

# 概率论与数理统计模拟试题 (一)

## 一、填空题 (每小题 3 分, 共 5 小题, 满分 15 分)

1. 设事件  $A, B, C$  两两独立, 且  $ABC = \phi$ ,  $P(A) = P(B) = P(C) < \frac{1}{2}$ ,  $P(A \cup B \cup C) = \frac{9}{16}$ , 则  $P(A) =$  \_\_\_\_\_.
2. 设两个相互独立的事件  $A$  和  $B$  都不发生的概率为  $\frac{1}{9}$ ,  $A$  发生  $B$  不发生的概率与  $B$  发生  $A$  不发生的概率相等. 则  $P(A) =$  \_\_\_\_\_.
3. 设随机变量  $X \sim U(-1, 1)$ , 则  $Y = e^X$  的概率密度为  $f_Y(y) =$  \_\_\_\_\_.
4. 设随机变量  $X \sim U[0, 6]$ ,  $Y \sim B\left(12, \frac{1}{4}\right)$ , 且  $X$  与  $Y$  相互独立, 则根据切比雪夫不等式有:  $P(X - 3 < Y < X + 3) \geq$  \_\_\_\_\_.
5. 总体  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ,  $\sigma^2 = 0.04$  抽取容量为 16 的样本, 测得均值 1.416, 若  $\mu$  的置信区间是  $(1.416 - 0.098, 1.416 + 0.098)$ , 则置信度 \_\_\_\_\_.

## 二、选择题 (每小题 3 分, 共 5 小题, 满分 15 分)

(每小题给出的四个选项中, 只有一个是符合题目要求的, 把所选项的字母填在题后的括号内)

1. 设  $A, B, C$  是三个独立的随机事件且  $0 < P(C) < 1$ . 则在下列给定的四对事件中不相互独立的是 ( )  
(A)  $\overline{A \cup B}$  与  $C$ ; (B)  $\overline{BC}$  与  $\overline{C}$ ; (C)  $\overline{A - B}$  与  $\overline{C}$ ; (D)  $\overline{AB}$  与  $\overline{C}$ .
2. 设随机变量  $X$  的概率密度为  $f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$ , 则  $Y = 2X$  的概率密度为 ( )  
(A)  $\frac{1}{\pi(1+4y^2)}$ ; (B)  $\frac{1}{\pi(4+y^2)}$ ; (C)  $\frac{2}{\pi(4+y^2)}$ ; (D)  $\frac{2}{\pi(1+y^2)}$ .
3. 如下四个函数中不是随机变量分布函数的是 ( )  
(A)  $F(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ \frac{1}{2+x^2}, & x < 0 \end{cases}$  (B)  $F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$   
(C)  $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$ , 其中  $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = 1$  (D)  $F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1 - e^{-x}, & x > 0 \end{cases}$

4. 随机变量  $X \sim U(-1,1)$ ,  $Y = X^7$ , 则 ( )

- (A)  $X$  与  $Y$  不相关, 不独立                      (B)  $X$  与  $Y$  相关, 不独立  
(C)  $X$  与  $Y$  不相关, 独立                      (D)  $X$  与  $Y$  相关, 独立

5. 设  $X_1, \dots, X_n$  是总体  $X$  的样本,  $EX = \mu, DX = \sigma^2$ ,  $\bar{X}$  是样本均值,  $S^2$  是样本方差, 则 ( )

- (A)  $\bar{X} \sim N(\mu, \frac{1}{n}\sigma^2)$ ;                      (B)  $S^2$  与  $\bar{X}$  独立;  
(C)  $S^2$  是  $\sigma^2$  的无偏估计;                      (D)  $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$ .

三、(10分) 某炮台上三门炮, 假定第一门炮的命中率为0.4, 第二门炮的命中率为0.3, 第三门炮的命中率为0.5, 今三门炮向同一目标各射一发炮弹. 结果有两弹中靶, 求第一门炮中靶的概率?

四、(10分) 某种商品一周的需求量是一个随机变量, 其概率密度为

$$f(t) = \begin{cases} te^{-t}, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0 \end{cases}$$

设各周的需求量是相互独立的, 试求两周需求量的概率密度.

五、(10分) 设随机变量  $X$  的密度函数  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}, & -2 < x < 0 \\ A, & 1 < x < B \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ ,

分布函数  $F(x)$  在  $x=2$  处的值  $F(2) = \frac{5}{6}$ ,

求 (1)  $A, B$ . (2) 若  $Y = |X|$ , 求  $X, Y$  联合分布函数  $F(x, y)$  在  $(2, 3)$  处的值.

六、(14分) 总体  $X$  密度函数  $f(x) = \begin{cases} \frac{2\theta^2}{(\theta^2 - 1)x^3}, & x \in (1, \theta) \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$

抽取简单随机样本  $X_1, \dots, X_n$ , 求  $\theta$  的矩估计和最大似然估计.

七、(6分) 证明若  $X \sim \chi^2(n)$ , 则  $EX = n$ ,  $DX = 2n$ .