

- 声明：1.本人不知道也不可能知道试题的标准答案。以下解答为本人书写，仅供参考。
 2.本人绝对未在考试中实施任何作弊行为，绝对未将试卷带出考场，也绝对未在考试结束前将试题和答案透露给任何人，也绝对不会将试题和答案透露给工大以外的学生。
 3.仅凭记忆整理，可能不尽准确。有些题目具体数据不记得了，只记得大致方法。

哈尔滨工业大学（深圳）2021 学年秋季学期

代数与几何（期中）试题 A（回忆版本）

【2021.11.13 16:00—17:30】（此卷满分 30 分）

一、填空题(每题 1 分，共 5 分)

- $A_{11}-A_{12}=\underline{-4}$ (提示：清楚代数余子式的计算方法即可求解)
- L 与 π 的位置关系： L 在面上（不要写重合）
- $\alpha\alpha^T=(3)$ (提示： $\alpha^T\alpha\alpha^T\alpha=\alpha^T(\alpha\alpha^T)\alpha=\alpha\alpha^T\alpha^T\alpha$)
- $A^*=\mathbf{0}$ (提示： A 为 4 阶方阵但其秩小于 3)

$$5. A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{提示：初等变换法})$$

二、选择题(每题 1 分，共 5 分)

- 已知四阶行列式第一行元素为……，第三行元素的余子式为……，求 $x=\underline{3}$ (C)
 (提示：乘串行得到结果为 0，注意余子式和代数余子式的区别。本题易误选 $x=\underline{-3}$)
- $B=CA$ ， C 为可逆方阵，则(B)
 (A) $R(A) > R(B)$ (B) $R(A) = R(B)$
 (C) $R(A) < R(B)$ (D) $R(A)$ 与 $R(B)$ 关系不能确定
- 以下属于反对称矩阵的是(D)

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \quad (3) \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \quad \underline{(4)} \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$4. |(A^*)^{-1}| = (C \cdot \frac{1}{|A|^{n-1}})$$

5. 两条直线的位置关系是

- (A) 相交 (B) 平行 (C) 垂直 (D) 异面

判断可用参数式方程（将一条直线的参数式方程代到另一条直线里去，看参数 t 是否有解），也可以用混合积（取两个方向向量，再在两直线上分别找一点构成第三个向量，计算判断这三个向量混合积是否为 0）

三、(5 分) 求过点 $M(2, 0, -3)$ 且过直线 $L: \begin{cases} x - 2y + 4z = 7 \\ 3x + 5y - 2z = -1 \end{cases}$ 的平面方程。

解：设平面方程为 $Ax + By + Cz + D = 0$ ，则由平面过 M 点知 $2A - 3C + D = 0$

直线 L 的方向向量为 $\vec{s} = (a, b, c)$, $\vec{s}_1 = (1, -2, 4)$, $\vec{s}_2 = (3, 5, -2)$

则可取 $\vec{s} = \vec{s}_1 \times \vec{s}_2 = (-16, 14, 11)$ ，因而由平面法向量垂直于 \vec{s} 可得 $-16A + 14B + 11C = 0$

取直线上一点 $N(-1, \frac{3}{2}, \frac{11}{4})$ ，因而由平面过 N 有 $-A + \frac{3}{2}B + \frac{11}{4}C + D = 0$

$\overrightarrow{MN} = (-3, \frac{3}{2}, \frac{23}{4})$ ，因而由平面垂直于 \overrightarrow{MN} 有 $-3A + \frac{3}{2}B + \frac{23}{4}C = 0$

$$\text{联立解得 } \begin{cases} B = \frac{59}{18}C \\ A = \frac{64}{18}C \\ D = \frac{-74}{18}C \end{cases}, \text{ 因此平面方程为 } 64x + 59y + 18z - 74 = 0$$

四、(5 分) 已知 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ，计算：

(1) $C = A^{-1}B$;

(2) $|2E + (CC^T)^3|$ ，其中 E 为阶数合适的单位矩阵。

解：(1) 法一： $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ (提示：初等变换法)，得 $C = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

法二： $(A | B) \xrightarrow{\text{行}} (E | A^{-1}B)$ 同理可得 C

(2) 易得 $CC^T = 9$ ，则 $|2E + (CC^T)^3| = |2E + (C^T C)^2 CC^T| = |2E + 81CC^T|$
 $= 2^3 |2E_1 + 9C^T C| = 2^3(2 + 9^3) = 5848$.

五、(5分) 已知 A 为 n 阶方阵.

- (1) B 为 $m \times n$ 矩阵。若 $BA=0$ ， $B \neq 0$ ，证明 A 不可逆；
- (2) C 为方阵，若 CA 可用有限个初等矩阵的乘积表示，证明 A 可逆；
- (3) 若对任意的 $n \times 1$ 矩阵 α ， $AX=\alpha$ 都有解，证明对任意的 $n \times 1$ 矩阵 β ， $A^*X=\beta$ 都有解，且解是唯一的。

证明：

(1) 由 $BA=0$ ，有 $R(BA)=0$ ，因此 $R(A)+R(B) \leq n$ ，由于 $B \neq 0$ ，则有 $R(B) > 0$ ，故 $R(A) < n$ ，故 A 不可逆。

(2) $CA = P_1 \dots P_n$ ，两边取行列式得： $|A||C| = |P_1||P_2| \dots |P_n|$

由 P_1, \dots, P_n 都是可逆的，因此 $|P_1||P_2| \dots |P_n| \neq 0$ ，因此 $|A||C| \neq 0$

因此 $|A| \neq 0$ ，所以 A 可逆。

(3) 解一：(Cramer 法则)

因为对任意的 $n \times 1$ 矩阵 α ， $AX=\alpha$ 都有解，所以 $|A| \neq 0$ ，所以 A 可逆。所以 A^{-1} 存在

所以 $A^* = |A| A^{-1}$ ， $|A^*| = |A|^{n-1} \neq 0$ ，所以方程组 $A^*X = \alpha$ 的系数行列式不为 0

因此，对任意的 $n \times 1$ 矩阵 β ， $A^*X=\beta$ 都有解，且解是唯一的。

解二：

因为对任意的 $n \times 1$ 矩阵 α , $AX = \alpha$ 都有解, 所以 $|A| \neq 0$, 所以 A 可逆。所以 A^{-1} 存在

所以 $A^* = |A| A^{-1}$, 所以方程组 $A^* X = \beta$ 可化为 $|A| A^{-1} X = \beta$, 两边同时左乘 A 和除以 $|A|$ 得

$X = \frac{A\beta}{|A|}$, 所以对于一个确定的 β , X 由 A 唯一确定。因此, 对任意的 $n \times 1$ 矩阵 β , $A^* X = \beta$ 都有解, 且解是唯一的。

六、(5分) 已知 A 为 $n \times m$ 矩阵, 证明:

存在非零列向量 X_0 , $X_0 = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \dots \\ k_m \end{pmatrix}$, $AX_0 = 0$, 当且仅当 $R(A) < m$ 。

证明: (可自行对照课本第4章, 以下仅供参考) 首先, 由 $R(A) \leq \min(m, n)$, 必有 $R(A) \leq m$ 。

再证明 $R(A) = m$ 时不成立: 假设 $R(A) = m$, 由 $AX_0 = 0$, 有 $R(AX_0) = 0$, 因此 $R(A) + R(X_0) \leq m$, 由于 $R(A) = m$, 故 $R(X_0) = 0$, 与题设矛盾。故只能 $R(A) < m$ 。

接下来, 我们证明 $R(A) < m$ 时, 总能找到一个符合题意的 X_0 :

由 $R(A) < m$, 可知存在有限个初等矩阵 $P_1, \dots, P_n, Q_1, \dots, Q_s$, 使得 $P_1 \dots P_n A Q_1 \dots Q_s = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 。

由 $P_1, \dots, P_n, Q_1, \dots, Q_s$ 都是可逆矩阵, 因此令 $P = P_1 \dots P_n, Q = Q_1 \dots Q_s$, 则 P, Q 也可逆。

即存在可逆矩阵 P, Q , $PAQ = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 。设 X 为 $m \times 1$ 矩阵, $X = \begin{pmatrix} 0_{r \times 1} \\ \alpha_{(m-r) \times 1} \end{pmatrix}$, $\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_{m-r} \end{pmatrix}$,

且 a_1, a_2, \dots, a_{m-r} 至少有一个不为 0。在 $PAQ = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 的左右两边同时右乘 X ,

得 $PAQX = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} X = 0$, 再在该式左右两边同时左乘 P^{-1} , 得 $AQX = 0$ 。

下面证明 QX 非零: 由于 X 非零, 故 $R(X) > 0$ 。则 $R(QX) \geq R(X) + R(Q) - m = R(X)$,

因此 $R(QX) > 0$, 故 QX 非零。则 QX 即为所求的 X_0 。#