23 秋微积分先修试题解答

一.　选择题

1. 答案：(B)

解析：若$f'(0)$存在，则

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h}f[\ln(1+h)]=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f[0+\ln(1+h)]-f(0)}{\ln(1+h)}=f'(0)$存在；若

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h}f[\ln(1+h)]$存在，则

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}\xlongequal[h=\mathrm{e}^x-1]{x=\ln(1+h)}\lim_{h\to 0}\frac{f[\ln(1+h)]}{\ln(1+h)}=\lim_{h\to 0}\frac{f[\ln(1+h)]}{h}$$

存在.

2. 答案：(D)

解析：

$$f'(-x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(-x+\Delta x)-f(-x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x-\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

$$=-\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x-\Delta x)-f(x)}{-\Delta x}=-f'(x)$$

即$f'(x)$是奇函数.

3. 答案：(C)

解析：

$$\int_0^1 f(ax)\mathrm{d}x\xlongequal{ax=t}\frac{1}{a}\int_0^a f(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{a}\left[F(t)\Big|_0^a\right]=\frac{1}{a}\left[F(a)-F(0)\right].$$

4. 答案：(C)

$$[f(x)g(x)]'\Big|_{x=x_0}=[f'(x)g(x)+f(x)g'(x)]\Big|_{x=x_0}=f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0)=0$$

即x_0是$f(x)g(x)$的驻点.

不妨设$f'(x_0)$, $g'(x_0)>0$，则存在$\delta>0$使得

$x\in(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)$时，$\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, $\dfrac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}>0$. 因此，$\dfrac{f(x)g(x)}{(x-x_0)^2}>0$，$f(x)g(x)>0$. 当$f'(x_0)$, $g'(x_0)<0$时，类似可证. 因此，$f(x_0)g(x_0)=0$是极小值.

5. 答案：(D)

解析：

$$5=\int_0^\pi [f(x)+f''(x)]\sin x\,\mathrm{d}x=\int_0^\pi f(x)\sin x\,\mathrm{d}x+\int_0^\pi f''(x)\sin x\,\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^\pi f(x)\sin x\,\mathrm{d}x+f'(x)\sin x\Big|_0^\pi-\int_0^\pi f'(x)\cos x\,\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^\pi f(x)\sin x\,\mathrm{d}x-\left[f(x)\cos x\Big|_0^\pi+\int_0^\pi f(x)\sin x\,\mathrm{d}x\right]$$

$$=f(\pi)+f(0)=2+f(0)$$

因此，$f(0)=3$.

二． 填空题

6. 答案：2

解析：

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+2+\cdots+k}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{k(k+1)}=2\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$

$$=2\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=2$$

7．答案：$\sqrt[3]{\frac{15}{4}}$

解析：$f(2)-f(1)=f'(\xi)(2-1)$，$16-1=4\xi^3$，$\xi=\sqrt[3]{\frac{15}{4}}$.

8．答案：0

解析：

$$\lim_{x\to 0^+}\ln^2 x\cdot\ln\left(1+\frac{x}{\ln x}\right)=\lim_{x\to 0^+}\ln^2 x\cdot\frac{x}{\ln x}=\lim_{x\to 0^+}x\ln x=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0^+}(-x)=0$$

9．答案：0

解析：

$$y=x^2e^{x^2}=x^2\left(1+x^2+\frac{x^4}{2!}+o(x^4)\right)=x^2+x^4+\frac{1}{2}x^6+o(x^6).$$

因此，$a_5=0$，$y^{(5)}(0)=5!a_5=0$.

10．答案：$\frac{\pi}{4e^2}$

解析：

$$\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^{x+1}+\mathrm{e}^{3-x}}=\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}(\mathrm{e}^x)}{\mathrm{e}^{2x+1}+\mathrm{e}^3}=\frac{1}{\mathrm{e}^2}\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}(\mathrm{e}^{x-1})}{\mathrm{e}^{2(x-1)}+1}$$

$$=\frac{1}{\mathrm{e}^2}\left[\arctan(\mathrm{e}^{x-1})\Big|_1^{+\infty}\right]=\frac{1}{\mathrm{e}^2}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{4\mathrm{e}^2}$$

三．　解答题

11. 解析：当$x\to 0$时，$f(x)\sim -x^2$，$x^n f(x)\sim -x^{n+2}$，

$\ln\cos x^2=\ln(1+\cos x^2-1)\sim\cos x^2-1\sim-\dfrac{1}{2}x^4$，

$\mathrm{e}^{\sin^2 x}-1\sim\sin^2 x\sim x^2$. 因此，$2<n+2<4$，$0<n<2$，$n=1$.

12. 解析：因为$\lim\limits_{x\to 0}g(x)=g(0)=0$，所以

$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}g(x)\sin\dfrac{1}{x}=0=f(0)$，即$f(x)$在$x=0$处连续. 又因

为$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)-g(0)}{x}=g'(0)=0$，所以

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)}{x}\sin\dfrac{1}{x}=0$，即$f(x)$在$x=0$处可导，且

$f'(0)=0$.

13. 解析：因为$f''(x)\neq 0$，所以$f'(x+\theta h)-f'(x)\neq 0$.

$$\lim_{h\to 0}\theta=\lim_{h\to 0}\frac{\theta h}{f'(x+\theta h)-f'(x)}\cdot\frac{f'(x+\theta h)-f'(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\theta h}{f'(x+\theta h)-f'(x)}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{f'(x+\theta h)-f'(x)}{h}$$

$$=\frac{1}{f''(x)}\lim_{h\to 0}\frac{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-f'(x)}{h}=\frac{1}{f''(x)}\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)-f'(x)h}{h^2}$$

$$=\frac{1}{f''(x)}\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{2!}f''(x)h^2+o(h^2)}{h^2}=\frac{1}{f''(x)}\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{2}f''(x)h^2}{h^2}=\frac{1}{2}$$

14. 解析：$\lim\limits_{x\to 0}[f(e^{x^2})-3f(1+\sin x^2)]=\lim\limits_{x\to 0}[2x^2+o(x^2)]$，

$-2f(1)=0$，$f(1)=0$，$f(-1)=f(1)=0$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(e^{x^2})-f(1)+3f(1)-3f(1+\sin x^2)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2x^2+o(x^2)}{x^2}=2.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(e^{x^2})-f(1)+3f(1)-3f(1+\sin x^2)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f(e^{x^2})-f(1)}{x^2}-3\lim_{x\to 0}\frac{f(1+\sin x^2)-f(1)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f(e^{x^2})-f(1)}{e^{x^2}-1}-3\lim_{x\to 0}\frac{f(1+\sin x^2)-f(1)}{\sin x^2}$$

$$=f'(1)-3f'(1)=-2f'(1)=2$$

因此，$f'(1)=-1$，$f'(-1)=-f'(1)=1$. 切线方程为

$y-f(-1)=f'(-1)(x+1)$，$y=x+1$.

15. 解析：(1) 设$F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-\frac{1}{2}x^2$，$F(0)=0$，

$F(1)=\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t-\frac{1}{2}=0$，$F(0)=F(1)$，由罗尔定理可知，存在

$c\in(0,1)$，使得$F'(c)=0$，即$f(c)-c=0$，$f(c)=c$.

(2) 设$G(x)=f(x)-x$，则$G(0)=G(c)=G(1)$，由罗尔定理可知，存在$\eta_1\in(0,c)$，$\eta_2\in(c,1)$使得$G(\eta_i)=0$（$i=1,2$），即$f'(\eta_i)-1=0$. 设$H(x)=\mathrm{e}^x[f'(x)-1]$，则$H(\eta_i)=0$（$i=1,2$），再次由罗尔定理可知，存在$\xi\in(\eta_1,\eta_2)$使得$H'(\xi)=0$，即$\mathrm{e}^{\xi}[f'(\xi)-1]+\mathrm{e}^{\xi}f''(\xi)=0$，$f''(\xi)=1-f'(\xi)$.