自控第 4 次作业答案

8.1 试列写由下列微分方程所描述的线性定常系统的状态空间表达式

（1）$y^{(2)}(t)+2\dot{y}(t)+y(t)=0$

解：令$x_1=y, x_2=\dot{y}$，则$\begin{cases}\dot{x}_1=x_2\\ \dot{x}_2=-x_1-2x_2\end{cases}$，$\mathrm{y}=x_1$.

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & -2\end{bmatrix}x$$

$$\mathrm{y}=[1\quad 0]x$$

(2) $y^{(2)}(t)+2\dot{y}(t)+y(t)=u(t)$

解：

方法一：令$x_1=y, x_2=\dot{y}$，则$\begin{cases}\dot{x}_1=x_2\\ \dot{x}_2=-x_1-2x_2+u\end{cases}$，$\mathrm{y}=x_1$

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & -2\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u$$

$$\mathrm{y}=[1\quad 0]x$$

方法二：$\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{1}{(s+1)^2}$，令$x_1=\frac{1}{s+1}x_2$，$x_2=\frac{1}{s+1}u$，则$\begin{cases}\dot{x}_1=-x_1+x_2\\ \dot{x}_2=-x_2+u\end{cases}$，$\mathrm{y}=x_1$.

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u$$

$$\mathrm{y}=[1\quad 0]x$$

（3）$y^{(3)}(\mathrm{t})+3y^{(2)}(t)+2\dot{y}(t)+2y(t)=0$

解：令$x_1=y, x_2=\dot{y}, x_3=\ddot{y}$，则$\begin{cases}\dot{x}_1=x_2\\ \dot{x}_2=x_3\\ \dot{x}_3=-2x_1-2x_2-3x_3\end{cases}$，$\mathrm{y}=x_1$.

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -2 & -2 & -3\end{bmatrix}x$$

$$\mathrm{y}=[1\quad 0\quad 0]x$$

（4）$y^{(3)}(\mathrm{t})+3y^{(2)}(t)+2\dot{y}(t)+2y(t)=u(t)$

解：令$x_1=y, x_2=\dot{y}, x_3=\ddot{y}$，则$\begin{cases}\dot{x}_1=x_2\\ \dot{x}_2=x_3\\ \dot{x}_3=-2x_1-2x_2-3x_3\end{cases}$，$\mathrm{y}=x_1$.

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -2 & -2 & -3\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}u$$

$$\mathrm{y}=[1\quad 0\quad 0]x$$

8.2 试根据单位反馈系统的闭环传递函数$\mathrm{Y(s)/R(s)}$，列写线性定常系统的状态空间表达式。

（1）$\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{1}{s^2(s+10)}$

解:

方法一：分解因式法 $\mathrm{Y(s)}=\left(\frac{0.1}{s^2}-\frac{0.01}{s}+\frac{0.01}{s+10}\right)\mathrm{R(s)}$

令$x_1=\frac{R(s)}{s^2}$，$x_2=\frac{R(s)}{s}$，$x_3=\frac{R(s)}{s+10}$，则有

$\begin{cases}\dot{x}_1=x_2\\ \dot{x}_2=r\\ \dot{x}_3=-10x_3+r\end{cases}$，$\mathrm{y}=0.1x_1-0.01x_2+0.01x_3$，由此可得状态空间表达式:

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&-10\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}r$$

$$\mathrm{y}=[0.1\quad -0.01\quad 0.01]x$$

方法二：能控标准型法

$$s^2(\mathrm{s}+10)\mathrm{Y(s)}=\mathrm{R(s)}$$

令$x_1=y,x_2=\dot{y},x_3=\ddot{y}$，则有$\begin{cases}\dot{x}_1=x_2\\ \dot{x}_2=x_3\\ \dot{x}_3=-10x_3\end{cases}$，$\mathrm{y}=x_1$

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&-10\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}r$$

$$\mathrm{y}=[1\quad 0\quad 0]x$$

（2）$\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{1}{s(s+1)(s+8)}$

解:

方法一：分解因式法 $\mathrm{Y(s)}=\left(\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{s}-\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{s+1}+\frac{1}{56}\cdot\frac{1}{s+8}\right)\mathrm{R(s)}$

令$x_1=\frac{R(s)}{s}$，$x_2=\frac{R(s)}{s+1}$，$x_3=\frac{R(s)}{s+8}$，则有

$\begin{cases}\dot{x}_1=r\\ \dot{x}_2=-x_2+r\\ \dot{x}_3=-8x_3+r\end{cases}$，$\mathrm{y}=0.1x_1-0.01x_2+0.01x_3$，由此可得状态空间表达式:

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&-1&0\\0&0&-8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}r$$

$$\mathrm{y}=\begin{bmatrix}\frac{1}{8}&-\frac{1}{7}&\frac{1}{56}\end{bmatrix}x$$

方法二：能控标准型法

$$\mathrm{s(s+1)(s+8)Y(s)}=\mathrm{R(s)}$$

令$x_1=y,x_2=\dot{y},x_3=\ddot{y}$，则有$\begin{cases}\dot{x}_1=x_2\\ \dot{x}_2=x_3\\ \dot{x}_3=x_3\end{cases}$，$\mathrm{y}=x_1$

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & -8 & -9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}r$$

$$\mathrm{y}=[1 \quad 0 \quad 0]x$$

(3) $\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{5}{s(s^2+4s+2)}$

解：

方法一：分解因式法

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & -\sqrt{2}-2 & 0\\ 0 & 0 & \sqrt{2}-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 1\end{bmatrix}r$$

$$\mathrm{y}=\begin{bmatrix}\frac{5}{2} & \frac{5\sqrt{2}-5}{4} & \frac{-5-5\sqrt{2}}{4}\end{bmatrix}x$$

方法二：能控标准型法

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & -2 & -4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}r$$

$$\mathrm{y}=[5 \quad 0 \quad 0]x$$

方法三：化成微分方程形式

$$y^{(3)}(t)+4y^{(2)}(t)+2\dot{y}(t)=5r$$

令$x_1=y,x_2=\dot{y},x_3=\ddot{y}$，则有$\begin{cases}\dot{x}_1=x_2\\ \dot{x}_2=x_3\\ \dot{x}_3=-4x_3-2x_2+5r\end{cases}$，$\mathrm{y}=x_1$

得到

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & -2 & -4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 5\end{bmatrix}r$$

$$\mathrm{y}=[1 \quad 0 \quad 0]x$$

(4) $\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{s^2+4s+5}{s^3+6s^2+11s+6)}$

解：

方法一：分解因式法 $\mathrm{Y(s)}=\left(\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s+2}+\frac{1}{s+3}\right)\mathrm{R(s)}$

令$x_1=\frac{R(s)}{s+1}$，$x_2=\frac{R(s)}{s+2}$，$x_3=\frac{R(s)}{s+3}$，则有

$\begin{cases}\dot{x}_1=-x_1+r\\ \dot{x}_2=-2x_2+r\\ \dot{x}_3=-3x_3+r\end{cases}$，$\mathrm{y}=x_1-x_2+x_3$，由此可得状态空间表达式：

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 1\end{bmatrix}r$$

$$\mathrm{y}=[1 \quad -1 \quad 1]x$$

方法二：能控标准型法（因为传递函数的两个零点不相等才有如下形式）

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -6 & -11 & -6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}r$$

$$\mathrm{y}=[5 \quad 4 \quad 1]x$$

方法三：串联化简法

$$y=z^{(2)}(t)+4\dot{z}(t)+5z(t)$$

$$r=z^{(3)}(t)+6z^{(2)}(t)+11\dot{z}(t)+6z(t)$$

令$x_1=z, x_2=\dot{z}, x_3=\ddot{z}$，则有$\begin{cases}\dot{x}_1=x_2\\ \dot{x}_2=x_3\\ \dot{x}_3=-6x_3-11x_2-6x_1+r\end{cases}$， $\mathrm{y}=x_3+4x_2+5x_1$

得到

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -6 & -11 & -6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}r$$

$$\mathrm{y}=[5 \quad 4 \quad 1]x$$