电荷，因而不能形成感应电流。

8-4 如问题 8-4 图所示铜棒在均匀磁场中作下列各种运动, 试问在何种运动中铜棒上会产生感应电动势? 其方向怎样? 设磁感应强度的方向铅直向下。

- (1) 铜棒向右平移如问题 8-4 图 (a);
- (2) 铜棒绕通过其中心的轴在垂直于 B 的平面内转动如问题 8-4 图 (b);
- (3) 铜棒绕通过中心的轴在竖直平面内转动如问题 8-4 图 (c)。



问题 8-4 图

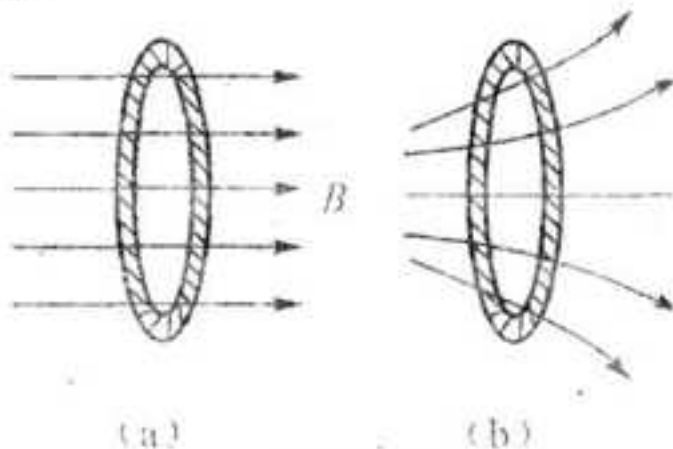
答: (1) 铜棒向右平移不切割磁感线, 铜棒上不产生感应电动势。

(2) 铜棒绕通过其中心的轴在垂直于 B 的平面内转动, 虽然转动过程中铜棒切割了磁感线, 但中点两侧的铜棒上产生的感应电动势的大小相等而方向相反, 故铜棒上总的感应电动势为零。

(3) 铜棒绕通过中心的轴在竖直平面内转动, 铜棒不切割磁感线, 故铜棒上不产生感应电动势。

8-5 把一铜环放在均匀磁场中, 并使环的平面与磁场的方向垂直。如果使环沿着磁场的方向移动如问题 8-5 图 (a), 在铜环中是否产生感应电流? 为什么? 如果磁场是不均匀的如问题 8-5 图 (b), 是否产生感应电流? 为什么?

答: 在问题 8-5 图 (a) 中磁场是均匀的, 环沿磁场的方向移动时, 穿过铜环的磁通量不发生变化, 铜环中不会产生感应电流。在问题 8-5 图 (b) 中磁场是不均匀的, 环沿着磁场的方向移动时, 穿过铜环的磁通量发生变化, 铜环中会产生感应电流。



问题 8-5 图

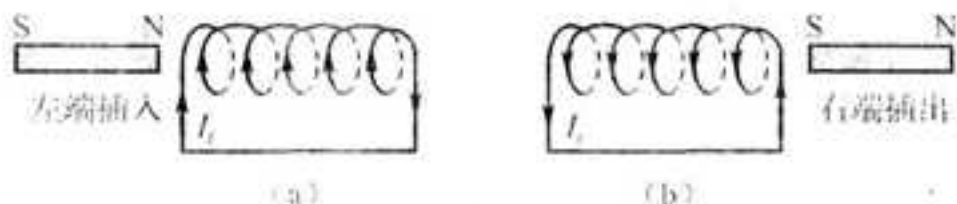
8-6 有一面积为 S 的导电回路, 其正法向单位矢量 e_n 的方向与均匀磁场的 B 的方向之间的夹角为 θ , 且 B 的值随时间变化率为 dB/dt 。试问角 θ 为何值时, 回路中 ϵ_i 的值最大? 请解释之。

答: 穿过回路的磁通量为 $\Phi = BS \cos\theta$, 由于磁场随时间而变化, 所以回路中的感应电动势为

$\epsilon_i = \left| \frac{d\Phi}{dt} \right| = \left| S \cos\theta \frac{dB}{dt} \right|$ 。当 $\theta = 0$ 或 π 时, $|\cos\theta| = 1$, 回路中的感应电动势 ϵ_i 数值最大; 当 $\theta = \pi/2$ 或 $3\pi/2$ 时, $|\cos\theta| = 0$, 回路中的感应电动势 ϵ_i 数值最小。

8-7 把一条形永久磁铁从闭合长直螺线管中的左端插入, 由右端抽出。试用图表示在这个过程中所产生的感应电流的方向。

答: 把一条形永久磁铁从闭合长直螺线管中的左端插入, 感应电流的方向如问题 8-7 图 (a) 所示。由右端抽出, 感应电流的方向如问题 8-7 图 (b) 所示。



问题 8-7 图

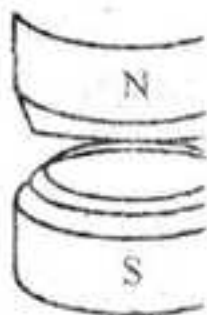
8-8 有人认为可以采用下述方法来测量炮弹的速度。在炮弹的尖端插一根细小的永久磁针，那么，当炮弹在飞行中连续通过相距为 r 的两个线圈后，由于电磁感应，线圈中会产生时间间隔为 Δt 的两个电流脉冲。您能据此测出炮弹速度的值吗？如 $r=0.1\text{m}$ ， $\Delta t=2\times 10^{-4}\text{s}$ ，炮弹的速度为多少？

答：可以。由题意可知，炮弹在飞行中连续通过相距为 r 的两个线圈，所用时间为 Δt ，若 r 和 Δt 很小，炮弹在这段距离上的运动可近似看作匀速直线运动，故炮弹的速度

$$v = \frac{r}{\Delta t} = \frac{0.1}{2 \times 10^{-4}} = 5 \times 10^3 \text{ m/s}$$

8-9 如问题 8-9 图所示，在两磁极之间放置一圆形的线圈，线圈的平面与磁场垂直。问在下述各种情况中，线圈中是否产生感应电流？并指出其方向。

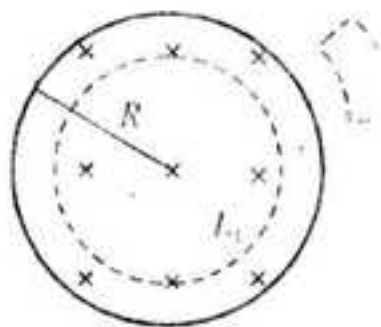
- (1) 把线圈拉扁时；
- (2) 把其中一个磁极很快地移去时；
- (3) 把两个磁极慢慢地同时移去时。



问题 8-9 图

答：三种情况下，穿过线圈的磁通量均减少，因而线圈中都会产生感应电流。由楞次定律可判断感应电流的方向均为顺时针方向。

8-10 如问题 8-10 图所示，均匀磁场被限制在半径为 R 的圆柱体内，且其中磁感强度随时间变化率 $\frac{dB}{dt} = \text{常量}$ ，试问：在回路 L_1 和 L_2 上各点的 $\frac{dB}{dt}$ 是否均为零？各点的 E_k 是否均为零？ $\oint_{L_1} E_k \cdot dl$ 和 $\oint_{L_2} E_k \cdot dl$ 各为多少？



问题 8-10 图

解：由于均匀磁场被限制在半径为 R 的圆柱体内，而回路 L_1 在圆柱体内。所以回路 L_1 上各点的 $\frac{dB}{dt}$ 为常量，各点的 $E_k \neq 0$ 。且有

$$\oint_{L_1} \mathbf{E}_k \cdot d\mathbf{l} = S \frac{dB}{dt}$$

式中 S 为 L_1 所包围的面积

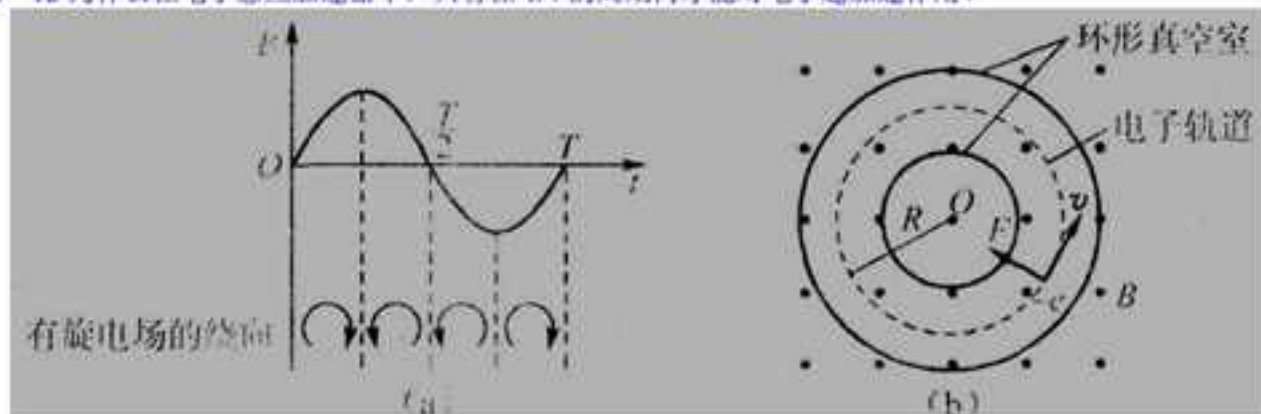
回路 L_2 在圆柱体外。回路 L_2 上各点的 $dB/dt=0$ ，但各点的 $\mathbf{E}_k \neq 0$ ，且有

$$\oint_{L_2} \mathbf{E}_k \cdot d\mathbf{l} = - \int_S \frac{\partial B}{\partial t} dS = 0$$

8-11 在磁场变化的空间里，如果没有导体，那么，在这个空间是否存在电场，是否存在感应电动势？

答：变化的磁场会激发感生电场，这是电磁场本身的一种属性，它不依赖导体是否存在和其他外界原因。因此在磁场变化的空间里，一定有电场存在。由感应电动势 $\varepsilon_i = \oint_L \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{l} = - \frac{d\Phi}{dt}$ 可知，只要空间有感生电场，对电场中任何一个回路，甚至任意个不闭合的路径都有相应的感应电动势。如果有导体存在，该感应电动势驱使导体中的自由电荷定向移动，从而显示出感应电流。如果没有导体，就没有感应电流，但仍然有感生电动势。

8-12 为什么在电子感应加速器中，只有在 $1/4$ 的周期内才能对电子起加速作用？



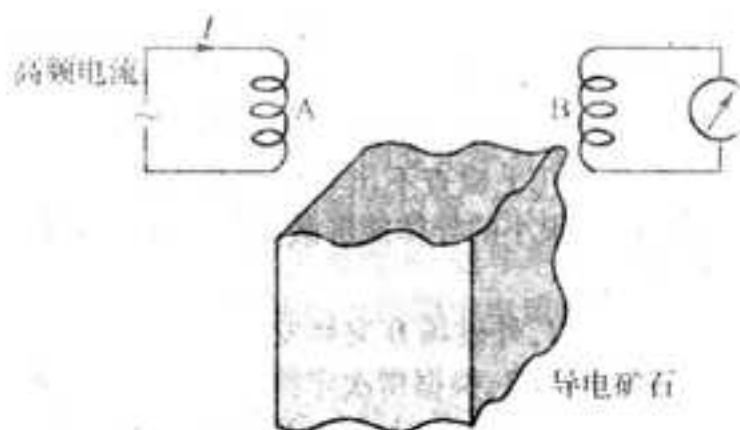
问题 8-12 图

答：电子感应加速器是在磁场随时间作正弦变化的条件下进行工作的，因此交变磁场激发的感生电场也随时间交替变化，图 (a) 给出了一个周期内感生电场随磁场变化的情况。设电子感应加速器的环形真空管内，垂直纸面向外为磁场正方向。若电子进入加速器时沿逆时针方向旋转，如图 (b) 所示，为了使电子逆时针加速，感生电场应沿顺时针方向。由图 (a) 可知，只有在第一和第四两个 $1/4$ 周期内电子才可能被加速，但是在第四个 $1/4$ 周期内作为向心力的洛伦兹力，由于 B 的变向而背离圆心，这样就不能维持电子在恒定轨道上作圆周运动。因此只有在第一个 $1/4$ 周期内才能实现既对电子加速，又可维持电子在圆周轨道上运动。

8-13 一根很长的铜管竖直放置，有一根磁棒由管中铅直下落。试述磁棒的运动情况。

答：磁棒从初速度为零开始加速下落，由于电磁感应，铜管中产生感应电流。感应电流的磁场使磁棒受到向上的磁力作用，磁棒下降的加速度逐渐减小，当磁棒受到的磁力等于重力时，加速度为零，磁棒将匀速下落。

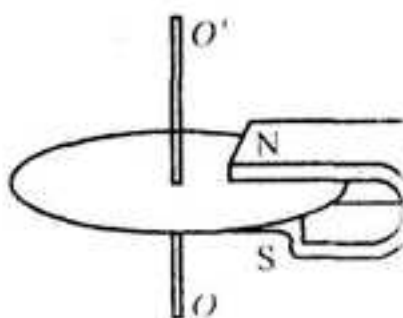
8-14 有一些矿石具有导电性，在地质勘探中常利用导电矿石产生的涡电流来发现它，这叫电磁勘探。在示意图中，A 为通有高频电流的初级线圈，B 为次级线圈，并连接电流计 G，从次级线圈中的电流变化可检测磁场的变化。当次级线圈 B 检测到其中磁场发生变化时，技术人员就认为在附近有导电矿石存在。你能说明其道理吗？利用与问题 8-14 图相似的装置，还可确定地下金属管线和电缆的位置，你能提供一个设想方案吗？



问题 8-14 图

答：没有导电矿石存在时，通有高频电流的初级线圈 A 激发变化的磁场，在次级线圈 B 中产生感应电流，电流计显示它的有效值。当有导电矿石存在时，初级线圈 A 中的高频电流激发的变化磁场，在导电矿石中产生涡电流。涡电流的存在，将引起次级线圈 B 中的磁场发生变化，由此引起次级线圈 B 中的电流变化，据此可认为在附近有导电矿石存在。

8-15 如问题 8-15 图所示，一个铝质圆盘可以绕固定轴 OO' 转动。为了使圆盘在力矩作用下作匀速转动，常在圆盘的边缘处放一永久磁铁。圆盘受到力矩作用后先作加速转动，当角速度增加到一定值时，就不再增加。试说明其作用原理。



问题 8-15 图

答：设圆盘在外力矩作用下沿逆时针方向加速转动，转动过程中铝质圆盘将切割磁感线，在圆盘中产生由边缘流向圆心的感应电流。该电流在磁场中受到安培力的作用，安培力对转轴的力矩使圆盘沿顺时针方向转动。当角速度增加到一定值时，安培力对转轴的力矩与外力矩平衡，圆盘角速度就不再增加了，圆盘作匀角速转动。

8-16 如问题 8-16 图所示为一种汽车上用的车速表的原理图。永久磁铁与发动机的转轴相连，磁铁的旋转使铝质圆盘 A 受到力矩的作用而偏转，当圆盘所受力矩与弹簧 s 的反力矩平衡时，指针 P 即指出车速的大小。试说明这种车速表的工作原理。



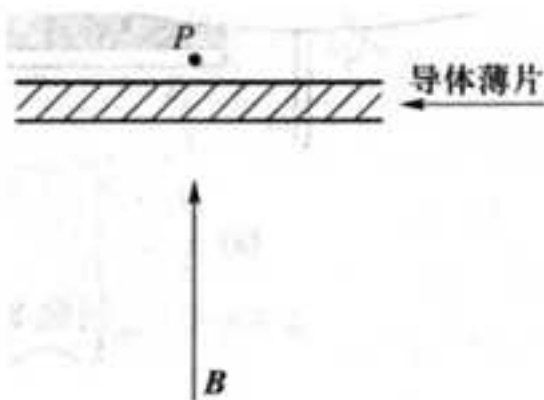
问题 8-16 图

答：发动机转轴转动时，锅盘切割磁力线产生感应电流。感应电流受永磁铁磁力矩的作用，使铝盘跟随永磁铁转动。发动机转轴转动的越快，铝盘中产生的感应电流越大，铝盘受到的磁力矩越大。当弹簧 S 的反力矩与铝盘受到磁力矩平衡时，由指针 P 偏转的位置可知弹簧 S 反力矩的大小，即知道铝盘所受磁力矩的大小，由此可以测出车速的大小。

8-17 如问题 8-17 图所示，没有一导体薄片位于与磁感强度 B 垂直的平面上。

(1) 如果 B 突然改变，则在点 P 附近 B 的改变可不可以立即检查出来？为什么？

(2) 若导体薄片的电阻率为零，这个改变在点 P 是始终检查不出来的，为什么？（若导体薄片是由低电阻的材料做成的，则在点 P 几乎检查不出导体薄片下侧磁场的变化，这种电阻率很小的导体能屏蔽磁场变化的现象叫做电磁屏蔽。）



问题 8-17 图

答：(1) 不可以。外磁场 B 突然发生变化时，在导体薄片内感应出涡电流。根据楞次定律可知，此涡电流产生的磁场将阻碍外磁场 B 的变化，当 B 突然发生变化时，P 点及其附近磁场的变化不能立即检查出来。

(2) 当导体薄片的电阻为零时，薄片内的涡电流非常显著，以至于涡电流的磁场与外磁场 B 始终等大反向，这样 P 点的磁场始终为零或几乎为零，即低电阻的导体薄片具有屏蔽磁场的作用，所以 B 突然发生变化时，在 P 点几乎检查不出导体薄片下侧磁场的变化。

8-18 如果要设计一个自感较大的线圈，应该从哪些方面去考虑？

答：线圈的自感取决于线圈自身的性质，一般应从线圈的大小、匝数和介质的磁导率三个方面来考虑：

- (1) 线圈的截面、长度在许可的条件下尽可能大；
- (2) 单位长度上的匝数尽可能多，而且导线应向一个方向绕制；
- (3) 螺线管内放置磁导率较大磁介质。

8-19 自感是由 $L = \Phi/I$ 规定的，能否由此式说明，通过线圈中的电流愈小，自感 L 就愈大？

答：否。线圈的自感取决于线圈自身的性质，它取决于线圈的大小、匝数和磁介质的磁导率。除充有铁磁质的情况外，自感与线圈回路中的电流无关，因为穿过线圈的磁通量 $\Phi \propto I$ ，比值 Φ/I 对于给定的线圈等于常量，这个常量即线圈的自感 L 。

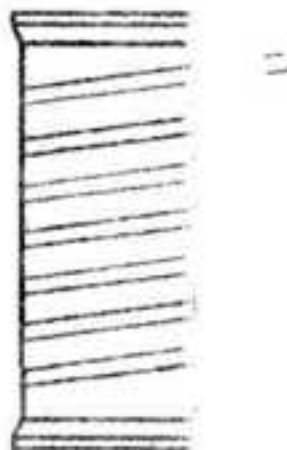
8-20 试说明：(1) 当线圈中的电流增加时，自感电动势的方向和电流的方向相同还是相反；(2) 当线圈中的电流减小时，自感电动势的方向和电流的方向相同还是相反。为什么？

答：当线圈中的电流变化时，穿过线圈自身的磁通量发生改变，在线圈自身中产生自感电动势，即

$$\epsilon_L = -L \frac{dI}{dt}, \text{ 所以}$$

- (1) 当线圈中的电流增加时， $dI/dt > 0, \epsilon_L < 0, \epsilon_L$ 与线圈中电流的方向相反；
- (2) 当线圈中的电流减小时， $dI/dt < 0, \epsilon_L > 0, \epsilon_L$ 与线圈中电流的方向相反。

8-21 有的电阻元件是用电阻丝绕成的，为了使它只有电阻而没有自感，常用双绕法（如问题 8-20 图）。试说明为什么要这样绕。



问题 8-20 图

答：双绕法通常是把导线从中点折成双线，并排密绕于线圈架。当线圈中通有电流时，两股导线中的电流大小相等、方向相反，从而使通过线圈平面的总磁通量近似为零。线圈的自感 $L = \Phi/I$ ，因 $\Phi \approx 0$ ，所以 $L \approx 0$ 。故用双绕法制做的电阻元件有电阻而没有自感。

8-22 互感电动势与哪些因素有关？要在两个线圈间获得较大的互感，应该用什么办法？

答：两个线圈中的互感电动势 $\epsilon_{12} = -M \frac{dI_2}{dt}$ ， $\epsilon_{21} = -M \frac{dI_1}{dt}$ ，由此可知，互感电动势与两线圈的互感系数有关，与对方线圈中电流的变化率有关。两线圈的互感取决于两线圈的大小、形状、匝数、介质的磁导率和相对位置。要在两个线圈间获得较大的互感，通常使线圈的体积尽可能大；匝数尽可能多；磁导率一般来说越大越好；两个线圈尽可能相互重叠、套在一起，从而使每个线圈中电流产生的磁通最大限度的穿过另一线圈。

8-23 有两个线圈，长度相同，半径接近相等，试指出在下列三种情况下，哪一种情况的互感最大？哪一种情况的互感最小？

- (1) 两个线圈靠得很近，轴线在同一直线上；
- (2) 两个线圈相互垂直，也是靠得很近；
- (3) 一个线圈套在另一个线圈的外面。

答：由 $M = \Phi_{12}/I_2 = \Phi_{21}/I_1$ 可知，在第三种情况中两线圈的互感最大，因一个线圈套在另一个线圈的外面时，可使一个线圈中电流产生的磁通最大限度的穿过另一线圈。第二种情况两线圈的互感最小，因两线圈相互垂直，虽然靠得很近，但一个线圈中电流产生的磁通几乎不会穿过另一线圈。

8-24 什么叫位移电流，位移电流与传导电流有什么异同？

答：通过某一截面的位移电流等于通过该截面的电位移通量 Ψ 对时间的变化率，即 $I_d = d\Psi/dt$ 。

(1) 位移电流与传导电流虽然都称为电流，但二者的起源不同。传导电流是由电荷的宏观定向移动引起的；而位移电流是由变化的电场引起的。

(2) 传导电流只能在导体中通过，因为导体中有足够的可以自由移动的电荷；而位移电流不依赖自由电荷，哪里有变化的电场，哪里就有相应的位移电流，位移电流在导体中、介质中和真空中都可以通过。

(3) 传导电流在导体中通过会引起热效应，它遵从焦耳-楞次定律；位移电流在真空中没有热效应。在介质中，伴随着介质的极化，位移电流会产生热效应，不过它不服从焦耳-楞次定律。

(4) 位移电流与传导电流都可以激发磁场，都可以根据毕奥-萨伐尔定律安培环路定理 $\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \sum I$ 求解磁场分布。

如果磁场是由传导电流激发的，
$$I = \int_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}$$

如果磁场是由位移电流激发的, 则 $I = \int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$ 。

8-25 试从以下三个方面来比较静电场与有旋电场:

(1) 产生的原因; (2) 电场线的分布; (3) 对导体体中电荷的作用。

答: (1) 静电场是由静止电荷产生的, 是有源场; 有旋电场是由变化的磁场产生的, 不依赖于场源电荷, 是无源场。

(2) 静电场的电场线是不闭合的, 起始于正电荷, 终止于负电荷, 在没有电荷的地方不中断; 有旋电场的电场线是无头无尾的闭合曲线, 呈涡旋状。

(3) 两种电场都对导体中的电荷产生作用, 电荷受到的作用力均为 $F=qE$ 。

8-26 变化电场所产生的磁场, 是否也一定随时间发生变化? 变化磁场所产生的电场, 是否也一定随时间发生变化?

答: 变化电场所产生的磁场, 不一定都随时间发生变化。由

$$\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

可知, 若电场随时间匀变速变化, 即 $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \text{常量}$, 此种情况 \mathbf{H} 并不随时间变化。同样, 变化磁场产生的电场, 也不一定都随时间发生变化。由

$$\oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

可知, 若磁场随时间匀变速变化, 即 $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \text{常量}$, 此时感生电场 \mathbf{E} 也不随时间变化。

8-27 你是怎样理解麦克斯韦电磁场四个积分方程是电磁场的基本积分方程?

答: 麦克斯韦电磁场的四个积分方程

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \rho dV = \sum q \quad \textcircled{1}$$

$$\oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \quad \textcircled{2}$$

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad \textcircled{3}$$

$$\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I_c + I_d = \int_S \left(j_c + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S} \quad \textcircled{4}$$

式①是电场中的高斯定理。它说明 \mathbf{D} 通量只和自由电荷有关, 但式中的电场是电荷和变化的磁场共同激发的。

式②是法拉第电磁感应定律, 也是推广后的电场的环路定理。它说明变化的磁场产生涡旋电场。式中的 \mathbf{E} 是由静电荷和变化的磁场共同激发的, 由于静电场的环流为零, 所以总电场的环流仅与变化的磁场有关。

式③是磁场中的高斯定理, 它说明磁感应线总是闭合的曲线。式中的 \mathbf{B} 是由位移电流与传导电流共同激发的。

式④是全电流安培环路定理, 它说明传导电流和位移电流都能激发磁场。

麦克斯韦电磁场的四个方程系统而全面地概括了电场和磁场的基本性质, 它对电磁场的基本规律做了的总结性、统一性的完美描述。

二、习题

8-1 一根无限长平行直导线载有电流 I , 一矩形线圈位于导线平面内沿垂直于载流导线方向以恒定速率运动 (如图 8-1 所示), 则 ()

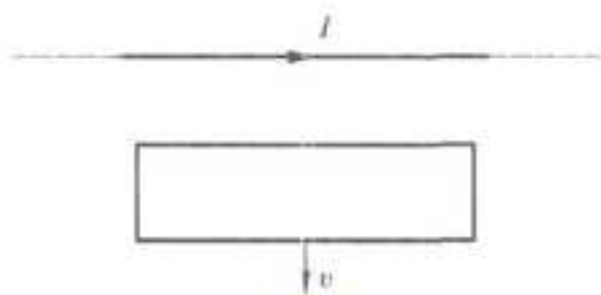


图 8-1

- A. 线圈中无感应电流
 B. 线圈中感应电流为顺时针方向
 C. 线圈中感应电流为逆时针方向
 D. 线圈中感应电流方向无法确定

【答案】B

【解析】由右手定则可以判断，在矩形线圈附近磁场垂直纸面朝里，磁场是非均匀场，距离长直载流导线越远，磁场越弱，因而当矩形线圈朝下运动时，在线圈中产生感应电流，感应电流方向由法拉第电磁感应定律可以判定。

8-2 将形状完全相同的铜环和木环静止放置在交变磁场中，并假设通过两环面的磁通量随时间的变化率相等，不计自感时则（）

- A. 铜环中有感应电流，木环中无感应电流
 B. 铜环中有感应电流，木环中有感应电流
 C. 铜环中感应电动势大，木环中感应电动势小
 D. 铜环中感应电动势小，木环中感应电动势大

【答案】A

【解析】根据法拉第电磁感应定律，铜环、木环中的感应电场大小相等，但在木环中不会形成电流。

8-3 有两个线圈，线圈 1 对线圈 2 的互感系数为 M_{21} ，而线圈 2 对线圈 1 的互感系数为 M_{12} ，若它们分别流过 i_1 和 i_2 的变化电流且 $\left| \frac{di_1}{dt} \right| < \left| \frac{di_2}{dt} \right|$ ，并由 i_2 变化在线圈 1 中产生的互感电动势为 ε_{12} ，由 i_1 变化在线圈 2 中产生的互感电动势为 ε_{21} ，下述论断正确的是（）。

- A. $M_{12} = M_{21}$ ， $\varepsilon_{21} = \varepsilon_{12}$
 B. $M_{12} \neq M_{21}$ ， $\varepsilon_{21} \neq \varepsilon_{12}$
 C. $M_{12} = M_{21}$ ， $\varepsilon_{21} > \varepsilon_{12}$
 D. $M_{12} = M_{21}$ ， $\varepsilon_{21} < \varepsilon_{12}$

【答案】D

【解析】教材中已经证明 $M_{21} = M_{12}$ ，电磁感应定律 $\varepsilon_{21} = M_{21} \left| \frac{di_1}{dt} \right|$ ； $\varepsilon_{12} = M_{12} \left| \frac{di_2}{dt} \right|$ 。

8-4 对位移电流，下述四种说法中哪一种说法是正确的（）

- A. 位移电流的实质是变化的电场
 B. 位移电流和传导电流一样是定向运动的电荷
 C. 位移电流服从传导电流遵循的所有定律
 D. 位移电流的磁效应不服从安培环路定理

【答案】A

【解析】位移电流的实质是变化的电场，变化的电场激发磁场，在这一点位移电流等效于传导电流，但是位移电流不是定向运动的电荷，也就不服从焦耳热效应、安培力等定律。

8-5 下列概念正确的是（）

- A. 感应电场是保守场
 B. 感应电场的电场线是一组闭合曲线
 C. $\phi_{\text{总}} = LI$, 因而线圈的自感系数与回路的电流成反比
 D. $\phi_{\text{总}} = LI$, 回路的磁通量越大, 回路的自感系数也一定大

【答案】B

【解析】对照感应电场的性质, 感应电场的电场线是一组闭合曲线。

8-6 一铁芯上绕有线圈 100 匝, 已知铁芯中磁通量与时间的关系为

$$\Phi = 8.0 \times 10^{-5} \sin 100 \pi t (\text{Wb}), \text{ 求在 } t=1.0 \times 10^{-2} \text{S 时, 线圈中的感应电动势.}$$

解: 线圈中总的感应电动势

$$\mathcal{E} = -N \frac{d\Phi}{dt} = (2.51) \cos(100\pi)t \quad (\text{V})$$

当 $t=1.0 \times 10^{-2} \text{s}$ 时, $\mathcal{E} = 2.51 \text{ V}$.

8-7 有两根相距为 d 的无限长平行直导线, 它们通以大小相等流向相反的电流, 且电流均以 $\frac{dI}{dt}$ 的变化率增长。若有一边长为 d 的正方形线圈与两导线处于同一平面内, 如图 8-2 所示。求线圈中的感应电动势。

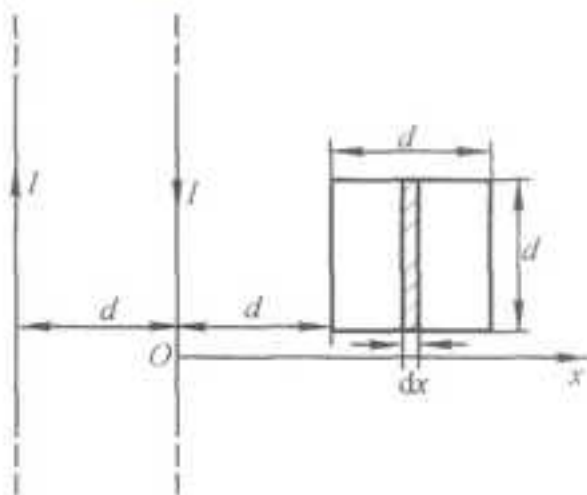


图 8-2

解: 解法一穿过面元 dS 的磁通量为

$$d\Phi = B \cdot dS = B_1 \cdot dS + B_2 \cdot dS = \frac{\mu_0 I}{2\pi(x+d)} ddx - \frac{\mu_0 I}{2\pi x} ddx$$

因此穿过线圈的磁通量为

$$\Phi = \int d\Phi = \int_d^{2d} \frac{\mu_0 I d}{2\pi(x+d)} dx - \int_d^{2d} \frac{\mu_0 I d}{2\pi x} dx = \frac{\mu_0 I d}{2\pi} \ln \frac{3}{4}$$

再由法拉第电磁感应定律, 有

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = \left(\frac{\mu_0 d}{2\pi} \ln \frac{4}{3} \right) \frac{dI}{dt}$$

解法二当两长直导线有电流, 通过时, 穿过线圈的磁通量为

$$\Phi = \frac{\mu_0 I d}{2\pi} \ln \frac{3}{4}$$

线圈与两长直导线间的互感为

$$M = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu_0 d}{2\pi} \ln \frac{3}{4}$$

当电流以 $\frac{dI}{dt}$ 变化时，线圈中的互感电动势为

$$\mathcal{E} = -M \frac{dI}{dt} = \left(\frac{\mu_0 d}{2\pi} \ln \frac{4}{3} \right) \frac{dI}{dt}$$

试想：如线圈又以速率 v 沿水平向右运动，如何用法拉第电磁感应定律求图示位置的电动势呢？

此时线圈中既有动生电动势，又有感生电动势。设时刻 t ，线圈左端距右侧直导线的距离为 ξ ，则穿过回路的磁通量 $\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = f(I, \xi)$ ，它表现为变量 I 和 ξ 的二元函数，将 Φ 代入 $\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}$ 即可求解，求解

时应按复合函数求导，注意，其中 $\frac{d\xi}{dt} = v$ ，再令 $\xi = d$ 即可求得图示位置处回路中的总电动势。最终结果为两项，其中一项为动生电动势，另一项为感生电动势。

8-8 有一测量磁感强度的线圈，其截面积 $S = 4.0 \text{ cm}^2$ 、匝数 $N = 160$ 匝、电阻 $R = 50 \Omega$ 。线圈与一内阻 $R_1 = 30 \Omega$ 的冲击电流计相连。若开始时，线圈的平面与均匀磁场的磁感强度 \mathbf{B} 相垂直，然后线圈的平面很快地转到与 \mathbf{B} 的方向平行。此时从冲击电流计中测得电荷值 $q = 4.0 \times 10^{-5} \text{ C}$ 。问此均匀磁场的磁感强度 \mathbf{B} 的值为多少？

解：在线圈转过 90° 角时，通过线圈平面磁通量的变化量为

$$\Delta\Phi = \Phi_2 - \Phi_1 = NBS - 0 = NBS$$

因此，流过导体截面的电量为

$$q = \frac{\Delta\Phi}{R + R_1} = \frac{NBS}{R + R_1}$$

则

$$B = \frac{q(R + R_1)}{NS} = 0.050 \text{ T}$$

8-9 如图 8-3 所示，一长直导线中通有 $I = 5.0 \text{ A}$ 的电流，在距导线 9.0 cm 处，放一面积为 0.10 cm^2 ， 10 匝的小圆线圈，线圈中的磁场可看作是均匀的。今在 $1.0 \times 10^{-2} \text{ s}$ 内把此线圈移至距长直导线 10.0 cm 处。求：(1) 线圈中平均感应电动势；(2) 设线圈的电阻为 $1.0 \times 10^{-2} \Omega$ ，求通过线圈横截面的感应电荷。

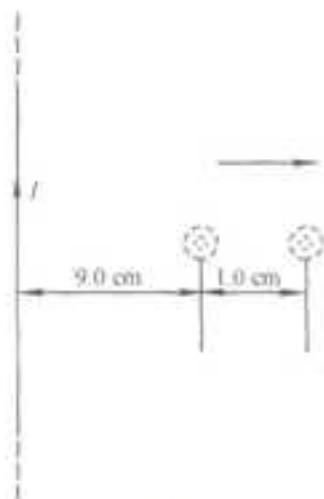


图 8-3

解: (1) 在始、末状态, 通过线圈的磁链分别为

$$\Psi_1 = NB_1 S = \frac{N\mu_0 IS}{2\pi r_1}, \quad \Psi_2 = NB_2 S = \frac{N\mu_0 IS}{2\pi r_2}$$

则线圈中的平均感应电动势为

$$|\bar{\mathcal{E}}| = \left| \frac{\Delta\Psi}{\Delta t} \right| = \frac{N\mu_0 IS}{2\pi\Delta t} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = 1.11 \times 10^{-3} \text{ V}$$

电动势的指向为顺时针方向.

(2) 通过线圈导线横截面的感应电荷为

$$q = \frac{1}{R} |\Psi_1 - \Psi_2| = \frac{|\bar{\mathcal{E}}|}{R} \Delta t = 1.11 \times 10^{-8} \text{ C}$$

8-10 如图 8-4 (a) 所示, 把一半径为 R 的半圆形导线 OP 置于磁感强度为 B 的均匀磁场中. 当导线以速率 v 水平向右平动时, 求导线中感应电动势 \mathcal{E} 的大小, 哪一端电势较高?

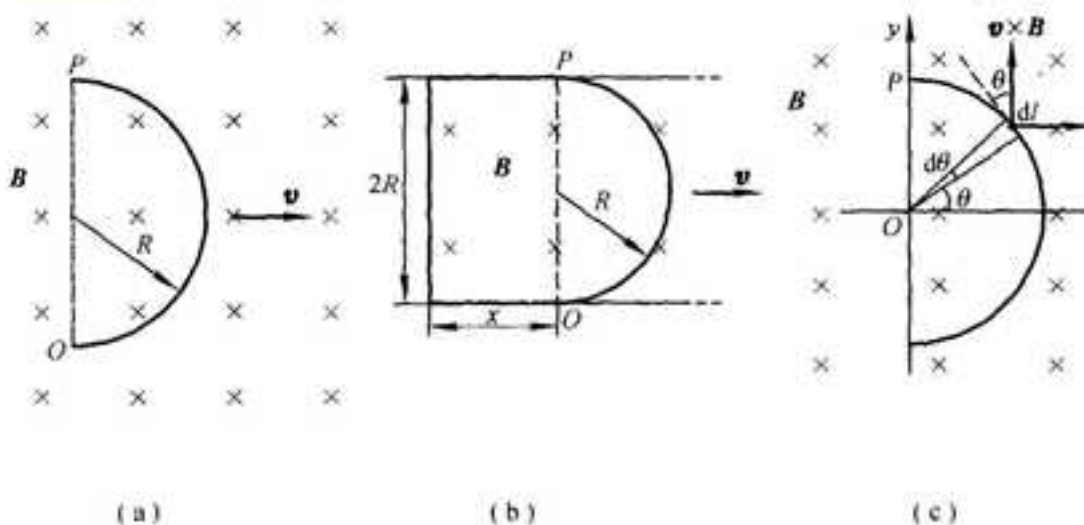


图 8-4

解: 解 1 如图 8-4 (b) 所示, 假想半圆形导线 OP 在宽为 $2R$ 的静止 \square 形导轨上滑动, 两者之间形成一个闭合回路. 设顺时针方向为回路正向, 任一时刻端点 O 或端点 P 距 \square 形导轨左侧距离为 x , 则

$$\Phi = \left(2Rx + \frac{1}{2}\pi R^2 \right) B$$

即

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -2RB \frac{dx}{dt} = -2RvB$$

由于静止的 \square 形导轨上的电动势为零, 则 $\mathcal{E} = -2RvB$. 式中负号表示电动势的方向为逆时针, 对 OP 段来说端点 P 的电势较高.

解 2 建立如图 8-4 (c) 所示的坐标系, 在导体上任意处取导体元 $d\mathbf{l}$, 则

$$d\mathcal{E} = (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} = vB \sin 90^\circ \cos \theta dl = vB \cos \theta R d\theta$$

$$\mathcal{E} = \int d\mathcal{E} = vBR \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \theta d\theta = 2RvB$$

由矢量 $(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$ 的指向可知, 端点 P 的电势较高.

解 3 连接 OP 使导线构成一个闭合回路. 由于磁场是均匀的, 在任意时刻, 穿过回路的磁通量 $\Phi = BS = \text{常数}$. 由

法拉第电磁感应定律 $\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}$ 可知

$$\mathcal{E} = 0$$

又因 $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\text{感}} + \mathcal{E}_{\text{动}}$

$$\text{即 } \mathcal{E}_{\text{感}} = -\mathcal{E}_{\text{动}} = 2RvB$$

由上述结果可知，在均匀磁场中，任意闭合导体回路平动所产生的动生电动势为零；而任意曲线形导体上的动生电动势就等于其两端所连直线形导体上的动生电动势。上述求解方法是叠加思想的逆运用，即补偿的方法。

8-11 长为 L 的铜棒，以距端点 r 处为支点，以角速率 ω 绕通过支点且垂直于铜棒的轴转动。设磁感强度为 B 的均匀磁场与轴平行，求棒两端的电势差。

解：解1 如图 8-5 (a) 所示，在棒上距点 O 为 l 处取导体元 dl ，则

$$\mathcal{E}_{\text{动}} = \int_{\text{AB}} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} = \int_{r}^{L-r} -\omega l B dl = -\frac{1}{2} \omega B L (L - 2r)$$

因此棒两端的电势差为

$$U_{\text{AB}} = -\mathcal{E}_{\text{动}} = \frac{1}{2} \omega B L (L - 2r)$$

当 $L > 2r$ 时，端点 A 处的电势较高。

解2 将 AB 棒上的电动势看作是 OA 棒和 OB 棒上电动势的代数和，如图 8-5 (b) 所示。其中

$$|\mathcal{E}_{\text{OA}}| = \frac{1}{2} B \omega r^2, \quad |\mathcal{E}_{\text{OB}}| = \frac{1}{2} \omega B (L - r)^2$$

则

$$\mathcal{E}_{\text{AB}} = |\mathcal{E}_{\text{OA}}| - |\mathcal{E}_{\text{OB}}| = -\frac{1}{2} \omega B L (L - 2r)$$

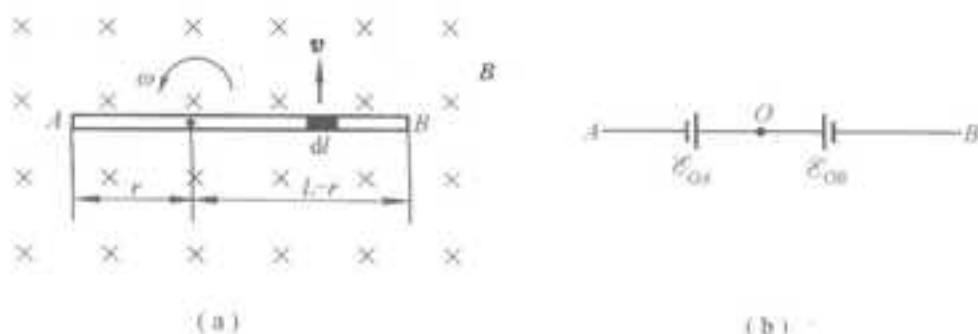


图 8-5

8-12 如图 8-6 所示，长为 L 的导体棒 OP ，处于均匀磁场中，并绕 OO' 轴以角速度 ω 旋转，棒与转轴间夹角恒为 θ ，磁感强度 B 与转轴平行。求 OP 棒在图示位置处的电动势。

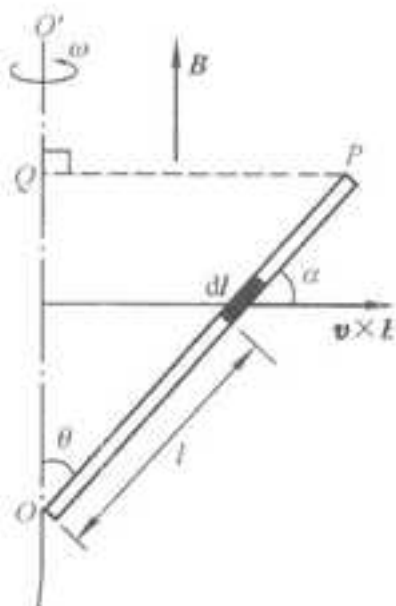


图 8-6

解: 解 1 利用 $\mathcal{E} = \int (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}$ 得

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{op} &= \int_{op} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} \\ &= \int_l r B \sin 90^\circ \cos \alpha dl \\ &= \int_l (l \sin \theta \omega) B \cos(90^\circ - \theta) dl \\ &= \omega B \sin^2 \theta \int_0^l l dl = \frac{1}{2} \omega B (L \sin \theta)^2 \end{aligned}$$

由矢量 $(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$ 的方向可知端点 P 的电势较高。

解 2 设想导体 OP 为直角三角形导体回路 OPQO 中的一部分, 任一时刻穿过回路的磁通量由为零, 则回路的总电动势

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = 0 = \mathcal{E}_{op} + \mathcal{E}_{oq} + \mathcal{E}_{qo}$$

显然, $\mathcal{E}_{qo} = 0$, 所以

$$\mathcal{E}_{op} = -\mathcal{E}_{oq} = \mathcal{E}_{qp} = \frac{1}{2} \omega B (PQ)^2 = \frac{1}{2} \omega B (L \sin \theta)^2$$

由上可知, 导体棒 OP 旋转时, 在单位时间内切割的磁感线数与导体棒 QP 等效, 后者是垂直切割的情况。

8-13 如图 8-7(a)所示, 金属杆 AB 以匀速 $v = 2.0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ 平行于一长直导线移动, 此导线通有电流 $I = 40 \text{ A}$. 求杆中的感应电动势, 杆的哪一端电势较高?

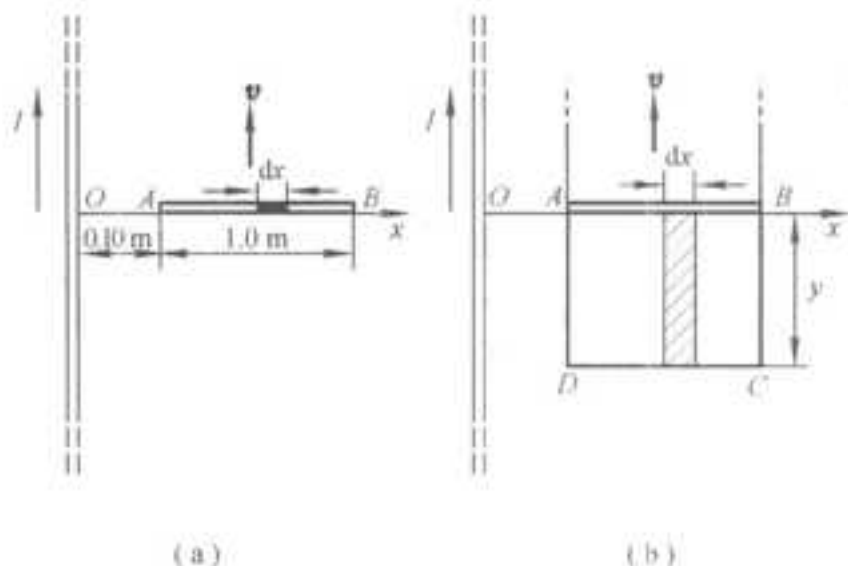


图 8-7

解：解 1 利用公式 $\mathcal{E} = \int (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}$ ，建立图 (a) 所示的坐标系，所取导体元 $d\mathbf{l} = dx$ ，该处的磁感强度 $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi x}$ ，杆中的感应电动势为

$$\mathcal{E}_{AB} = \int_{AB} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} = - \int_{0.10}^{1.10} \frac{\mu_0 I}{2\pi x} v dx = - \frac{\mu_0 I v}{2\pi} \ln 11 = -3.84 \times 10^{-5} \text{ V}$$

式中负号表示电动势方向由 B 指向 A，故点 A 电势较高。

解 2 构造一个包含杆 AB 在内的闭合回路，可设想杆 AB 在一个静止的 \square 形导轨上滑动，如图 (b) 所示。设顺时针方向为回路 ABCD 的正向，在距直导线 x 处，取宽为 dx 、长为 y 的面为 dS ，则穿过面元的磁通量为

$$d\Phi = \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} y dx$$

穿过回路的磁通量为

$$\Phi = \int_S d\Phi = \int_{0.10}^{1.10} \frac{\mu_0 I}{2\pi x} y dx = \frac{\mu_0 I y}{2\pi} \ln 11$$

回路的电动势为

$$\mathcal{E} = - \frac{d\Phi}{dt} = - \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln 11 \frac{dy}{dt} = - \frac{\mu_0 I v}{2\pi} \ln 11 = -3.84 \times 10^{-5} \text{ V}$$

由于静止的 \square 形导轨上电动势为零，所以

$$\mathcal{E}_{AB} = \mathcal{E} = -3.84 \times 10^{-5} \text{ V}$$

式中负号说明回路电动势方向为逆时针，对 AB 导体来说，电动势方向应由 B 指向 A，故点 A 电势较高。

8-14 如图 8-8 (a) 所示，在“无限长”直载流导线的近旁，放置一个矩形导体线框，该线框在垂直于导线方向上以匀速率 v 向右移动，求在图示位置处，线框中感应电动势的大小和方向。

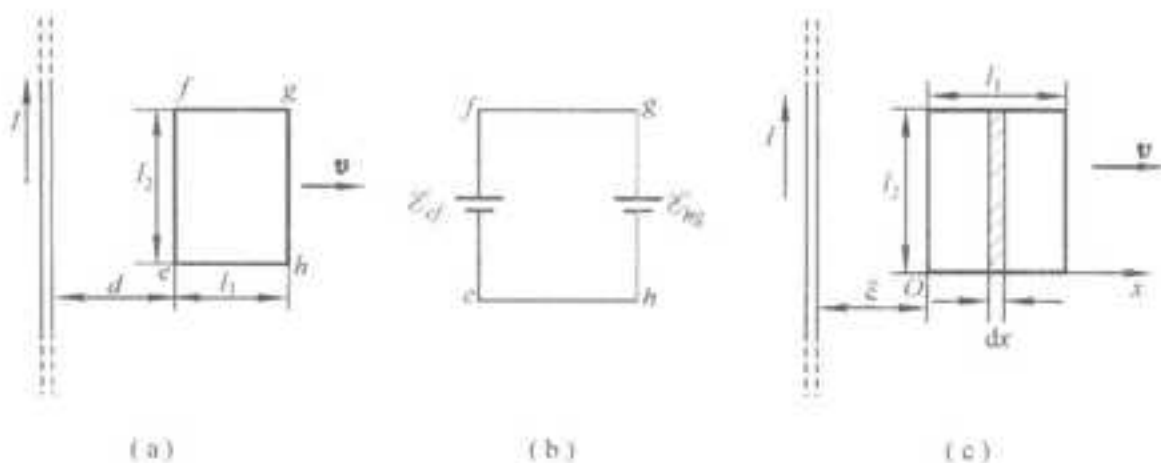


图 8-8

解：解 1 当闭合导体线框在磁场中运动时，线框中的总电动势就等于框上各段导体中的动生电动势的代数和。如图 (a) 所示，导体 ch 段和 fg 段上的电动势为零，故线框中的电动势为

$$\begin{aligned}
 \mathcal{E} &= \mathcal{E}_{df} - \mathcal{E}_{hg} \\
 &= \int_{cf} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} - \int_{hg} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} \\
 &= \frac{\mu_0 I v}{2\pi d} \int_0^{l_2} dl - \frac{\mu_0 I v}{2\pi(d+l_1)} \int_0^{l_2} dl \\
 &= \frac{\mu_0 I v l_1 l_2}{2\pi d(d+l_1)}
 \end{aligned}$$

由 $\mathcal{E}_{df} > \mathcal{E}_{hg}$ 可知，线框中的电动势方向为 cfgh。

解 2 利用公式 $\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}$ ，设顺时针方向为线框回路的正向，在任意位置处，穿过线框的磁通量为

$$\Phi = \int_0^{l_1} \frac{\mu_0 I l_2}{2\pi(x+\xi)} dx = \frac{\mu_0 I l_2}{2\pi} \ln \frac{\xi+l_1}{\xi}$$

相应电动势为

$$\mathcal{E}(\xi) = -\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\mu_0 I v l_1 l_2}{2\pi \xi(\xi+l_1)}$$

令 $\xi = d$ ，得线框在图示位置处的电动势为

$$\mathcal{E} = \frac{\mu_0 I v l_1 l_2}{2\pi d(d+l_1)}$$

由 $\xi > 0$ 可知，线框中电动势方向为顺时针方向。

8-15 有一长为 l ，宽为 b 的矩形导线框架，其质量为 m ，电阻为 R 。在 $t=0$ 时，框架从距水平面 $y=0$ 的上方 h 处由静止自由下落，如图 8-9 所示。磁场的分布为：在 $y=0$ 的水平面上方没有磁场；在 $y=0$ 的水平面下方有磁感强度为 B 的均匀磁场， B 的方向垂直纸面向里。已知框架在时刻 t_1 和 t_2 的位置如图中所示，求在下述时间内，框架的速度与时间的关系：(1) $t_1 \geq t > 0$ ，即框架进入磁场前；

(2) $t_2 \geq t \geq t_1$ ，即框架进入磁场，但尚未全部进入磁场；

(3) $t > t_2$ ，即框架全部进入磁场后。

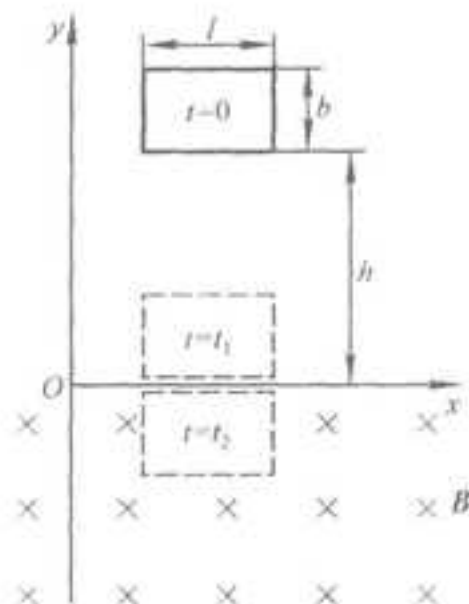


图 8-9

解: (1) 在 $t \leq t_1$ 时间内, 线框为自由落体运动, 于是

$$v_1 = gt \quad (t \leq t_1) \quad \text{其中 } t=t_1 \text{ 时, } v_1 = v_{10} = \sqrt{2gh}$$

(2) 线框进入磁场后, 由于穿过线框回路的磁通量变化, 使得回路中有感应电流存在, 从而使线框除受重力外, 还受到一个向上的安培力 F_A

$$F_A = IlB = \frac{B^2 l^2}{R} v$$

根据牛顿运动定律, 可得线框运动的微分方程

$$mg - \frac{B^2 l^2}{R} v = m \frac{dv}{dt}$$

令 $K = \frac{B^2 l^2}{mR}$, 整理上式并分离变量积分, 有

$$\int_{v_{10}}^v \frac{dv}{g - Kv} = \int_{t_1}^t dt$$

积分后将 $v_{10} = \sqrt{2gh}$ 代入, 可得

$$v_2 = \frac{1}{K} [g - (g - K \sqrt{2gh}) e^{-K(t-t_1)}] \quad (t_1 \leq t \leq t_2)$$

(3) 线框全部进入磁场后 ($t > t_2$), 作初速为 v_{20} 的落体运动, 故有

$$v_3 = v_{20} + g(t - t_2) = \frac{1}{K} [g - (g - K \sqrt{2gh}) e^{-K(t_2-t_1)}] + g(t - t_2)$$

8-16 有一磁感强度为 B 的均匀磁场, 以恒定的变化率 $\frac{dB}{dt}$ 在变化. 把一块质量为 m 的铜, 拉成截面半径为

r 的导线, 并用它做成一个半径为 R 的圆形回路. 圆形回路的平面与磁感强度 B 垂直. 试证: 这回路中的感应电流为

$$I = \frac{m}{4\pi\rho d} \frac{dB}{dt}$$

式中 ρ 为铜的电阻率, d 为铜的密度。

解: 圆形回路导线长为 $2\pi R$, 导线截面积为 πr^2 , 其电阻 R' 为

$$R' = \rho \frac{l}{S} = \rho \frac{2R}{r^2}$$

在均匀磁场中, 穿过该回路的磁通量为 $\Phi = BS$, 由法拉第电磁感应定律可得回路中的感应电流为

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R'} = \frac{1}{R'} \frac{d\Phi}{dt} = \frac{1}{R'} \pi R^2 \frac{dB}{dt} = \frac{\pi R r^2}{2\rho} \frac{dB}{dt}$$

而 $m = d \cdot 2\pi R \pi r^2$, 即 $\pi R r^2 = \frac{m}{2\pi d}$, 代入上式可得

$$I = \frac{m}{4\pi\rho d} \frac{dB}{dt}$$

8-17 半径为 $R=2.0\text{cm}$ 的无限长直载流密绕螺线管, 管内磁场可视为均匀磁场, 管外磁场可近似看作零。若

通电电流均匀变化, 使得磁感强度 B 随时间的变化率 $\frac{dB}{dt}$ 为常量, 且为正值, 试求:

(1) 管内外由磁场变化激发的感生电场分布;

(2) 如 $\frac{dB}{dt} = 0.010 \text{ T} \cdot \text{s}^{-1}$, 求距螺线管中心轴 $r=5.0\text{cm}$ 处感生电场的大小和方向。

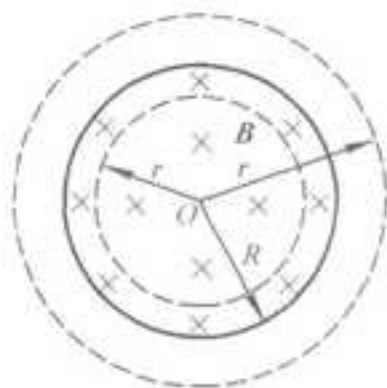


图 8-10

解: 如图 8-10 所示, 分别在 $r < R$ 和 $r > R$ 的两个区域内任取一电场线为闭合回路 l (半径为 r 的圆), 依照右手定则, 不妨设顺时针方向为回路正向。

$$(1) \quad r < R, \quad \mathcal{E} = \oint_l E_{\text{感}} \cdot dl = E_{\text{感}} \cdot 2\pi r = - \frac{d}{dt} \int B \cdot dS = - \pi r^2 \frac{dB}{dt}$$

$$E_{\text{感}} = - \frac{r}{2} \frac{dB}{dt}$$

$$r > R, \quad \mathcal{E} = \oint_l E_{\text{感}} \cdot dl = E_{\text{感}} \cdot 2\pi r = - \frac{d}{dt} \int B \cdot dS = - \pi R^2 \frac{dB}{dt}$$

$$E_{\text{感}} = - \frac{R^2}{2r} \frac{dB}{dt}$$

由于 $\frac{dB}{dt} > 0$, 故电场线的绕向为逆时针。

(2) 由于 $r > R$, 所求点在螺线管外, 因此

$$E_k = -\frac{R^2}{2r} \frac{dB}{dt}$$

将 r 、 R 、 $\frac{dB}{dt}$ 的数值代入，可得 $E_k = -4.0 \times 10^{-3} \text{V} \cdot \text{m}^{-1}$ ，式中负号表示 E_k 的方向是逆时针的。

8-18 在半径为 R 的圆柱形空间中存在着均匀磁场， B 的方向与柱的轴线平行，如图 8-11 (a) 所示，有一长为 l 的金属棒放在磁场中，设 B 随时间的变化率 $\frac{dB}{dt}$ 为常量，试证：棒上感应电动势的大小为

$$\mathcal{E} = \frac{dB}{dt} \frac{l}{2} \sqrt{R^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2}$$

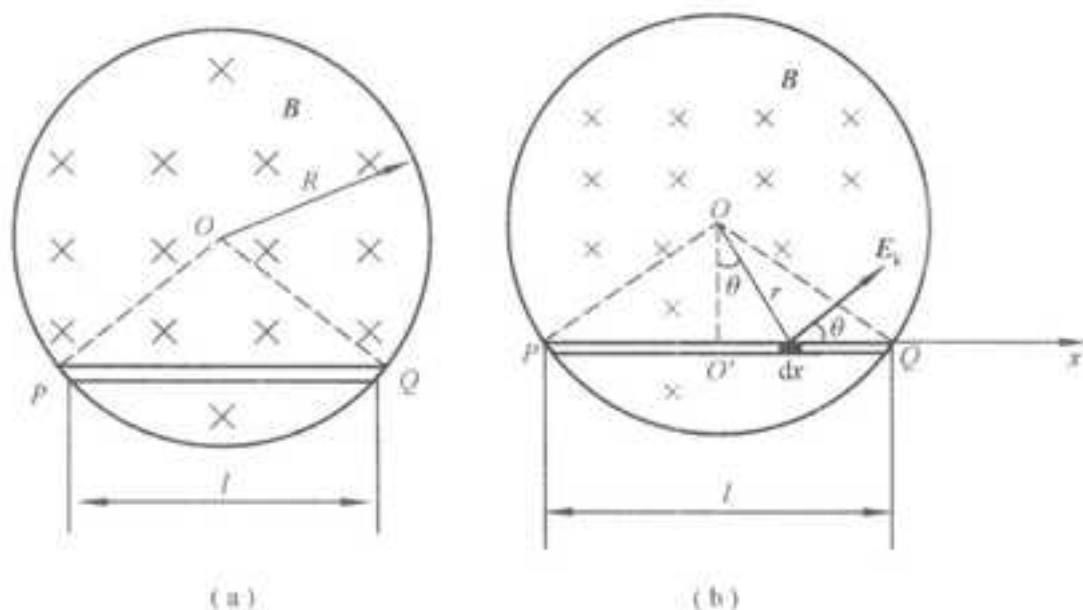


图 8-11

证：证 1 由法拉第电磁感应定律，有

$$\mathcal{E}_{PQ} = \mathcal{E}_\Delta = \left| -\frac{d\Phi}{dt} \right| = S \frac{dB}{dt} = \frac{dB}{dt} \frac{l}{2} \sqrt{R^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2}$$

证 2 由题 8-17 可知，在 $r < R$ 区域，感生电场强度的大小 $E_k = \frac{r}{2} \frac{dB}{dt}$ 。设 PQ 上线元 dx 处， E_k 的方向如

图 8-11 (b) 所示，则金属杆 PQ 上的电动势为

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{PQ} &= \int_l E_k \cdot dx = \int E_k \cos \theta dx = \int_0^l \frac{r}{2} \frac{dB}{dt} \frac{\sqrt{R^2 - (l/2)^2}}{r} dx \\ &= \frac{dB}{dt} \frac{l}{2} \sqrt{R^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2} \end{aligned}$$

8-19 截面积为长方形的环形均匀密绕螺绕环，其尺寸如图 8-12 (a) 所示，共有 N 匝（图中仅画出少量几匝），求该螺绕环的自感 L 。

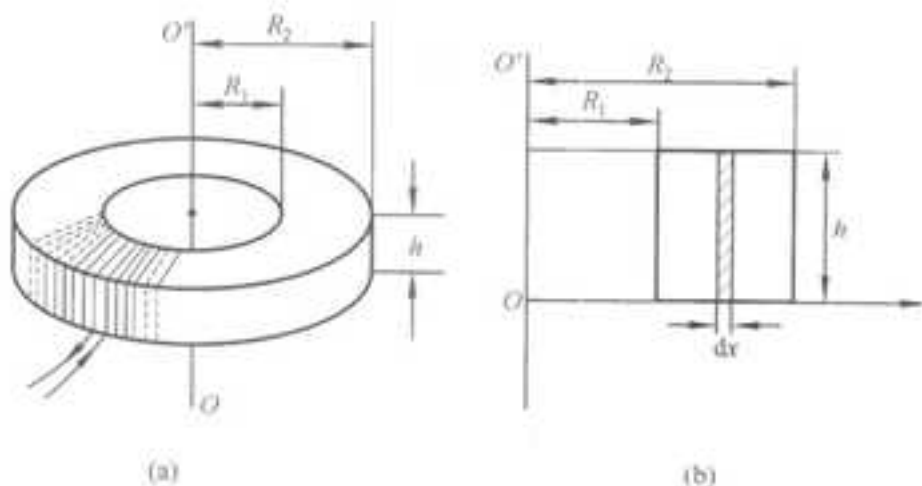


图 8-12

解：设有电流 I 通过线圈，线圈回路呈长方形，如图 8-12 (b) 所示，由安培环路定理可求得在 $R_1 < r < R_2$ 范围内的磁场分布为

$$B = \frac{\mu_0 N I}{2 \pi x}$$

由于线圈由 N 匝相同的回路构成，所以穿过自身回路的磁链为

$$\Psi = N \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = N \int_{R_1}^{R_2} \frac{\mu_0 N I}{2 \pi x} h dx = \frac{\mu_0 N^2 h I}{2 \pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

则

$$L = \frac{\Psi}{I} = \frac{\mu_0 N^2 h}{2 \pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

若管中充满均匀同种磁介质，其相对磁导率为 μ_r ，则自感将增大 μ_r 倍。

8-20 如图 8-13 所示，螺线管的管心是两个套在一起的同轴圆柱体，其截面积分别为 S_1 和 S_2 ，磁导率分别为 μ_1 和 μ_2 ，管长为 l ，匝数为 N ，求螺线管的自感。（设管的截面很小）

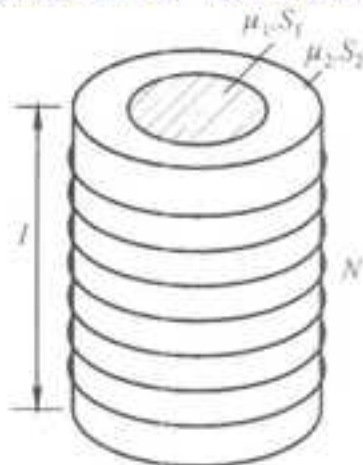


图 8-13

解：设有电流 I 通过螺线管，则管中两介质中磁感强度分别为

$$B_1 = \mu_1 n I = \mu_1 \frac{N}{l} I, \quad B_2 = \mu_2 n I = \mu_2 \frac{N}{l} I$$

通过 N 匝回路的磁链为

$$\Psi = \Psi_1 + \Psi_2 = NB_1 S_1 + NB_2 S_2$$

则自感

$$L = L_1 + L_2 = \frac{\Psi}{I} = \frac{N^2}{l} (\mu_1 S_1 + \mu_2 S_2)$$

8-21 有两根半径均为 a 的平行长直导线，它们中心距离为 d 。试求长为 l 的一对导线的自感（导线内部的磁通量可略去不计）。

分析两平行长直导线可以看成无限长但宽为 d 的矩形回路的一部分。设在矩形回路中通有逆时针方向电流，然后计算图中阴影部分（宽为 d 、长为 l ）的磁通量。该区域内磁场可以看成两无限长直载流导线分别在该区域产生的磁场的叠加。

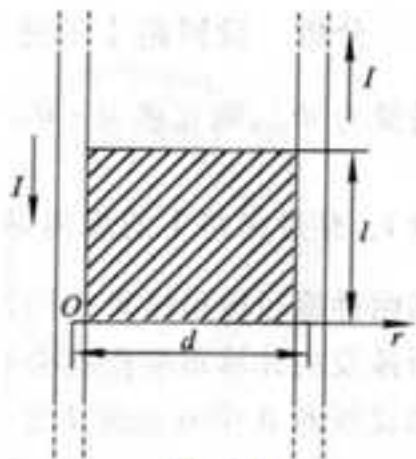


图 8-14

解：在如图 8-14 所示的坐标中，当两导线中通有图示的电流 I 时，两平行导线间的磁感强度为

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} + \frac{\mu_0 I}{2\pi(d-r)}$$

穿过图中阴影部分的磁通量为

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_a^{d-a} B l dr = \frac{\mu_0 I l}{\pi} \ln \frac{d-a}{a}$$

则长为 l 的一对导线的自感为

$$L = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu_0 l}{\pi} \ln \frac{d-a}{a}$$

如导线内部磁通量不能忽略，则一对导线的自感为 $L = L_1 + 2L_2$ 。 L_1 称为外自感，即本题已求出的 L ， L_2 称为

一根导线的内自感。长为 l 的导线的内自感 $L_2 = \frac{\mu_0 l}{8\pi}$ ，有兴趣的读者可自行求解。

8-22 如图 8-15 所示，在一柱形纸筒上绕有两组相同线圈 AB 和 A'B'，每个线圈的自感均为 L 。求：(1) A 和 A' 相接时，B 和 B' 间的自感 L_1 ；(2) A' 和 B 相接时，A 和 B' 间的自感 L_2 。

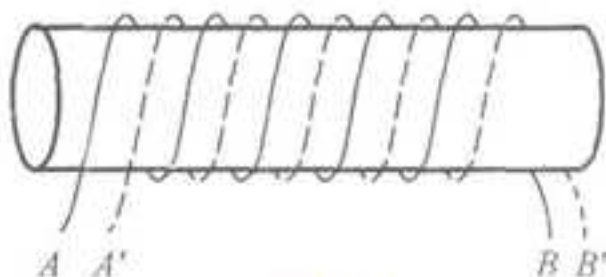


图 8-15

解: (1) 当 A 和 A' 连接时, AB 和 A'B' 线圈中电流流向相反, 通过回路的磁通量亦相反, 故总通量为 $\Phi_1 = 2\Phi - 2\Phi = 0$, 故 $L_1 = 0$.

(2) 当 A 和 B 连接时, AB 和 A'B' 线圈中电流流向相同, 通过回路的磁通量亦相同, 故总通量为 $\Phi_2 = 2\Phi + 2\Phi = 4\Phi$, 故 $L_2 = \frac{\Phi_2}{I} = 4 \frac{\Phi}{I} = 4L$.

本题结果在工程实际中有实用意义, 如按题 (1) 方式连接, 则可构造出一个无自感的线圈.

8-23 如图 8-16 所示, 一面积为 4.0cm^2 , 共 50 匝的小圆形线圈 A, 放在半径为 20cm 共 100 匝的大圆形线圈 B 的正中央, 此两线圈同心且同平面. 设线圈 A 内各点的磁感强度可看作是相同的. 求: (1) 两线圈的互感; (2) 当线圈 B 中电流的变化率为 $-50\text{A} \cdot \text{s}^{-1}$ 时, 线圈 A 中感应电动势的大小和方向.

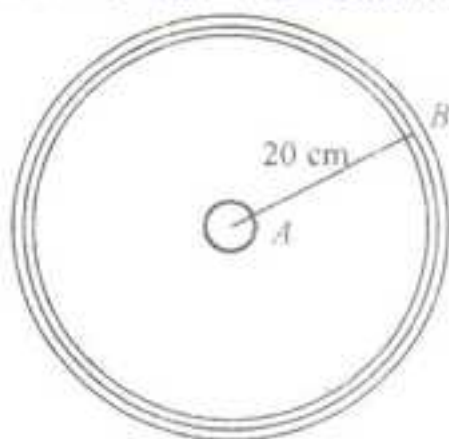


图 8-16

解: (1) 设线圈 B 有电流 I 通过, 它在圆心处产生的磁感强度 $B_0 = N_B \frac{\mu_0 I}{2R}$. 穿过小线圈 A 的磁链近似为

$$\Psi_A = N_A B_0 S_A = N_A N_B \frac{\mu_0 I}{2R} S_A$$

则两线圈的互感为

$$M = \frac{\Psi_A}{I} = N_A N_B \frac{\mu_0 S_A}{2R} = 6.28 \times 10^{-6} \text{ H}$$

$$(2) \mathcal{E}_A = -M \frac{dI}{dt} = 3.14 \times 10^{-4} \text{ V}$$

互感电动势的方向和线圈 B 中的电流方向相同.

8-24 如图 8-17 所示, 两同轴单匝线圈 A、C 的半径分别为 R 和 r , 两线圈相距为 d . 若 r 很小, 可认为线圈 A 在线圈 C 处所产生的磁场是均匀的. 求两线圈的互感. 若线圈 C 的匝数为 N 匝, 则互感又为多少?

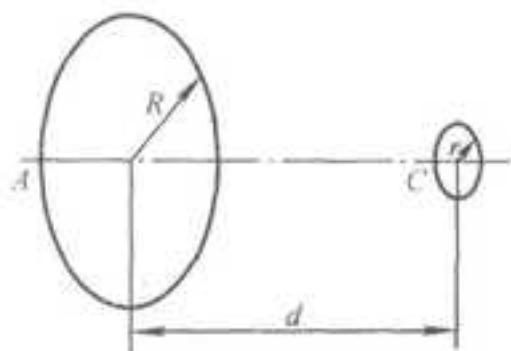


图 8-17

解：设线圈 A 中有电流 I 通过，它在线圈 C 所包围的平面内各点产生的磁感强度近似为

$$B = \frac{\mu_0 IR^2}{2(R^2 + d^2)^{3/2}}$$

穿过线圈 C 的磁通为

$$\Psi = BS_C = \frac{\mu_0 IR^2}{2(R^2 + d^2)^{3/2}} \pi r^2$$

则两线圈的互感为

$$M = \frac{\Psi}{I} = \frac{\mu_0 \pi R^2 r^2}{2(R^2 + d^2)^{3/2}}$$

若线圈 C 的匝数为 N 匝，则互感为上述值的 N 倍。

8-25 如图 8-18 所示，螺绕环 A 中充满了铁磁质，管的截面积 S 为 2.0cm^2 ，沿环每厘米绕有 100 匝线圈，通有电流 $I_1 = 4.0 \times 10^{-2}\text{A}$ ，在环上再绕一线圈 C，共 10 匝，其电阻为 $0.1\ \Omega$ ，今将开关 S 突然开启，测得线圈 C 中的感应电荷为 $20 \times 10^{-3}\text{C}$ ，求：当螺绕环中通有电流 I_1 时，铁磁质中的 B 和铁磁质的相对磁导率 μ_r 。

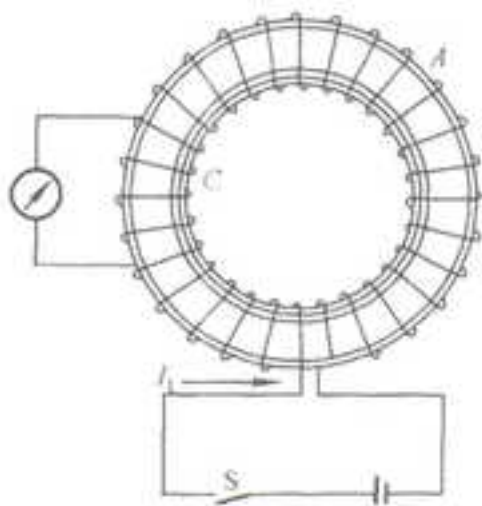


图 8-18

解：当螺绕环中通以电流 I_1 时，在环内产生的磁感强度 $B = \mu_1 \mu_0 n_1 I_1$ ，则通过线圈 C 的磁链为

$$\Psi_C = N_2 BS = N_2 \mu_0 \mu_r n_1 I_1 S$$

设断开电源过程中，通过 C 的感应电荷为 q_c ，则有

$$q_c = -\frac{1}{R} \Delta \Psi_C = -\frac{1}{R} (0 - \Psi_C) = \frac{N_2 \mu_0 \mu_r n_1 S I_1}{R}$$

由此得

$$B = \mu_0 \mu_r n_1 I_1 = \frac{q_c R}{N_2 S} = 0.10 \text{ T}$$

相对磁导率

$$\mu_r = \frac{R q_c}{N_2 S \mu_0 n_1 I_1} = 199$$

8-26 一个直径为 0.01m, 长为 0.10m 的长直密绕螺线管, 共 1000 匝线圈, 总电阻为 7.76Ω. 求: (1) 如把线圈接到电动势 $\mathcal{E} = 2.0\text{V}$ 的电池上, 电流稳定后, 线圈中所储存的磁能有多少? 磁能密度是多少? * (2) 从接通电路时算起, 要使线圈储存磁能为最大储存磁能的一半, 需经过多少时间?

解: (1) 密绕长直螺线管在忽略端部效应时, 其自感 $L = \frac{\mu_0 N^2 S}{l}$, 电流稳定后, 线圈中电流 $I = \frac{\mathcal{E}}{R}$, 则线圈中所储存的磁能为

$$W_m = \frac{1}{2} L I^2 = \frac{\mu_0 N^2 S \mathcal{E}^2}{2 l R^2} = 3.28 \times 10^{-5} \text{ J}$$

在忽略端部效应时, 该电流回路所产生的磁场可近似认为仅存在于螺线管中, 并为均匀磁场, 故磁能密度 w_m 处处相等,

$$w_m = \frac{W_m}{Sl} = 4.17 \text{ J} \cdot \text{m}^{-3}$$

(2) 自感为 L , 电阻为 R 的线圈接到电动势为 \mathcal{E} 的电源上, 其电流变化规律 $I = \frac{\mathcal{E}}{R} (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$, 当电流稳定后, 其最大值 $I_m = \frac{\mathcal{E}}{R}$.

按题意 $\frac{1}{2} L I^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} L I_m^2 \right)$, 则 $I = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\mathcal{E}}{R}$, 将其代入 $I = \frac{\mathcal{E}}{R} (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$ 中, 得

$$t = -\frac{L}{R} \ln \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{L}{R} \ln (2 + \sqrt{2}) = 1.56 \times 10^{-4} \text{ s}$$

8-27 一无限长直导线, 截面各处的电流密度相等, 总电流为 I . 试证: 单位长度导线内所贮藏的磁能为 $\mu I^2 / 16\pi$.

分析本题中电流激发的磁场不但存在于导体内 (当 $r < R$ 时, $B_1 = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2}$), 而且存在于导体外

(当 $r > R$ 时, $B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$). 由于本题仅要求单位长度导体内所储存的磁能, 故积分即可求得磁能.

证: 利用公式 $W_m = \int_V w_m dV$, 取单位长度, 半径为 r , 厚为 dr 的薄柱壳 (壳层内 w_m 处处相同) 为体元

dV , 则该体元内储存的能量 $dW_m = \left[\frac{1}{2\mu_0} \left(\frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2} \right)^2 \right] 2\pi r dr$, 故单位长度导线内贮藏的磁能为

$$W_m = \int dW_m = \int_0^R \left(\frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 R^4} r^2 \right) 2\pi r dr = \frac{\mu_0 I^2}{16\pi}$$

上述结果仅为单位长度载流导线内所具有的磁场能量，它是总磁场能量的一部分，总能量还应包括导线外磁场所储存的磁能。

8-28 未来可能会利用超导线圈中持续大电流建立的磁场来储存能量，要储存 1kW·h 的能量，利用 1.0T 的磁场，需要多大体积的磁场？若利用线圈中 500A 的电流储存上述能量，则该线圈的自感系数应该多大？

解：由磁感强度与磁场能量间的关系可得

$$V = \frac{W_m}{B^2/2\mu_0} = 9.0 \text{ m}^3$$

所需线圈的自感系数为

$$L = \frac{2W_m}{I^2} = 29 \text{ H}$$

8-29 中子星表面的磁场估计为 10⁸T，该处的磁能密度有多大？

解：由磁场能量密度

$$w_m = \frac{B^2}{2\mu_0} = 3.98 \times 10^{21} \text{ (J/m}^3\text{)}$$

8-30 在真空中，若一均匀电场中的电场能量密度与一 0.50T 的均匀磁场中的磁场能量密度相等，该电场的电场强度为多少？

解： $w_e = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2$ ， $w_m = \frac{B^2}{2\mu_0}$ ，按题意，当 $w_e = w_m$ 时，有 $\frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 = \frac{B^2}{2\mu_0}$ ，则

$$E = \frac{B}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}} = 1.51 \times 10^8 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$$

8-31 设有半径 $R=0.20\text{m}$ 的圆形平行板电容器，两板之间为真空，板间距离 $d=0.50\text{cm}$ ，以恒定电流 $I=2.0\text{A}$ 对电容器充电，求位移电流密度（忽略平板电容器的边缘效应，设电场是均匀的）。

解：忽略电容器的边缘效应，电容器内电场的空间分布是均匀的，因此板间位移电流

$I_d = \int_{\Sigma} j_d \cdot dS = j_d \pi R^2$ ，由此得位移电流密度的大小为

$$j_d = \frac{I_d}{\pi R^2} = \frac{I_c}{\pi R^2} = 15.9 \text{ A} \cdot \text{m}^{-2}$$

8.3 名校考研真题详解

一、选择题

1. 均匀磁场区域为无限大。矩形线圈 PRSQ 以常速 V 沿垂直于均匀磁场方向平动（如图 8-1 所示），则下面哪一叙述是正确的？（ ） [北京科技大学 2014 研]

- A. 线圈中感生电流沿顺时针方向
- B. 线圈中感生电流沿逆时针方向
- C. 线圈中无感生电流

D. 作用在 PQ 上的磁力与其运动方向相反

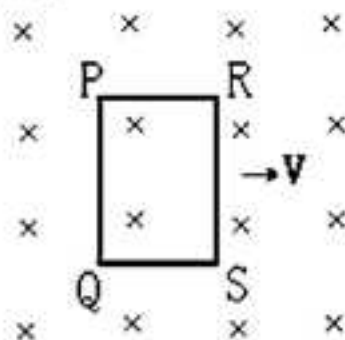


图 8-1

【答案】C

【解析】方法一

根据法拉第电磁感应定律可得

$$\varepsilon_{\text{感}} = -\frac{d\phi}{dt}$$

在运动全过程中电通量无变化，因此感生电动势为零。

由动生电动势计算表达式可得 $\varepsilon = Blv$ 。因此在运动全过程之中，线圈对边平行、等长且运动方向一致，因此产生的电动势类似于电源并联，相互抵消，因此总的动生电动势为零。

因此考虑动生电动势和感生电动势，线圈在运动过程中产生的总电动势为

$$\varepsilon = \varepsilon_{\text{动}} + \varepsilon_{\text{感}} = 0 + 0 = 0$$

总电动势为零，因此无感应电流产生。

方法二

由楞次定律可得，感应电流的方向是使得感应磁场阻碍原磁场的变化，原磁场无变化，电通量亦保持不变，因此依据楞次定律可直接判定感应电流为零。

2. 一载有电流 I 的细导线分别均匀密绕在半径为 R 和 r 的长直圆筒上形成两个螺线管， $R=2r$ ，两螺线管单位长度上的匝数相等，两螺线管中的磁感应强度大小 B_R 和 B_r 应满足 ()。[电子科技大学 2011 研]

- A. $B_R = 2B_r$
- B. $B_R = B_r$
- C. $2B_R = B_r$
- D. $B_R = 4B_r$

【答案】B

3. 对位移电流，有下述四种说法，请指出哪一种说法正确 ()。[暨南大学 2010 研]

- A. 位移电流是由变化电场产生的
- B. 位移电流是由变化磁场产生的
- C. 位移电流的热效应服从焦耳—楞次定律
- D. 位移电流的磁效应不服从安培环路定理

【答案】A

【解析】根据定义 $\delta_j = \frac{dD}{dt}$ ，所以是由变化电场引起的，根据法拉第电磁感应定律，感应磁场由电流和位移电流共同产生，且满足安培环路定理，即

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I + \iint \delta_j \cdot d\mathbf{S}$$

但是电流的焦耳—楞次定律是基于形成电流的电子移动，把能量转移到晶格振动能去，而位移电流仅仅是电场变化，并不涉及电子的移动。

二、填空题

电流元 $I d\vec{l}$ 在磁场中某处沿直角坐标系的 x 轴方向放置时不受力, 把电流元转到 y 轴正方向时受到的力沿 z 轴反方向, 该处磁感应强度 \vec{B} 指向_____方向。[电子科技大学 2011 研]

【答案】 $+x$

三、计算题

1. 长空心柱形导体内外半径分别为 R_1 和 R_2 , 导体内载有电流 I , 设电流均匀分布在导体的横截面上。求: (1) 导体内部各点的磁感应强度的大小; (2) 导体内壁和外壁上各点的磁感应强度的大小。[北京科技大学 2014 研]

解: (1) 空心柱形导体的电流示意图如图 8-2 所示。

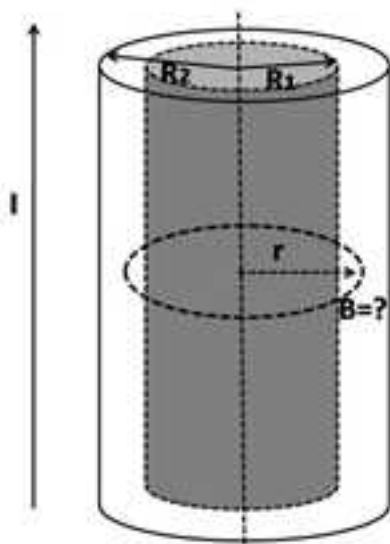


图 8-2

电流 I 均匀的分布在导体的横截面上, 则空心柱形导线的电流面密度

$$J = \frac{I}{\pi(R_2^2 - R_1^2)}$$

电流分布成轴对称, 因此由电流激发的磁场也呈轴对称分布, 对于导体内部区域 $R_1 < r < R_2$, 取图示环路, 由安培环路定理可得

$$\begin{aligned} \oint \vec{B} \cdot d\vec{l} &= \mu_0 \sum I_i \\ \therefore B \times 2\pi r &= \frac{\mu_0 I}{\pi(R_2^2 - R_1^2)} \times \pi(r^2 - R_1^2) \\ \therefore B &= \frac{\mu_0 I}{2\pi(R_2^2 - R_1^2)} \frac{r^2 - R_1^2}{r} \end{aligned}$$

因此导体内部各点磁感应强度的大小为

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi(R_2^2 - R_1^2)} \frac{r^2 - R_1^2}{r} \quad R_1 < r < R_2$$

(2) 由 (1) 计算结果可得

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi(R_2^2 - R_1^2)} \frac{r^2 - R_1^2}{r} \quad R_1 < r < R_2$$

①对上式取左极限可得导体内壁的磁感应强度

$$B_1 = \lim_{r \rightarrow R_1} \frac{\mu_0 I}{2\pi(R_2^2 - R_1^2)} \frac{r^2 - R_1^2}{r} = 0$$

②对上式取右极限可得导体外壁各点的磁感应强度

$$B_2 = \lim_{r \rightarrow R_2} \frac{\mu_0 I}{2\pi(R_2^2 - R_1^2)} \frac{r^2 - R_1^2}{r} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R_2}$$

2. 如图 8-3 所示, 金属棒 MN 与长直导线共面, 且金属棒垂直于长直导线, 金属棒长为 b , 长直导线中通有电流 I , 金属棒的 M 端到长直导线的距离为 a 。现金属棒以匀速率 v , 平行于长直导线移动。求任意时刻金属棒 MN 中的感应电动势大小和方向。[武汉科技大学 2016 研]

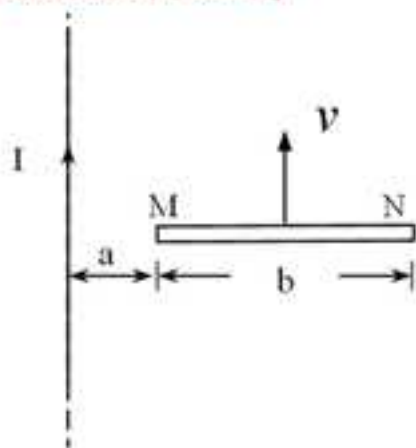


图 8-3

解: 棒 MN 中产生的是动生电动势, 由动生电动势的表达式 $\varepsilon = \int \vec{v} \times \vec{B} \cdot d\vec{l}$

在金属棒 MN 上距 M 端为 l 处取一线元 $d\vec{l}$, 设其方向由 $M \rightarrow N$, 则线元 $d\vec{l}$ 上产生的元电动势

$$d\varepsilon = \vec{v} \times \vec{B} \cdot d\vec{l} = -v b dl = -\frac{\mu_0 I v}{2\pi(a+l)} dl$$

$$\varepsilon = \int_0^b -\frac{\mu_0 I v}{2\pi(a+l)} dl = -\frac{\mu_0 I v}{2\pi} \ln \frac{a+b}{a}$$

整个金属棒 MN 产生的动生电动势

$\varepsilon < 0$, 则电动势的方向由 $N \rightarrow M$ 。

3. 真空中的矩形截面的螺绕环的总匝数为 N , 其他尺寸如图 8-4 所示, 求它的自感系数。[暨南大学 2011 研]

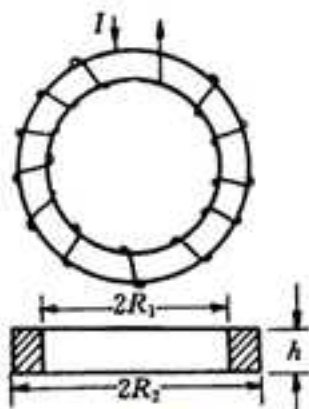


图 8-4

解: 设环内磁感应强度为 B , 沿圆周方向, 由安培环流定理, 有

$$B(r) = \frac{NI}{2\pi r}$$

所以通过圆环截面的总磁通量为

$$\Phi_N = h \int_{R_1}^{R_2} B(r) dr = \frac{NIh}{2\pi} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

所以自感系数为

$$L = \frac{\Phi_N}{I} = \frac{Nh}{2\pi} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

4. 两段导线 $AB=BC=10\text{cm}$ ，在 B 处相接而成 30° 角，若使导线在均匀磁场中以速度 $v=1.5\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ 运动，方向如图 8-5 所示，磁场方向垂直纸面向里， $B=2.5\times 10^{-2}\text{T}$ ，问 AC 间的电势差为多少？哪一端电势高？[暨南大学 2011 研]

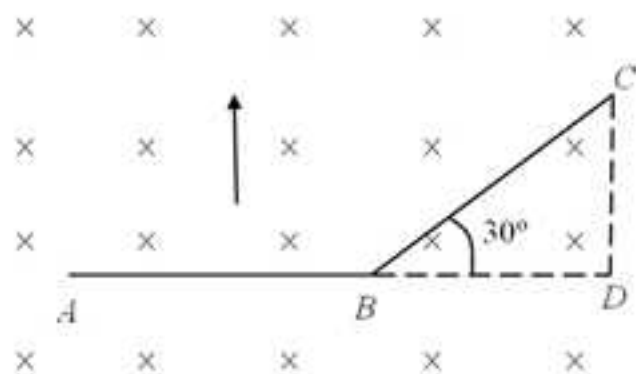


图 8-5

解：导线运动切割磁感线产生感应电动势，等效长度为 AD 。由电磁感应定律，

$$E_{AC} = Bl_{AD}v \approx 0.007\text{V}$$

由右手定则可以判断， C 端电势较高。

5. 一载流长直导线与矩形线圈 $ABCD$ 共面，且导线平行于 AB ，如图 8-6 所示，求：

(1) 下列两种情况下 $ABCD$ 中的感应电动势：

a. 长直导线中电流恒定，回路 $ABCD$ 以垂直于导线的速度 v 远离导线运动；

b. 长直导线中电流 $I=I_0\sin\omega t$ (ω 为常数)， $ABCD$ 不动；

(2) 第二种情况下直导线和矩形线圈的互感系数。[暨南大学 2010 研]

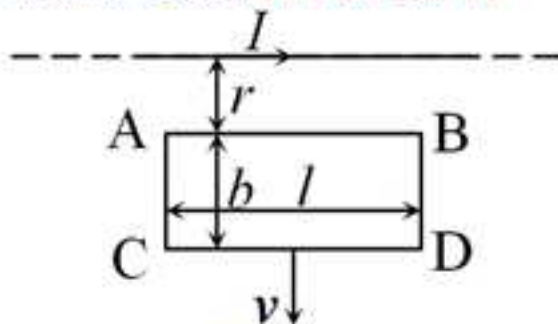


图 8-6

解：(1) 由安培环路定理，导线产生的磁场分布为

$$B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

a. AB 和 CD 边切割磁感线，分别产生感应电动势，互相串联，总电动势为

$$E(r) = B(r)lv - B(r+b)lv = \frac{\mu_0 I v}{2\pi} \frac{b}{r(r+b)}$$

b. 电流变化时，通过线圈平面的磁通量变化，产生感应电动势

$$E(r) = \frac{d\Phi}{dt} = \frac{1}{dt} \left(\int_r^{r+b} B(r_1) l dr_1 \right) = \frac{\mu_0 I_0 l \omega}{2\pi} \ln\left(\frac{r+b}{r}\right) \cos \omega t$$

(2) 根据互感系数的定义

$$M = \frac{E}{dl / dt} = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \ln\left(\frac{r+b}{r}\right)$$