

哈尔滨工业大学（深圳）2019—2020 学年秋季学期

代数与几何试题 A

（此卷满分 30 分）

一、填空题(每题 1 分，共 5 分)

1. 行列式 $\begin{vmatrix} x & y & y & \cdots & y \\ y & x & y & \cdots & y \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y & y & y & \cdots & x \end{vmatrix}$ 的值为_____。

2. 已知三阶方阵 A ， $|A| = \frac{1}{3}$ ，则 $|3A^* - (3A)^{-1}| =$ _____。

3. 已知 $\alpha = (1 \ 0 \ -1 \ 0)$ ， $A = \alpha^T \alpha$ ，则 $|\lambda E + A^2| =$ _____。

4. 已知 $\vec{a} = (1 \ 2 \ 3)$ ， $\vec{b} = (3 \ 2 \ 1)$ ， $\vec{c} = (1 \ 1 \ 1)$ ，则 $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} =$ _____。

5. $\vec{a}_1 = (1 \ -2 \ 0 \ 3)$ ， $\vec{a}_2 = (1 \ 2 \ 2 \ 1)$ ， $\vec{a}_3 = (1 \ 0 \ 1 \ 2)$ ， $\vec{a}_4 = (2 \ 6 \ 5 \ 1)$ 的一个极大无关组为_____。

二、选择题(每题 1 分，共 5 分)

1. 已知三个 n 维向量 $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ ，则下列两个命题 i 和 ii 的关系是

(i) 向量组 $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ 线性无关

(ii) $\forall \lambda, \mu \neq 0$, 向量组 $\lambda \vec{a}_1 + \vec{a}_3, \mu \vec{a}_2$ 线性无关

(A) $i \Leftrightarrow ii$

(B) $i \Rightarrow ii$

(C) $i \Leftarrow ii$

(D) 既不满足 $i \Rightarrow ii$ ，也不满足 $i \Leftarrow ii$

2. n 阶方阵 A, B 满足 $AB = 0$ ， $A \neq 0$ ，则

(A) $|B| = 0$

(B) $|A| \neq 0$

(C) $|B^*| \neq 0$

(D) $|A^*| \neq 0$

3. 下列说法正确的是

- (A) 等价矩阵的行列式相同
- (B) 若 α 为三维列向量, $A = \alpha\alpha^T$, 则 $R(A)=1$
- (C) 秩相同的矩阵等价
- (D) 任意秩为 r 的矩阵都可以写成两个秩为 r 的矩阵的乘积

4. 已知 n 阶方阵 B, C, D , C 可逆, $M = \begin{pmatrix} 0 & B \\ E & D \end{pmatrix}$, $P_1 = \begin{pmatrix} E & C \\ 0 & E \end{pmatrix}$, $P_2 = \begin{pmatrix} E & C^{-1} \\ 0 & E \end{pmatrix}$, 则

$P_1MP_2 =$

- (A) $\begin{pmatrix} 0 & B \\ E & D \end{pmatrix}$
- (B) $\begin{pmatrix} C + C^{-1} & CD + C^{-1}D + B \\ E & D \end{pmatrix}$
- (C) $\begin{pmatrix} C & E + CD + B \\ E & C^{-1} + D \end{pmatrix}$
- (D) $\begin{pmatrix} C & E + CD + B \\ E & DC^{-1} \end{pmatrix}$

5. 直线 $L_1 : \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-3}{-2}$ 与直线 $L_2 : \begin{cases} 2x + 3y + z - 11 = 0 \\ 4x + y + 2z - 12 = 0 \end{cases}$ 的位置关系是

- (A) 相交
- (B) 平行
- (C) 重合
- (D) 异面

三、(5分) 求过点 $A(-3, 0, 1)$ 且平行于平面 $\pi : 3x - 4y - z + 5 = 0$ 还与直线

$L_1 : \frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{-1}$ 相交的直线方程。

四、(5分)已知 A 是 n 阶非零实矩阵, $A^* = A^T$, 证明: 若 $n > 2$, 则 $|A| = 1$ 。

五、(5分)已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A^*X = A^{-1} + X$, 求 X 。

六、(5分)已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & & & \\ 3 & -1 & & & \\ & & 1 & 1 & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}_5$, 求 $(A^6)^{-1}$ 。