



哈尔滨工业大学(深圳)

HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY, SHENZHEN

2023 级代数与几何 期中考试(回忆版)

回忆:limbo, 寅默, 一块肥皂, 群u, 群u, 群u 群u, 群u, 群u, ……

排版:一块肥皂

本试卷考试时间 90 分钟, 共 14 题, 共 30 分, 共 2 页.

注意事项:

1. 答题前, 考生先将自己的学院、姓名、学号填写清楚.
2. 请按照题号在试卷各题目的答题区域内作答, 超出答题区域书写的答案无效; 在草稿纸上答题无效.
3. 作图可先使用铅笔画出, 确定后必须用黑色字迹的签字笔描黑.
4. 保持试卷清洁, 不要弄破.
5. 考试结束后, 将试卷交回.

注:

本试卷以 \det 代指行列式, rank 代指秩, A^T 代指矩阵的转置, A^{-1} 代指矩阵的逆, A^* 代指矩阵的伴随.

一、选择/填空题(本大题共 10 小题, 每小题 1 分, 共 10 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的)

1. 已知 $\alpha = (1, 0, -1, 0, 1)$, $A = \alpha^T \alpha$, 则 $\det(2E_5 - A^2) = \underline{\hspace{2cm}}$.

2. 已知 $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, 则 $A^{-1} = \underline{\hspace{2cm}}$.

3. 平面 π 与 z 轴平行, 且 $A(4, 0, -1)$, $B(5, 1, 7)$ 两点在平面 π 上, 则平面 π 的方程为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

4.
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 32 & 16 & 8 & 4 & 2 & 1 \\ 243 & 81 & 27 & 9 & 3 & 1 \\ 1024 & 256 & 64 & 16 & 4 & 1 \\ 3125 & 625 & 125 & 25 & 5 & 1 \\ 7776 & 1296 & 216 & 36 & 6 & 1 \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

5. 将三阶方阵 A 的第一列与第二列互换得到矩阵 B , 将 B 的第二列加到第三列上得到矩阵 C , 若有 $AP = C$, 则可逆阵 $P = \underline{\hspace{2cm}}$.

6. 已知 n 阶方阵 A 满足 $\det(A) = 0$, 下列说法一定正确的是

- A. A 中存在两行或两列成比例
B. A 经过初等变换一定能出现零行
C. A 中有两行的和等于另一行
D. A 中有零行或零列

7. 已知 n 阶方阵 A 的秩为 r , 下列说法错误的是

- A. A 不为零矩阵
B. A 的 $r+1$ 阶子式都为 0
C. A 的 r 阶子式不都为 0
D. A 的 $r-1$ 阶子式不都为 0

8. 已知 A 为 n 阶方阵, $n > 1$, 下列说法错误的是

A. 若 $\text{rank}(A) = n$, 则 A^* 可逆

B. 若 $\text{rank}(A) = 1$, 则 $A^* = O$

C. $\det(A^*) = \det^{n-1}(A)$

D. A^* 与 A 满足 $AA^* = A^*A$

9. 已知矩阵 $M = \begin{bmatrix} A & C \\ C & B \end{bmatrix}$, 其中 A, B, C 为 n 阶方阵, 且 A 可逆, 则 $\det(M) =$

A. $\det(AB - C^2)$

B. $\det(A)\det(B - A^{-1}C^2)$

C. $\det[A(B - CA^{-1}C)]$

D. $\det(B)\det(A - CB^{-1}C)$

10. 对于向量 a, b, c , 下列说法错误的是

A. 若 $a \cdot b = 0$, 则 $a \perp b$

B. 若 $(a \times b) \cdot c = 0$, 则 c 与 a, b 任一都垂直

C. 若 $a \times b = 0$, 则 $a \parallel b$

D. 若 $a + b = 0$, 则 $a \parallel b$

二、解答题(本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 解答应写出文字说明、证明过程和演算步骤)

11. 求直线 $L: \begin{cases} x + y + z - 1 = 0 \\ 2x + 2y + z + 3 = 0 \end{cases}$ 在平面 $\pi: x + y - z + 4 = 0$ 上的投影方程.

12. 已知三阶方阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, 三维列向量 $Y = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, 且三维列向量 X 满足 $A^*X = 2X + A^{-1}Y$, 试求 X .

13. 回答下列问题:

(1) 已知 n 阶方阵满足 $A^2 = O$, 求证: $\forall s \in \mathbf{R}, (sE_n + A)(sE_n - A) = s^2E_n$;

(2) 已知 n 维列向量 α, β 满足 $\alpha^T \beta = 0$, 实数 $\lambda \neq 0$, 矩阵 $M = \lambda E_n + \alpha \beta^T$. 求证: M 可逆; 并求 M^{-1} .

14. 已知 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & & & \\ 1 & -1 & & & \\ & & 1 & 1 & 0 \\ & & 0 & 1 & 0 \\ & & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, 且 $A^{10}B = A^{10} + 32E_5$, 试求:

(1) B ;

(2) $\text{rank}[(AB)^*]$.